АКАДЕМИЯ НАУК СССР

А. П. МАНДРЫКА

БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

А. П. МАНДРЫКА

БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Под редакцией
проф. Б. Н. ОКУНЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва — 1958 — Ленинград

ПРЕДИСЛОВИЕ

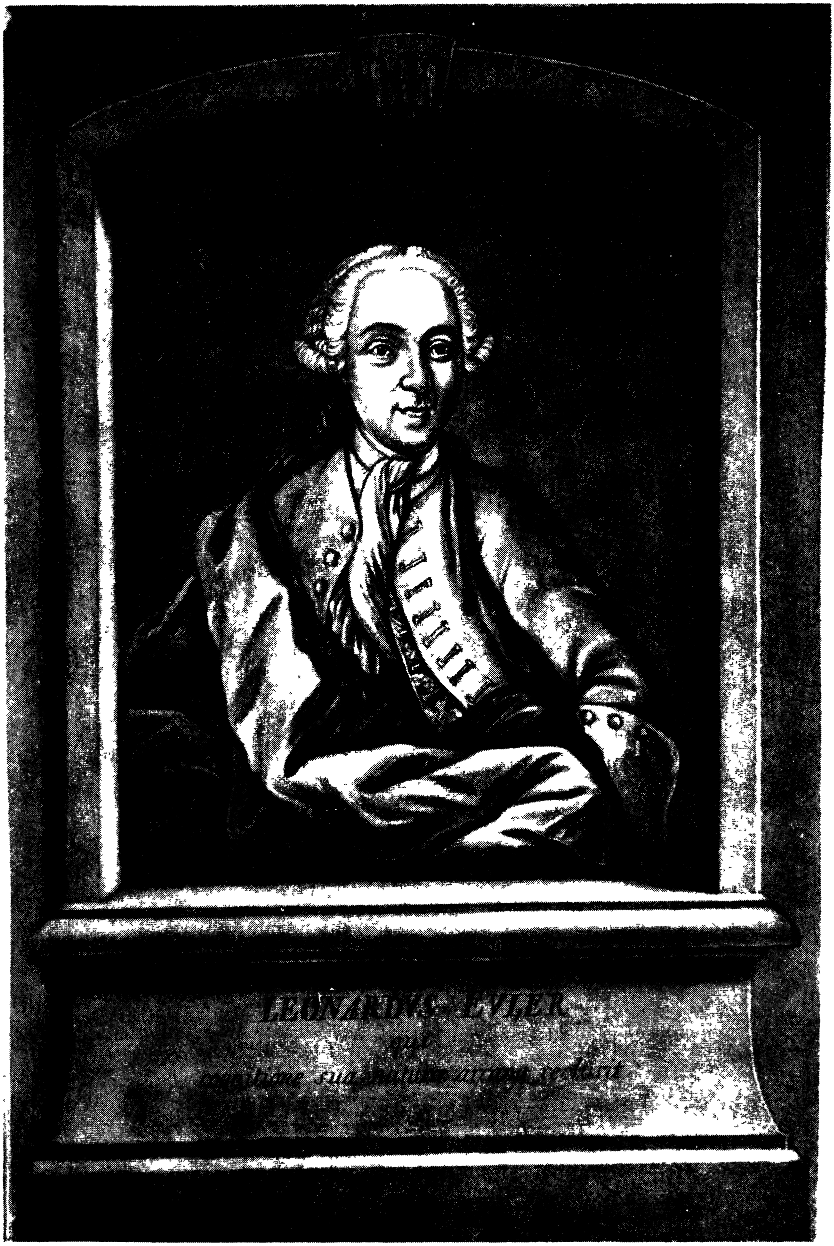
15 апреля 1957 г. исполнилось 250 лет со дня рождения Леонарда Эйлера (1707 — 1783 гг.) — великого математика и механика, крупного физика и выдающегося специалиста в ряде других областей естествознания и техники, научная деятельность которого протекала в Петербурге и Берлине. Эта знаменательная дата была особо отмечена научными кругами и общественностью Советского Союза и Германской Демократической Республики.

Эйлеру принадлежит заслуга создания ряда фундаментальных трудов во многих областях науки и техники. Некоторые из этих работ представляют и поныне научную ценность. В связи с недавно отмеченной юбилейной датой к печати подготовляются отдельные работы Эйлера, его переписка, описание неопубликованных рукописей, хранящихся в Архиве Академии наук СССР, а также специальный сборник о жизни и деятельности великого ученого.

К числу работ, посвященных изысканиям Эйлера в области естествознания, относится и публикуемое издание, в котором сделана попытка выяснить значение трудов Эйлера по баллистике для настоящего времени и установить их место среди исследований ученых XVIII в. Известно, что Эйлеру принадлежит ряд важнейших исследований по баллистике, которые и теперь постоянно упоминаются в курсах и отдельных монографиях по этому предмету. Однако специальной книги, посвященной анализу исследований Эйлера, не имеется. Этот пробел в истории механики необходимо заполнить, тем более, что литература по истории баллистики крайне скудна и, в сущности, ограничивается одним капитальным исследованием П. Шарбонье, опубликованным в 1927 г.

В основу настоящей работы были положены опубликованные труды Эйлера по важнейшим проблемам баллистики и мемуары его современников. Переписка Эйлера использована лишь частично. В дальнейшем автор ставит себе целью пополнить книгу материалами еще не изученных рукописных работ Эйлера по баллистике, которых, впрочем, немного, шире использовать его эпистолярное наследие и привлечь мемуары Эйлера в смежных с баллистикой областях естествознания.

Предлагаемая книга состоит из трех частей: первая часть посвящена общей характеристике работ Эйлера по баллистике, во второй разобраны его исследования по внешней баллистике, а в третьей — по внутренней. В конце книги прилагается указатель личных имен.


LEONARDVS EVLER
qui

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТ ЭЙЛЕРА ПО БАЛЛИСТИКЕ

Совершенствование материальной части артиллерии и достижения в способах ее боевого использования являются основными факторами, которые обусловливают развитие артиллерийской науки. К XVIII в. в результате перехода от цехового способа производства к мануфактурному были созданы предпосылки для проведения в жизнь технических усовершенствований, назревших в артиллерии. Унификация калибров, внедрение железных лафетов и более надежных подъемных механизмов, разработка приборов наводки и, наконец, конструирование орудий со значительной начальной скоростью снаряда и имеющих возможность вести стрельбу под большими углами возвышения — таковы направления, в которых проводились преобразования в течение всего XVIII в. Реформы Петра I и генерал-фельдцейхмейстера П. И. Шувалова в России, Вальера и Грибоваля во Франции, Фридриха II в Пруссии имели целью разрешить перечисленные задачи. Одновременно с усовершенствованием материальной части развивалась и артиллерийская наука, в первую очередь баллистика. Разработка этой дисциплины должна была создать теоретический фундамент для решения задач стрельбы и конструирования орудий. К концу XVIII в. внедряются в артиллерийскую практику таблицы стрельбы, вычисленные с учетом действия на снаряд силы сопротивления воздуха. Для построения таблиц было необходимо установить закон сопротивления воздуха движению снаряда, а главное создать простой и надежный метод вычисления его траектории. Решение этих проблем входило в круг вопросов, изучаемых внешней баллистикой. Теоретическое определение дульной скорости, выбор наивыгоднейшего веса заряда и рациональной длины канала ствола, определение толщины его стен и формы каморы входили в круг вопросов, изучаемых внутренней баллистикой. Таковы были стоявшие перед баллистикой задачи, выдвинутые в результате развития артиллерии за предшествующий период, о котором Фридрих Энгельс писал: „Конец XVII и начало XVIII столетия были периодом, когда артиллерия в большинстве стран была окончательно введена в состав армий, лишена своего средневекового цехового характера, признана особым родом войск и благодаря всему этому сделалась способной к нормальному и быстрому развитию. Результатом был почти немедленный и весьма заметный прогресс. Стали очевидными беспорядочность и разнообразие калибров и моделей, неопределенность всех существующих эмпирических правил, полное отсутствие прочно установленных принципов; все это терпеть далее стало невозможным. Ввиду этого всюду стали производить в широких размерах опыты с целью выяснить действие калибров, отношение калибра к заряду, к длине и весу пушки, распределение металла в пушке, дальность выстрела, действие отдачи на лафеты и т. п... Результатом явилось большое упрощение калибров, лучшее распределение металла в пушке и очень заметное уменьшение заряда, который теперь достигал от 1/3 до 1/2 веса снарядов".[1]

В XVIII в. баллистика развивалась на основе широкого экспериментирования. Эта область артиллерийской науки получает достаточно солидную по тому времени экспериментальную базу после того, как в 1740 г. английский артиллерист Бенджамен Робинс сконструировал баллистический маятник и поставил первые систематические опыты по определению скоростей ружейных пуль. В дальнейшем специальным артиллерийским опытам с баллистическим маятником уделялось все большее внимание. Число опытов увеличивается с одновременным расширением их объема. Наиболее ценными по своим результатам являлись опыты известного французского артиллериста Д'Арси. В 1775 г. английский профессор Хэттон сконструировал баллистический маятник, с помощью которого можно определять скорости снарядов при стрельбе из орудий небольшого калибра. Хэттон поставил опыты по определению закона сопротивления воздуха движению артиллерийских снарядов. В их задачу входило также разрешить и некоторые вопросы, имевшие важное значение для внутренней баллистики. Эксперименты Робинса, Д'Арси и Хэттона сыграли большую роль в развитии баллистики и получили широкую известность в Западной Европе. В России с этими опы-

---

[1] Ф. Энгельс. Артиллерия. Избранные военные произведения, т. 1. М., 1940, стр. 214.

тами познакомились в самом начале XIX в. Председатель Ученого комитета по артиллерийской части И. Г. Гогель писал: „Наконец появились Робинс, Д'Арси, Гуттон, и новые опыты не над дальностью полетов ядер, а над получаемою оными при вылете из орудия начальною скоростью движения, помрачили все открытия прежних артиллеристов.

Исследование сей начальной скорости движения из орудия выстреленного ядра и покорение оной математическому вычислению возвело артиллерийскую науку на нынешнюю ее степень совершенства. Опыты, Гуттоном по сему предмету деланные, довершили освобождение артиллерии от остававшихся еще во оной некоторых ложных правил".[1]

В XVIII в. изыскания в области внешней баллистики сосредоточиваются на решении ее основной задачи[2] в предположении квадратичного закона сопротивления воздуха. Работы в этом направлении базируются на аналитических, а несколько позднее на численных методах исследования. Над решением этой задачи наравне с такими крупными учеными, как Иоганн Бернулли, Борда, Ламберт, Лежандр, работал и Леонард Эйлер, которому принадлежат исследования, сыгравшие наиболее существенную роль в развитии внешней баллистики. Важные результаты были получены Эйлером и в области внутренней баллистики.

Эйлер занимался вопросами баллистики на протяжении почти 45 лет, начиная с 1727—1728 гг. и кончая 1771 г. Ему принадлежит всего пять работ в этой области, однако эти исследования не исчерпывают работ Эйлера, связанных с решением задач внешней и внутренней баллистики. Достаточно сказать, что его работы по физике, в частности мемуар 1729 г.,[3] посвященный изучению упругости воздуха, были им использованы при определении „упругой силы" пороха и разработке теории обтекания твердого тела идеальной сжимаемой жидкостью. Капитальный труд Эйлера 1765 г. по динамике твердого тела[4] по-

---

[1] И.Г. Гогель. О неосновательности способа испытывать и сравнивать действия орудий посредством дальности полетов их выстрелов. Арт. журн., 1809, № 4, стр. 2—3.

[2] Под основной задачей внешней баллистики понимается та, целью которой является определение траектории материальной точки, движущейся под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха, направленной в сторону, противоположную вектору скорости.

[3] L. Euler. Tentamen explicationis phaenomenorum aeris. Comm. Ac. Sc. Petrop., t. 2, 1729.

[4] L. Euler. 1) Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in huiusmodi corpore cadere possunt accomodata. Rostok—Greifswald, 1765; 2) Opera omnia, Series secunda, tt. III, IV.

служил фундаментом, на котором в середине XIX в. разрабатывалась теория движения вращающегося продолговатого снаряда. Вообще в своих изысканиях в этой области Эйлер широко применял достижения математики и механики, принадлежавшие ему самому или его современникам. С другой стороны, специальные баллистические исследования Эйлера часто использовались им при решении задач механики. Так, например, построенная им в 1745 г. теория баллистического маятника, признанная теперь классической, была использована в его многочисленных работах, посвященных теории маятника.

Первое исследование Эйлера по баллистике выполнено им в связи с опытами, проводившимися в 1727 г. в Петербурге Даниилом Бернулли, изучавшим движение выброшенного вертикально вверх сферического снаряда. Эйлер подверг результаты опытов Бернулли математической обработке и, пользуясь квадратичным законом сопротивления воздуха, вычислил высоту полета снаряда и время, которое он затрачивает раздельно на подъем и падение. Мемуар[1] Эйлера был впервые опубликован в 1862 г. под заглавием „Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta" („Размышления по поводу недавно предпринятых опытов стрельбы из орудия"). Основываясь на слове „недавно" (nuper), стоящем в заглавии мемуара, Шеррер — редактор XIV тома полного собрания сочинений Эйлера „Opera omnia", в котором сосредоточены все его исследования по баллистике, датирует работу 1727 или 1728 г. Приводимый Шеррером довод говорит лишь о том, что работа была подготовлена Эйлером в ближайшие годы после проведения петербургских опытов.

Решению основной задачи внешней баллистики при законе сопротивления, выраженном одночленной формулой, посвящен раздел его труда по механике,[2] опубликованного в 1736 г. в Петербурге под заглавием „Mechanica sive motus analytica exposita" („Механика или наука о движении, изложенная аналитически". В шестой главе „Do motu curviline puncti liberi in medio resistente" („О свободном криволинейном движении точки в сопротивляющейся среде") Эйлер дал развернутое решение основной задачи, придерживаясь метода, предложенного Иоганном Бернулли в 1719 г.

[1] L. Euler 1) Opera postuma, t. 2, 1862, стр. 800—804; 2) Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 468—478.

[2] Механика Эйлера издавалась дважды. В 1748 г. она была опубликована на немецком языке под заглавием „Mechanik oder analytische Darstellung der Wissenschaft von der Bewegung mit Anmerkungen und Erläuterungen", а затем, в 1912 г., составила I и II тома второй серии издаваемого в Швейцарии полного собрания сочинений Эйлера „Opera omnia".

В 1742 г. в Лондоне вышла в свет книга Бенджамена Робинса „New principles of gunnery“,[1] которая сразу же привлекла внимание широких кругов ученых-артиллеристов Европы. Эйлер перевел труд Робинса на немецкий язык и снабдил его многочисленными и чрезвычайно ценными добавлениями. Перевод „New principles of gunnery“ занимает 720 страниц, не считая вводной статьи, причем добавления Эйлера по объему в 5 раз превосходят текст Робинса. В сущности, книга Эйлера „Neue Grundsätze der Artillerie“,[2] вышедшая в свет в 1745 г., является его самостоятельным исследованием, в котором он строит собственную теорию движения снаряда в воздухе и канале ствола орудия.

Эйлер видел ценность книги Робинса в ее экспериментальной части, базирующейся на материале опытов, проведенных с помощью баллистического маятника. Изобретение баллистического маятника, по мнению Эйлера, являлось самым крупным открытием XVIII в. в артиллерии: „Метод, который описывает автор для нахождения скорости пули посредством опыта, является, без сомнения, одним из наиболее остроумных и полезных изобретений в артиллерии. Все, что практиковалось до этого времени, давало ложные и всегда недостоверные результаты“.[3]

Приступая к переводу книги Робинса, Эйлер писал: „...так как изыскания, относящиеся к практике, требуют большого числа опытов и вследствие того, что я не имею возможности предпринять подобную работу, я думаю, что не смогу лучше удовлетворить своему желанию, как обратившись к изучению недавно вышедшей в свет английской книги по артиллерии. Автор по имени Робинс после проведения большого числа экспериментов очень удачно вывел с помощью анализа бесконечно малых как силу пушечного пороха, так и истинную скорость, с какой выбрасываются ядра, так же как и их движение под замедляющим действием сопротивления воздуха.

„Вследствие того что эти изыскания могут много способствовать усовершенствованию артиллерии, в особенности, если приложить усилия для их лучшего развития и полностью рас-

---

[1] B. Robins. New principles of gunnery containing the determination of the force of gunpowder and investigation of the difference in the resisting power of the air to swift and slow motions. London, 1742.

[2] L. Euler. Neue Grundsätze der Artillerie enthaltend die Bestimmung der Gewald der Pulvers nebst einer Untersuchung über den Unterscheid des Widerstands der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen, aus dem Englischen des Hrn. Benjamin Robins übersetzt und mit den nöthigen Erläuterungen und mit vielen Anmerkungen versehen. Berlin, 1745.

[3] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 100.

крыть их содержание, я считаю, что общество может извлечь большую пользу, если бы я предпринял перевод этого труда, который получил всеобщее признание, и добавил необходимые пояснения, чтоб сделать ее более доступной для тех, кто занимается этим предметом, так и замечания, способные внести дальнейшее усовершенствование в этот вопрос.“ [1]

Труд Робинса „New principles of gunnery“ состоит из двух глав, первая из которых посвящена вопросам внутренней, а вторая — внешней баллистики. В добавлениях к „Предложениям“, из которых состоят главы, Эйлер рассматривает соответственно вопросы, связанные с движением снаряда в канале ствола орудия и в воздухе.

С большой осторожностью Эйлер подходил к интерпретации опытных данных: „Никогда он (Эйлер, — *А. М.*) не подвергал сомнению опытный результат, — пишет Шарбонье, — он ищет его объяснения. Теория имеет для него значение только тогда, когда она совершенно согласуется с фактами“. [2]

Крупный специалист по внешней и внутренней баллистике первой четверти настоящего столетия и одновременно автор единственной в мире капитальной работы по истории названных областей артиллерийской науки, Шарбонье справедливо связывает зарождение экспериментальной баллистики с появлением баллистического маятника. Но одно изобретение прибора не могло поставить развитие экспериментальной баллистики на тот верный путь, по которому осуществлялся ее прогресс уже во второй половине XVIII в. Начало эффективного использования этого нового орудия эксперимента было положено Эйлером в 1-м и 2-м добавлениях к 6-му Предложению первой главы книги Робинса.

На базе поставленных с помощью баллистического маятника опытов Робинс изучал движение снаряда в канале ствола и в воздухе. Однако ему не удалось дать строгий и вполне безупречный метод экспериментального определения скоростей. Методика, которой он пользовался, не учитывала многих обстоятельств, влияющих на точность получаемого результата. В частности, его формула была пригодна только для тех случаев, когда пули попадают в центр удара баллистического маятника. Робинс не вводил в формулу никаких поправок при несовпадении точек попадания с этим центром, что чаще всего

---

[1] Письмо Эйлера Фридриху II от 1742 г. (Архив АН СССР, фонд 136, оп. 2, № 9, л. 61).

[2] P. Charbonnier. Essais sur l'histoire de la Balistique. Mémorial de l'artillerie française, t. VI, 1927, стр. 1092.

имело место в его опытах. Это обстоятельство приводило к тому, что определяемые Робинсом скорости сильно отклонялись от их действительных значений и погрешность в их величине достигала 25% измеряемой скорости.

Эйлер изучил работу баллистического маятника и провел тщательный анализ методики, которой пользовался Робинс. Эйлер создал первую классическую теорию баллистического маятника, установив надежную формулу для определения скоростей пуль и предложив вполне строгую методику проведения экспериментов с помощью этого прибора. В области экспериментальной баллистики Эйлер серьезно содействовал прогрессу артиллерийской науки и открыл путь к анализу явлений, происходящих при движении ядра в канале ствола и в воздухе, опираясь на тщательно обработанный опытный материал. Сказанное позволяет правильно подойти к оценке значения теоретических исследований Эйлера по баллистике, освещенных в последующих двух частях настоящей работы.

Уместно остановиться еще на одном вопросе, затронутом Робинсом и Эйлером и вызвавшем ошибочное толкование в западноевропейской специальной литературе. Здесь имеется в виду точка зрения обоих ученых на нарезное оружие и сложившееся неверное представление о том, что якобы Эйлер затормозил развитие нового вида оружия на сто лет.

Например, автор статьи „Les canons rayés en 1742“ отмечает: „Все артиллеристы знают имя баллистика Робинса, который уже в первой половине XVIII века отстаивал достоинства нарезных орудий. Робинс вел даже по этому вопросу довольно длительный спор с математиком Эйлером, но, разумеется, он не мог одержать верх над своим знаменитым противником. Нарезные орудия были осуждены в принципе, и потребовалось более столетия, чтобы их дело, проигранное с самого начала, было выиграно в результате последнего усилия“.[1]

Эту же точку зрения разделял и французский артиллерист Груар, который в 1875 г. писал: „Случилось то, что часто бывает с теми, кто намного превосходит своих современников. Робинс не был понят, и были приняты идеи Эйлера благодаря его большому научному имени. Развитие баллистики было задержано на сто лет. Тридцать лет тому назад по этому вопросу знали меньше, чем Робинс, и теперь еще имеются последователи Эйлера“.[2]

---

[1] Revue d'Artillerie, 1909—1910, t. LXXV, стр. 231.

[2] Grouard. Recherches théoriques sur la résistance de l'air au mouvement des projectiles. Paris, 1875, стр. 4.

Истину о взглядах Эйлера на нарезное оружие установил Шарбонье в 1927 г. К доводам французского баллистика трудно что-либо добавить, и остается лишь вкратце изложить приводимые им факты.

Известные работы Робинса и Эйлера не подтверждают якобы происходившего между ними длительного спора о нарезном оружии. Эйлер высказывается по этому вопросу всего один раз в добавлениях к 7-му Предложению второй главы книги „Neue Grundsätze der Artillerie". Робинс писал о нарезном оружии только в 1759 г. в работе, обнаруженной после его смерти и изданной в 1761 г. Мемуар вошел в сборник его работ, опубликованный Дюпюи[1] в 1771 г. Возможно, что это исследование и было известно Эйлеру. Однако его интересы после 1753 г. сосредоточились на решении других проблем, не связанных с артиллерией, почему в его творчестве не нашли отклика соображения о нарезном оружии, приводимые Робинсом. Стало быть ни о каком длительном споре между Эйлером и Робинсом не может быть и речи.

Единственный вопрос, вызвавший полемику между ними, заключался в объяснении причин отклонения сферических пуль в боковом направлении, так называемой девиации. В 1742 г. Робинс считал, что такие отклонения обусловлены действием силы сопротивления воздуха и вращательным движением пули. В 1749 г. он доложил результаты своих новых опытов Лондонскому Королевскому обществу. Эксперименты помогли ему раскрыть физическую сущность наблюдаемого явления и привели Робинса к выводу, что пули приобретают вращение при их движении по каналу ствола, причем направление вращения пуль меняется от выстрела к выстрелу и зависит от множества случайных обстоятельств. Сила же, отклоняющая пулю в боковом направлении, обусловлена действием сопротивления воздуха и движением центра массы пули с одновременным вращением вокруг него. Иными словами, Робинс правильно считал, что девиация пуль вызывается действием силы, известной теперь под наименованием „силы Магнуса". По мнению Эйлера, боковое отклонение сферических снарядов и пуль является следствием их неправильной формы. Такие факторы, согласно точки зрения Эйлера, как вращательное движение сферического снаряда или пули или несовпадение центра массы с центром

---

[1] B. Robins. Traité de mathématiques. Les Nouveaux Principes d'Artillerie, suivis de plisieurs Discours qui leur servent de supplément, que M. Wilson, son éditeur a inseré dans cet ouvrage. Traduit de l'anglais par M. Dupuy fils. Grenoble, 1771.

симметрии не могут вызывать девиации: первое обстоятельство вообще не имеет места при движении снаряда в воздухе, а второе не может повлечь за собой боковых отклонений, так как вскоре после вылета сферического снаряда с эксцентриситетом из канала ствола он начинает двигаться центром тяжести вперед. При объяснении причин, вызывающих девиацию, доводы Эйлера значительно расходятся с теорией Робинса, которая весьма близка к действительности.

В вопросе о преимуществе нарезного оружия перед гладкостенным мнения Эйлера и Робинса сходились. Оба они видели превосходство нарезного канала ствола в том, что при движении по нему сферическому снаряду или пуле придается постоянное по направлению вращение. В результате устраняются причины, вызывающие случайные боковые отклонения, которые наблюдаются при стрельбе из оружия с гладким каналом. Являясь сторонниками нарезного оружия, Эйлер и Робинс видели его преимущество в совершенно других факторах, чем ученые середины XIX в. В этот критический для развития артиллерии период, когда на смену гладкостенным орудиям пришли нарезные, одновременно на вооружение были приняты продолговатые снаряды. Новый тип снаряда обладал большей поперечной нагрузкой сравнительно со сферическим, что увеличивало дальность стрельбы. Нарезы в канале ствола придавали снаряду вращательное движение, обеспечивая ему тем самым правильное движение в воздухе. В сочетании использования продолговатого снаряда с нарезным каналом и заключается преимущество нарезной артиллерии перед гладкостенной.

Вышедший в свет в 1745 г. труд Эйлера сразу же привлек внимание артиллеристов Западной Европы. Один из ближайших учеников Эйлера, непременный секретарь Петербургской Академии наук Н. И. Фусс, так писал о впечатлении, какое произвела эта работа на ученых мира, об истории создания книги и дальнейшей ее судьбе: „В том же году король [Фридрих II] спросил мнение Эйлера о лучшем труде по артиллерии. В Англии появилось сочинение о принципах артиллерии, автором которого был тот самый Робинс, который проявил неуважение к Эйлеру, некорректно критикуя его „Механику“, которой не понимал. Эйлер с похвалой отозвался королю об этом труде (Робинса, — *А. М.*), который он взялся перевести с присоединением своих добавлений и необходимых разъяснений. Эти добавления содержат полную теорию движения артиллерийских снарядов. В течение 38 лет не появилось ничего, что бы превосходило выполненного тогда Эйлером в этой сложной области физико-математических наук. Важность этого прекрасного сочинения была признана всеми. Просвещенный министр Тюрго распорядился перевести его на французский язык и ввести в артиллерийские школы. Почти в это же время появился и английский перевод в таком великолепном издании, какое только было доступно для типографского дела того времени. Отдавая в этом сочинении должное заслуге Робинса, Эйлер скромно выявил его ошибки в отношении теории и отомстил своему противнику за давнишние обиды, придав его труду то значение, которое оно никогда бы не приобрело без него. Я воздерживаюсь от каких бы то ни было рассуждений о благородстве этого поступка, достойного великого человека. Кто может ему отказать в восхищении?"[1]

Французскому артиллеристу Ломбару книга Эйлера стала известна в 1748 г. Через три года Ломбар закончил ее перевод, который опубликовал в 1783 г.[2] Приблизительно в то же время, а именно в 1777 г., немецкое издание книги было переведено Брауном на английский язык[3] и опубликовано одновременно с работой Эйлера 1753 г. Спустя почти 175 лет после выхода в свет труда Эйлера он был переиздан в Швейцарии.[4]

Добавления Эйлера сильно подняли научную ценность книги Робинса, и именно они привели к тому необыкновенному распространению, какое этот труд получил в странах Западной Европы. Книга, как это уже видно из высказывания Н.И. Фусса, была принята в качестве учебного пособия в артиллерийских школах Франции.

Вскоре после появления в свет труд Эйлера стал известен ряду крупных ученых Европы. Эйлер преподнес экземпляры своей книги Иоганну Бернулли, сыгравшему большую роль в его математическом образовании, и его сыну Даниилу Бернулли, работавшему одно время вместе с Эйлером в Петер-

---

[1] Eloge de Léonard Euler, prononcé en français, par Nicolas Fuss, devant l'Académie Impériale de St.-Petersbourg en séance solenelle. Oeuvres complètes en français de L. Euler. Lettres à une Princesse allemande, t I. Bruxelles, 1839, стр. 18.

[2] Nouveaux principes d'Artillerie par B. Robins, commentés par M.Léonard Euler, traduit de l'allemand avec des notes, par M. Lombard. Paris, 1783.

[3] L. Euler. The true principles of gunnery investigated and explained. Comprehending translations of professor Eulers observations upon the new principles of gunnery, publiched by the late Mr. Benjamin Robins and that celebrated autors. Discourse upon the track discribed by a body in a resisting medium, inserted in the memoirs of fhe Royal academy of Berlin of fhe year 1753. Longon, 1777.

[4] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 3—409.

бургской Академии наук, а позднее состоявшему с ним в постоянной переписке. Мнения Иоганна и Даниила Бернулли тем более ценны, что оба они занимались баллистикой, являясь в разработке некоторых ее вопросов непосредственными предшественниками Эйлера.

7 сентября 1745 г. Даниил Бернулли писал Эйлеру из Базеля: „Выражаю Вам сердечную благодарность за Ваш прекрасный подарок. Трактат Робинса, заключающий важные пояснения и глубокомысленные замечания просмотрел с особенным удовольствием. За доброжелательные и почтительные упоминания, которые Вы делаете обо мне в различных местах, приношу я также покорнейшую благодарность. Вашему успеху и признанию воздаю хвалу на весь свет“.[1]

Иоганн Бернулли в следующих словах сообщал Эйлеру в письме от 23 сентября 1745 г. о полученной им в дар книге: „...недавно я получил любезно присланные тобой два трактата, один о пушках и о силе пороха и другой, содержащий теорию движения планет и комет; за этот двойной подарок глубоко тебе благодарен. Первую из этих книг я уже почти всю прочитал, однако полностью положился на правильность твоих вычислений, а сам их не проверял, ибо многие мне показались слишком сложными“.[2]

Среди отзывов ученых, творчество которых сосредоточилось в основном на разработке вопросов артиллерийской науки, т. е. специально интересовавшихся изучением проблем внешней и внутренней баллистики, наиболее развернутую оценку работы Эйлера дал Ломбар в предисловии к опубликованному в 1783 г. французскому переводу „Neue Grundsätze der Artillerie“: „Важность содержащихся в книге изысканий побудила перевести ее на многие языки. Сам знаменитый Эйлер, сочтя ее достойной внимания, включился в число переводчиков. Но не удовлетворившись ознакомлением прусской артиллерии только с простым переводом книги, он обогатил ее весьма учеными и обширными комментариями, в которых развивает теорию английского ученого, прилагает ее к расчетам, в некоторых отношениях исправляет ее и распространяет на все вопросы этой теории ту необыкновенную ясность, которая характеризует все его творения. Нет необходимости особенно подробно останавливаться на достоинствах этих комментариев. Имя автора достаточно, чтобы дать представление

---

1 P. Fuss. Correspondance mathématique et physique, t. III. St.-Pétersburg, 1843, стр. 579.

2 Там же, стр. 88—91.

об их ценности и о трудностях, которые он преодолел, комментируя английскую книгу".[1]

Трудом Эйлера широко пользовались ученые и в последующие годы. Содержащиеся в книге результаты по внешней и внутренней баллистике уже в XVIII в. нашли широкое практическое приложение. Некоторые исследования были использованы в дальнейшем на более высоком этапе развития баллистики.

Наиболее выдающихся результатов по баллистике Эйлер достиг в мемуаре, представленном Берлинской Академии наук в 1753 г. и через два года опубликованном[2] в мемуарах Академии под наименованием „Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jetés dans l'air ou dans un fluide quelconque".

Этот небольшой по объему труд Эйлера имел для развития внешней баллистики первостепенное значение. После изысканий, проводившихся многими крупными учеными мира почти в течение века, Эйлеру удалось найти решение, удовлетворявшее запросам практики. Уже через десять лет после выхода в свет его работы она была использована для составления специальных таблиц, которые были вычислены в 1764 г. офицером прусской артиллерии Гревеницем.

Вместе с Иоганном Бернулли Эйлер открыл направление в решении основной задачи внешней баллистики на базе аналитического метода. О сложности проблемы можно судить по приводимым ниже словам профессора математики университета в Ростоке Карстена, состоявшего в переписке с Эйлером в связи с работой Гревеница по составлению таблиц.[3]

„Сам господин Эйлер, — писал Карстен, — изложив в своей «Механике» (гл. 6, § 107) полное решение проблемы, добавляет следующее печальное размышление: «Из предыдущего видно, что построение истинной траектории настолько сложно, что едва ли возможно вывести из него что-либо полезное для приложений как в теории, так и в практике». Позднее великий геометр снова высказывается в том же смысле по этому предмету в 3-м добавлении к 6-му Предложению второй

---

[1] Nouveaux principes d'artillerie par B. Robins, commentés par M. Léonard Euler, traduit de l'allemand par M. Lombard. Paris, 1783, Préface, стр. 4.

[2] L. Euler. Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles lettres, t. IX, Berlin, 1755, стр. 321; 2) Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 419—448.

[3] Письма датированы 29 января и 29 марта 1764 г. (ААН СССР, фонд 136, оп. 2, № 4, стр. 330, 331 и 341—343).

главы «Новых принципов артиллерии» г. Робинса. Тем не менее этому великому гению было дано в конце концов восторжествовать над всеми трудностями вопроса. Благодаря его глубоким знаниям, благодаря его необыкновенному умению владеть интегральным исчислением, которое ему уже послужило при решении самых сложных дифференциальных уравнений, мы пользуемся теперь плодами его усилий, ценными результатами, помещенными в сборнике Берлинской Академии“.[1]

Мемуар „De ictu glandium contra tabula explosarum („Об ударе пуль при стрельбе по доске“) был представлен конференции Петербургской Академии наук 14 марта 1771 г. и помещен в одном из номеров ее „Комментариев“.[2] Работа посвящена исследованию вопроса о проникновении пули в доску и находится в стороне от общего направления работ Эйлера в области артиллерийской науки.

Эйлер решает задачу об углублении пули в твердую среду для двух случаев, когда доска неподвижна или может перемещаться в горизонтальном направлении. Сопротивление среды движению пули он принимает зависящим от величины ее углубления в материал и от квадрата скорости пули. При решении задачи Эйлер весьма изящно пользуется уравнениями движения, представляемыми им через вторую производную от координаты по времени. Одновременно он дает решение с помощью уравнения сохранения количества движения для системы материальных точек и уравнения живых сил. Мемуар не мог иметь непосредственного практического значения, так как коэффициенты, входящие в выведенные им зависимости, были неизвестны. Исследование Эйлера представляет несомненный интерес для механики и любопытно с точки зрения того, как он подходил к решению задачи о движении материальной точки в сопротивляющейся среде в своем последнем по времени исследовании в области артиллерийской науки.

Анализ исследований Эйлера по баллистике, а также оценка значения этих трудов его современниками и учеными, занимавшимися теми же проблемами позднее, будут приведены в по-

---

[1] H. F. Graewenitz. Akademische Abhandlung von der Bahn der Geschützkugeln nebst practischen Tabellen und Rege.n die Schussweiten zu finden. Rostok, 1764. Цитируется из предисловия Карстена, помещенного Риффелем, в переводе на французский язык, вместе с работой Гревеница в „Journal des armes specia.es“ (1844, t. V, стр. 6).

[2] Nuovo Gommentarii, t. XV, 1771, стр. 414—436; 2) Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр.448—468.

следующих разделах настоящей книги. В вводной части дана лишь общая характеристика трудов Эйлера по баллистике, для развития которой они имели первостепенное значение. Одна из его основных заслуг заключалась в постановке решения задач внешней и внутренней баллистики на те строгие математические начала, на которых базировалось последующее развитие этих важнейших дисциплин артиллерийской науки. Именно Эйлеру принадлежит честь широкого применения при решении прикладных задач, какие ставит перед собой баллистика, приближенных методов решения, основанных на использовании рядов и новейшего математического аппарата — дифференциального и интегрального исчислений в их аналитической форме.

1. ВОПРОСЫ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ В ТРУДАХ ЭЙЛЕРА

§ 10. МЕТОД БЕРНУЛЛИ — ЭЙЛЕРА 1719—1736 гг. РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ [1]

Задолго до того как был установлен первый математический закон сопротивления воздуха, повседневная артиллерийская практика выявила, что истинная траектория артиллерийского снаряда не является параболой. Это было замечено сначала простым наблюдением за полетом выброшенных под углом к горизонту твердых тел, в частности стрел и бомб. В 1674 г. английский артиллерист Андерсон,[2] основываясь на изучении результатов стрельбы из орудий, пришел к заключению о том, что траектория несколько отличается от параболической. Это не помешало ему принять теорию Галилея. Вплоть до конца XVII в. не сложилось еще твердого мнения о том, что отклонение истинной траектории от параболической связано с действием силы сопротивления воздуха. В 1687 г. Ньютон установил, что сопротивление воздуха движению твердых тел возрастает пропорционально квадрату скорости, и первым попытался вычислить на основе этого закона траекторию снаряда.

---

[1] Настоящая книга построена по десятичной системе, нередко применяющейся в математических работах. Порядковый номер глав определяется однозначным числом, параграфы — двузначным, причем первая цифра означает главу, в состав которой данный параграф входит, и, наконец, формулы обозначены трехзначным числом, две первые цифры которого указывают главу и параграф, включающие данную формулу. Так, например, формула за № 218 показывает, что это — восьмая формула первого параграфа второй главы.

[2] R. Anderson. Art of gunnery. London, 1674.

К началу XVIII в. стало вполне очевидным, что для больших скоростей, какими обладают пушечные ядра, параболическая теория не соответствует действительности. Тем не менее в течение всей первой половины XVIII в. эта теория продолжала господствовать в артиллерийской практике и не вышла из употребления и в дальнейшем. Жизненность параболической теории определялась тем, что ею пользовались при стрельбе под большими углами возвышения из мортир и гаубиц. Начальные же скорости для этих орудий были невелики, поэтому истинная траектория снаряда отличалась от параболической сравнительно немного. Кроме того, наибольшие отклонения точек падения перекрывали разность между дальностью для средней траектории и вычисленной по теории Галилея. Стало быть, в рассматриваемый период для практики еще не требовалось вычислять траекторию материальной точки с учетом действия на снаряд силы сопротивления воздуха. Задача привлекала внимание с точки зрения сложности ее математического решения.

Кроме Ньютона, теория движения артиллерийского снаряда, рассматриваемого как материальная точка, перемещающаяся под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха, интересовала и других крупных ученых. Ею занимались Лейбниц (1689 г.), Гюйгенс (1690 г.), Вариньон (1707—1710 гг.), Тейлор (1715 г.) и Германн (1716 г.).

Ньютон и Гюйгенс разрешили на основе употреблявшегося в то время геометрического метода следующие задачи: изучили движение материальной точки по вертикальной и горизонтальной прямым для закона сопротивления, выраженного одночленной линейной зависимостью, для формулы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости, и для закона, представленного двучленом, один член которого пропорционален первой степени скорости, а другой — квадрату скорости; нашли движение материальной точки по криволинейной траектории при одночленном законе сопротивления, пропорционального первой степени скорости, т. е. решили основную задачу внешней баллистики на основе линейного закона. В аналитической форме эти результаты были изложены Вариньоном. Определить траекторию материальной точки на основе квадратичного закона сопротивления Ньютону не удалось. Он приступил к решению обратной задачи внешней баллистики — установлению закона сопротивления по заданной траектории. Ньютон решал ее, выбирая в качестве траектории дугу окружности, параболы или гиперболы. Не считая уже хорошо разработанной параболической теории, этим и ограничивались вопросы внешней баллистики, которые были изучены к началу XVIII в.

После Ньютона решить основную задачу внешней баллистики на основе квадратичного закона сопротивления воздуха пытались Тейлор и Германн. Наиболее полно задача была решена Иоганном Бернулли в 1719 г., об ее сложности писал впоследствии Шарбонье: „Теорема Даламбера, которая делает таким легким представление в виде уравнения проблемы динамики, не была известна. Установить дифференциальное уравнение траектории являлось первой и не наименьшей трудностью, которую следовало преодолеть. Иоганн Бернулли имел в своем распоряжении лишь теоремы Гюйгенса о составляющих силы в некоторой точке кривой, теоремы, которые, в частности, вводили радиус кривизны траектории“.[1]

Теоремы Гюйгенса дали Бернулли возможность составить дифференциальное уравнение, правда довольно громоздкое и включавшее несколько переменных. Для того чтобы свести уравнение к более простому виду, требовалось большое мастерство во владении аналитическим методом исследования. Это затруднение Бернулли сумел блестяще преодолеть. Им было получено уравнение годографа, на интегрировании которого основывалась в дальнейшем бо́льшая часть методов решения основной задачи внешней баллистики.

Поводом для Иоганна Бернулли к разработке метода вычисления траектории материальной точки при произвольном одночленном законе сопротивления послужил вызов, брошенный ему со стороны шотландского математика Кейла. Сознавая сложность поставленной перед ним задачи, Бернулли писал: „Он (Кейль, — *А. М.*) полагал, утверждаю я, что задача, которая обманула проницательность великого Ньютона и даже всех английских математиков того времени (когда он это писал), будет мне тем более не по силам. Между тем, хотя я и сознаю недостаточность моего таланта и не беру на себя создание труда, равного труду величайшего математика Ньютона, однако мне удалось открыть то, что осталось скрытым от его острого взора“.[2]

Бернулли формулирует задачу в следующих словах: „Construere Curvam (concess's quadraturis), quam corpus uniformi-

---

[1] P. Charbonnier. Essais sur l'histoire de la Balistique. Mémorial de l'Arillerie française, t. VI, 1927, стр. 1056—1057.

[2] Johannis Bernoulli. Responsio ad nonneminis provocationem, eiusque solutio quaestionis ipsi ab eodem proposite de invenienda linea curva, quam describit projectile in medio resistente. Acta eruditorum, Lipsiae, 1719, стр. 222.

ter grave tendens perpendiculariter ad horizontem describit in medio uniformiter denso; supposita resistentia in quacunque multiplicata ratione velocitatis, cujus exponens sit $2m$. („Построить кривую (отказавшись от квадратур), которую описывает однородное тяжелое тело, стремящееся перпендикулярно к горизонту в среде с одинаковой плотностью. При положенном сопротивлении, увеличенном в любом отношении скорости, показатель которой есть $2m$“).

Уместно подчеркнуть, что Бернулли говорит о „сопротивлении, увеличенном в любом отношении скорости“. Поэтому можно считать, что показатель $2m$ не является четным числом. Эта величина, согласно Бернулли, произвольная, причем m может равняться и дроби.

Решение задачи Бернулли дает в следующей краткой форме: „Для выбраннной неизвестной z строим площадь

$$\int (a^2 + z^2)^{m-\frac{1}{2}} dz,$$

которую назовем Z, пусть координаты искомой кривой будут[1] x и y. Определим

$$x = \int z Z^{-\frac{1}{m}} dz,$$

$$y = a \int Z^{-\frac{1}{m}} dz.$$

Я утверждаю, что кривая, которая отсюда получится, есть искомая“.

Более развернутое решение основной задачи внешней баллистики Иоганн Бернулли дал в 1721 г.[2] В русской специальной литературе метод Бернулли до сих пор полностью изложен не был. Поэтому представляется целесообразным остановиться на нем более подробно, тем более что он предшествовал работе Эйлера 1736 г. и во многом подготовил то важное для практики решение, которое было им получено в 1753 г.

---

[1] Здесь Бернулли обозначает через x ординату, а через y — абсциссу точек траектории. В дальнейшем изложении будут употребляться принятые теперь обозначения: x — абсцисса, y — ордината.

[2] J. Bernoulli. 1) Operatio analytica. Acta eruditorum, Lipsiae, 1721, стр. 228; 2) Opera omnia, t. 2, 1742, стр. 513—516.

Иоганн Бернулли исходит из дифференциальных уравнений, основанных на теоремах Гюйгенса:

$$\frac{dh}{ds}=-\frac{dy}{ds}-\frac{h^m}{c_m}, \tag{100}$$

$$\frac{dx}{ds}=-\frac{2h}{\rho}, \tag{101}$$

где ds — элемент дуги траектории, $c_m=\frac{g}{b_n}\left(\frac{1}{2g}\right)^m$ и радиус кривизны $\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

Для осуществления необходимых преобразований Бернулли переписывает уравнение (100) так

$$\frac{h^m}{c_m}=-\left(\frac{dy}{ds}+\frac{dh}{ds}\right). \tag{102}$$

Из уравнения (101) Бернулли находит выражение для переменной h, заменяя радиус кривизны ρ и $\frac{dx}{ds}$ через $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$h=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

откуда Бернулли находит производную $\frac{dh}{ds}$ и подставляет ее значение и выражение для h в уравнение (102). В результате получается уравнение, которое после некоторых преобразований записывается так

$$\frac{1}{c_m}\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{ds}{dx}\right)^{2m-1}=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{m-2}\frac{d^3y}{dx^3}.$$

Для того чтобы проинтегрировать это уравнение, которое, в сущности, и является уравнением годографа скоростей, Бернулли вводит новую переменную, определяемую соотношением

$$\frac{dy}{dx}=\frac{z}{a},$$

после введения которой уравнение принимает форму

$$\frac{1}{c_m}\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\frac{1}{a^{2m-2}}(a^2+z^2)^{\frac{2m-1}{2}}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{a^{m-2}}\left(\frac{dz}{dx}\right)^{m-1}\frac{d^2z}{dx^2}. \quad (103)$$

После интегрирования и введения обозначения

$$Z=\int\limits_{\theta_0}^{\theta}(a^2+z^2)^{\frac{2m-1}{2}}dz$$

Бернулли находит

$$\frac{2m}{c_m}\left(-\frac{1}{2a}\right)^m Z=\left(\frac{dz}{dx}\right)^m.$$

Дальнейшее интегрирование приводит к следующему выражению для абсциссы точек траектории

$$x=2a(c_m)^{\frac{1}{m}}\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{dz}{(-2mZ)^{\frac{1}{m}}}.$$

Зависимость для ординаты определяется из соотношения $dy = \frac{z}{a}dx$, откуда

$$y=2(c_m)^{\frac{1}{m}}\int\limits_{\theta_0}\frac{zdz}{(-2mZ)^{\frac{1}{m}}}.$$

Эти формулы отличаются, по существу, от принятых теперь, так как Бернулли положил значение интеграла правой части для нижней границы

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^m=\left(-\frac{ag}{u_0^2}\right)^m=0,$$

что может иметь место, когда горизонтальная составляющая начальной скорости снаряда u_0 или его начальная скорость v_0 обращаются в бесконечность. Стало быть, $\left(\frac{dz}{dx}\right)_0^m \neq 0$, так как в действительности начальная скорость равна некоторой конечной величине.

Стало быть, интегрирование уравнения (103) в действительности дает

$$\frac{2m}{c_m}\left(-\frac{1}{2a}\right)^m Z=\left(\frac{dz}{dx}\right)^m-\left(\frac{dz}{dx}\right)_0^m,$$

откуда для абсциссы точек траектории получается соотношение

$$x=-2a\left(\frac{c_m}{2m}\right)^{\frac{1}{m}}\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{dz}{\left[(-2a)^m\frac{c_m}{2m}\left(\frac{dx}{dz}\right)_0^m-Z\right]^{\frac{1}{m}}}.$$

Зависимость, определяющая ординаты точек траектории, будет

$$y=-2\left(\frac{c_m}{2m}\right)^{\frac{1}{m}}\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{zdz}{\left[(-2a)^m\frac{c_m}{2m}\left(\frac{dx}{dz}\right)_0^m-Z\right]^{\frac{1}{m}}}.$$

Эти зависимости легко приводятся к принятой теперь форме[1]

$$\left(\frac{nb_n}{g}\right)^{\frac{2}{n}}gx=-\int\limits_{\theta_0}^{\theta}[Q-\xi_n(\theta)]^{-\frac{2}{n}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \qquad (104)$$

и

$$\left(\frac{nb_n}{g}\right)^{\frac{2}{n}}gy=-\int\limits_{\theta_0}^{\theta}[Q-\xi_n(\theta)]^{-\frac{2}{n}}\frac{\operatorname{tg}\theta d\theta}{\cos^2\theta}, \qquad (105)$$

где параметр формы

$$Q=\frac{g}{nb_nv_0^n\cos^n\theta_0}+\xi_n(\theta_0)$$

и

$$\xi_n(\theta)=\int\limits_0^{\theta}\frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}.$$

Для этого достаточно иметь в виду, что $z=ap$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)_0=-a\frac{g}{u_0^2}$, $2m=n$, а также положить $a=1$ и принять во внимание соотношение между c_m и b_n.

---

[1] Решение Иоганна Бернулли было впервые достаточно полно изложено Шарбонье в его курсе „Traité de balistique extérieure“ (1927, ч. II, стр. 48). Однако он не заметил указанной выше неточности, почему попытка свести решение Бернулли к принятой теперь форме Шарбонье не удалась.

В 1736 г. Эйлер дал решение основной задачи внешней баллистики и притом, пожалуй, в еще более полной форме, чем ее изложил Иоганн Бернулли в 1721 г. По мнению Эйлера, траектория снаряда, выброшенного под углом к горизонту с большой скоростью, сильно отличается от параболической. Только при малых скоростях и больших калибрах траектория снаряда, как правильно считал Эйлер, близка к параболе.

Приступая к решению основной задачи внешней баллистики, Эйлер писал: „Experimenta docuere aerem corporibus resistere in duplicata celeritatum ratione. Cum igitur vis gravitatis sit uniformis et aer in non nimis altis distantiis eandem fere densitatem servet, casus corporum in aere projectorum apprime ad hanc propositionom refertur. Determinavimus igitur veram curvam, quam globi ex sclopetis vel tormentis vel alio modo proiecti describunt. Sumitur vulgo pro hac curva parabola, quippe quae in vacuo est proiectoria, et aer tam subtile fluidum esse creditur, ut eius resistentia in computum duci non mereatur. Insensibilis quidem utique est resistentia aeris, si corpus magnum parva celeritate proiiciatur. Sed longissime a parabola aberrabit proiectoria, si exiguum corpus magna vi proiiciatur. His autem in casibus, tametsi hic vera assignata est proiectoria, maxime dolendum est, aequationem tam esse intricatam, ut vix quicquam ad usum practicum ex ea possit deduci. Neutonus in Phil.-Princ. hoc problema non attigit negue post eam quisquam tentavit, donec keilius ad hoc problema Joh. Bernoullium provocaverit, etsi ipse solutionem exhibere non potuerit. Dedit autem soluteonem non solum Joh. Bernoullius in Act. Leips. 1719 mensis Maii, sed eodem fere tempore Jac. Hermannus «Phoronomiae» suae inseruit“.[1] („Опыты показали, что воздух оказывает движущимся телам сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Так как сила тяжести постоянна и воздух на не слишком больших высотах имеет почти везде одну и ту же плотность, то движение выброшенного в воздухе тела будет, очевидно, основываться на этом положении. Исходя из этого, мы определили истинную кривую, которую описывают тела, выброшенные из орудий или каким-либо иным способом. Обычно за эту кривую принимают параболу, которую тела описывают в безвоздушном пространстве, вследствие того, что воздух принимается настолько разреженной жидкостью, что ее со-

---

[1] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. I, 1912, стр. 318.

противление не заслуживает принятия в расчет. Оно в самом деле незаметно, когда большое тело выбрасывается с малой скоростью. Однако траектория будет сильно отклоняться от параболической, когда тела небольших размеров будут выброшены с большой силой. В этих случаях, если мы даже нашли истинную траекторию, нам придется весьма сожалеть, что ее уравнение настолько сложно, что едва ли когда-нибудь можно будет получить что-либо полезное для практики. В своих «Принципах» Ньютон не коснулся этой задачи. После него никто не пытался ее решить, пока Иоганн Бернулли не был побужден к этому Кейлем, который сам не сумел дать решение. Но не только один Иоганн Бернулли дал это решение в Acta eruditorum Lipsiae в мае 1719 г. Почти одновременно с ним и Яков Германн поместил решение в своей «Форономии»").

Позднее Эйлер считал, что Тейлор решил основную задачу внешней баллистики. Иоганн Бернулли, находясь больше, чем Эйлер, в курсе изысканий Тейлора, придерживался другого, более обоснованного мнения. Бернулли писал Эйлеру 23 сентября 1745 г.: „Что же касается задачи о нахождении кривой, которую описывает тяжелое тело, брошенное в среде, сопротивляющейся пропорционально квадрату скорости, задачи, которую предложил мне Кейль, хотя ни сам Кейль, ни кто-либо другой из англичан и даже великий Ньютон ее не решил, то ты ошибаешься, когда на странице 64 присоединяешь ко мне, решившему эту задачу, взятую в широком смысле, кроме Германна, также и Тейлора, у которого ты, конечно, не найдешь никакого решения, и даже тени решения. По правде говоря, однако, думаю, что сам я дал тебе повод к такой ошибке".[1]

Решение Эйлера 1736 г. отличается от предложенного Иоганном Бернулли формой изложения и тем, что, не ограничиваясь определением траектории материальной точки, он дает формулы для определения кинематических элементов движения: скорости в данной точке траектории и времени, в течение которого снаряд проходит некоторый ее участок.

Исходными уравнениями для Эйлера служат уравнения (100) и (101), на интегрировании которых основывал свое ре-

---

[1] P. N. Fuss. Correspondance mathématique et physique. St.-Pétersbourg, 1843, T. II,стр. 89—90.

шение Бернулли.[1] Однако Эйлер, приступая к их интегрированию, сразу же достигает некоторого упрощения в выкладках, принимая дифференциал независимой переменной $dx = \text{const}$. В результате выражение для радиуса кривизны приобретает вид

$$\rho = \frac{ds}{dxd^2y}.$$

После подстановки только что найденного значения для ρ в уравнение (101) Эйлер находит соотношение

$$h = -\frac{ds^2}{2d^2y}. \tag{106}$$

Пользуясь этим выражением, он находит значения дифференциала dh и h^m, которые подставляет в уравнение (100). Затем Эйлер полагает $dy = pdx$ и, имея в виду, что $dx = \text{const}$, находит $d^2y = dpdx$ и $d^3y = d^2pdx$ — выражения для дифференциалов зависимой переменной y, которые он подставляет в уравнение, выведенное только что изложенным способом. Оно принимает вид

$$2^{m-1}c_m(-dp)^{m-2}d^2p = -dx^m(1+p^2)^{\frac{2m-1}{2}}.$$

Для того чтобы проинтегрировать это уравнение, Эйлер вводит переменную ζ

$$\frac{dp}{dx} = \zeta,$$

---

[1] Эйлер записывает уравнения (100) и 101 в следующем виде:

$$\frac{dh}{ds} = -g_1\frac{dy}{ds} - \frac{h^m}{c_m},$$

$$g_1\frac{dx}{ds} = -\frac{2h}{\rho}.$$

В принятых Эйлером единицах измерения ускорение силы тяжести обращается в единицу, вследствие чего выражение для скорости v через высоту падения снаряда в безвоздушном пространстве приобретает у него вид $v = \sqrt{2h}$. Для принятых теперь единиц измерения $g \neq 1$. Фигурирующая у Эйлера буква g_1 обозначает величину, близкую к единице и равную $1 - \frac{1}{\delta}$, где δ — удельный вес материала, из которого изготовлен снаряд. Величиной g_1 Эйлер учитывал изменение веса движущегося тела за счет вытесненного воздуха. Вследствие того что величина $g_1 \approx 1$, в дальнейшем изложении уравнения Эйлера можно свести к виду, которым пользовался Бернулли.

после чего уравнение преобразовывается в следующее:

$$2(-2)^{m-2}c_m\zeta^{m-1}d\zeta = -(1+p^2)^{\frac{2m-1}{2}}dp. \qquad (107)$$

Эйлер интегрирует это уравнение соответственно в границах от ζ_0 до ζ и от p_0 до p, ошибочно принимая, как и Бернулли, что $\zeta_0 = \left(\frac{dp}{dx}\right)_0 = -\frac{g}{u_0^2} = 0$.

$$\zeta^m = -\frac{2m}{c_m}\left(-\frac{1}{2}\right)^m \int_{p_0}^{p} (1+p^2)^{\frac{2m-1}{2}}dp.$$

Отсюда Эйлер находит функцию ζ, после чего без труда определяются и координаты точек траектории

$$x = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\zeta},$$

$$y = \int_{p_0}^{p} \frac{pdp}{\zeta}.$$

Соотношение между введенной Эйлером функцией ζ и функцией Z, которая фигурирует в формулах Бернулли, найдется без труда. Для этого достаточно в выражение для ζ ввести постоянную a и, как у Бернулли, положить $ap = z$. В таком случае будет

$$\zeta^m = -\frac{2m}{c_m}\left(-\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{a}\right)^{2m} Z.$$

Выведенные Эйлером выражения для x и y могут быть приведены к употребительным теперь зависимостям, если при интегрировании дифференциального уравнения (107) не допускать ошибки, принимая значение интеграла левой части при нижней границе равным нулю. Если обойти эту неточность и принять, как это имеет место в действительности, что $\zeta_0 = -\frac{g}{u_0^2} \neq 0$, соотношение для ζ примет вид

$$\zeta = -g\left(\frac{nb_n}{g}\right)^{\frac{2}{n}}\left[\frac{g}{nb_n v_0^n \cos^n\theta_0} + \xi_n(\theta_0) - \xi_n(\theta)\right]^{\frac{2}{n}},$$

где вместо употребляемых Эйлером величин c_m, m и интеграла $\int\limits_0^p (1+p^2)^{\frac{2m-1}{2}} dp$ введены обозначения, принятые в настоящее время. В таком случае при подстановке значения ζ в выведенные Эйлером зависимости для x и y получаются известные в баллистической литературе квадратурные формулы (104) и (105).

При выводе формулы для скорости Эйлеру служит зависимость для h (106). Имея в виду, что $ds^2 = dx^2(1+p^2)$, а $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \zeta$, он находит выражение для высоты h

$$h = -\frac{1+p^2}{2\zeta},$$

которая после замены h через отвечающую ей скорость v и подстановки значения ζ приобретает принятый теперь вид

$$\frac{b_n}{g} v^n = \frac{1}{n \cos^n \theta} [Q - \xi_n(\theta)]^{-1}.$$

Формулу для времени движения снаряда Эйлер находит из соотношения

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{ds}{h}.$$

После подстановки вместо h его значения по вышеприведенному соотношению и после представления ds через $ds = dx\sqrt{1+p^2} = \frac{\sqrt{1+p^2}\,dp}{\zeta}$ Эйлер находит

$$t = \frac{1}{\sqrt{g}} \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\sqrt{\zeta}}.$$

Эта зависимость также легко приводится к употребительной теперь форме

$$\left(\frac{nb_n}{g}\right)^{\frac{1}{n}} gt = -\int\limits_{\theta_0}^{\theta} [Q - \xi_n(\theta)]^{-\frac{1}{n}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Иоганн Бернулли в 1721 г., а Эйлер в 1736 г. свели решение основной задачи внешней баллистики при законе сопротивления воздуха, пропорциональном степени скорости $2m = n$, к квадратурам. Однако если Бернулли ограничился формальным решением задачи, не вскрыв сущности введенной им функции Z, то Эйлер пошел несколько далее, определив для функции ее выражение, и сделал, таким образом, необходимый шаг для вычисления квадратур. Стало быть, в упомянутых работах заложены основы метода, получившего развитие в исследовании Эйлера 1753 г. и известного теперь под наименованием общего метода Эйлера.

В 1736 г. Эйлер не ограничился одним лишь развернутым изложением метода Бернулли и некоторым его развитием. В этой своей ранней работе по баллистике Эйлер использовал метод при решении основной задачи внешней баллистики для квадратичного закона сопротивления, который он в те годы считал наиболее близким к действительности. Кроме того, базируясь на этом же законе, Эйлер вывел в алгебраической форме довольно сложные зависимости для вычисления длины дуги восходящей ветви траектории и для участка ее нисходящей ветви до точки, где угол наклона касательной равен по абсолютной величине углу бросания. Была также найдена и формула для скорости снаряда в вершине траектории.

Для квадратичного закона сопротивления воздуха Эйлер представил уравнение траектории материальной точки в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням абсциссы x. Это уравнение достаточно хорошо, по его мнению, представляет истинную траекторию, когда вес снаряда и его начальная скорость велики. Из анализа уравнения Эйлер заключает, что угол наибольшей дальности при движении снаряда в воздухе меньше, чем в пустоте, т. е. не достигает 45°. Эйлер первый теоретически установил это любопытное свойство траектории снаряда при его движении в воздухе.

Эйлер решает основную задачу внешней баллистики и для закона сопротивления, выраженного линейной одночленной зависимостью в функции от скорости. Движение материальной точки в этом предположении, как известно, было изложено в геометрической форме Ньютоном и Гюйгенсом. В 1736 г. Эйлер, вслед за Вариньоном, решил задачу в аналитической форме, установив, как и его предшественники, траекторию в виде логарифмической кривой. Для случая горизонтальной стрельбы, когда угол бросания равен нулю, Эйлер вновь пользуется приближенным методом и представляет ординату траектории и время движения в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням абсциссы.

Большое место в своей работе Эйлер уделил и обратной задаче внешней баллистики. Ее решение Эйлер начинает со случая, когда уравнение траектории снаряда задано в общем виде, а закон сопротивления выражен произвольной функцией скорости. Эйлер строит решение задачи, основываясь на интегрировании уравнений для составляющих сил, действующих на материальную точку по касательной к траектории и по нормали к ней. Следующим этапом являлось распространение метода на более конкретные случаи. Эйлер решает задачу при допущении, что траекторией являются последовательно дуги окружности, параболы и гиперболы. Для каждого из этих случаев он находит первоначально общее выражение для силы сопротивления воздуха, после чего принимает квадратичный закон и отыскивает в нем коэффициент пропорциональности. Сильная сторона исследования Эйлера 1736 г. заключалась в широком использовании аналитического метода. Особое место в работе занимает, конечно, решение основной задачи внешней баллистики. Эта задача являлась одной из важнейших задач механики, стоявшей перед учеными мира в XVIII в.

Известный французский историк математики Монтюкла, отдавая должное заслуге Бернулли по решению задачи вычисления траектории материальной точки при ее движении в воздухе, отмечал теоретический характер метода: „Решение этого великого математика (Бернулли, — *А. М.*) не могло быть полезным для практики вследствие того, что дуга кривой не могла быть выражена в конечной форме, а потому, по крайней мере при состоянии анализа того времени, невозможно было найти значения неизвестных; если бы это и удалось сделать, то были бы получены настолько сложные зависимости, что они не могли бы быть использованы. Результатом этого явились лишь некоторые теоретические истины“.[1]

Бернулли и Эйлеру, как уже говорилось, удалось свести решение основной задачи внешней баллистики к квадратурам. Установленные ими формулы открывали возможности найти траекторию артиллерийского снаряда. Однако необходимость вычислять квадратуры для разнообразных случаев стрельбы при изменяющихся углах бросания, начальных скоростях и весах снаряда, было чрезвычайно громоздко. Для вычисления пучка траекторий и составления таблиц стрельбы созданный Бернулли и Эйлером метод требовал значительного усовершенствования в направлении его упрощения. Тем не менее то, что сделали Бернулли и Эйлер по пути создания метода, удобного для вычисления пучка траекторий, явилось необходимым этапом для последующих изысканий. В дальнейшем

---

[1] Montucla. J. E. Histoire des mathématiques, t. III. 1802, стр. 672.

Эйлер и стремился усовершенствовать метод с тем, чтобы им можно было удобно пользоваться для расчета таблиц стрельбы.

Поставленные Робинсом (1740 г.) эксперименты с баллистическим маятником выявили, что при значительных скоростях сопротивление воздуха возрастает быстрее квадрата скорости. Эйлер устанавливает закон сопротивления воздуха, отражающий действительность более точно, чем квадратичная формула. Отказавшись от закона Ньютона, он основывается на более достоверном законе, к которому привели опыты Робинсона. В 1745 г. Эйлер предпринимает попытку найти решение основной задачи внешней баллистики на основе нового закона, еще раз проявляя мастерство блестящего аналитика.

§ 11. ТЕОРИЯ ОБТЕКАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ В ТРУДЕ ЭЙЛЕРА „NEUE GRUNDSÄTZE DER ARTILLERIE“

В середине XVIII в. для успешной разработки ряда практических задач требовалось построить теорию обтекания твердого тела жидкостью. В этой области работали многие ученые с мировым именем. В творчестве Эйлера гидродинамика занимала большое место, и его работы в этой отрасли механики были направлены на исследование проблем, выдвинутых практикой. Изыскания Эйлера по гидродинамике основывались на новейшем по тому времени экспериментальном материале и являлись развитием трудов его предшественников, в частности Ньютона[1] и Даниила Бернулли.[2] Во многом обязанная в своем развитии исследованиям Эйлера, гидродинамика разрабатывалась им в связи с интересами к вопросам кораблестроения и мореплавания, артиллерии и к работам по сооружению гидравлических двигателей. Этими дисциплинами Эйлер занимался с первых шагов своей научной деятельности, которая началась, как известно, в Петербургской Академии наук.

Теоретические вопросы артиллерии, главным образом внешней и внутренней баллистики, привлекали внимание Эйлера, как это видно из вводной части настоящей книги, уже в ранний период его творчества. Изыскания Эйлера по

---

[1] I. Newton. Philosophiae Naturalis. Principia Mathematica. Philos. Transact., 1687, № 186.

[2] D. Bernoulli. 1) De actione fluidorum in corpora solida et motu solidorum in fluidis. Gomm. Ac., Sc. Petrop., t. 2, 1729; 2) Hydrodinamica, sive de viribus et motibus fluidorum. Gommentarii opus Academicum. Argentorati, Sump. J. R. Dulseckeri, 1738 (8), 304 стр.

решению важнейших задач в названных областях артиллерийской науки, одновременно с разработкой вопросов кораблестроения и мореплавания, повлекли за собой создание его первых работ по гидродинамике. Анализ трудов Ньютона и Даниила Бернулли, а также изучение результатов опытов Робинса, привели Эйлера к построению собственной теории обтекания твердого тела жидкостью, которая имела целью объяснить сущность новых явлений, установленных при экспериментальном изучении движения артиллерийского снаряда в воздухе.

Первое исследование Эйлера по гидродинамике было помещено в книге „Neue Grundsätze der Artillerie“ в качестве добавлений к Предложению Робинса, которым открывалась вторая глава. Развитие отдельных областей механики в XVIII в., как например баллистики и гидродинамики, проходило в тесной взаимосвязи, что наблюдается и в дальнейшем, несмотря на дифференциацию различных отраслей естествознания. Отсюда очевидно, почему достигнутые Эйлером результаты по гидродинамике были им впервые опубликованы в труде по баллистике. В 1745 г. Эйлер построил теорию движения твердого тела в идеальной сжимаемой жидкости. Эта теория должна была, по его мнению, раскрыть физическую сущность явлений, имевших место при движении артиллерийского снаряда в воздухе и обусловливающих более быстрое, чем это следовало по закону Ньютона, возрастание силы сопротивления воздуха с увеличением скорости. Своими опытами Робинс установил, что при больших скоростях, какими обладают ружейные пули, сопротивление воздуха возрастает с увеличением скорости значительно быстрее, чем по квадратичному закону. Робинс не ограничился одним констатированием этого факта, но попытался объяснить его. Согласно точки зрения Робинса, в природе существует два рода жидкостей. К первому типу он относил такие, плотность которых настолько велика или они так сжаты, что при движении твердого тела, даже со значительной скоростью, жидкость успевает за ним следовать и заполняет пустоту, образующуюся позади тела. Ко второму роду относятся весьма разреженные жидкости, частицы которых не связаны между собой. Они не успевают следовать за телом, перемещающимся с большой скоростью. Позади него образуется пустота, обусловливающая, по Робинсу, большее сопротивление, чем то, какое испытывает тело, перемещающееся в жидкости первого рода.

На основе изучения движения ружейных пуль Робинс предложил теорию возникновения силы сопротивления, в которой отошел от схемы структуры воздуха, использованной Ньютоном при выводе квадратичного закона. Воздух, по мнению Робинса, состоит из мельчайших частиц, находящихся в непрерывном движении. Они связаны между собой и перемещаются вслед за телом. По теории Робинса воздух принадлежит к жидкостям, которые не обладают большой плотностью, что приводит к возникновению разрежения позади тела, перемещающегося с большой скоростью. Этот фактор и обусловливает возникновение большей величины силы сопротивления при скоростях, с какими перемещаются пули в воздухе. При этом Робинс подчеркивает, что сопротивление такого рода зависит не только от скорости тела, но и от формы его хвостовой части. Сужение хвостовой части тела сказывается на уменьшении силы сопротивления. Робинс заключает, что для больших скоростей закон Ньютона неприменим. Для того чтобы вывести истинную зависимость между силой сопротивления воздуха и скоростью, Робинс обращается к эксперименту.

Робинс считает воздух идеальной сжимаемой жидкостью, связывая увеличение силы сопротивления при больших скоростях движения тела со свойством упругости. В 1-м Предложении второй главы он дает объяснение наблюдаемых явлений на основе разработанной им теории и в результате качественного анализа проведенных им экспериментов. Формулу закона сопротивления воздуха Робинс устанавливает в итоге обработки своих опытов только в последующих разделах книги.

Эйлер строит теорию возникновения силы сопротивления жидкости движению твердого тела, исходя из законов механики. Положениям теоретической механики, лежащим в основе этой теории, и посвящено первое добавление Эйлера к разделу книги Робинса, в котором он трактует этот вопрос.

Твердое тело, или сферический снаряд, при своем движении в воздухе теряет скорость вследствие того, что оно перемещает находящиеся впереди него частицы среды. Состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, которое стремятся сохранять тела, может быть изменено, по мнению Эйлера, только в результате действия силы. Эйлер считает, что силы возникают от стремления тел сохранять свое первоначальное состояние. Сила проявляется тогда, когда одно или несколько тел препятствуют другому телу сохранять состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения. Так, частицы среды препятствуют движению тела и уменьшают его скорость. Сопротивление жидкости движению тела будет тем больше, чем большее количество частиц оно приводит в движение. Поэтому, по мнению Эйлера, достаточно изучить явления, наблюдаемые при перемещении тела в жидкости, чтобы установить силу сопротивления.

Построение теории обтекания твердого тела жидкостью Эйлер начинает с рассмотрения той простейшей схемы, которой пользовался Ньютон. Эйлер последовательно усложняет задачу, подвергая анализу новые факторы, которые он черпал из опыта. В результате Эйлер дал математическую интерпретацию явлений, наблюдаемых в природе. При теоретическом изучении сопротивления жидкостей движению твердого тела Эйлер сосредоточивает основное внимание на качественном раскрытии сущности фактов, которые давал опыт. Разработка количественной стороны вопроса — вывод аналитической формулы сопротивления воздуха движению снаряда — являлась последующим этапом исследования, основанным на анализе экспериментов Робинса.

Первая задача, которую решает Эйлер, совпадает с рассмотренной Ньютоном. Она заключается в исследовании движения тел в некотором сильно разреженном веществе. Подобно Ньютону, Эйлер считает это вещество состоящим из большого числа мельчайших частиц-молекул, обладающих определенной массой. Частицы распределены в пространстве равномерно и находятся в состоянии покоя. Молекулы между собой ничем не связаны и не оказывают друг на друга никакого воздействия. Однако Эйлер сразу же оговаривается, что такого вещества в природе нет. Только в некоторых случаях можно абстрагироваться от действительности и изучать движение тел в среде, обладающей вышеописанной структурой. В частности, эта гипотеза приемлема, пишет Эйлер, при исследовании сопротивления воздуха движению твердого тела с небольшими скоростями.

Придерживаясь теории Ньютона, Эйлер изучает движение цилиндра с площадью поперечного сечения, равной s. Цилиндр перемещается со скоростью v по направлению своей оси в некотором газообразном веществе, обладающем весовой плотностью Π. Сопротивление воздуха движению цилиндра Эйлер определяет для двух случаев, исходя из характера удара его плоской головной части о молекулы воздуха: при допущении, что удар цилиндра о частицы воздуха является абсолютно неупругим, и в предположении, что он абсолютно упруг. Так же как и Ньютон, Эйлер находит сопротивление для этих случаев на основе уравнения количества движения и уравнения живых сил. При абсолютно неупругом ударе сила сопротивления была установлена равной весу столба воздуха с площадью основания, равной площади поперечного сечения цилиндра и высотой вдвое больше той, с какой должно упасть тело в пустоте, чтобы приобрести скорость цилиндра. При абсолютно упругом ударе эта сила оказалась равной весу столба воздуха с тем же основанием, но высотой в 2 раза большей. Если выразить высоту падения тела в безвоздушном пространстве через отвечающую ей скорость и иметь в виду, что $\Pi = g\rho$, установленное Эйлером выражение можно записать так

$$R_t = Cs\rho v^2, \tag{110}$$

где для случая абсолютно неупругого удара коэффициент пропорциональности $C = 1$, а для абсолютно упругого — $C = 2$.

После определения сопротивления воздуха движению плоской пластинки по направлению ее нормали Эйлер переходит к изучению движения этой же пластинки, когда ее нормаль составляет угол ε с направлением движения. В результате он приходит к выведенному Ньютоном выражению для силы сопротивления, действующей по нормали к пластинке

$$R_N = Cs\rho v^2 \sin^2 \varepsilon. \tag{111}$$

Далее Эйлер усложняет задачу и отыскивает сопротивление воздуха движению шара. При этом он пользуется формулами для сопротивления движению плоской пластинки.

Эйлер рассматривает силы сопротивления, действующие по нормали к каждому элементу поверхности. Вследствие того, что сферическая поверхность симметрична, равнодействующая этих элементарных сил равна нулю и при перемещении в идеальной несжимаемой жидкости шар не испытывает никакого сопротивления. Это и есть известный „парадокс“ Даламбера—Эйлера. В данном случае Эйлер ограничивается изучением движения одного лишь шара и не рассматривает других тел вращения, хвостовая часть которых также симметрична их головной части.

После установления факта отсутствия сопротивления идеальной несжимаемой жидкости движению шара Эйлер переходит к изучению движения тела вращения произвольной формы. Ввиду того, что при перемещении тел в реальной жидкости сопротивление всегда имеет место, Эйлер ограничивается рассмотрением одной лишь головной части. Это дает ему возможность избежать указанного выше „парадокса“.

Эйлер отыскивает сопротивление, действующее по нормали к элементарным поверхностям,

$$dR_N = 2\pi C_i \rho y \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 v^2 ds, \tag{112}$$

где C_i — коэффициент пропорциональности в формулах, определяющих сопротивление для каждой элементарной поверхности головной части тела; y — ордината, отвечающая элементарной дуге ds, вращением которой образована рассматриваемая Эйлером элементарная поверхность; $\frac{dy}{ds} = \sin \varepsilon$ — синус угла, составленного элементом дуги образующей и осью тела.

Проектируя нормальные элементарные силы сопротивления на направление, противоположное движению тела, и распространяя интегрирование на всю поверхность головной части, Эйлер находит выражение для лобового сопротивления воздуха

$$R_t = 2\pi C_i \rho v^2 \int y \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 dy. \tag{113}$$

Если в эту формулу ввести квадрат радиуса r круга наибольшего сечения тела и обозначить через C следующее выражение

$$C = \frac{2}{r^2} C_i \int y \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 dy, \tag{114}$$

формула (113) примет тот же вид, что и соотношение (110). При этом коэффициент пропорциональности определяется формой головной части тела.

Сопротивление идеальной несжимаемой жидкости движению сферического снаряда Эйлер находит, как частный случай, из общей формулы (113), принимая во внимание одну лишь переднюю полусферу. Оно оказалось вдвое меньшим, чем для кругового цилиндра.

Сопротивление движению твердого тела было выведено Эйлером для жидкости, которой, по его мнению, в природе не существует. Поэтому формулы, основанные на структуре воздуха, предложенной Ньютоном, и на методе, которым он пользовался, не могут быть применены для реальных, как считал Эйлер, жидкостей.

Эйлер изучает движение твердого тела в воздухе, который, помимо других свойств, присущих такому роду веществ, обладает еще и свойством упругости. Природу силы сопротивления движению твердого тела в воздухе Эйлер объясняет следующим образом. При незначительных скоростях сопротивление определяется ударом головной части тела о частицы воздуха. В этом случае тело испытывает одинаковое по всей поверхности давление, равное атмосферному. При больших скоростях воздух не успевает следовать за телом. Увеличение сопротивления, наблюдаемое в таком случае, связано с уменьшением давления на его хвостовую часть, которое достигает нуля при очень больших скоростях. Действующее на головную часть тела давление не может быть уравновешено давлением на его хвостовую часть, что и приводит к увеличению силы сопротивления воздуха. При своем движении твердое тело сжимает слой воздуха, прилегающий к головной части, в результате чего его плотность, а следовательно, и давление возрастают. Это явление особенно заметно при больших скоростях тела. Оно имеет место и при малых скоростях, однако проявляется не в такой сильной степени.

„...wenn sich ein Körper in der Luft sehr schnell beweget,— пишет Эйлер, — die Luft vor demselben mehr zusammen gedruckt, und folglich dichter, hinter demselben aber weniger zusammen gedruckt, und folglich dünner wird. Wegen des ersteren Umstands wird also die wiederstehende Kraft von vorne stärker, wegen des andern aber die forttreibende Kraft von hinter schwächer; dahero der Wiederstand der Luft auch aus diesem Grunde bey schnellen Bewegungen weit grösser wird, als bey langsamen“.[1] („...когда тело перемещается в воздухе с большой скоростью, находящийся впереди него воздух сжат в большей степени, и следовательно, будет более плотен, чем воздух позади тела, где он сжат меньше и более разрежен. Вследствие первого обстоятельства сила сопротивления, действующая на переднюю часть, будет больше, чем сила, толкающая тело сзади. Поэтому сопротивление воздуха при быстром движении будет значительно больше, чем при медленном“).

По теории Эйлера, при больших скоростях на тело действуют два сопротивления: одно из них обусловлено ударом головной части тела о воздух, а другое — тем, что давление воздуха на его головную и хвостовую части неодинаково. В результате сопротивление воздуха при больших скоростях возрастает быстрее, чем при малых.

Эйлер считает, как уже отмечалось выше, что при небольших скоростях превалирует сопротивление, обусловленное ударами поверхности головной части тела о частицы воздуха. В построении своей теории Эйлер отказывается от модели струк-

---

[1] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 281.

туры воздуха, предложенной Ньютоном, и в отличие от него рассматривает воздух как непрерывную среду. По мнению Эйлера, при перемещении цилиндра в воздухе его частицы обтекают движущееся тело, изменяя свою скорость как по величине, так и по направлению, причем эти изменения носят значительно менее резкий характер, чем в двух случаях, разобранных Ньютоном. По Эйлеру, удар тела о частицы воздуха не является упругим или неупругим. В действительности воздух обтекает тело со всех сторон. В результате Эйлер заключает, что величина силы сопротивления движению цилиндра должна быть меньше, чем в двух случаях, разобранных Ньютоном, и равна весу столба воздуха с высотой, с какой должно упасть тело в безвоздушном пространстве, чтобы приобрести скорость движения тела. В данном случае Эйлер выбирает коэффициент пропорциональности в квадратичном законе сопротивления $C = \frac{1}{2}$. Такая же величина сопротивления наблюдается, по Эйлеру, при движении цилиндра в воде. В своем третьем добавлении Эйлер излагает теорию, с помощью которой он стремится математически обосновать сущность сопротивления, возникающего при движении тела в воздухе с малыми скоростями.

Эйлер обращает внимание на то, что при разработке теории движения твердого тела в жидкости безразлично, считать ли неподвижными среду, в которой оно перемещается, или само тело, при условии, что жидкость движется с такой же скоростью в противоположном направлении. Эйлер изучает обтекание кругового цилиндра по направлению его оси потоком воздуха в виде бесконечного числа струек, которые он называет „нитями", текущими по „каналам" весьма малого сечения. Движение жидкости он принимает установившимся. Частицы воздуха, приближаясь к цилиндру, изменяют свою скорость как по величине, так и по направлению. Это вызвано, по мнению Эйлера, сопротивлением тела их движению. Выбрав некоторый произвольный „канал", или трубку тока, по принятой теперь терминологии, он отмечает, что „канал" по мере приближения к телу отклоняется от своего первоначального направления и принимает криволинейную форму.

По теории Эйлера с отклонением струйки от поверхности цилиндра ее сечение увеличивается. Это допущение Эйлер принимает с тем, чтобы обосновать уменьшение величины скорости частиц воздуха, которое, по его мнению, является результатом действия тела на набегающий поток воздуха. Эйлер полагает, что струйки воздуха, обтекающие головную часть тела, обращены к ее поверхности своей выпуклостью. При обтекании хвостовой части тела струйки сужаются и обращены к телу своей вогнутостью.

Предложенная Эйлером картина обтекания тела струйками воздуха расходится с принятой в настоящее время. В частности, Эйлер ошибочно считает, что при обтекании головной части тела сечение струек увеличивается. В действительности поперечное сечение струек уменьшается, скорость частиц жидкости возрастает при одновременном падении давления.

Развивая свою теорию, Эйлер выбирает два сечения струйки: первое, находящееся вдали от тела, когда струйка еще не изменила своего направления, а ее скорость равна своему начальному значению; второе — вблизи тела, когда в результате воздействия тела на набегающий поток струйка отклонилась от своего первоначального направления, а ее скорость изменила свою величину. Обозначая скорости струйки и ее площади в этих двух поперечных сечениях соответственно через v_1, s_1 и v_2, s_2, Эйлер составляет уравнение неразрывности для струйки, допуская (вследствие того, что в данном случае воздух принимается им несжимаемым) массовую плотность жидкости в выбранных сечениях одинаковой, т. е.

$$v_1 s_1 = v_2 s_2. \tag{115}$$

Эйлер изучает элемент струйки жидкости на участке, где она отклоняется от своего первоначального направления. Искривление трубки тока вызвано, по мнению Эйлера, действием силы, направленной по радиусу кривизны трубки, т. е. под воздействием нормальной силы, которую он устанавливает для взятого элементарного отрезка струйки, исходя из выражения для радиуса кривизны. Уменьшение величины скорости струйки вызвано действием тангенциальной силы, которую Эйлер определяет для того же элемента. Он находит составляющую этих элементарных сил, обусловливающих возникновение лобового сопротивления, как сумму их проекций на направление движения потока жидкости. В итоге Эйлер устанавливает равнодействующую этих двух сил, изменяющих скорость частиц струйки по величине и направлению для некоторого участка обтекания. Эту формулу можно представить в виде

$$R_t = s_1 \rho v^2 \left(1 - \frac{v^2}{v_1^2} \cos \alpha\right), \tag{116}$$

где угол α составлен касательной к рассматриваему элементу струйки и первоначальным направлением скорости потока, совпадающим с направлением оси абсцисс.

Анализ формулы приводит Эйлера к весьма интересным заключениям. Он устанавливает, что сила сопротивления, возникающая при обтекании тела жидкостью, зависит от направления, которое получают струйки потока, отклоняясь от тела, а также от величины скорости, которую они приобретают.

Эйлер пытается использовать формулу (116) для определения величины сопротивления воздуха движению тела вращения путем изучения характера его обтекания струйками, составляющими поток. Зная отклонения каждой из них вблизи тела и скорость струйки в выбранном сечении, или, что то же, площадь ее поперечного сечения, можно найти, рассуждает Эйлер, действие, какое оказывает на тело любая из струек. Для этого нет необходимости знать изменение перечисленных величин на всем участке обтекания. Достаточно, чтобы эти данные были известны для некоторого определенного сечения, положение которого Эйлер и пытается установить. Анализируя характер изменения угла α по всей длине струйки, обтекающей тело, Эйлер замечает, что у головной части она отдаляется от тела и обращена к нему своей выпуклостью. С приближением к наибольшему сечению угол α возрастает. Эйлер предлагает брать искомые значения для угла α, площади поперечного сечения и скорости струйки для сечения, отвечающего точке перегиба, в которой выпуклая форма трубки переходит в вогнутую. Хвостовую часть Эйлер, в конечном итоге, предлагает вовсе не принимать в расчет. Это связано с тем, поясняет Эйлер, что при обтекании хвостовой части тела струйка, обращенная к нему своей вогнутостью, воздействует на тело в сторону, противоположную направлению скорости потока. В итоге возникает сила, направленная в противоположную сторону, почему при суммировании действия струйки на головную и хвостовую части их равнодействующая и равна нулю. При определении сопротивления, возникающего при движении твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости, Эйлер вынужден рассматривать лишь головную часть тела, хотя по идее следовало бы принимать в расчет и его хвостовую часть.

Построенная Эйлером теория обтекания твердого тела идеальной несжимаемой жидкостью носит качественный характер. Формулу (116) трудно использовать для количественной оценки величины силы сопротивления воздуха, испытываемой телом. Прежде всего это связано с тем, что нет никакой возможности найти для каждой из струек угол α, до которого следует проводить интегрирование. Отмеченный недостаток был обнаружен В. В. Мечниковым.[1]

Теоретическое определение величины сопротивления при движении в идеальной несжимаемой жидкости тела вращения по направлению его оси не удалось не только Эйлеру, но и ряду гидродинамиков, занимавшихся этим вопросом позднее. Неудача Эйлера связана с тем, что он считал жидкость идеальной, в то время как возникновение силы сопротивления может быть объяснено лишь на модели вязкой жидкости. С точки зрения идеальной жидкости силу сопротивления принципиально найти нельзя.

При больших скоростях значительную роль, по теории Эйлера, играет сопротивление, вызванное неравномерностью распределения давления по поверхности тела. Основное значение имеет разрежение воздуха позади хвостовой части. Оно вызвано тем, что воздух, расширяясь вследствие своей упругости, не успевает заполнить образующуюся позади тела пустоту. Эйлер находит эту скорость, исходя из величины атмосферного давления, которая измеряется высотой столба воздуха, равной 29 100 рейнским футам (9 020 м). Следовательно, наибольшая скорость, с какой воздух может следовать за телом, будет равна скорости тела, приобретенной при падении в пустоте с высоты 29 100 рейнских футов, т. е. 1348 фут./сек. (418 м/сек.).

Если для тел, перемещающихся со скоростями, не превышающими установленную выше границу, основное влияние на образование силы сопротивления, согласно Эйлеру, имеет форма головной части тела, при скоростях, превышающих этот предел, существенное значение приобретает и форма его хвостовой части, так как позади тела давление воздуха меньше атмосферного и даже равно нулю. Исследованию этого фактора, вызванного образованием разрежения позади тела, и посвящено 4-е добавление Эйлера к 1-му Предложению второй главы книги Робинса.

Для того чтобы принять во внимание форму хвостовой части, Эйлер изучает движение тела вращения, перемещающегося со скоростью $v=\sqrt{2gh}$ по направлению его оси. Далее он вводит наибольшую скорость, $v_a=\sqrt{2gH}$, с какой воздух может следовать за телом и измеряемую атмосферным давлением, выраженным высотой столба воздуха H. При не-

[1] В. В. Мечников. Сопротивление среды. К вопросу о сопротивлении воздуха движению артиллерийских снарядов. СПб., 1912 (литография).

больших скоростях тело испытывает одинаковое со всех сторон давление, обусловливающее возникновение сил, направленных по нормали к каждому элементу его поверхности. Эйлер заключает, что воздух как бы ударяет каждый из этих элементов со скоростью v_a.

Тело движется по направлению своей оси со скоростью v, а если рассматривать его неподвижным, можно принять, по Эйлеру, что частицы воздуха перемещаются с той же скоростью в противоположном направлении. Скорость, с какой воздух ударяет каждый из элементов поверхности тела по нормали к ним, Эйлер находит как проекции скорости набегающего потока на эти нормали. Проекцию скорости на нормаль к каждому элементу поверхности тела он суммирует со скоростью, получающейся от падения частиц воздуха с высоты H, которой измеряется атмосферное давление. Установив эту суммарную скорость, он находит сопротивление, испытываемое этими элементарными поверхностями в результате действия сопротивления воздуха и атмосферного давления. Эйлер выражает эти элементарные силы через высоту столба воздуха, весом которого измерялась их величина. Взяв проекцию такой элементарной силы на направление скорости потока, он получает величину силы, действующую на каждый элемент поверхности тела в этом направлении. Далее устанавливается сила сопротивления, которую испытывает поверхность, получаемая вращением элементарной дуги образующей тела вокруг его оси. В итоге Эйлер приходит к следующей зависимости для силы, действующей на эту поверхность по направлению движения потока и выраженную через высоту столба воздуха, весом которого измеряется величина определяемой силы

$$dR_t = 2\pi\left(H + 2p\frac{\sqrt{hH}}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{p^2h}{\sqrt{1+p^2}}\right)ydx, \tag{117}$$

где p — тангенс угла наклона касательной в данной точке к образующей.

Эйлер распространяет интегрирование на всю поверхность тела, допуская, что оно испытывает одинаковое со всех сторон давление, измеряемое высотой столба воздуха H. Эйлер получает формулу для сопротивления воздуха, справедливую при скорости тела $v < v_a$ для случая, когда позади его хвостовой части не образуется разреженности. Из анализа соотношения (117) Эйлер заключает, что с распространением интегрирования до наибольшего поперечного сечения тела сопротивление воздуха возрастает. После этой границы сопротивление уменьшается вследствие того, что второй член в скобках становится отрицательным.

В том случае, когда скорость тела $v > v_a$, давление позади его хвостовой части становится равным нулю. Тогда интегрирование должно быть распространено до границы на поверхности тела, после которой оно не испытывает давления и воздух перестает действовать на тело. Этой границей на поверхности служит окружность, на которой сумма скорости, отвечающая высоте столба воздуха H, и проекции скорости потока на нормаль ко всем элементам поверхности вдоль этой границы, обращается в нуль. В аналитической форме это условие выглядит так:

$$v_a + v \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0. \tag{118}$$

Эйлер фиксирует внимание на том, что $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ представляет собой синус угла γ, составленного осью тела и нормалью к элементу поверхности в данной точке. На этом основании он выводит следующее соотношение:

$$\frac{v_a}{v} = \sin\gamma. \tag{119}$$

В результате Эйлер устанавливает на поверхности тела границу, до которой следует распространять интегрирование при определении силы сопротивления воздуха на основе формулы (117).

Эйлер заключает, что при скорости тела $v > v_a$ величина силы сопротивления воздуха будет тем меньше, чем хвостовая часть тела более сужена, что связано с приближением границы интегрирования к ее концу. Это приводит к увеличению числа отрицательных членов, подлежащих суммированию, вследствие чего значение интеграла, а значит и сопротивление, уменьшаются.

Свою теорию Эйлер считает неполной и требующей экспериментального подтверждения: „Можно было бы из этого представления о сопротивлении жидкой материи вывести много других ценных заключений, которые мы, однако, благоразумно обходим, так как совершенно неясно, совпадут ли они в какой-либо мере с данными опыта или нет“.[1]

Теоретическое определение величины сопротивления, обусловленного неравномерностью распределения давления по поверхности тела, Эйлеру не вполне удалось. Пытаясь решить

---

[1] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 280.

эту задачу, он вынужден был пойти на упрощение картины распределения давления по поверхности тела и принять, что у головной части оно равно атмосферному давлению, в то время как в районе хвостовой части давление равно нулю. Кроме того, Эйлер допустил погрешность при определении сопротивления, которое испытывает каждый элемент поверхности тела. Допущенная Эйлером неточность состояла в том, что он представлял действующее на поверхность тела атмосферное давление как происходящее от ударов частиц воздуха о поверхность тела со скоростью, отвечающей высоте их падения в пустоте, которой он измерял величину атмосферного давления. Далее он суммировал эту фиктивную скорость с проекцией на нормаль к элементарной поверхности тела скорости воздушного потока. В результате сопротивление воздуха движению шара оказалось пропорциональным первой степени скорости. Однако опыты не только Робинса, но даже и Ньютона совершенно опровергали это положение. Эйлер не настаивает на линейном законе сопротивления и склоняется к мысли, что установить истинный закон сопротивления можно лишь при помощи эксперимента.

Значение исследования Эйлера состоит в том, что он установил связь между сопротивлением воздуха и его сжимаемостью при больших скоростях движения тела. Эйлер стремится обосновать более резкое увеличение силы сопротивления при больших скоростях, которые, как теперь установлено, достигали в середине XVIII в. скорости звука. Как известно, в этом случае наблюдаются качественные изменения в характере обтекания твердого тела сжимаемой жидкостью. Эйлер сделал попытку объяснить наблюдаемые явления лишь с точки зрения количественных изменений величины плотности воздуха по поверхности тела. О волновом сопротивлении Эйлер знать еще не мог, но его теория являлась первой попыткой дать верное представление о тех причинах, какие обусловливают возникновение явлений, замеченных уже в середине XVIII в. в результате опытов Робинса. Нельзя также не сказать о том, что Эйлеру, несмотря на всю примитивность данного им решения, удалось выявить влияние формы хвостовой части тела на величину силы сопротивления воздуха.

После теоретического обоснования более быстрого возрастания силы сопротивления воздуха с увеличением скорости тела Эйлер переходит к тщательному анализу опытов Ньютона и главным образом Робинса. В результате Эйлер выводит закон сопротивления, достаточно точно для того времени отражавший действительность.

§ 12. ЭКСПЕРИМЕНТЫ РОБИНСА И ДВУЧЛЕННАЯ ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ДЛЯ ЗАКОНА СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА ДВИЖЕНИЮ АРТИЛЛЕРИЙСКОГО СНАРЯДА

При выводе закона сопротивления воздуха движению артиллерийского снаряда Эйлер исходил из данных опыта и основывался на теории обтекания твердого тела жидкостью. В середине XVIII в. основным экспериментальным материалом являлись данные, полученные Робинсом с помощью баллистического маятника. Опыты Робинса существенно продвинули вперед знания ученых о сопротивлении воздуха движению тел, перемещающихся со значительными скоростями, и показали, что квадратичный закон Ньютона в этом случае не отражает действительности.

В ранних работах по баллистике, в том числе в его исследовании 1736 г., Эйлер оперировал с квадратичным законом сопротивления воздуха. В эти годы были известны лишь опыты Ньютона, наблюдавшего времена падения твердых тел со значительной высоты (церкви Святого Павла в Лондоне) и эксперименты Даниила Бернулли, поставленные в Петербурге в 1727 г. и заключавшиеся в измерении полного времени полета выброшенного вертикально вверх снаряда. Эти опыты, в том числе и эксперименты Бернулли, относились лишь к сравнительно небольшим скоростям и не давали достаточного материала для выявления той наивысшей границы скорости, до которой закон Ньютона имеет место. Вот почему в первых исследованиях по баллистике Эйлер и придерживался квадратичного закона. Необходимо, правда, отметить, что в 1736 г. Эйлер дал решение основной задачи внешней баллистики для закона сопротивления, пропорционального произвольной степени скорости. Однако этот факт связан со стремлением Эйлера получить решение для более общего выражения закона сопротивления, принятого и Иоганном Бернулли.

Робинс широко применял баллистический маятник, с помощью которого можно было измерять не только начальную скорость пули, но и ее скорость в любой точке траектории. Правда, определение скоростей на значительных расстояниях от дульного среза ограничивалось трудностью попадания в приемник маятника. Это обстоятельство сильно затрудняло постановку опытов.

Эксперименты Робинса заключались в измерении скоростей ружейных пуль диаметром 0.75 дюйма (около 18 мм) на различных расстояниях от дульного среза. Он находил потерю скорости пуль на некотором участке траектории. Так, Робинс определил скорости пули на расстояниях 25, 75 и 125 футов (7.5, 22.5 и 37.5 м) от дульного среза. Они оказались равными соответственно 1670, 1550 и 1425 фут./сек. (561, 465, 427.5 м/сек.). Из этих данных он установил, что на участке траектории в 50 футов (15 м) пуля теряла от 120 до 125 фут./сек. (от 36 до 37.5 м/сек.). Принимая время, в течение которого пуля проходит этот отрезок траектории, равным от $^1/_{30}$ до $^1/_{32}$ сек. он определял ускорение силы сопротивления. Затем Робинс обращался к основному положению механики, сформулированному Ньютоном: при равных массах движущихся тел действующие силы пропорциональны сообщаемым ими ускорениям. Сопоставляя между собой ускорение пули, обусловленное действием силы тяжести, численно равной ее весу — $^1/_{12}$ фунта, с ускорением силы сопротивления воздуха, Робинс находил искомую силу сопротивления, равную 12 фунтам. Затем он сравнивал полученное значение силы сопротивления воздуха с вычисленным по формуле Ньютона для скорости в 1600 фут./сек. (480 м/сек.). Это отношение оказалось равным величине, заключенной между 2 и 3. Анализ других материалов проведенных им опытов привел Робинса к выводу, что при скоростях пули около 1000 фут./сек. (300 м/сек.) это отношение приближается к 2, а при скоростях в районе 1700 фут./сек. (510 м/сек.) — к 3.

После обобщения результатов всех опытных стрельб Робинс заключает, что с увеличением скорости пули сила сопротивления воздуха возрастает и все более отклоняется от ее значений, получаемых по формуле Ньютона. Поэтому и закон сопротивления, пишет Робинс, не может быть выражен формулой, пропорциональной квадрату скорости с постоянным коэффициентом.

Робинс первым пытался оценить величину силы сопротивления воздуха движению ружейных пуль. Изложенным методом он лишь сопоставлял между собой для нескольких взятых им скоростей значения силы сопротивления воздуха, вычисленных на основе его экспериментов с найденными по формуле Ньютона. Методика Робинса была далека от совершенства. В частности, он не вполне строго подходил к оценке времени, затрачиваемого пулей для прохождения участка пути, для которого определялась потеря ее скорости. Эйлер признавал опыты Робинса заслуживающими доверия, но подчеркивал порочность его метода, не указывая при этом, в чем именно состояли недостатки способа.

После краткой характеристики опытов Робинса Эйлер тщательно изучает их результаты посредством специально разработанной методики, построенной на началах механики с привлечением математического анализа. Эйлер ставит целью выяснить, во сколько раз действительное сопротивление воздуха превосходит ее величину, вычисленную по формуле Ньютона. Следовательно, он решает ту же задачу, что и Робинс.

Эйлер открывает свое 1-е добавление ко 2-му Предложению книги Робинса анализом опытных данных, относящихся к определению потери скорости пули на некотором участке траектории. Пренебрегая действием силы тяжести на сравнительно незначительных участках траектории, для которых Робинс измерял потерю скорости пуль, Эйлер принимает, что пуля движется по горизонтальной прямой. Эйлер составляет дифференциальное уравнение движения пули в виде

$$\frac{1}{6}\pi D^3 n_d \frac{dh}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi D^2 h$$

или

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{3h}{4Dn_d}, \tag{120}$$

где D — диаметр пули; n_d — удельный вес материала пули по отношению к плотности воздуха; x — расстояние, которое проходит пуля за время t.

Уравнение (120) Эйлер составляет в предположении, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости, а коэффициент пропорциональности вдвое меньше, чем для цилиндра, диаметр которого равен диаметру пули. Эйлер интегрирует уравнение (120) приближенно, для чего разлагает $e^{\frac{3r}{8Dn_d}}$ по возрастающим степеням дроби $\frac{3x}{8Dn_d}$, которую он считает в данном случае достаточно малой. Интеграл уравнения (120) Эйлер находит в виде

$$\frac{v_0 - v}{v_0} = \frac{3x}{8Dn_d} - \frac{9x^2}{128D^2n_d^2}, \tag{121}$$

где $v_0 = \sqrt{2gh_0}$ — начальная скорость пули, а $v = \sqrt{2gh}$ — ее скорость в некоторой точке траектории.

Эйлер вычисляет правую часть уравнения (121), исходя из известного пройденного пулей расстояния x, а левую — по измеренным с помощью баллистического маятника начальной скорости пули и ее скорости в конце участка. В случае справедливости квадратичного закона сопротивления, вычисленные значения должны быть равны, и уравнение (121) имеет место. Если значение левой части уравнения больше правой, что и наблюдалось при подстановке результатов опытов Робинса, можно было определить, во сколько раз сила сопротивления воздуха для данного диапазона скоростей больше величины, вычисленной по формуле Ньютона. Эйлер устанавливает, что с увеличением скорости сопротивление воздуха возрастает более резко, чем это следует по закону Ньютона, т. е. сила сопротивления возрастает быстрее квадрата скорости. Таким образом, Эйлер приходит к тому же качественному выводу, что и Робинс. Что же касается количественной оценки величины сопротивления воздуха, Эйлер получает лучшие результаты благодаря большей тонкости проведенного исследования.

Эйлер подвергает обработке и данные экспериментов Робинса по измерению полного времени полета пули на дальности, которые он находит стрельбой из ружей над спокойной поверхностью воды. Одновременно Робинс определяет и начальную скорость пуль.

Исходными экспериментальными данными Эйлеру служат: дальность полета пули X, полное время полета T и начальная скорость v_0. При анализе опытного материала Эйлер опирается на дифференциальное уравнение (120), которое он, так же как и ранее, приближенно интегрирует. Имея в виду, что $dt = \frac{dx}{v}$, Эйлер получает

$$T = A_1 \frac{X}{v_0}\left(1 + \frac{3x}{16Dn_d} + \frac{9x^2}{16 \cdot 24D^2n_d^2} + \ldots\right). \qquad (122)$$

Эйлер вычисляет левую и правую части уравнения (122) на основе экспериментального материала Робинса, помещенного во 2-м Предложении рассматриваемой главы книги. В том случае, когда вычисленные значения оказываются равными или близкими между собой, Эйлер считает, что закон Ньютона соответствует действительности. Если же равенство не соблюдается, устанавливалось, в какую сторону и во сколько раз истинная величина сопротивления воздуха отличается от вычисленной по квадратичному закону. Эйлер выводит те же заключения о характере изменения силы сопротивления воздуха, какие были получены при обработке опытных данных по определению потери скорости пуль на траектории.

Проведенное Эйлером исследование дало ему возможность критически подойти к оценке экспериментов Робинса и убедиться в сомнительности и противоречивости некоторых данных. В итоге Эйлер смог прийти лишь к качественному выводу о характере изменения силы сопротивления воздуха в зависимости от скорости. Эйлер писал: „. . . können diese Experimente nicht anders gebraucht werden, als nur überhaupt zu zeigen, daß der wahre Wiederstand, welchen eine schnell bewegte Kugel in der Luft leidet, viel grösser sey, als die hier gebrauchte Theorie anzeigt, und daß, je grösser die Geschwindigkeit der Kugel ist, diese Theorie um so viel mehr von der Wahrheit abweiche". („...этими экспериментами можно пользоваться главным образом только с тем, чтобы показать вообще, что истинное сопротивление, которое испытывает в воздухе быстро движущаяся пуля, будет значительно больше, чем показывает примененная здесь теория, и что чем больше скорость пули, тем больше эта теория отклоняется от действительности").

На основе разработанного им метода Эйлер тщательно проанализировал результаты опытов Ньютона, наблюдавшего падения тяжелых тел в воздухе. Данные, послужившие Ньютону для определения коэффициента сопротивления в его квадратичном законе, впервые были помещены в третьем издании его известного труда 1687 г. Эйлер естественно заинтересовался тем, отвечает ли истине квадратичный закон для небольших скоростей. С этой целью он воспользовался результатами опытов Ньютона и подверг их анализу, базируясь на более совершенном математическом аппарате, чем тот, которым располагали ученые в конце XVII и начале XVIII вв.

Отправным пунктом Эйлеру служит уравнение движения материальной точки, падающей в воздухе под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха

$$dh=\left[-\left(1-\frac{1}{n_d}\right)-\frac{3h}{4Dn_d}\right]dy. \tag{123}$$

При составлении уравнения Эйлер принимает в расчет вес воздуха, вытесняемый падающим телом. Этим незначительным уточнением можно было вполне пренебречь, тем более что при интегрировании уравнения (123) Эйлер пользуется приближенным методом.

После интегрирования дифференциального уравнения (123) и подстановки полученного значения v в уравнение $dt=\frac{dy}{v}$ Эйлер находит следующую формулу для времени падения тела с некоторой высоты:

$$t=\frac{n_d\sqrt{D}}{M\sqrt{3\,(n_d-1)}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-e^{-\frac{3y}{4Dn_d}}}}{1-\sqrt{1-e^{-\frac{3y}{4Dn_d}}}}\right). \tag{124}$$

[1] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 292—293.

В том случае, когда дробь $\frac{3y}{4Dn_d}$ достаточно мала, Эйлер употребляет формулу, получаемую после разложения $e^{-\frac{3y}{4Dn_d}}$ по возрастающим степеням дроби $\frac{y}{m}$, где $m=\frac{4Dn_d}{3}$,

$$t=M_1\left(1+\frac{y}{12m}+\frac{y^2}{480m^2}-\frac{y^3}{2688m^3}-\frac{y^4}{91260m^4}-\ldots\right)\sqrt{\frac{yn_d}{n_d-1}}.$$

Приведенные формулы позволяют Эйлеру установить, что тела в опытах Ньютона падали несколько медленнее, чем это следовало из его теории. Это свидетельствует о том, по мнению Эйлера, что истинное сопротивление несколько более установленного Ньютоном теоретически. Однако вследствие незначительной разницы во временах падения и большого значения, какое имели даже весьма малые погрешности в измерении времени, было трудно, справедливо писал Эйлер, оценить действительную величину сопротивления. Можно было только сказать, что оно несколько превосходит сопротивление, вычисленное по формуле Ньютона.

Для определения высоты y в функции от времени t Эйлер пользуется зависимостью, которая была выведена в результате интегрирования того же дифференциального уравнения (123).

$$\frac{Y}{Dn_d}=\frac{T\sqrt{n_d-1}}{n_d\sqrt{D}}-E.$$

Сравнивая с помощью этой формулы высоту, вычисленную по измеренному времени падения тела в одном из опытов, с действительной высотой, Эйлер находит, что при незначительных скоростях закон Ньютона близок к истине.

Формулы, которые употребляет Эйлер при анализе экспериментов Ньютона и Робинса, были выведены с помощью приближенного интегрирования дифференциальных уравнений движения. В примечаниях ко 2-му Предложению Робинса и к добавлениям Эйлера Ломбар приводит формулы, установленные точным интегрированием этих же уравнений. При сопоставлении результатов, найденных по этим формулам с вычисленными Эйлером, Ломбар приходит к заключению, что приближенное интегрирование не дает сколько-нибудь значительных погрешностей.

Эксперименты Робинса показали, что для больших скоростей квадратичный закон сопротивления не отвечает действительности. Эти опыты, с одной стороны, и проведенные теоретические изыскания, с другой — привели Эйлера к установлению факторов, которые, по его мнению, определяют резкое возрастание сопротивления при значительных скоростях: разрежение воздуха позади тела и его уплотнение впереди головной части.

„Wenn sich nun diese beyden Umstände, — пишет Эйлер, — aus der Natur der Luft genau bestimmen liessen, so wäre man im Stande, die Lehre von dem Wiederstand derselben zur Vollkommenheit zu bringen. Da aber unsere Erkenntniß hierzu keines-wegs hinreichend ist, so muß man sich begnügen, aus der Erfahrung diese nöthige Verbesserung, so viel als möglich, genau und der Wahrheit gemäß herzuleiten“.[1] („Если бы только можно было точно определить оба эти обстоятельства из свойств воздуха, мы были бы в состоянии привести в исчерпывающую ясность учение об его сопротивлении. Но так как наши познания в этом ни в коей мере не являются достаточными, мы должны удовлетвориться тем, чтобы вывести эти необходимые поправки из опыта, делая это насколько возможно точно и в согласии с действительностью“).

В распространенной в XVIII в. форме, применявшейся в России вплоть до середины XIX столетия,[2] силу сопротивления определяли весом столба воздуха с площадью основания, равной площади поперечного сечения сферического снаряда и высотой θh, где θ — коэффициент пропорциональности, идентичный с употребляемым теперь коэффициентом сопротивления c_x. В принятой в настоящее время форме лобовое сопротивление воздуха, которое, в сущности, искали Робинс и Эйлер, запишется в виде

$$R_T = c_X s \frac{\rho v^2}{2} .$$

Робинс и Эйлер нашли, что коэффициент сопротивления c_x не остается постоянным, а изменяется в зависимости от скорости снаряда. Так, было установлено, что для малых скоростей $c_x = \frac{1}{2}$, т. е. в этом случае новые эксперименты подтверждали справедливость закона Ньютона. При больших же скоростях, достигающих у Робинса 1700 фут./сек. (510 м/сек.),

---

[1] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 302.

[2] В. А. Анкудович. Теория баллистики, содержащая приложение математического анализа к определению различных обстоятельств, сопровождающих движение тяжелых тел, брошенных с какой-нибудь силой. Петербург, 1836.

сила сопротивления приобретает втрое большую величину. Иными словами, коэффициент сопротивления становится равным $c_x = \frac{3}{2}$.

Робинс выводил формулу сопротивления воздуха, исходя из закона Ньютона. Область применения своей формулы Робинс ограничивал 1700 фут./сек. Для определения коэффициента пропорциональности он предложил правило, изложив его в геометрической форме. Согласно положению Робинса, коэффициент сопротивления c_x устанавливался в зависимости от значения скорости, для которой отыскивается сила сопротивления воздуха. Эйлер выразил это правило аналитически. В принятых теперь обозначениях оно запишется так.

$$c_x = \frac{c_{xm} v_m}{2c_{xm} v_m - (2c_{xm} - 1)\, v}, \qquad (125)$$

где $v_m = 1700$ фут./сек., а $c_{xm} = \frac{3}{2}$.

Формула Робинса для коэффициента сопротивления отвечает условиям, которые диктовались результатами опытов: при небольших скоростях второй член знаменателя весьма мал сравнительно с первым, и коэффициент сопротивления $c_x = \frac{1}{2}$; для скорости $v = 1700$ фут./сек. коэффициент сопротивления принимает значение $c_x = \frac{3}{2}$.

Эйлер считает правило Робинса не вполне надежным. При значении $v = \frac{2c_{xm} v_m}{2c_{xm} - 1} = 2550$ фут./сек. (765 м/сек.) коэффициент сопротивления c_x, а значит и сила сопротивления воздуха, обращаются в бесконечность, т. е. формула Робинса приводит к абсурду. Вообще говоря, и Робинс видел недостатки своего правила, почему определял границу его использования скоростью в 1700 фут./сек. После анализа сформулированного Робинсом правила Эйлер отмечает, что можно вывести ряд формул для коэффициента сопротивления, удовлетворяющих двум поставленным условиям и не приводящим к результатам, противоречащим действительности.

Эйлер не ограничивается критикой формулы Робинса с переменным коэффициентом пропорциональности. Развивая мысль английского артиллериста об установлении такой формулы сопротивления, которая отражала бы более резкое возрастание силы сопротивления при больших скоростях, Эйлер высказывает соображение, что было бы рациональнее представить закон сопротивления в виде двучленной формулы следующего типа:

$$R_t = \Pi s\left(\frac{1}{2}h + b_{2m}h^m\right), \tag{126}$$

где b_{2m} — весьма малая величина, а $m > 1$.

В принятых теперь обозначениях формула может быть представлена так:

$$R_t = \left(\frac{1}{2} + b_{2m-2}v^{2m-2}\right)s\frac{\rho v^2}{2}, \tag{127}$$

где стоящий в скобках двучлен представляет собой не что иное, как коэффициент сопротивления

$$c_x = \frac{1}{2} + b_{2m-2}v^{2m-2}.$$

Формула такого типа вполне может, по мнению Эйлера, удовлетворить результатам опытов Робинса: для небольших скоростей при соответствующем выборе показателя степени $2m$ второй член становится неощутимо малым сравнительно с первым, и коэффициент сопротивления получает значение $c_x = \frac{1}{2}$; при больших скоростях, которыми обладают артиллерийские снаряды, рассуждает Эйлер, например в 1700 фут./сек., второй член приобретает значительную величину, достигая при соответствующем выборе показателя степени $2m$ вдвое большего значения, чем первый, т. е. в этом случае коэффициент сопротивления становится равным $c_x = \frac{3}{2}$.

Для того чтобы первое условие было соблюдено, Эйлер выбирает показатель степени $2m = 4$. В таком случае формула для сопротивления воздуха (126) будет иметь вид

$$R_t = \Pi s\left(\frac{1}{2}h + b_2h^2\right).$$

В употребляемых в настоящее время обозначениях она может быть представлена так:

$$R_t = \left(\frac{1}{2} + b_4v^2\right)s\frac{\rho v^2}{2}, \tag{128}$$

где $c_x = \frac{1}{2} + b_4v^2$.

Эта формула, подчеркивает Эйлер, не дает абсурдного результата. При скорости снаряда, достигающей большой, но конечной величины, коэффициент сопротивления c_x, а значит, и сила сопротивления воздуха, не обращаются в бесконечность, как это следовало из формулы Робинса.

Справедливость выведенного закона Эйлер видит и в том, что при весьма незначительных скоростях сила сопротивления несколько превышает $\frac{1}{2}\Pi sh$, т. е. коэффициент сопротивления в этом случае несколько больше $\frac{1}{2}$. Это обусловлено, по мнению Эйлера, сопротивлением трения, которое, согласно Ньютону, не зависит от скорости тела. Сопротивление трения движению твердого тела в воздухе сказывается на величине лобового сопротивления лишь при весьма небольших скоростях. Оно вовсе перестает играть сколько-нибудь существенную роль, когда скорости достигают значительной величины.

Интересно отметить, что при установлении своего двучленного закона сопротивления воздуха Эйлер обращает внимание на существование сопротивления трения. Однако при построении теории обтекания твердого тела воздухом, изложенной в § 11, он этого фактора во внимание не принимает, рассматривая воздух как идеальную сжимаемую жидкость.

Первоначально Эйлер отыскивает значение коэффициента c_x из условия, что при скорости $v = 1700$ фут./сек. сила сопротивления воздуха, вычисленная по его двучленной формуле, должна втрое превышать ее величину, найденную из формулы Ньютона. Отсюда Эйлер находит $b_4 = \frac{1}{46400}$ фут.$^{-1}$ $\left(\frac{1}{13920}\ \text{м}^{-1}\right)$. Если это условие соблюдается при скорости $v = 1900$ фут./сек. $\left(570\ \frac{\text{м}}{\text{сек.}}\right)$, коэффициент b_4 становится равным $b_4 = \frac{1}{58200}$ фут.$^{-1}$ $\left(\frac{1}{17460}\text{м}^{-1}\right)$. Эйлер замечает, что число 58 200 ровно вдвое больше высоты столба воздуха в 29 100 фут. (8730 м), которая отвечает нормальному атмосферному давлению. Стало быть, $b_4 = \frac{1}{2H}$, где H есть не что иное, как нормальное атмосферное давление, выраженное через высоту столба воздуха. Это дает Эйлеру право представить выведенную им формулу для силы сопротивления воздуха в виде

$$R_t = \Pi s\left(\frac{1}{2}h + \frac{h^2}{2H}\right). \tag{129}$$

Эйлер не считает изложенный метод для определения коэффициента b_4 достаточно надежным. Сомневаясь в точности соотношения между значениями силы сопротивления воздуха, вычисленными с помощью его формулы и посредством закона Ньютона, он обращается к отысканию этого коэффициента, исходя непосредственно из результатов опытов Робинса.

Рассматривая перемещение снаряда по прямолинейной горизонтальной траектории, Эйлер составляет дифференциальное уравнение движения

$$dh = -\frac{3dx}{4Dn_d}\left(h + \frac{h^2}{H_1}\right).$$

После интегрирования уравнения Эйлер получает формулу, определяющую величину

$$H_1 = \frac{\left(e^{\frac{3x}{4Dnd}} - 1\right) h_0 h}{h_0 - e^{\frac{3x}{4Dnd}} h},$$

которую он предлагает в случае „малости" значения дроби $\frac{3x}{4Dn_d}$ свести к более удобной зависимости путем разложения $e^{\frac{3x}{4Dnd}}$ по возрастающим степеням показателя.

Для определения H_1 Эйлер использует результаты трех опытов Робинса. Они заключались в определении потери скорости пули на трех различных по величине горизонтальных участках траектории. На основе выведенной изложенным способом упрощенной формулы Эйлер находит три значения для H_1. Из этих данных он выбирает большее значение, обращая внимание на то, что оно очень близко к высоте столба воздуха, отвечающей нормальному атмосферному давлению. Стало быть, обработка экспериментов Робинса привела его к значению коэффициента b_4, близкому к обратной величине удвоенной высоты столба воздуха, которой измерялось атмосферное давление. Это совпадение Эйлер считает неслучайным и определяет $H \approx H_1 = 27\,979$ рейнских футов (8673.5 м).

Эйлер подчеркивает, что при больших скоростях его закон дает картину возрастания силы сопротивления, близкую к той, которая получается по формуле Робинса до скорости в 1700 фут./сек.

По мнению Эйлера, второй член формулы определяет влияние сжимаемости воздуха на величину силы сопротивления: „Denn da diese Vermehrung des Wiederstands, theils von der Verdickerung der Luft for der Kugel, theils von der Verdünnerung hinter derselben herkommt, diese beyden Umstände aber auf der Elasticität der Luft beruhen, so kann die gedachte Vermehrung keiner andern Ursache, als der Elasticität der Luft, zugeschrieben werden."[1] („Поскольку это увеличение сопротивления происходит частью от уплотнения воздуха перед ядром, частью же от разряжения позади него, а эти оба обстоятельства обязаны упругости воздуха, можно рассматриваемое увеличение приписывать никакой другой причине, как только упругости воздуха").

Эйлер допускает возможным пользоваться законом Ньютона до скоростей, не превышающих 1325 фут./сек. (397.5 м/сек.), или отвечающей этой скорости высоте падения снаряда в безвоздушном пространстве, равной высоте столба воздуха, которой измерялось нормальное атмосферное давление. При скоростях же, превышающих эту границу, величину силы сопротивления воздуха необходимо определять, по мнению Эйлера, по двучленной формуле. В этом случае сильное влияние на величину сопротивления начинает оказывать второй член формулы. Следовательно, Эйлер рассматривает сопротивление воздуха зависящим от отношения $\frac{h}{H}$. Но вследствие того, что вес столба воздуха высотой H с плотностью $\Pi = g\rho$ воздействует на единицу площади с силой $g\rho H = p$, т. е. атмосферному давлению, можно найти $H = \frac{p}{g\rho}$. Отсюда и из соотношения $h = \frac{v^2}{2g}$ отношение $\frac{h}{H}$ представляется в виде

$$\frac{h}{H} = \frac{\frac{\rho v^2}{2}}{p},$$

т. е. сила сопротивления воздуха зависит от отношения „скоростной высоты" к „пьезометрической высоте" или отношения „скоростного напора" к давлению невозмущенного воздуха. Можно согласиться с точкой зрения Ф. И. Франкля[2] о том, что коэффициент сопротивления c_x зависит, по Эйлеру, от указанного критерия. Эйлер, в сущности, полагает коэффициент сопротивления равным

$$c_x = \frac{1}{2} + \frac{\frac{\rho v^2}{2}}{p}.$$

---

[1] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 312.

[2] Ф. И. Франкль. О приоритете Эйлера в открытии закона подобия для сопротивления воздуха движению тел при больших скоростях. Доклады АН СССР, Новая сер., т. LXX, № 1, 1950.

Ф. И. Франкль правильно считает, что для Эйлера зависимости $c_x = f\left(\frac{\rho v^2}{2p}\right)$ и $c_x = F\left(\frac{v}{a_0}\right)$ идентичны, так как ему была известна формула, связывающая скорость звука с плотностью воздуха и давлением $a_0 = c\sqrt{\frac{p}{\rho}}$, где $c = 1$. Правда, в двучленной формуле Эйлера непосредственно не фигурирует отношение скорости снаряда к скорости звука. Фактически же он подошел к введению этого критерия в формулу для закона сопротивления, хотя и не имел возможности выявить те качественные изменения, какие наблюдаются в характере образования силы сопротивления при звуковых скоростях.

Установление влияния сжимаемости на силу сопротивления воздуха являлось крупным открытием Эйлера. Этот факт раскрыл количественную сторону более быстрого возрастания силы сопротивления воздуха движению снаряда при больших скоростях. Однако вследствие невозможности установить качественную картину явлений, обусловливающих увеличение сопротивления воздуха при звуковых и сверхзвуковых скоростях, Эйлер вынужден был оперировать с одной формулой, которая, вообще говоря, не могла правильно отразить увеличение силы сопротивления при изменении скорости снаряда в широком диапазоне.

Двучленная формула сопротивления воздуха не была использована в XVIII в. Эйлеру удалось дать на ее основе, как это будет показано в § 15—16, лишь весьма сложное решение, которым трудно было пользоваться в артиллерийской практике. Формула такого типа нашла приложение лишь спустя более ста лет.

Закон сопротивления Эйлера стал известен в России в начале XIX в. Отечественные артиллеристы разделяли точку зрения Робинса и Эйлера о том, что сопротивление воздуха возрастает при больших скоростях быстрее, чем квадрат скорости. Один из энергичных сотрудников „Артиллерийского журнала“ майор Плотто писал: „...но дабы читателю предложить другие способы и хотя кратко упомянуть, какие обстоятельства сопряжены со скоростью ядер, то предлагаются здесь правила Эйлером из «Артиллерии» Робинса выведенные, посредством которых можно вычислить упомянутую скорость“. И далее: „Эйлер старался определить правило, которое могло быть употреблено при всех скоростях, ядрам свойственным, и всегда показывало бы настоящие супротивления".[1]

В 1855 г. закон сопротивления воздуха в виде двучлена, в котором первый член пропорционален квадрату, а второй — четвертой степени скорости, был выведен сардинским артиллеристом Сен-Робером из опытов, поставленных в Меце (Франция) в 1839—1840 гг. Однако эта формула не нашла практического приложения. Широко применялась лишь двучленная формула этого же типа, выведенная Н. В. Маиевским[2] в 1858 г. Она достаточно хорошо отражала действительность до скоростей в 400 м/сек. Закон употреблялся для вычисления траектории сферических снарядов до конца 60-х годов, когда он уступил место зональным формулам, которые были выведены тем же Маиевским в результате его опытов 1868—1869 гг.

Двучленные формулы Эйлера, Сен-Робера и Маиевского сильно отклонялись от действительности для больших скоростей. В 50-х годах XIX в. было выяснено,[3] что для скоростей, превышающих 500 м/сек., сопротивление воздуха возрастает пропорционально квадрату скорости, т. е. изменение силы сопротивления для этого диапазона скоростей носит уже иной характер, чем это следовало по двучленной формуле. Позднее Н. А. Забудский[4] нашел, что после скорости в 550 м/сек. сопротивление воздуха возрастает медленнее, чем квадрат скорости. Следовательно, во второй половине XIX в. было установлено, что закон сопротивления воздуха для большого диапазона скоростей невозможно выразить единой двучленной формулой. Это явилось одной из причин перехода к зональным формулам. Однако во второй половине XVIII в. двучленной формулой Эйлера можно было вполне пользоваться ввиду того, что употреблявшиеся в то время скорости не достигали границы, далее которой этот закон был уже неприменим.

Не получив пригодного для практики решения основной задачи внешней баллистики на основе двучленного закона, Эйлер вновь вернулся к решению этой задачи в 1753 г. На

---

[1] Плотто. О разнородных выстрелах. О скорости пушечных ядер и пути, пробегаемом ими в воздухе, а также и о супротивлении ядрами, в воздухе встречаемом. Арт. журн., 1808, № 5, стр. 29 и 45.

[2] N. Mayevski. Sur l'expression de la résistance de l'air au mouvement des projectiles sphériques. Bull. de la classe physico-mathématique de l'Acad. Imp. des sciences de St.-Petersbourg, 1859, t. XVII.

[3] Н. В. Маиевский. Курс внешней баллистики. 1859 (литография Михайловской артиллерийской академии).

[4] Н. А. Забудский. О сопротивлении воздуха для больших скоростей снаряда. Арт. журн., 1894, № 4.

этот раз он воспользовался квадратичным законом сопротивления.

Для того чтобы учесть значительное увеличение сопротивления воздуха при больших скоростях, Эйлер выбирает коэффициент пропорциональности равным 1.5, т. е. втрое большим, чем в формуле Ньютона. В таком виде, по мнению Эйлера, закон вполне пригоден для скоростей не свыше 1326 фут./сек. Однако он считает возможным пользоваться ими тогда, когда начальные скорости превосходят эту границу. Скорость снаряда уменьшается настолько быстро, что допущенная неточность не может существенно сказаться при вычислении траектории.

В 1753 г. Эйлер решает основную задачу внешней баллистики главным образом применительно к стрельбе под большими углами бросания. В середине XVIII в. начальные скорости для мортир и гаубиц, из которых велась навесная стрельба, были невелики, вследствие чего квадратичный закон сопротивления вполне мог быть использован при вычислении траектории артиллерийского снаряда. Правильность избранного Эйлером для этого случая закона сопротивления подтвердилась в дальнейшем. Его метод, основанный на законе Ньютона, был использован при составлении таблиц Отто-Сиаччи, употребляемых и теперь при решении задач навесной стрельбы для скоростей, не превышающих 240 м/сек.

§ 13. МЕТОД ЭЙЛЕРА 1745 г. ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА, ВЫБРОШЕННОГО В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Опыты Робинса со всей очевидностью вскрыли то большое влияние, которое оказывает сопротивление воздуха на траекторию быстро движущихся тел. Выяснилось, что сопротивление воздуха движению сферических снарядов настолько велико, что в некоторых случаях расчет траектории без учета действия этой силы приводил к большим отклонениям от действительности. Учет этого фактора становился особенно необходимым при стрельбе из пушек под большими углами бросания. Следствием опытов Робинса явилась постановка задачи по усовершенствованию метода вычисления траектории материальной точки в воздухе. Задача, как уже говорилось в § 10, была разрешена Иоганном Бернулли и Эйлером. Однако предложенный ими способ не был разработан для расчета таблиц стрельбы, что делало сложным его приложение в артиллерийской практике.

Прежде всего Робинс оценивает численное значение силы сопротивления воздуха. С этой целью в 5-м Предложении второй главы своей книги он устанавливает ее значение для сферического снаряда 24-фунтовой пушки, перемещающегося со скоростью 1670 фут./сек. (561 м/сек.). Эта сила, по его расчетам, превышала вес снаряда в 23 раза и должна была, как справедливо отмечал Робинс, сильно сказываться на характере траектории.

Робинс показывает, насколько истинная траектория артиллерийского снаряда расходится с параболической. Особенно ярко это несоответствие проявляется, по его мнению, при сопоставлении действительных дальностей с вычисленными по формулам теории Галилея. Так, при стрельбе из мушкетов под углом бросания в 45° с начальной скоростью в 1700 фут./сек. (510 м/сек.) дальность равнялась 0.5 мили, в то время как, согласно расчетам, она должна равняться 17 милям, т. е. величине в 34 раза больше. Эта разница уже не так велика для орудий, хотя все еще остается значительной, и пренебрегать ею нельзя. В частности, при стрельбе под углом бросания в 45° из 24-фунтовой пушки, обладающей начальной скоростью 1650 фут./сек. (495 м/сек.), дальность не достигала 3 миль, в то время как, согласно параболической теории, она должна была равняться 16 милям. Только для снарядов большого калибра, выброшенных с малыми начальными скоростями, наблюдаемая дальность близка к теоретической, что свидетельствует о незначительном расхождении истинной траектории с параболической.

После установления факта непригодности теории Галилея для вычисления траектории артиллерийского снаряда, выброшенного со значительной скоростью, Робинс ставит задачу по ее определению с учетом действия силы сопротивления воздуха. В 1742 г. он не предлагает способа ее решения и отсылает читателей к своим дальнейшим исследованиям. Робинс действительно дает вполне законченный метод в работе 1761 г., переизданной на французском языке в 1771 г.[1] одновременно с его трудом „New Principles of gunnery“. Однако никакого практического приложения способ Робинса не нашел, что можно объяснить его сложностью и чрезвычайной краткостью изложения.

---

[1] B. Robins. Traité de mathématiques. Ses nouveaux principes d'artillerie, suivis de plusiéurs discours qui leur servent de snpplément, que M. Wilson son éditeur, a inséré dans cet ouvrage. Traduit de l'anglais par M. Dupuy fils. Grenoble, 1771.

Решение основной задачи внешней баллистики на основе закона сопротивления воздуха, выведенного из материала опытов Робинса, привлекло внимание Эйлера. На двучленном законе сопротивления Эйлер остановился вследствие того, что он более близко по тому времени отражал действительность. Добавления к 6-му Предложению книги Робинса он открывал изучением частных задач, после чего переходил к более общей. В начале Эйлер отыскивал элементы движения снаряда, выброшенного горизонтально со значительной скоростью, затем определял характер движения снаряда перемещающегося по вертикали, и, наконец, обращался к более сложной проблеме — вычислению траектории снаряда, выброшенного под некоторым углом к горизонту. Методу Эйлера, каким он решал первую из названных задач, посвящен настоящий параграф. Две другие задачи будут разобраны в §§ 14 и 15—16.

Эйлер разделял точку зрения Робинса на то большое влияние, какое оказывает сила сопротивления воздуха на вид траектории. Даже при величине этой силы, равной весу снаряда, оно все еще значительно. Для снаряда 24-фунтовой пушки, перемещающегося со скоростью 1650 фут./сек., Эйлер находил величину силы сопротивления в 26 раз большей, чем вес снаряда. Такое сопротивление воздуха, по его мнению, уже сильно сказывается на характере траектории и должно приниматься в расчет при ее вычислении. Эйлер находит нужным отметить, что Робинс без достаточного основания приписывает себе заслугу установления влияния силы сопротивления воздуха на вид траектории: „Между прочим, ошибочность этого общепринятого мнения (что снаряд движется по параболической траектории, — *А. М.*) уже давно была достаточно убедительно доказана, но среди артиллеристов, по-видимому, мало обратили на это внимания. Поэтому автор должен был несколько умерить свои выражения, словно он первым обнаружил эту ошибку“.[1]

Прежде чем излагать решение основной задачи внешней баллистики, Эйлер предупреждает читателей о том, что невозможно найти траекторию снаряда из одного лишь опыта. Решение, по его мнению, может быть найдено лишь посредством теоретических изысканий. Для изучения характера траектории снаряда в воздухе нужно хорошо знать свойства параболы с тем, чтобы можно было сопоставить с ней истинную траекторию. Именно так поступал и Робинс, обстоятельно

[1] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 350.

излагая теоремы, определяющие особенности траектории материальной точки в безвоздушном пространстве. Прежде чем пользоваться аналитической формой изложения для решения задачи о движении снаряда в воздухе, Эйлер употребляет ее применительно к теории Галилея. Это давало возможность артиллеристам ознакомиться, как писал Эйлер, с непривычной для того времени формой решения задач баллистики в приложении и хорошо известной теории.

Изучению движения снаряда, выброшенного в горизонтальном направлении, Эйлер посвятил несколько параграфов шестой главы своей книги по механике, опубликованной в 1736 г. Так же как Ньютон и Гюйгенс, он решал эту задачу для квадратичного закона, но в отличие от них пользовался аналитической формой изложения. Эйлер употреблял приближенные методы, прибегая к выражению искомых зависимостей в виде рядов.

В 1745 г. при изучении движения артиллерийского снаряда в воздухе Эйлер, как и его предшественники, принимал, что снаряд имеет правильную сферическую форму с центром массы, совпадающим с его центром симметрии. Вращение снаряда во внимание не принималось и движение артиллерийского снаряда таким образом рассматривалось как перемещение материальной точки.

Определение элементов движения снаряда, выброшенного в горизонтальном направлении, предложенное Эйлером в 1745 г., базировалось на более достоверном законе сопротивления и на методе, который вскоре нашел приложение для составления таблиц прицельной стрельбы.

Эйлер допускал, что выброшенный в горизонтальном направлении снаряд летит на начальном отрезке траектории по прямой. В действительности, даже на незначительных участках, траектория всегда криволинейна. Принятое Эйлером предположение сводилось к тому, что действие на снаряд силы тяжести во внимание не принималось. Эйлер считал участок траектории прямолинейным, пока угол γ, образованный линией бросания и прямой, соединяющей точку вылета с некоторой точкой траектории, достаточно мал. Такое представление траектории давало ему право принять положение, которое легло в основу его метода: движение выброшенного в горизонтальном направлении снаряда можно рассматривать, как его перемещение по горизонтальной прямой под действием одной лишь силы сопротивления воздуха и последующего его понижения под действием силы тяжести. Такая интерпретация сильно упрощала решение. При составлении дифференциального уравнения движения снаряда по горизонтальной прямой отпадала необходимость учитывать действие силы тяжести. Открывалась возможность легко найти время прохождения снарядом некоторого прямолинейного отрезка траектории. Соответствующее понижение снаряда под линией бросания определялось без труда. Принимая за ось абцисс горизонтальную прямую, по направлению которой выбрасывается снаряд, и обозначая через x расстояние, пройденное им к моменту времени t, Эйлер составляет уравнение движения

$$dh = -\frac{3h(H+h)}{4Dn_dH}\,dx, \tag{130}$$

где вес снаряда представлен посредством веса столба воздуха высотой $\frac{2}{3}Dn_d$.

Из соотношения $dt = \frac{dx}{\sqrt{2gh}}$ он устанавливает уравнение, связывающее время движения снаряда по горизонтальной прямой с его скоростью

$$dt = -\frac{4Dn_dH}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{dh}{3h\sqrt{h}\,(H+h)}. \tag{131}$$

Уравнение (130) давало после разделения переменных и интегрирования

$$x = \frac{4Dn_d}{3}\ln\left[\frac{h_0(H+h)}{h(H+h_0)}\right]. \tag{132}$$

После обозначения $\frac{3x}{4Dn_d} = z$ Эйлер получает следующее соотношение для определения скорости снаряда в некоторой точке горизонтального участка траектории

$$h = \frac{Hh_0}{e^z(H+h_0)-h_0}. \tag{133}$$

Дифференциальное уравнение (131), связывающее время движения снаряда с высотой в безвоздушном пространстве, посредством которой выражается скорость снаряда, интегрируется путем его приведения к рациональному виду заменой переменной h через v^2, а H — через a^2. После интегрирования полученного уравнения и возвращения к исходным переменным Эйлер находит соотношение для времени, необходимого снаряду для прохождения расстояния x в зависимости от его скорости:

$$t = \frac{8D_{nd}}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{h_0}-\sqrt{h}}{\sqrt{h_0 h}} - \frac{1}{\sqrt{H}}\,Atg\,\frac{\sqrt{2g}(\sqrt{h_0}-\sqrt{h})\sqrt{H}}{H+2g\sqrt{h_0 h}}\right]. \quad (134)$$

Далее Эйлер определяет время в функции от x с тем, чтобы получить понижение снаряда под линией бросания y в зависимости от x, согласно известному соотношению

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

При этом вследствие незначительности кривизны траектории для пройденного снарядом участка принимается в соображение, что угол γ будет мал. Это обстоятельство позволяет Эйлеру упростить формулы для h и t. Он пользуется тем, что величина $z = \frac{3x}{4D_{nd}}$ в рассматриваемом случае очень невелика, и степень e^z можно представить в виде ряда, ограничиваясь необходимым числом членов. Первоначально Эйлер ограничивался членом, содержащим z в первой степени. Однако при таком приближении результат плохо отражал действительность, так как движение оказалось равномерным. Это заставило Эйлера искать более точного решения, для чего он представил e^z в виде ряда, включающего вторую степень z

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2.$$

В итоге Эйлер получает довольно громоздкие формулы для времени и скорости в функции переменной z.

Имея формулы, определяющие x и t и соответствующее им понижение y, легко найти и угол γ. Посредством этих соотношений Эйлер решает следующую задачу: считая угол γ известным и равным некоторой небольшой величине, например 30′, определить дальность, соответствующую этому углу. Другими словами, отыскивалась дальность, отвечающая заданному углу γ, который нужно придать каналу ствола для того, чтобы поразить цель. Так, для 24-фунтовой пушки с начальной скоростью в 1500 рейнских фут./сек. (465 м/сек.), эта дальность для угла $\gamma = 30'$ оказалась равной 900 футам (279 м). Зная калибр орудия, его начальную скорость, можно было определять посредством установленных Эйлером формул угол, который следует придать каналу ствола, для того чтобы поразить цель, расположенную на сравнительно небольшом расстоянии от дульного среза. По этим формулам можно было определить и величину конечной скорости снаряда для некоторого горизонтального участка траектории, кривизной которого можно пренебречь. Таким образом, Эйлер дал метод определения углов прицеливания при настильной стрельбе и тем самым открыл возможность составления для специальных таблиц.

Метод Эйлера нашел практическое приложение уже в конце XVIII в. Для введения эффективной настильной стрельбы из пушек в это время начали применять прицельные приспособления, известные под наименованием диоптров. Появление новых приборов наводки послужило толчком к построению таблиц, которыми можно было пользоваться при стрельбе из пушек на сравнительно небольшие дальности. Эту задачу разрешил Ломбар на основе предложенного Эйлером метода, с которым он познакомился в процессе работы над переводом его книги „Neue Grundsätze der Artillerie“.

Ломбар посвятил методу особое замечание к добавлению Эйлера, в котором он трактует этот вопрос. Французский артиллерист обращается к выведенной Эйлером формуле для времени движения снаряда в зависимости от значения его скорости в данной точке горизонтального участка траектории. Для определения величины конечной скорости Ломбар употребляет особую формулу. После приложения найденных зависимостей для вычисления времени прохождения снарядом 24-фунтовой пушки определенного прямолинейного отрезка траектории он знакомит читателей со значением угла вылета при проведении опытных стрельб. Одновременно Ломбар предлагает способ отыскания величины этого угла, открывая тем самым новые возможности экспериментального установления времени движения снаряда и его начальной скорости по известной дальности полета. На основе всего изложенного Ломбар находит понижения снаряда 24-фунтовой пушки на различных расстояниях от дульного среза при стрельбе зарядами весом от 1 до 8 фунтов.

В 1787 г. Ломбар[1] опубликовал таблицы стрельбы, вычисленные на основе теории Эйлера, но применительно к квадратичному закону сопротивления. Так же как и Эйлер, он рассматривал движение снаряда по горизонтальному и вертикальному направлениям независимо одно от другого.

---

[1] J. Lombard. Tables du tir des canons et des obusiers. Dijon, 1787.

Применяя ряды, Ломбар вывел формулу для угла бросания в функции от начальной скорости и дальности. Теоретические основы таблиц Ломбара были достаточно надежными только для вычисления углов бросания при небольших дальностях, т. е. для случая прицельной стрельбы. Во французской артиллерии эти таблицы успешно применялись во время революционных войн и позднее при Наполеоне. Следовательно, построение таблиц прицельной стрельбы и внедрение их в повседневную артиллерийскую практику было подготовлено Эйлером, заложившим теоретические основы для их разработки в 1745 г.

§ 14. ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЙЛЕРА ПО ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА, ВЫБРОШЕННОГО ВЕРТИКАЛЬНО ВВЕРХ

Вторая из частных задач, решенная Эйлером в 1745 г. на основе его двучленной формулы закона сопротивления воздуха, была посвящена определению элементов движения артиллерийского снаряда, выброшенного из пушки вертикально вверх. Ранее этот вопрос привлекал внимание многих ученых, в том числе и самого Эйлера.

Названная задача была одной из первых, решенных с учетом действия на снаряд силы сопротивления воздуха. Начало исследованию этого вопроса положил Ньютон (1687 г.). Наиболее интересной с точки зрения ее дальнейшего развития представляет рассмотренная Ньютоном задача при допущении, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. Ньютон свел решение к простейшим зависимостям, связывавшим время подъема тела со значением его скорости и высоту, достигаемую телом, в зависимости от скорости или от времени. Эту же задачу изучал и Гюйгенс.

Определением элементов движения выброшенного вертикально вверх снаряда занимался также Даниил Бернулли. В третьей и четвертой главах мемуара 1729 г.[1] он излагает метод для обработки опытных стрельб, поставленных генерал-фельдцейхмейстером Гинтером в 1727 г. в Петербурге. В экспериментах принимали участие действительные члены Академии наук, в том числе сам Бернулли и Эйлер.

Бернулли решал следующие три задачи: 1) по измеренному полному времени движения выброшенного вертикально вверх

---

[1] D. Bernoulli. Dissertationis de actione fluidorum in corpora solida et motu solidorum in fluidis. Comm. Acad. Imp. Petropolitanae, 1729, tt. II, III.

снаряда находил высоту, на которую снаряд поднимается в воздухе; 2) по известным высоте и полному времени полета снаряда определял время, затрачиваемое раздельно на подъем и падение; 3) из решения двух предыдущих задач находил высоту, на которую поднимается снаряд в безвоздушном пространстве, и время, требуемое для ее достижения.

Для решения перечисленных задач Бернулли разработал специальный метод, которым пользовался и Эйлер в своей первой работе по баллистике, посвященной обработке тех же петербургских опытов.

Бернулли составлял дифференциальное уравнение для снаряда, движущегося вертикально вверх под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха, которую он принимал пропорциональной квадрату скорости. Интегрирование уравнения дало ему зависимость, связывающую скорость снаряда с высотой его подъема в воздухе, а также время подъема и падения в функции от пройденного снарядом пути. Время подъема Бернулли находил в результате геометрического построения через посредство дуги, стягивающей прямой угол. В аналитической форме, к которой затем переходил Бернулли, время подъема выражалось через арксинус этой дуги. Далее Бернулли определял полное время полета в виде суммы времени, затрачиваемого снарядом на подъем и падение. Начальную скорость, входящую в это соотношение, он выражал через высоту, на которую снаряд поднимается в воздухе. В связи с тем, что эту высоту найти опытным путем чрезвычайно сложно, Бернулли предлагал отыскивать ее по полному времени полета, которое можно легко измерить. Ввиду того что решить уравнение относительно неизвестной — высоты подъема снаряда — не представлялось возможным, Бернулли разработал метод последовательных подстановок, которым весьма успешно воспользовался. В итоге Бернулли решил первую и вторую из поставленных задач. Третья решалась им без труда на основе результатов двух предыдущих и формул параболической теории.

Петербургские опыты получили довольно широкую известность в Западной Европе. После экспериментов Ньютона и вплоть до 40-х годов XVIII в. они являлись единственным опытным материалом, из которого можно было черпать данные о характере движения снаряда в воздухе. Только опыты Робинса с баллистическим маятником открыли новую страницу в экспериментальной баллистике и принесли ценные данные, которыми начали оперировать ученые. Упоминания о петербургских опытах можно встретить в работе Ламбера[1] 1766 г., опубликованной спустя 40 лет после постановки опытов.

Работа Эйлера, написанная им вскоре после проведения петербургских опытов и опубликованная, как уже говорилось, в 1862 г., была посвящена обработке их результатов. Эйлер, в сущности, решал те же задачи, что и Бернулли. При этом он пользовался тем же методом и не счел нужным приводить вывод формул, служивших ему для расчетов. Разница в проведенных Эйлером и Бернулли вычислениях состояла в том, что они брали различные значения для удельного веса железа, из которого был изготовлен снаряд.

Разбираемый мемуар Эйлера интересен, как уже отмечалось в § 12 тем, что он в этом своем раннем исследовании по баллистике придерживался квадратичного закона сопротивления воздуха. Кроме того, Эйлер впервые вводит в научный оборот обозначение *e* для основания натуральных логарифмов. Этот факт, впервые установленный Энестрёмом,[2] представляет несомненный интерес для истории математики.

Мемуар Эйлера имеет ряд погрешностей, вызванных неточной записью опытных данных в протоколе, которым он пользовался. Эти ошибки отсутствуют в работе Бернулли, заметившего и устранившего их. Возможно, что Шеррер прав, утверждая, что Эйлер видел эти дефекты и это явилось одной из причин, почему исследование не было опубликовано при его жизни.

Во 2-м добавлении к 6-му Предложению второй главы книги Робинса Эйлер возвращается к разработке вопроса, затронутого в его первом по времени мемуаре по баллистике. На этот раз он оперирует с двучленной формулой закона сопротивления воздуха, более точно отражающей действительность, чем формула Ньютона. Принятое выражение для закона сопротивления осложняло задачу сравнительно с той, которую решали Ньютон, а позднее Даниил Бернулли и сам Эйлер. Определение элементов движения выброшенного вертикально вверх снаряда на базе нового закона являлось необходимым этапом в решении основной задачи внешней баллистики в ее общей постановке.

Необходимо остановиться на некоторых особенностях метода Эйлера 1745 г. Любопытно отметить, что Эйлер руководство-

---

[1] I.-F.-H. Lambert. Anmerkungen über die Gewalt des Schiesspulvers und Wiederstandt der Luft. Dresden, 1766.

[2] G. Eneström. Verzeichnis der Schriften L. Eulers. Sahresb d. deutschen Mathem. Verein. Erganzungsb., IV, 1—2, Lief. 1910—1913.

вался схемой, использованной Бернулли в 1729 г. и заключавшейся в представлении времени подъема и падения снаряда через высоту, которую он достигает в воздухе при стрельбе вертикально вверх. Однако Эйлер отказывается от геометрических приемов, использует одну лишь аналитическую форму изложения и применяет ряды, обращаясь к численному методу решения. Эйлер использует в 1745 г. данные петербургских опытов 1727 г., что лишний раз подтверждает их важность для своего времени и скудость проводившихся в первой половине XVIII в. опытов.

Эйлер отыскивает высоту, на которую поднимается в воздухе выброшенный вертикально вверх снаряд, если ему сообщена начальная скорость $v_0=\sqrt{2gh_0}$. На снаряд действует сила тяжести и сила сопротивления воздуха, выраженная двучленной формулой (129). Кроме того, как и при выводе уравнения (123), Эйлер принимает в расчет уменьшение веса снаряда на величину, равную весу воздуха в его объеме. Он обозначает входящее в уравнение движения выражение $1-\frac{1}{nd}$ через g. Необходимо отметить, что у Эйлера ускорение силы тяжести в принятых им единицах измерения равно единице. Во избежание возможной путаницы величина $1-\frac{1}{nd}$ будет обозначаться при изложении решения Эйлера через g_1. Эйлер записывает уравнение[1] движения снаряда в виде

$$\frac{dh}{dy}=-g_1-\frac{3h\,(H+h)}{4Dn_dH}\,. \qquad (140)$$

После разделения переменных уравнение принимает вид

$$dy=-\frac{4Dn_dHdh}{4Dn_d\,g_1H+3Hh+3h^2}\,. \qquad (141)$$

Решение может сводиться к трем случаям в зависимости от соотношения между величинами, составляющими дискриминант многочлена, стоящего в знаменателе.

Первоначально Эйлер рассматривает случай, когда дискриминант обращается в нуль, т. е. $H=\frac{16}{3}Dn_dg_1$, что отвечает сферическому снаряду из железа диаметром 9.75 английских

[1] В том случае, если ускорение силы тяжести g не равно единице, уравнение (140) сохраняет тот же вид, так как g входит в выражение для h.

дюймов. В таком случае, дифференциальное уравнение записывается в форме

$$dy = -\frac{H^2 dh}{4g_1\left(\frac{1}{2}H + h\right)^2}.$$

После интегрирования и подстановки $h=0$ Эйлер находит формулу, определяющую высоту, на которую может подняться в воздухе выброшенный вертикально вверх сферический снаряд диаметром 9.75 английских дюймов:

$$Y = \frac{Hh_0}{g_1(2h_0 + H)}. \tag{142}$$

Второй случай, наиболее часто встречающийся в практике, как замечает Эйлер, когда $H > \frac{16}{3}Dn_d g_1$, т. е. отвечающий движению снаряда диаметром $D < 9.75$ английских дюймов. Полагая $\frac{4}{3}Dn_d g_1 H = \frac{H^2}{4} - K^2$, Эйлер интегрирует уравнение (141) при указанном значении дискриминанта. После подстановки вместо текущего значения h его величины, отвечающей наивысшей точке, которой достигает снаряд, т. е., принимая $h=0$, он приходит к довольно сложному выражению для искомой высоты:

$$Y = \frac{H^2 - 4K^2}{8g_1 K}\ln\left[\frac{(H+2K)(2h_0 + H - 2K)}{(H-2K)(2h_0 + H + 2K)}\right], \tag{143}$$

где K определяется из вышеприведенного условия.

Эйлер демонстрирует применение формулы на частном примере. Для железного снаряда диаметром 5.5 дюймов при начальной скорости $v_0 = 1650$ английским фут./сек. (495 м/сек.) эта высота оказывается равной 7447 рейнским футам (2308.6 м), в то время как для безвоздушного пространства она равна 40 960 рейнским футам (12 697.6 м). Эйлер оговаривается, что высота в 7447 фут. несколько меньше действительной, так как не было учтено уменьшение плотности воздуха с высотой. Здесь Эйлер одним из первых обращает внимание на необходимость принимать в расчет этот фактор для тех случаев, когда снаряд достигает значительной высоты.

Затем Эйлер переходит к выводу зависимости для времени подъема и падения снаряда, полагая, что полная высота его полета Y известна. Начало отсчета помещается в наивысшей точке, которую достигает снаряд. Ось ординат Эйлер направляет вертикально вниз. Тогда расстояние от начала координат до точки, отвечающей положению снаряда в некоторый момент времени t, будет равно $y' = Y - y$ и $dy' = -dy$, где y — расстояние, отсчитываемое от поверхности земли. В выбранной системе отсчета Эйлер получает следующие уравнения движения: для поднимающегося вверх снаряда

$$4Dn_d H dh = (4Dn_d g_1 H + 3Hh + 3h^2)\, dy' \qquad (144)$$

и для падающего снаряда

$$4Dn_d H dn = (4Dn_d g_1 H - 3Hh - 3h^2)\, dy'. \qquad (145)$$

Эйлер замечает, что уравнение (145) отличается от (144) только знаками при двух последних членах правой части. Это дает ему возможность искать решение для второго из них, а интеграл первого получить простой заменой знаков при соответствующих членах найденного решения. Для интегрирования уравнения (145) он использует приближенный метод. Эйлер основывается на том, что для очень малых y и отвечающих им небольших значениях h, или, что то же, скоростей v, сопротивлением воздуха можно пренебречь, и уравнение (145) даст $dh = g_1 dy'$, откуда $h = g_1 y'$ — выражение, которое Эйлер принимает, как первый член ряда, выбираемого в качестве искомого решения. Коэффициенты Эйлер находит после подстановки выбранного соотношения для h в уравнение (145) и приравнивания выражений при одинаковых степенях y' в правой и левой частях. В результате устанавливается сложная формула, связывающая скорость падающего снаряда, выраженную через высоту его падения в безвоздушном пространстве, с координатой y', соответствующей положению снаряда в данный момент времени t. Такой же вид имеет формула и для поднимающегося снаряда. Отличие заключается лишь в знаках при членах с нечетными степенями y'. Если для случая поднимающегося снаряда они положительны, то для падающего они будут отрицательны.

После подстановки полученных значений для v в уравнение $dt = \frac{dy'}{v}$ и интегрирования выведенных таким образом уравнений Эйлер приходит к довольно громоздким формулам для времени подъема снаряда на высоту Y и времени его падения с этой же высоты. Почленное сложение этих соотношений давало зависимость для полного времени полета снаряда

$$T = 4\sqrt{Y} + \frac{Y\sqrt{Y}}{120m^2H^2} - \frac{Y^3\sqrt{Y}}{42m^3H^3} - \frac{(1 - 256m^2)\, Y^4\sqrt{Y}}{23040m^4H^4} + \ldots, \qquad (146)$$

позволяющей найти полное время движения снаряда T по известной высоте Y, причем Эйлер обозначает $\frac{\frac{4}{3}Dn_d}{H}=m$. Эйлер предлагает искать высоту полета снаряда по известному времени его движения посредством быстро сходящегося ряда, члены которого расположены по возрастающим степеням T.

Эйлер переходит к обоснованию установленных зависимостей, для чего обращается к результатам петербургских опытов 1727 г.

С этой целью он берет полное время полета снаряда, выброшенного вертикально вверх из пушки 3-фунтового калибра при весе заряда $\omega=\frac{1}{8}$ фунта (0.72 веса снаряда). Это время было равно $T=34$ сек. Вычисленная Эйлером высота полета получилась равной $Y=4478$ рейнским футам (1388.2 м). Из ранее установленной формулы, связывающей высоту полета снаряда с его скоростью, и полагая $h=0$, а $y=Y$, Эйлер находит для начальной скорости значение $v_0=1275$ рейнским фут./сек. (395.2 м/сек.). Эта величина оказалась значительно больше полученной Бернулли в 1729 г. Такое расхождение было вполне естественным, так как в данном случае, как об этом говорит сам Эйлер, он исходил из другого выражения для закона сопротивления воздуха, чем Бернулли.

Эйлер обращает внимание на противоречие, которое выявилось при сопоставлении начальной скорости, установленной по измеренному полному времени полета выброшенного вертикально вверх снаряда, с одной стороны, и начальной скоростью, найденной на основе его теории движения снаряда в канале ствола орудия и из опытов Робинса, с другой. Если по первому способу начальная скорость была определена в 1275 фут./сек. (395.2 м/сек.), ее значение, установленное экспериментально и из решения задачи внутренней баллистики, оказалось равным 654 фут./сек. (202.7 м/сек.), т. е. величине почти вдвое меньшей. Эйлер считал результаты опытов не вызывающими сомнения. Для выяснения такого противоречия он анализирует два обстоятельства, которые могли бы привести к расхождению в величинах начальной скорости, установленных из решения задач внешней и внутренней баллистики.

Первый из факторов, который мог, по мнению Эйлера, привести к такого рода расхождению, заключался в погрешности метода, использованного для определения элементов движения выброшенного вертикально вверх снаряда; второй — в недостаточной величине „упругой силы“ пороха, на которой

Эйлер основывал определение дульной скорости, исходя из решения задачи внутренней баллистики.

Эйлер допускал, что при представлении Y в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням T, были отброшены члены, которыми, быть может, пренебрегать не следовало. Для того чтобы исключить возможную погрешность, Эйлер решает задачу, обратную только что рассмотренной: по известной начальной скорости $v_0 = 1275$ фут./сек. устанавливается полное время полета снаряда. Если воспользоваться методом, лишенным каких-либо приближений, сопоставление полученного таким путем времени с найденным из опыта даст возможность оценить точность приближенного решения. С этой целью Эйлер проводит точное интегрирование исходных дифференциальных уравнений движения. Полное время полета оказалось равным $T = 33.87$ сек., т. е. на 0.13 сек. меньше найденного из опыта. Отсюда Эйлер заключает, что приближение в его методе вполне достаточно.

Эйлер пытается объяснить расхождение в значении начальной скорости с точки зрения неправильности выбора величины „упругой силы" пороха. Если бы значение этой характеристики было взято намного больше, чем принятое Робинсом в 1000 атм., получили бы, считал Эйлер, вдвое большую величину дульной скорости, что противоречит опытам английского артиллериста. Приводимая Эйлером таблица, относящаяся к выбору наивыгоднейшего веса заряда и рациональной длины ствола, свидетельствует, по его мнению, о том, что дульная скорость в 1275 фут./сек. может быть получена при весе заряда не менее чем в 0.5 фунта. Не может сказаться на величине начальной скорости, определяемой по полному времени полета снаряда, и уменьшение плотности воздуха с высотой, что не было принято во внимание при вычислениях. Для высоты в 4478 фут., которую достигал снаряд в рассматриваемом случае, плотность меняется сравнительно немного. Согласно точки зрения многих ученых, как говорит об этом Эйлер, плотность воздуха на такой высоте уменьшается всего на 1/5 сравнительно с ее величиной у поверхности земли.

Эйлеру так и не удалось раскрыть причины обнаруженного противоречия. Для того чтобы найти объяснение этого расхождения, следовало бы провести специальное исследование: определить начальную скорость принятыми теперь методами внешней и внутренней баллистики.

В §§ 13 и 14 были разобраны две частные задачи внешней баллистики, которые решил Эйлер в 1745 г. Это были более простые задачи, являвшиеся лишь этапом в решении более сложной проблемы — установлении траектории снаряда, выброшенного под углом к горизонту.

§ 15—16. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ ПО МЕТОДУ ЭЙЛЕРА 1745 г. НА ОСНОВЕ ЕГО ДВУЧЛЕННОЙ ФОРМУЛЫ ЗАКОНА СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА

В 1745 г. Эйлер возвращается к решению основной задачи внешней баллистики в ее общей постановке. Им было найдено, что сила сопротивления воздуха выражается совершенно иной аналитической зависимостью, чем та, которой пользовались ранее. Результаты экспериментов Робинса Эйлер представил посредством двучленной формулы, удовлетворительным образом, по тому времени, отражавшей действительность. Представляло интерес найти метод определения траектории артиллерийского снаряда на основе этого нового закона. Задача все еще не назрела для нужд боевого использования артиллерии. 1745 год лишь предшествовал периоду конструирования орудий, обладавших значительными начальными скоростями и имевшими возможность вести стрельбу под большими углами возвышения.

В методе Эйлера 1745 г. по сравнению с его методом 1736 г. заметно существенное усовершенствование в средствах математического аппарата. Он отказывается от представления действующих на снаряд сил в виде составляющих по касательной к траектории и по нормали к ней и обращается к составлению уравнений для прямоугольных координатных осей. В сущности, Эйлер близко подходит к принятой теперь форме представления дифференциальных уравнений движения. Его уравнения легко принимают привычный для читателя вид, если высоту h, посредством которой Эйлер выражал скорость снаряда, заменить по формуле $h=\frac{v^2}{2g}$. Начало координат выбиралось в точке вылета. Ось абсцисс направлялась по горизонтальной прямой в сторону движения снаряда, а ось ординат — вертикально вверх. В выбранной системе отсчета Эйлер записывал уравнения движения в следующей форме:

$$d(h\cos^2\theta)=\frac{3h(H+h)\cos\theta}{4Dn_dH}\,dx, \qquad (150)$$

$$d(h\sin^2\theta)=-g_1dy-\frac{3h(H+h)\sin\theta}{4Dn_dH}dy. \qquad (151)$$

Принимая во внимание, что $dx = \cos\theta\, ds$ и $dy = \sin\theta\, ds$, он переписывает уравнения в виде

$$\cos^2\theta\, dh - h\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{3h(H+h)\cos^2\theta}{4Dn_dH}ds, \tag{152}$$

$$\sin^2\theta\, dh + 2h\sin\theta\cos\theta\, d\theta = -g_1\sin\theta\, ds - \\ -\frac{3h(H+h)\sin^2\theta}{4Dn_dH}ds. \tag{153}$$

После почленного деления уравнений Эйлер получает соотношение, связывающее только две переменные h (или скорость v) и угол наклона касательной θ, т. е. приходит к уравнению годографа скоростей

$$2Dn_dg_1H\cos\theta\, dh = 4Dn_dg_1Hh\sin\theta\, d\theta + 3h^2(H+h)\, d\theta. \tag{154}$$

Далее Эйлер обращается к нижеприводимой зависимости (155), которую он выводит из уравнений (152) и (153) после исключения

$$h = -\frac{g_1\cos\theta\, ds}{2d\theta}. \tag{155}$$

Эйлер замечает, что если бы удалось определить из уравнения (154) h в функции от θ в явном виде, уравнение (155) дало бы соотношение, связывающее переменные s и θ,

$$ds = -\frac{2hd\theta}{g\cos\theta},$$

откуда легко было бы получить дифференциальные уравнения для определения координат x и y в функции от θ

$$dx = -\frac{dhd\theta}{g_1}$$

и

$$dy = -\frac{2h\,\mathrm{tg}\,\theta\, d\theta}{g_1}.$$

Эйлер прерывает здесь решение задачи, основанное на аналитическом методе, отказываясь от точного интегрирования уравнения годографа. Отметив направление, по которому можно искать решение, следуя этому пути, он переходит к определению уравнения траектории с помощью численных методов.

Эйлер берет дифференциальные уравнения (152) и (153), включающие три переменные h, s и θ. Складывая эти уравнения почленно, он получает

$$dh = -g_1 dy - \frac{3h(H-h)}{4Dn_a H}. \tag{156}$$

Вводя далее переменную $p = \operatorname{tg}\theta$, Эйлер представляет соотношение (155) в виде

$$h = \frac{g_1(1+p^2)\,dx}{2dp}. \tag{157}$$

Для того чтобы проинтегрировать уравнение (156), в котором переменные не могут быть отделены, Эйлер выражает h из уравнения (157) через некоторую функцию ζ, которой он пользовался для решения основной задачи внешней баллистики в 1736 г.,

$$\frac{dp}{dx} = \zeta. \tag{158}$$

После подстановки h и дифференциала dh, получаемого из соотношения (157), в уравнение (156) Эйлер находит

$$\frac{4}{3} Dn_a H d\zeta = H\sqrt{1+p^2}\,dp - \frac{g_1(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2H\zeta}. \tag{159}$$

Теперь Эйлер останавливает внимание на том, что если бы можно было выразить переменную ζ через p в явном виде, легко было бы определить координаты траектории, пользуясь уже известными по работе 1736 г. зависимостями

$$x = \int \frac{dp}{\zeta} \tag{160}$$

и

$$y = \int \frac{p\,dp}{\zeta}. \tag{161}$$

Выражение для ζ в функции от p можно было бы найти из дифференциального уравнения (159), и именно на его решении Эйлер и сосредоточивает усилия. Однако провести точное интегрирование этого уравнения он считает невозможным, почему обращается к его решению посредством приближенных методов. С этой целью Эйлер вводит новые переменные, которые связаны с p и ζ следующими соотношениями

$$p = \frac{\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}, \quad \zeta = \frac{1}{\eta}.$$

Обозначив $\frac{4}{3}Dn_dH = K$, а $\frac{2H}{g_1} = K_1$, он придает уравнению (159) следующую форму

$$K(1-\nu^2)^3 d\eta + \eta^2(1-\nu^2)\,d\nu - \frac{1}{K_1}\eta^3 d\nu = 0. \qquad (162)$$

Эйлер ищет решение в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням переменной ν

$$\eta = a + A\nu + B\nu^2 + C\nu^3 + \ldots \qquad (163)$$

Коэффициенты определяются после подстановки значения η в уравнение (162) и приравнивания нулю выражений, стоящих при всех степенях переменной ν. Далее Эйлер оперирует с зависимостями (160) и (161), которые после введения новых переменных ν и η и подстановки вместо η найденного выше решения в виде ряда (163) примут вид

$$x = \int \frac{(a + A\nu + B\nu^2 + C\nu^3 + \ldots)\,d\nu}{(1-\nu^2)^{\frac{2}{3}}}, \qquad (164)$$

$$y = \int \frac{(a + A\nu + B\nu^2 + C\nu^3 + \ldots)\,\nu d\nu}{(1-\nu^2)^2}. \qquad (165)$$

После интегрирования и определения произвольных постоянных из начальных условий Эйлер находит довольно сложные зависимости для абсциссы x и ординаты y в виде тригонометрических рядов.

Анализ полученного решения приводит Эйлера к выводу, что ряды, выражающие координаты траектории, являются расходящимися. Для того чтобы найти удовлетворительное решение, Эйлер возвращается к дифференциальному уравнению (162) и заменяет в нем переменную ν ее выражением $\nu = \sin\theta$, после чего получает

$$K\cos^5\theta d\eta + \eta^2\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{K_1}\eta^3 d\theta. \qquad (166)$$

Решение этого уравнения Эйлер отыскивает в виде

$$\eta = a_1 + P(\theta) + Q(\theta) + \ldots,$$

где $P(\theta)$ и $Q(\theta)$ — подлежащие определению функции угла θ.

После подстановки значения η в уравнение (166) и сравнения коэффициентов при аналогичных выражениях с переменной θ Эйлер находит зависимости, определяющие $P(\theta)$ и $Q(\theta)$. Воспользовавшись выражениями для x и y (160) и (161) и имея в виду, что $p=\operatorname{tg}\theta$, а $\zeta=\frac{1}{\eta}$, Эйлер получает после интегрирования по частям

$$x=\int\frac{\eta d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\eta\sin\theta}{\cos\theta}-\int\frac{\sin\theta d\eta}{\cos\theta} \tag{167}$$

и

$$y=\int\frac{\eta\sin\theta d\theta}{\cos^3\theta}=\frac{\eta}{2\cos^2\theta}-\frac{1}{2}\int\frac{d\eta}{\cos^2\theta}. \tag{168}$$

Далее Эйлер, обозначая через

$$Z=\int\frac{d\theta}{\cos\theta},$$

проводит весьма трудоемкое интегрирование установленных им ранее уравнений с тем, чтобы найти $P(\theta)$ и $Q(\theta)$. При этом Эйлер берет некоторые интегралы вида $\int\frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}$, т. е. находит выражения, обозначаемые теперь через функцию $\xi_n(\theta)$, необходимые для вычисления квадратур в общем методе Эйлера. По-видимому, выполненная Эйлером в 1745 г. работа по интегрированию функций указанного вида, т. е. раскрытию функции $\xi_n(\theta)$, не была использована, и эти выкладки проводились в дальнейшем заново.

Эйлер обращает внимание на то, что при весьма малом сопротивлении воздуха или при его отсутствии функции $P(\theta)$ и $Q(\theta)$ обращаются в нуль. В таком случае $\eta=a_1$ и траектория принимает вид параболы, что он усматривает из выведенных соотношений для x и y.

В том случае, когда сопротивление воздуха не очень велико, Эйлер считает возможным ограничиться для η вторым членом, т. е. положить

$$\eta=a_1+P(\theta),$$

после чего зависимости, определяющие координаты точек траектории, записываются им в следующем виде:

$$x=E+\frac{a_1\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{P(\theta)\sin\theta}{\cos\theta}-\int\frac{\sin\theta dP(\theta)}{\cos\theta}$$

и

$$y=F+\frac{a_1}{2\cos^2\theta}+\frac{P(\theta)}{2\cos^2\theta}-\frac{1}{2}\int\frac{dP(\theta)}{\cos^2\theta}.$$

После замены функций $P(\theta)$ найденным ранее выражением и определения постоянных a_1, E и F Эйлер приходит к формулам для координат точек траектории, которые имеют вид суммы членов, содержащих тригонометрические функции угла θ.

Получив формулы для траектории снаряда в параметрической форме, Эйлер указывает способ определения дальности. Из содержания метода, изложенного Эйлером весьма сжато, и из анализа выведенных им зависимостей для x и y становится очевидной вся непрактичность найденного решения.

Эйлер видел сложность своего метода. Пытаясь упростить решение, он дает уравнение траектории, непосредственно связывающее ординату с абсциссой, причем члены с абсциссой x расположены по ее возрастающим степеням. При удержании членов, содержащих наивысшую степень абсциссы x, равную двум, уравнение представляет параболическую траекторию. Приводя уравнение траектории в виде ряда без вывода, Эйлер отмечает, что оно имеет место только тогда, когда сопротивление воздуха движению артиллерийского снаряда невелико. Формулу для дальности Эйлер выводит из этого уравнения, приравнивая его левую часть, т. е. y, нулю и ограничиваясь членами, содержащими x не выше, чем в третьей степени. В результате он находит сравнительно простую формулу, пригодную лишь для незначительных скоростей:

$$X = 2h_0 \sin 2\theta_0 \left[1 - \frac{(H + h_0)\sin\theta_0}{Dn_dH}\right], \tag{169}$$

где $2h_0 \sin 2\theta_0$ выражает дальность при стрельбе в безвоздушном пространстве.

Эйлер сопоставляет между собой дальности, получаемые по приведенной формуле для движения снаряда в воздухе и в пустоте. Это приводит его к заключению, что с увеличением угла бросания θ_0 отношение между дальностями, найденными в двух названных предположениях, возрастает.

В одном из своих комментариев Ломбар отмечает, что формулу, которой пользуется Эйлер, едва ли можно признать правильной. Дальности при стрельбе в безвоздушном пространстве и в воздухе обращаются в нуль при $\theta_0 = 0°$ и $\theta_0 = 90°$. Говорить о возрастающем с углом бросания отношении этих дальностей нельзя. Очевидно, пишет Ломбар, оно достигает наибольшей величины при каком-то промежуточном значении угла бросания θ_0.

Формула (169) приводит Эйлера к тому же выводу, который был им впервые получен в 1736 г.: при движении снаряда в воздухе угол наибольшей дальности не равен 45°, а имеет несколько меньшее значение. Из зависимости (169) он определяет величину этого угла приравниванием нулю производной, взятой от χ по углу θ_0, который в данном случае рассматривается как переменная величина

$$\sin \theta_{0\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{h_0 (H - h_0)}{8 D n_d H}.$$

Анализ этой зависимости приводит Эйлера к выводу, что угол наибольшей дальности положителен только в том случае, если

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{h_0 (H - h_0)}{8 D n_d H}.$$

Отсюда Эйлер заключает, что все установленные им формулы справедливы только тогда, когда Dn_d значительно больше h_0. В опытах Робинса наблюдалась как раз противоположная картина, почему проведенные Эйлером приближения, как это отмечает он сам, к ним не приложимы: „Но эти формулы не могут быть употребляемы, кроме тех случаев, когда nc (Dn_d, — *А. М.*) значительно больше b (h_0, — *А. М.*) во всех опытах, приведенных автором, b (h^0 — *А. М.*) значительно больше nc (Dn_d, — *А. М.*), поэтому выполненное здесь приближение не может быть использовано ни в одном из примеров, которые приведены автором. По этой причине мы вынуждены прервать здесь это исследование и предоставить автору полное изложение этого вопроса, что он и обещал дать нам в особой работе“.[1]

Ломбар оценивает решение Эйлера в следующих словах: „Если вычисления, которые были предприняты ученым комментатором в этом замечании, являются доказательством широты его гения, их результаты показывают в то же время, как трудно определить траекторию снарядов при гипотезе сопротивления, пропорционального $\frac{1}{2}h + \frac{h^2}{2H}$. Г. Робинс не выполнил обязательств, которые он взял в этом отношении, и г. Эйлер, возвратившись к этому вопросу в «Мемуарах Берлинской Академии», в 1753 г. отказался от этой формулы, чтобы придерживаться закона сопротивления, пропорционального квадрату скоростей, все же принимая абсолютную величину силы сопротивления большей, чем по ньютонианской теории. Как бы то ни было, знание траектории при некоторых обстоятельствах полезно, но, к счастью, можно без этого обойтись для стрельбы из пушки вследствие того, что при этой стрельбе, проводимой почти всегда под очень малыми углами, можно

[1] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 391.

всегда приблизительно знать длину дуги, описываемую ядром, и использовать сказанное в первом замечании этого Предложения или в примечании, которое за ним следует“.[1]

Высказывание Ломбара говорит, в частности, о том, что по крайней мере во французской артиллерии не было еще практической необходимости составления таблиц для закона сопротивления, выраженного двучленной формулой. Однако в других государствах Европы, как например в России, еще в 50-х годах XVIII в. были приняты такие орудия, как единороги, обладавшие сравнительно большой начальной скоростью и имевшие возможность вести стрельбу под значительными углами возвышения. Для орудий такого типа были нужны таблицы стрельбы, вычислить которые по методу Эйлера—Ломбара 1745—1783 гг. (§ 13) было нельзя.

В 1745 г. Эйлер столкнулся со значительно более сложной задачей, чем та, которую решал Иоганн Бернулли в 1719 г. Эйлер получил чрезвычайно громоздкое решение и справедливое только для случая, когда сопротивление воздуха невелико и, вообще говоря, нет необходимости в употреблении двучленного закона. Значение исследования Эйлера заключалось в том, что он систематически использовал численные методы. Тем самым было положено начало серии работ других ученых, ставивших перед собой цель решить основную задачу внешней баллистики для случая квадратичного закона сопротивления. Это были исследования Ламберта (1766 г.), Борда (1769 г.), Темпельгофа (1781 г.), Лежандра (1782 г.) и Крафта (1786 и 1787 гг.).

В середине XIX в., когда в артиллерии стали употребительны скорости, для которых формула Ньютона уже совсем не отвечала действительности, ученые обратились к решению основной задачи на базе двучленного закона сопротивления. Возможно, что идея использования двучленной формулы была подсказана изысканиями Эйлера. Его метод был известен баллистикам начала XIX в. Так, Обенхейм писал: „...неутомимый Эйлер, пораженный важностью вопроса, подчинил всю эту работу глубине ученого анализа. Если его многочисленные вычисления не дали почти ничего непосредственно приложимого к практике, ни даже ничего законченного, это объясняется тем, что в качестве основы для расчетов он имел лишь эксперименты английского автора, произведенные в малом

---

[1] Nouveaux principes d'artillerie de M. Benjamin Robins; commentés par M. Léonard Euleur, traduits de l'allemand avec des notes, par M. Lombard. Dijon, 1783, стр. 479.

объеме, так же как различные гипотезы, которые были ему подсказаны в результате их изучения".[1]

В 1848 г. крупный французский баллистик Дидион[2] предложил метод решения основной задачи внешней баллистики, основанный на приближенном представлении уравнений движения и точном их интегрировании. В качестве закона сопротивления была избрана двучленная формула, в которой первый член пропорционален квадрату, а второй — кубу скорости. В 1855 г. сардинский артиллерист Сен-Робер воспользовался методом Дидиона для случая, когда закон сопротивления выражен двучленной формулой Эйлера. Приступая к изложению своего решения, Сен-Робер подчеркивал слабые стороны методы Эйлера: „Эйлер в своих комментариях к «Новым принципам артиллерии» Робинса пытался определить траекторию снарядов в предположении, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату и четвертой степени скорости. Но ряды, к которым он пришел, не являясь вообще сходящимися, не могли служить для разрешения вопроса. Мы видим, что этот великий математик, возвращаясь к этому же предмету в «Мемуарах Берлинской Академии» (1753 г.) отказался от этой формулы сопротивления, чтобы обратиться к общепринятому квадратичному закону".[3]

В 1859 г. Н. В. Маиевский,[4] так же как и Сен-Робер, строил решение основной задачи на методе Дидиона для случая, когда сила сопротивления воздуха выражена двучленной формулой Эйлера. В дальнейшем, после введения зональных одночленных формул, отпала необходимость поисков более совершенного способа решения основной задачи внешней баллистики при более сложных выражениях для сопротивления воздуха.

На протяжении почти 20 лет, в течение которых Эйлер работал над основной задачей внешней баллистики, он последовательно совершенствовал метод ее решения. В 1753 г. ему удается прийти к наиболее ценным результатам в этом направлении, сохранившим значение по настоящее время.

---

1 A. M. D' Obenheim. Balistique. Indication de quelques expériences propres à compléter la théorie du mouvement des projectiles de l'artillerie. Strasbourg, 1814, стр. 3.

2 I. Didion. Traité de balisque. Paris, 1848.

3 P. Saint-Robert. Del moto d'projetti ne' mezzi resistenti — Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, 1855.

4 Н. В. Маиевский. Курс внешней баллистики. 1859 (литография Михайловской артиллерийской академии).

§ 17—18. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЙЛЕРА 1753 г. И ЕГО МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО ЗАКОНА СОПРОТИВЛЕНИЯ

В середине XVIII в. задача по отысканию метода определения траектории артиллерийского снаряда в воздухе ставилась несколько по иному, чем в начале столетия. До 1719 г., когда Иоганн Бернулли опубликовал свой первый мемуар, посвященный решению основной задачи внешней баллистики, эта проблема представляла интерес прежде всего для математики и механики. После исследований Иоганна Бернулли и Эйлера задачу по вычислению траектории материальной точки можно было считать решенной. Изыскания обоих ученых подготовили почву для создания удобного для приложений метода вычисления пучка траекторий, необходимого для составления таблиц стрельбы.

Во второй половине XVIII в. в артиллерии были проведены реформы, поставившие перед баллистикой задачу по составлению таблиц стрельбы, основанных уже не на параболической теории, а рассчитанных с учетом действия на снаряд силы сопротивления воздуха. Преобразования касались прежде всего усовершенствования материальной части. В ряде государств Европы на вооружение были приняты железные лафеты, что дало возможность вести стрельбу из пушек под значительными углами возвышения. Одновременно были предприняты работы по созданию универсальных орудий — единорогов, которые обладали сравнительно большой начальной скоростью [1] и могли вести стрельбу как под малыми, так и под большими углами возвышения. Для полевых единорогов углы возвышения достигали 22°, а для единорогов на корабельном лафете — 45°. К концу XVIII в. относится и значительное улучшение качества изготовления орудий, что повлекло к снижению рассеивания снарядов в дальности. Траектория артиллерийского снаряда, вычисленная без учета действия сопротивления воздуха, уже настолько сильно отклонялась от действительной, что пользоваться параболической теорией для стрельбы из пушек, особенно под большими углами возвышения, было нельзя. Требовался метод, который обеспечил бы возможность рассчитать таблицы стрельбы для случая движения снаряда в воздухе так же просто, как и для безвоздушного пространства.

---

[1] Проведенные расчеты показывают, что начальная скорость 2-пудового единорога достигает 425 м/сек. При такой начальной скорости дальность стрельбы под углом бросания в 45° должна составлять около 5000 м, что подтверждается выявленными архивными материалами.

Необходимость решения задачи ощущалась многими учеными Европы. В 1756 г. видный французский математик и механик Борда пишет работу, открывшую целое направление в методах решения основной задачи внешней баллистики. Выходят в свет исследования Ламберта, Лежандра и Темпельгофа, строивших свои методы на численном решении уравнений основной задачи. К этому же периоду относится и работа офицера прусской артиллерии Ц. Г. Б. Якоби, представленная 20 июля 1752 г.[1] Берлинской Академии наук. В 1755 г. публикуется мемуар Эйлера, имевший среди других его работ по баллистике наибольшее значение и оказавший сильное влияние на развитие этой области артиллерийской науки. Исследование полностью решило задачу по вычислению пучка траекторий в том же направлении, как она была разрешена ранее для одной траектории Иоганном Бернулли и самим Эйлером.

Во вступительной части своей работы Эйлер подчеркивает сильное расхождение между действительной траекторией и параболической. Характеризуя изыскания отдельных ученых по решению основной задачи внешней баллистики, Эйлер останавливается на невозможности воспользоваться результатами Иоганна Бернулли для практики: „Voilà donc ce grand problème résolu, et même très bien résolu, il ya longtemps. Cependant la solution, quelque bonne qu'elle soit dans la théorie, est pourtant telle, qu'on n'en a pû tirer jusqu'ici le moindre secours pour la pratique, et pour en corriger la fausse théorie fondée sur la parabole, à laquelle les Artilleristes sont encore obligés de s'en tenir, quoiqu'ils n'en connaissent que trop l'insuffisance. Ainsi il est certain que cette solution n'a apporté aucun avantage réel à l'avancement de l'Artillerie, et il semble qu'elle n'a servi qu'á mieux assurer les gens du métier de la fausseté de leurs principes tirés de la nature de la parabole auxquels ils ne laissent pas d'être réduits encore. C'est bien quelque chose que de savoir, que les règles ordinaires trompent; mais à moins qu'on ne sache assez précisement, de combien elles trompent en chaque cas, l'avantage se réduit à fort peu de chose".[2] („И вот эта важная проблема разрешена и даже очень хорошо разрешена уже давно (Иоганном Бернулли,— А. М.). Тем не менее решение, как бы оно ни было хорошо в теории, все же таково, что до сего времени не смогли из него извлечь ни малейшей пользы для практики и для исправления ложных положений, осно-

---

[1] Шеррер упоминает о мемуаре Якоби в вводной статье к XIV т. полного собрания сочинений Эйлера „Opera omnia" (1922 г.).

[2] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 414.

ванных на параболической теории, которой артиллеристы вынуждены придерживаться, хотя они слишком хорошо знают ее неудовлетворительность. Таким образом, очевидно, что это решение не принесло никакой реальной пользы совершенствованию артиллерии и, кажется, что это решение только убедило профессионалов в ошибочности их правил, извлеченных из свойств параболы, которыми они еще обязаны руководствоваться. Знание того, что обычные правила вводят в заблуждение, уже коечто дает, но пока не знают достаточно точно, насколько они ошибочны в каждом случае, преимущество оказывается слишком малым").

В качестве закона сопротивления Эйлер выбирает квадратичную формулу. Ему было хорошо известно, как это видно из §§ 11 и 12, что закон Ньютона далек от действительности для скоростей, какими обладают артиллерийские снаряды. Конечно, было бы более желательно взять для закона сопротивления двучленную формулу. Эйлер видел неточность своего предположения, почему отводил большое место обоснованию возможности использования формулы Ньютона для определенного диапазона скоростей. Для того чтобы выбранная им формула отражала действительность более точно, он взял коэффициент пропорциональности втрое большим, чем у Ньютона.

Эйлер представляет ускорение силы сопротивления воздуха в следующем виде:

$$J = \frac{h}{c}, \tag{170}$$

где $c = \frac{4D}{3} \cdot \frac{\delta}{\Pi}$, причем Π — плотность воздуха, а δ — удельный вес материала, из которого изготовлен снаряд. В принятых теперь обозначениях

$$J = b_2 v^2.$$

Любопытно отметить, что Эйлер обращает внимание на зависимость силы сопротивления от температуры, имея в виду изменяющуюся с температурой плотность воздуха. Это обстоятельство он рекомендует принимать в расчет при вычислении величины c для каждой задачи.

Составление таблиц стрельбы с учетом действия на снаряд силы сопротивления воздуха сильно осложняется, как совершенно справедливо замечает Эйлер, сравнительно с их вычислением на основе параболической теории. Траектория снаряда в безвоздушном пространстве определяется начальной скоростью и углом бросания. Кроме того, чтобы найти ее при движении снаряда в воздухе, необходимо знать вес и диаметр снаряда. Построение таблиц для всех случаев сочетания возможных значений начальной скорости, угла бросания, веса и диаметра снаряда Эйлер считал немыслимым ввиду их чрезвычайной громоздкости. Для того чтобы обойти это затруднение, он рекомендует систематизировать все возможные варианты по определенному принципу и свести вычисление таблиц к расчету определенного числа типичных траекторий с тем, чтобы все другие задачи решать интерполированием.

Эйлер строит решение по вполне определенной программе.

Первый этап, ясно очерченный в его исследовании, заключается в выводе зависимостей, с помощью которых можно в принципе найти все элементы движения. В этой части исследования Эйлер интегрирует дифференциальные уравнения движения. В задачу второго этапа входит изучение свойств траектории снаряда в воздухе посредством выведенных зависимостей, установление принципа для систематизации всех случаев в определенное ограниченное число групп и, как итог, разработка схемы таблиц, пригодной для практического использования. Наконец, на третьем этапе создается удобный для приложений метод вычисления траекторий, посредством которого легко рассчитать таблицы по предложенной ранее схеме.

На первом этапе Эйлер обращается к составлению и интегрированию дифференциальных уравнений движения снаряда — уравнений основной задачи внешней баллистики. Так же как и в своих ранних работах, он рассматривает движение материальной точки под действием силы сопротивления воздуха, направленной в сторону, противоположную вектору скорости, и под действием силы тяжести, уменьшенной на величину веса воздуха в объеме снаряда. Эйлер пользуется прямоугольной системой координат, выбирая ее начало в вершине траектории и направляя ось абсцисс по горизонтальной прямой в сторону движения снаряда, а ось ординат — вертикально вниз. Уравнения движения он записывает в форме, близкой к употребляемой теперь. Для нисходящей ветви траектории уравнения имеют вид

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{h}{c}\cdot\frac{dx}{ds} \tag{171}$$

и

$$2\frac{d^2y}{dt^2} = g_1 - \frac{h}{c}\cdot\frac{dy}{ds}. \tag{172}$$

Заменяя в уравнениях (171) и (172) высоту h или скорость v, которой снаряд достигает, падая с этой высоты в безвоздушном пространстве, через $\frac{ds}{dt}$, и вводя далее переменную $p = \operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx}$, Эйлер представляет эти уравнения в виде

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{c}\sqrt{1+p^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad (173)$$

и

$$2\frac{pd^2x}{dt^2} + 2\frac{dxdp}{dt^2} = g_1 - \frac{1}{c}p\sqrt{1+p^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \qquad (174)$$

Интегрирование уравнений (173) и (174) проводится совершенно иначе, чем это делается теперь при изложении общего метода Эйлера. Не прибегая к составлению уравнения годографа скоростей, Эйлер пользуется зависимостью $v = \frac{ds}{dt}$. При интегрировании уравнения Эйлер в отличие от своего решения 1736 г. и решения Бернулли 1719 и 1721 гг. не принимает постоянную интегрирования равной нулю. В результате он приходит к следующим формулам, определяющим элементы движения для нисходящей ветви траектории; эти соотношения, как будет показано ниже, идентичны с принятыми в настоящее время:

$$dx = \frac{dp}{C + \frac{1}{c}\int\sqrt{1+p^2}dp}, \qquad (175)$$

$$dy = \frac{pdp}{C + \frac{1}{c}\int\sqrt{1+p^2}dp}, \qquad (176)$$

$$ds = \frac{\sqrt{1+p^2}dp}{C + \frac{1}{c}\int\sqrt{1+p^2}dp}, \qquad (177)$$

$$\sqrt{\frac{g_1}{2}}dt = \frac{dp}{\sqrt{C + \frac{1}{c}\int\sqrt{1+p^2}dp}}, \qquad (178)$$

$$h = \frac{\frac{1}{2}g_1(1+p^2)}{C + \frac{1}{c}\int\sqrt{1+p^2}dp}. \qquad (179)$$

Интеграл, стоящий в знаменателе правой части формул (175—179), выражает, как замечает Эйлер, длину дуги параболы. После интегрирования Эйлер сводит его к выражению, содержащему тригонометрические функции угла θ и его логарифма. Следует тут же заметить, что этот интеграл есть не что иное, как функция $\xi_2(\theta)$, так как при определении элементов траектории интеграл берется от ее вершины, где угол $\theta=0$, до некоторой точки траектории, которой отвечает угол θ. Иными словами

$$\int_0^p \sqrt{1+p^2}dp=\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^3\theta}=\xi_2(\theta).$$

Стало быть, зависимости (175—179) позволяют в принципе найти для любой точки нисходящей ветви траектории, в которой угол можно считать известным, ее абсциссу и ординату, длину дуги между вершиной и данной точкой, время, в течение которого снаряд проходит этот участок, и его скорость в выбранной точке.

Для того чтобы исключить из знаменателя формул (175)—(179) постоянную C, Эйлер принимает[1]

$$C=\frac{Q_n}{c}$$

и обозначает

$$\int_0^p \sqrt{1+p^2}dp=P.$$

В результате, из формул (175—179) получаются следующие зависимости, определяющие элементы движения для нисходящей ветви траектории:

$$x=c\int_0^p \frac{dp}{Q_n+P}, \tag{180}$$

$$y=c\int_0^p \frac{pdp}{Q_n+P}, \tag{181}$$

$$s=\ln\frac{Q_n+P}{Q_n}, \tag{182}$$

---

[1] Вместо Q_n у Эйлера фигурирует буква n. Для того чтобы не пользоваться этим обозначением, употребляемым теперь в другом смысле, введено обозначение Q_n, так как параметр n у Эйлера является не чем иным, как это будет видно из дальнейшего, как параметром формы.

$$t = \sqrt{\frac{2c}{g_1}} \int_0^p \frac{dp}{\sqrt{Q_n + P}}, \tag{183}$$

$$h = \frac{1}{2} g_1 c \frac{1 + p^2}{Q_n + P}. \tag{184}$$

Эти же зависимости служат Эйлеру при вычислении элементов движения восходящей ветви траектории, для чего он заменяет P на $-P$, так как в восходящей ветви угол θ принимается отрицательным.

Эйлер анализирует влияние параметров, входящих в установленные соотношения, на характер и размеры траектории. Прежде всего он фиксирует наличие в формулах трех параметров g_1, c и Q_n. Первый из них — g_1 — зависит от соотношения между удельным весом материала, из которого изготовлен снаряд, и плотностью воздуха. Как правильно замечает Эйлер, он не влияет на вид и размеры траектории и определяет лишь величину кинематических элементов движения t и h. Параметр c, зависящий от формы снаряда, его диаметра и веса, входит лишь в качестве множителя и сказывается только на размерах траектории и не может осложнить определение элементов в движении. Эйлер пишет: „Or la troisième quantité n, qui dépend de la vitesse imprimée au corps, affecte tellement nos formules, qu'on est obligé d'en calculer les valeurs à part pour toutes les différentes valeurs de n". („Но третья величина n (Q_n, — *А. М.*), которая зависит от скорости, сообщенной телу, настолько сказывается на наших формулах, что вынуждены вычислять их значения отдельно для всех различных значений n (Q_n, — *А. М.*)").[1]

В приведенных словах исчерпывается все, что пишет Эйлер о зависимости параметра Q_n от скорости, сообщаемой снаряду. В сущности, он не раскрывает смысла этой величины.

Ясно, что, создавая свой метод и особенно прилагая его для вычисления таблицы, о которой речь будет идти ниже, он не мог не знать, что скрывается под обозначением Q_n. Однако более обстоятельно, чем только что было продемонстрировано, Эйлер на сущности этого параметра остановиться не счел нужным. Значение величины парамета Q_n было раскрыто вскоре после выхода в свет мемуара Эйлера. В 1764 г. Гревениц, осуществляя намеченный Эйлером план вычисления таблиц, посредством которых предполагалось решать задачи стрельбы, о чем

---

[1] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 425.

подробнее будет сказано ниже, обратил внимание на уточнение содержания параметра.[1]

Гревениц берет формулу (184), установленную Эйлером для восходящей ветви траектории, для которой функция $P < 0$. Полагая начальную скорость снаряда, а следовательно, отвечающую ей высоту падения в безвоздушном пространстве, известной, так же как и угол бросания Q_n, Гревениц записывает упомянутое соотношение в виде

$$h_0 = \frac{1}{2} g_1 c \frac{1 + p_0^2}{Q_n - P_0},$$

откуда

$$Q_n = \frac{g_1 c (1 + p_0^2)}{2h_0} + P_0.$$

После подстановки вместо g_1 и c их значений[2] и представления высоты h_0 через отвечающую ей начальную скорость v_0

[1] H. F. Graewenitz. Akademische Abhandlung von der Bahn der Geschützkugeln nebst practischen Tabellen und Regeln die Schussweiten zu finden. Rostok, 1764.

[2] Параметр c можно выразить посредством принятой теперь величины b_2, исходя из следующих соображений. Выражение для ускорения силы сопротивления воздуха Эйлер записывает, как было показано, в виде $J = \frac{3\Pi h}{4D\delta}$, причем он берет здесь вместо массы снаряда его вес, так как принимает единицы измерения, для которых ускорение силы тяжести обращается в единицу. Эйлер вводит обозначение $c = \frac{4D}{3} \cdot \frac{\delta}{\Pi}$ и $J = \frac{h}{c}$.

Если выразить h через скорость снаряда v и принять единицы измерения, для которых сила тяжести g не обращается в единицу, ускорение силы сопротивления воздуха запишется в виде

$$J = \frac{3\Pi}{2 \cdot 4D\delta} v^2$$

или после введения, как и у Эйлера, постоянной c,

$$J = \frac{v^2}{2c}.$$

В принятой теперь форме

$$J = b_2 v^2,$$

где

$$b_2 = \mathrm{Ai} \frac{D^2}{q} \Pi_{\text{ср}}.$$

В таком случае

$$c = \frac{1}{2b_2}.$$

легко получить после замены $1+p_0^2=\frac{1}{\cos^2\theta_0}$ и $P_0=\xi_2(\theta_0)$ в принятых теперь обозначениях выражение для постоянной

$$Q_n=\frac{g}{2b_2v_0^2\cos^2\theta_0}+\xi_2(\theta_0),$$

откуда становится ясным, что постоянная Q_n является не чем иным, как параметром формы. Отсюда можно заключить, что выведенные Эйлером формулы (180)—(184) легко представить в употребительной теперь форме. Для этого достаточно иметь в виду выражения для Q_n и P, а также соотношение между c и b_2.

В итоге интегрирования дифференциальных уравнений движения Эйлер приходит к формулам, имеющим в основном вид квадратур, посредством которых можно в принципе найти все элементы траектории. Если сопоставить их с теми, которые были установлены Иоганном Бернулли в 1719 и в 1721 гг., а Эйлером в 1736 г. (§ 10), становится очевидным, что изложив в 1753 г. первый этап решения, он еще не получил зависимостей, посредством которых можно было рассчитать таблицы стрельбы, не проводя трудоемких вычислений. Требовалось найти способ преобразования квадратурных зависимостей в формулы, удобные для расчетов. Первоначально Эйлер ищет выход в приближенном представлении установленных им соотношений в виде рядов. Это решение имеет второстепенное значение и лежит в стороне от общего направления всей работы Эйлера. Поэтому детально останавливаться на этом способе нет необходимости.

Второй этап Эйлер открывает изучением характера траектории материальной точки в воздухе. На основе установленных соотношений (180)—(184) он выводит важнейшие свойства траектории, позволившие выяснить ее большое отличие от траектории, описываемой снарядом в безвоздушном пространстве. Эйлер первый установил эти особенности, пополненные в последующие годы открытием лишь некоторых второстепенных ее свойств.

Особое значение имело для Эйлера наличие наклонной ассимптоты восходящей ветви траектории. Для того чтобы найти угол θ_A, составляемый ассимптотой с осью абсцисс, Эйлер рассматривет формулу, определяющую длину дуги

$$s=c\ln\frac{Q_n}{Q_n-P}\,.$$

При стремлении восходящей ветви траектории к своей ассимптоте, рассуждает Эйлер, длина ее дуги стремится к бесконечности, что может иметь место, когда $Q_n = P$. В употребляемых теперь обозначениях это соотношение можно записать в виде

$$\frac{g}{2b_2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} + \xi_2(\theta_0) = \xi_2(\theta_A), \tag{185}$$

откуда по известным величинам b_2, v_0 и θ_0 определяется угол θ_A.

Выявление существования у траектории наклонной ассимптоты и установление связи между углом θ_A с параметром Q_n открыло Эйлеру путь к сведению всех случаев в определенные группы и к получению в итоге принципа построения таблиц, посредством которых можно вычислить траектории артиллерийского снаряда.

Эйлер видел, что число типов траекторий бесконечно велико и каждый из них определяется величиной параметра Q_n. Стало быть, если его величина задана, она целиком определяет тип траектории, так как все траектории, отвечающие тому же значению параметра Q_n, между собой подобны и отличаются лишь размерами, как бы ни изменялись два других параметра c и g_1. Эйлер сводит траектории к 18 типам, для которых угол наклона ассимптоты θ_A изменяется от 0 до 85° через каждые 5°. Эйлер переходит здесь от параметра Q_n, явно фигурирующего в его формулах, к другому — углу θ_A, связанному с ним соотношением (185).

Для определения угла θ_A по известному Q_n Эйлер составляет первую вспомогательную таблицу значений функции $\xi_2(\theta)$ для углов θ, изменяющихся от 0 до 90° через каждый градус. Эта же таблица служит Эйлеру и для вычисления элементов траектории. Посредством таблицы для $\xi_2(\theta)$ Эйлер строит вторую таблицу, по которой, зная величину параметра Q_n, можно непосредственно найти отвечающий ей угол наклона ассимптоты θ_A и установить тем самым тип траектории.

Следовательно, второй этап исследования Эйлера завершается систематизацией траекторий по величине параметра θ_A и составлением таблицы, определяющей, какой именно таблицей из вычисленных для 18 типов траекторий следует пользоваться при решении каждой конкретной задачи. Для этого достаточно рассчитать по известным весу снаряда q, его диаметру D, начальной скорости v_0 и углу бросания θ_0 параметр Q_n и, пользуясь второй из вычисленных Эйлером вспомогательных таблиц. найти соответствующий угол θ_A, а значит, и тип траектории.

Третий этап созданного Эйлером метода имел целью найти практически удобный способ вычисления траектории снаряда на основе уже установленных формул. Такое решение Эйлер получает, представляя траекторию в виде участков, для каждого из которых элементы движения определяются без труда. Для этого служат зависимости, определяющие длину дуги траектории (182) и скорости снаряда (184), выраженные в алгебраической форме.

Эйлер разбивает траекторию на дуги, вдоль которых угол наклона касательной изменяется сравнительно немного. Пусть в начале некоторой дуги этот угол равен θ_i, а на ее конце θ_{i+1}, тогда тангенсы этих углов будут соответственно p_i и p_{i+1}. В таком случае, длина дуги этого участка может быть найдена согласно формуле (182):

$$\Delta s_i = c \ln \left[\frac{Q_n + \xi_2 (\theta_{i+1})}{Q_n + \xi_2 (\theta_i)} \right]. \tag{186}$$

Приращения абсциссы и ординаты, отвечающие приращению дуги Δs_i, Эйлер находит из соотношений

$$\Delta x_i = \Delta s_i \cos \left(\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \right) \tag{187}$$

и

$$\Delta y_i = \Delta s_i \sin \left(\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \right). \tag{188}$$

Скорости снаряда в граничных точках участков, на которые разбита траектория, определяются согласно формуле (184):

$$h_i = \frac{\frac{1}{2} g_1 c (1 + p_i^2)}{Q_n + \xi_2 (p_i)},$$

$$h_{i+1} = \frac{\frac{1}{2} g_1 c (1 + p_{i+1}^2)}{Q_n + \xi_2 (p_{i+1})}.$$

В результате находится средняя скорость снаряда для каждого рассматриваемого участка траектории

$$v_{im} = \frac{v_i + v_{i+1}}{2}$$

и устанавливается время, в течение которого снаряд проходит участок длиной Δs_i,

$$\Delta t_i = \frac{\Delta s_i}{v_{im}}.$$

Координаты точек траектории и время, в течение которого снаряд проходит ее последовательные участки, находятся суммированием приращений, устанавливаемых посредством только что приведенных зависимостей.

Эйлер определяет приращения координат Δx_i и Δy_i как проекции отрезка прямой длиной Δs_i, наклоненного к оси абсцисс под углом $\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}$. В результате приращения Δx_i и Δy_i получаются несколько преувеличенными. Траектория же представляется в виде ломаной прямой, приближающейся к истинной с увеличением числа участков, на которые она разбивается.

В течение первого же столетия после публикации мемуара Эйлера изложенный в нем метод вычисления траектории по дугам подвергся ряду усовершенствований. Так, в 1811 г. Лежандр[1] рассматривал приращения Δx_i и Δy_i не как проекции отрезка прямой, но как проекции дуги окружности с углами наклона касательной по ее концам, равными θ_i и θ_{i+1}. Дидион в 1848 г. представлял приращения абсциссы и ординаты как проекции дуги параболы второго порядка с вертикальной осью.[2]

Эйлер рекомендует рассчитывать 18 типичных траекторий, определяемых величиной угла θ_A, пользуясь изложенным выше методом, основанном на представлении траектории в виде дуг. Такое количество таблиц, составленных для каждого типа траектории, отдельно для восходящей и нисходящей ветви, Эйлер считает достаточным для решения всех задач, встречающихся в практике. В качестве иллюстрации он вычисляет таблицу для траектории 12-го типа, отвечающей углу $\theta_A = 55°$. Эту таблицу Эйлер представляет в следующей форме:

$\theta_A = 55°$									
θ	$\frac{1}{c}s$	Δ	$\frac{1}{c}x$	Δ	$\frac{1}{c}y$	Δ	$\frac{1}{\sqrt{g_1 c}}h$	$\sqrt{\frac{2g_1}{c}}t$	Δ

Для каждой задачи параметры c и g_1 всегда известны. Для определения элементов траектории, отвечающих текущему углу θ, достаточно умножить число, стоящее в соответствующем столбце, на величину, обратную коэффициенту при искомом элементе. Таким способом Эйлер советует пользоваться таблицей.

[1] A. Legendre. Exercises de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures Paris, t. I, 1811.

[2] I. Didion. Traité de balistique. Paris, 1848.

Шарбонье считает метод Эйлера с математической точки зрения вполне безупречным. Однако способу не хватало численных приложений, что было необходимо для его использования в практике. Пришлось ждать, по мнению Шарбонье, целое столетие, прежде чем таблицы Эйлера были окончательно внедрены в артиллерию: „Решение Бернулли—Эйлера, безупречное в математическом отношении, являлось лишь чистой совершенной наукой, которая терпела неудачу перед любой практической проблемой. Борда, избрав для решения проблемы путь приближений, придает баллистике характер, который она будет сохранять в работах баллистиков следующего столетия".[1]

Необходимо помнить, что Эйлер первым дал метод составления таблиц, служащих для вычисления траекторий с учетом действия на снаряд силы сопротивления воздуха. Конечно, с позиций настоящего времени эти таблицы весьма сложны и неудобны. Но для конца XVIII в. вычисление траекторий с учетом действия на снаряд силы сопротивления воздуха явилось крупным событием не только для баллистики, но и для артиллерии вообще. Как известно, методом интегрирования дифференциальных уравнений движения, разработанным Эйлером, пользовались профессор Михайловской артиллерийской академии В. А. Анкудович[2] и академик М. В. Остроградский.[3] Английский профессор Башфорт[4] обратился к этому методу в 1873 г. при построении метода решения задач навесной стрельбы на базе кубического закона сопротивления, а Н. А. Забудский[5] воспользовался им в 1888 г. для решения тех же задач при биквадратичном законе. Кроме того, предложенный Эйлером метод вычисления траектории артиллерийского снаряда вскоре нашел приложение при составлении таблиц стрельбы, подвергшихся в скором времени ряду усовершенствований, а в начале

---

[1] P. Charbonnier. Essais sur l'histoire de la Balistique. Mémoria de l'artillerie française, 1927, t. VI, стр. 1125—1126.

[2] В. А. Анкудович. Теория баллистики, содержащая приложение математического анализа к определению различных обстоятельств, сопровождающих движение тяжелых тел, брошенных с какой-нибудь силой. СПб., 1836.

[3] M. Ostrogradski. Tables pour faciliter le calcul de la trajectoire que décrit un mobile dans un mileu résistant. Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Petersbourg, sixieme série, sciences mathémathiques et physiques, 1841, t. II, стр. 437—446.

[4] F. Bashforth. A mathematical treatise on the motion of projectiles. London, 1873.

[5] Н. А. Забудский. О решении задач навесной стрельбы и об угле наибольшей дальности. СПб., 1888.

XX в. был эффективно использован французской баллистической школой для вычисления траектории при стрельбе со значительными начальными скоростями под большими углами бросания.

Безусловно, что разработанная Эйлером схема построения таблиц была далека от совершенства. Однако с момента появления таблиц, вычисленных по схеме Эйлера, они не переставали совершенствоваться, что уже свидетельствует об их жизненности.

В 1764 г. Гревениц, придерживаясь метода и схемы Эйлера, составил таблицы для 12 типичных траекторий. Расчеты проводились под руководством профессора математики Карстена, в следующих словах писавшего о практическом значении метода Эйлера: „После того как я сообщил, что г. Эйлеру удалось, наконец, в «Мемуарах Берлинской академии» довести решение этой проблемы до момента, когда можно будет легко приложить его к практике, и что даже для возбуждения усердия интересующихся этим делом он взял на себя труд предложить в инструкции способ осуществления вычислений, связанных с его решением, тотчас же господин граф (Гревениц, — *А. М.*), автор настоящего труда, выразил желание выполнить эти расчеты".[1]

Эйлер живо интересовался работой Гревеница по вычислению таблиц и состоял по этому вопросу в переписке с Карстеном.

„Господин граф (Гревениц, — *А. М.*), — писал Карстен, — тотчас же принялся за дело. Впоследствии мы пришли к соглашению, что я буду обращаться к Эйлеру, чтобы узнать от него, не отозвался ли еще кто-нибудь на его призыв, и таким образом я собрал следующие сведения, собственноручно написанные Эйлером, который иногда удостаивает меня своей ценной корреспонденцией".[2]

Уже в конце XVIII в. выяснилось, что таблицы Гревеница не совсем удобны, и были предприняты работы по их усовершенствованию. В 1773 г. Ламбер[3] предложил графический метод, основанный на таблицах Гревеница. В 1814 г.

---

[1] H. F. Graewenitz. Academische Abhandlung von der Bahn der Geschützkugeln nebst practischen Tabellen und Regeln die Schussweiten zu finden. Rostok, 1764. Цитируется из предисловия Карстена, помещенного Риффелем, в переводе на французский язык, вместе с работой Гревеница в „Journal des armes speicales" (1844, t. V, стр. 6).

[2] Там же.

[3] I. H. Lambert. Construction d'une échelle balistique. Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année, 1773.

этот способ был развит Д'Обенхеймом.[1] Более точные и пространные таблицы были составлены в 1777 г. Брауном, поместившим их в качестве приложения к английскому переводу мемуара Эйлера 1753 г. Работы по совершенствованию численных таблиц продолжались и в XIX в.

Наиболее полно намеченная Эйлером программа была воплощена в жизнь прусским артиллеристом Отто.[2] В 1842 г. он вычислил таблицы для углов бросания θ_0, изменяющихся от 30 до 75° через каждые 5°. Таблицы позволяли определять наиболее важные для практических целей данные — элементы движения снаряда в вершине траектории и в точке падения. В качестве параметра был взят, как и у Эйлера, угол θ_A.

В середине XIX в., когда Отто опубликовал свои таблицы, состояние технической и экспериментальной базы позволяло определять с достаточной точностью лишь дальность стрельбы и полное время полета снаряда. После появления в 1867 г. хронографа Лебуланже открылись возможности для действительно надежного измерения начальной скорости и вычисления баллистического коэффициента. Тем самым была создана основа для перестройки таблиц Отто, которая была осуществлена итальянским баллистиком Сиаччи в 1884 г.[3] В таблицы были включены столбцы для начальной скорости v_0 и конечной скорости v_c, выброшен параметр θ_A, а на его место введен новый, пропорциональный дальности — $2b_2X$. Известные под наименованием таблиц Отто—Сиаччи, они успешно применяются и теперь при стрельбе под большими углами бросания, когда начальные скорости не превышают 240 м/сек. После Сиаччи усовершенствование таблиц, начало которых было заложено Эйлером в его программе, не прекращалось. Браччиалини[4] принял за аргумент угол падения θ_c и в 1885 г. составил для каждого столбца таблиц Отто—Сиаччи таблицы о двух входах — угла бросания θ_0 и угла падения θ_c. В 1888 г. Лардильон,[5] воспользовавшись таблицами Гревеница, пополнил

---

[1] A. M. D'Obenheim. Balistique. Indication de quelques expériences propres à compléter la théorie du mouvement des projectiles de l'artillerie, procédé de l'analyse nécessaire. Strasbourg, 1814.

[2] J. C. F. Otto. Tafeln für den Bombenwurf. Berlin, 1842 и Tables balistiques générales pour le tir élévé. Journ. des armes spéciales, 1844, №5.

[3] Н. В. Маиевский. Об измененных майором Сиаччи баллистических таблицах для навесной стрельбы генерала Отто. Арт. журн., 1886, № 4.

[4] S. Braccialini. Tables et formules pour les problèmes du tir courbe. Revue d'artillerie, 1885, t. XXIV.

[5] Lardillon. Transformation des tables de Graewenitz. Revue d'artillerie, 1888, t. XXXII.

таблицы Отто—Сиаччи, распространив их на малые углы бросания от 0 до 30°.

Эйлер занимался основной задачей внешней баллистики более 15 лет, постепенно совершенствуя как ее решение, так и метод, которым пользовался. Пройдя сложный путь от решения задачи на основе одночленного закона сопротивления, пропорционального произвольной степени скорости, через громоздкое решение этой же задачи на базе двучленной формулы сопротивления, он пришел в 1753 г. к созданию метода, получившего приложение на практике. Исследование Эйлера было продолжено в нескольких направлениях и эффективно использовано для решения задач стрельбы.

2. ВОПРОСЫ ВНУТРЕННЕЙ БАЛЛИСТИКИ В ТРУДАХ ЭЙЛЕРА

§ 20. ФИЗИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ ПОНЯТИЯ „УПРУГОЙ СИЛЫ“ ПОРОХА И ЕЕ ВЕЛИЧИНА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ РОБИНСА И ЭЙЛЕРА

В XVIII в. среди вопросов внутренней баллистики ученых особенно привлекало выяснение причин, обусловливающих возникновение той большой энергии, которая высвобождается при взрывчатом превращении пороха. Только после выяснения физической сущности явлений, происходящих при сгорании пороха, и оценки величины выделяемой при этом энергии можно было приступить к изучению движения снаряда в канале ствола орудия и теоретическому определению величины дульной скорости. Уровень развития физики и химии, а также слабое состояние экспериментальной базы сильно осложняли изучение явлений, происходящих при взрывчатом превращении пороха. Острая необходимость решения проблемы и стоявшие на этом пути трудности побудили крупных ученых мира, в том числе Ньютона, Эйлера, Иоганна и Даниила Бернулли, заняться установлением величины упругой силы пороха, определяемой, как это будет показано ниже, величиной полного пиростатического давления и совпадающей для идеальных газов со значением удельной эффективности, или силы пороха, как ее понимают в настоящее время.

При выяснении природы выделяемой при взрывчатом превращении пороха энергии ученые XVIII в. опирались на известные в физике законы и основывались на опытах по сжиганию пороха на воздухе и в замкнутом пространстве. В своих исследованиях они исходили из физических свойств воздуха и других газов, именовавшихся упругими жидкостями или флюидами. Важнейшим из этих качеств была упругость. Именно на этом свойстве газов и строилась уже в XVIII в.

бо́льшая часть теорий, раскрывающих физическую сущность той большой энергии, которая высвобождается при взрывчатом превращении пороха.

По одной из распространенных в XVIII в. теорий, пороховое зерно содержит упругое газообразное вещество, заключенное в селитре в сильно сжатом состоянии, свободный воздух в порах зерна и горючие вещества — уголь и серу. При зажигании пороха его зерна воспламеняются и высвобождается газообразное вещество, находящееся в селитре под большим давлением. Сера и уголь сгорают с выделением большого количества тепла, увеличивающего упругость газа за счет его нагревания. Горючие же вещества после сгорания целиком образуют твердые остатки.

Стало быть, уже на раннем этапе развития внутренней баллистики было известно, что при взрывчатом превращении пороха образуется большой объем пороховых газов, что лежит в основе теории горения пороха, принятой и в настоящее время.

Различие в теориях авторов XVIII в. по вопросу физической сущности выделяемой при взрывчатом превращении пороха энергии заключалось во взглядах на природу газа, содержащегося в порохе. Большинство ученых, как например Ньютон, Бойль, Папин, Эмери, Халль, Гоуксби, Белидор, связывали свои теории с расширением воздуха. Иоганн Бернулли, Амонтон, Дюлак, Румфорд и другие полагали, что высвобождающаяся при взрывчатом превращении пороха энергия обусловлена расширением водяных паров. Это отличие не имело принципиального значения и не влияло на построение тех чисто качественных и в общих чертах правильных положений, которые сложились в XVIII в. Более значительные расхождения имели место в количественной оценке величины „упругой силы“ пороха, которой авторы XVIII в. оценивали выделяемую при сгорании пороха энергию.

Величина „упругой силы“ пороха, оценивалась двумя способами: давлением пороховых газов, когда они занимают объем заряда, или отношением объема пороховых газов, приведенных к температуре 0 °C и давлению 760 мм рт. ст., к объему, занимаемому порохом, который в то время считался равным объему пороховых газов в момент их образования. Отклонения в величинах этих двух характеристик были весьма велики, что было связано с низкой техникой эксперимента и недостаточными знаниями о химических процессах и физических явлениях, происходящих при взрывчатом превращении пороха. В результате ученые не могли одинаковым образом подойти к учету жидких и твердых продуктов разложения, находящихся в первый момент после взрывчатого превращения в газообразном состоянии. При проведении опытов не устранялась возможность теплоотдачи через стенки сосуда, в котором производилось сжигание пороха. Наконец, при обработке результатов наблюдений ученые по-разному подходили к тому, что до сгорания пороха не весь его объем, согласно распространенной в то время теории, был занят упругим веществом, т. е. что не весь заряд превращался в пороховые газы.

Изложенное объясняет те значительные расхождения, какие имелись как в оценке величины объема образующихся пороховых газов, приведенных к нормальным физическим условиям, взятым по отношению к объему газов в момент их образования, так и в оценке величины того давления, которым измерялась „упругая сила“ пороха. Так, значения отношения названных объемов колебались в границах между 230 и 400.

„Наиболее исследованным, — писал А. Ф. Бринк, — является старый дымный порох. Изучением его хотя и занялись с начала XVIII столетия, но до 1823 г. знали не более того, что газы, образующиеся при горении пороха, занимают, при температуре 0° и давлении 760 мм, объем от 230 до 400 раз больший объема пороха, предполагая, что каждый грамм его занимал до взрыва 1 куб. см.“ [1]

Различия в давлениях, определяющих „упругую силу“ пороха, были еще более значительны. Величина этой характеристики, по определению ученых XVIII в., заключалась между 600 и 10 000 атм. Например, для величины этого давления д'Арси получил значение 600 атм., Робинс — 1000, Хэттон — 1800, д'Антони — в границах между 1400 и 1900 атм., а Даниил Бернулли и Румфорд — 10 000 атм.[2]

Непосредственным предшественником Робинса и Эйлера в изучении вопросов внутренней баллистики был французский артиллерист Биго де Морог. Как и многие другие ученые, он стремился найти численное значение давления, которым оценивалась величина „упругой силы“ пороха; основываясь на построенной им теории вихревого движения пороховых газов и изучая взрывчатое превращение порохового заряда

---

[1] А. Ф. Бринк. Внутренняя баллистика, т. I. СПб., 1901, стр. 19—20.

[2] Данные о величине упругой силы пороха заимствованы из следующих источников: W. Piobert. Traité d'artillerie théorique et pratique. Paris, 1847; P. Charbonnier. Essais sur l'histoire de la balistique. Mémorial de l'artillerie française, 1927, t. VI; П. Д. Львовский. Первое решение задачи внутренней баллистики. Биго де Морог. Сб. Арт. ист. музея, 1940, т. 1.

в замкнутом объеме, Биго де Морог[1] в 1737 г. впервые пришел к зависимости, близкой к формуле Нобля и Эйбла. Величину „упругой силы“ пороха Биго де Морог нашел в 5600 атм. посредством специальных опытов. Близко к истинному пониманию физической сущности характеристики, которая в XVIII в. скрывалась под наименованием „упругая сила“ пороха, пять лет спустя после Биго де Морога подошел и Робинс. Английскому артиллеристу, видимо, не была известна работа Биго де Морога, так как в своем труде „New principles of gunnery“ он ее не упоминает. Теория Робинса и непосредственно с нею связанные изыскания Эйлера будут освещены более детально несколько позднее одновременно с раскрытием того, что следует подразумевать с позиций настоящего времени под понятием „упругая сила“ пороха.

Усиленные поиски ученых по отысканию давления, которым оценивалась величина „упругой силы“ пороха, привели в XVIII в. к чрезвычайно противоречивым результатам, из которых трудно было вывести достоверные данные об ее численном значении. Серьезный шаг в усилении экспериментальной базы, столь необходимой для установления этой характеристики, связан с началом применения в 1740 г. баллистического маятника. Появилась возможность опытного определения величины дульной скорости. Это позволило отыскивать величину „упругой силы“ пороха, определяя ее на основе согласования теоретических построений и экспериментов над сжиганием навесок пороха в колоколе пневматической машины с величинами дульных скоростей, найденных опытным путем.

Робинс и Эйлер положили начало связи теории и эксперимента в вопросе определения величины „упругой силы“ пороха. Шарбонье пишет об этом в следующих словах: „После того как Робинс и Эйлер показали баллистикам, каким образом можно достигнуть прогресса в результате сочетания специального опыта и действительно научной теории, изыскания умножаются и ставятся все более многочисленные точные и важные эксперименты“.[2]

Книга Робинса „New principles of gunnery“ начинается шестью Предложениями, посвященными изучению свойств упругого вещества, образующегося при взрывчатом превращении пороха, и установлению закона его сжимаемости, после чего

---

[1] Bigot de Morogues. Essai de l'application des forces centrales aux effets de la poudre à canon d'où l'on déduira une théorie propre à perfectionner les différentes bouches à feu. Paris, 1737.

[2] P. Charbonnier. Essais sur l'histoire de la Balistique. Mémorial de l'artillerie francaise, 1927, t. VI, стр. 1157.

автор переходит к определению величины „упругой силы" пороха — характеристики, служащей ему для теоретического определения дульной скорости.

Робинс использовал опыты Гоуксби[1] по изучению упругих свойств пороховых газов сжиганием различных навесок пороха в манометрической трубке, измеряя развивающееся в нем давление с помощью ртутного барометра. Наблюдения привели его к той общепринятой теории о природе высвобождающейся при взрывчатом превращении пороха энергии, которая получила широкое распространение в XVIII в. Робинс нашел, что при взрывчатом превращении пороха выделяется большое количество упругого вещества, т. е. пороховых газов. Это вещество, как показали опыты, упруго, близко по своим качествам к воздуху и содержится в зернах пороха в сильном сжатом состоянии. Однако Робинс не настаивал на том, что пороховые зерна заключают в себе воздух, полагая безразличным, какое именно упругое вещество в них содержится. При взрывчатом превращении пороха связи, удерживающие воздух под большим давлением, нарушаются и он получает возможность расширяться. Высвобождение большого объема газов, находившихся до сгорания пороха в сильно сжатом состоянии в его зернах, и высокая температура взрывчатого превращения пороха обусловливают ту большую энергию, которая выделяется при его горении.

Изучая горение небольших навесок пороха в манометрической трубке, Робинс устанавливает закон сжимаемости пороховых газов. Опыты показали, что образующиеся газы подчиняются закону Бойля—Мариотта,[2] согласно которому „упругая сила" пороха, или давление, изменяется прямо пропорционально плотности пороховых газов.

Закон Бойля—Мариотта справедлив, как известно, для идеальных газов, когда абстрагируются от связей, обусловленных взаимодействием молекул, и не принимается во внимание занимаемый ими объем. Такими допущениями можно пользоваться в случае, когда газ находится под небольшим давле-

---

[1] F. Hawksbee. 1) An experiment made at a meeting of the Royal Society december 20th, 1704 of firing gunpowder on a red hot iron in vacuo Boylian. The Philosophical Transactions, 1705, № 295, стр. 1806—1807; 2) An account of an experiment made december 26th, 1704. To try the quality of air, produced from gunpowder fired in vacuo Boyliano. Там же, стр. 1807—1809.

[2] Робинсу не было известно, что независимо от Мариотта закон сжимаемости был установлен и Бойлем, поэтому в своей книге Робинс называет закон сжимаемости именем одного Мариотта.

нием, с каким и имел дело Робинс. Однако в артиллерийской практике при взрывчатом превращении пороха в каморе орудия давления настолько велики, что закон Бойля—Мариотта, вообще говоря, не отвечает действительности. Правда, если принимается в расчет объем, занимаемый нелетучими продуктами разложения, то закон Бойля—Мариотта даже при больших давлениях дает вполне удовлетворительные данные в связи с тем, что удельный коволюм, который в XVIII в. во внимание не принимали, не сказывается сколько-нибудь существенно на величине определяемого давления.

После изучения упругих свойств пороховых газов и установления того, что они подчинены закону Бойля—Мариотта Робинс переходил к определению количественной оценки „упругой силы“ пороха.

Первоначально Робинс находил объем образующихся при горении пороха газов, приведенный к температуре 0° С и давлению 760 мм рт. ст. С этой целью Робинс сжигал в манометрической трубке навеску пороха в 15/16 унции. Образующиеся пороховые газы заставляли ртуть барометра опускаться до тех пор, пока их давление не становилось равным атмосферному. Измерив объем, в котором происходило сжигание пороха, Робинс находил объем газов, находящихся под атмосферным давлением. После приведения газов к температуре 0° С, для чего Робинс уменьшал найденный объем на 1/5, он устанавливал, что навеска пороха в 1 унцию дает при своем сгорании газы, которые после их приведения к нормальным физическим условиям занимают объем 460 куб. дюймов. Далее Робинс переходил к определению значения характеристики, служившей в XVIII в. для оценки величины „упругой силы“ пороха: „Wenn man die Quantität dieser subtilen Materie, in Ansehung des Raums, welchen das Pulver einnimmt, zu wissen verlangt, so ist zu merken, daβ 1 Unze und 1 Drachm, ober 17 Drachm. Avoir du pois Pulver, wenn dasselbe wohl zusammen gedruckt wird, 2 cubische Zoll ausfüllen. Nach obiger Rechnung aber müssen 17 Drachm. und also 2 cubische Zoll Pulver 488 3/4 cubische Zoll einer solchen Materie, welche ber Luft gleich ist, in sich enthalten. Dahero ist in einem cubischen Zoll Pulver so viel von dieser Materie eingeschlossen, welche, wenn sie sich so weit ausdehnet, biß sie mit der natürlichen Luft einerley Dichte und Elasticität erhält, einen Raum von 244 cubischen Zollen ausfüllen wird“.[1] („Если желательно найти количество этого тонкого вещества по отношению к объему, занимаемому порохом, то

[1] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 60.

следует заметить, что 1 унция и 1 драхма, или 17 драхм торгового веса пороха, когда он находится в достаточно компактном состоянии, занимает объем в 2 кубических дюйма. Но по предыдущим расчетам 17 драхм, или 2 кубических дюйма пороха, должны содержать 488.75 кубических дюймов тонкого вещества, близкого по своим свойствам к воздуху. Отсюда следует, что в 1 кубическом дюйме пороха содержится такое количество этого вещества, которое после расширения до плотности и давления естественного воздуха будет иметь объем в 244 кубических дюйма").

Приведенная выдержка показывает, что установленное Робинсом число 244 есть не что иное, как отношение удельного объема w_N пороховых газов, приведенных к нормальным физическим условиям, к удельному объему w газов, соответствующего моменту их образования, и равному объему, занимаемому порохом, т. е. $\frac{w_N}{w}=244$. Отсюда он находил, что давление пороховых газов, приведенных к 0°С, равно 244 атм. Робинс брал, таким образом, удельный объем w, а значит, и плотность заряжания Δ равными единице.[1] Иными словами он находил давление, допуская, что навеска пороха как бы сгорает в занимаемом ею объеме, при том условии, как это подтверждают цитированные слова А. Ф. Бринка, что 1 кг пороха занимает объем, равный 1 дм^3, т. е. что сжигаемая навеска как бы обладает плотностью заряжания $\Delta=1$ кг/дм^3.

Влияние температуры на увеличение объема образующихся при взрывчатом превращении пороха газов и, следовательно, на величину „упругой силы" пороха Робинс определял на основании специального опыта.

Робинс брал часть железного ружейного ствола, одна сторона которого была заделана. Опыт состоял в том, что дульная часть ствола погружалась в воду, а казенная, оставшаяся над ее поверхностью, нагревалась до температуры 800° С (температура раскаленного до бела железа). Воздух в канале расширялся и выходил через погруженное в воду сечение. Затем ствол с находящимся в нем воздухом охлаждался до нормальной температуры, и образующаяся разреженность приводила

---

[1] В самом деле, по данным Робинса, вес сжигаемого пороха $\omega=17/16$ унции, а одна унция равна 1/12 тройского фунта, т. е. $\omega=17/16 \cdot 1/12 \times 0.373$ кг $=0.0330$ кг. Объем, занимаемый порохом, в котором как бы происходило сгорание, $w_0=2$ куб. дюймам $=2\times0.254^3$ дм$^3=0.0228$ дм^3, откуда

$$\Delta=\frac{\omega}{w_0}=\frac{0.0330}{0.0228}=1.01\approx1 \text{ кг/дм}^3.$$

к заполнению части канала водой. Определяя вес этой воды, Робинс находил объем канала, заполненного воздухом, сохранившимся в нем при нагревании ствола до 800° С. Далее путем вычислений он находил объем канала, заполненный воздухом до опыта. Сравнение этих двух объемов и давало Робинсу возможность найти отношение, в каком возрастал объем воздуха, находящегося при нормальных физических условиях после нагревания до указанной выше температуры. Опыты показали, что это отношение равно 4, откуда Робинс заключал, что при повышении температуры до 800° С объем газов, образующихся при взрывчатом превращении пороха, также возрастает в 4 раза.

Величину „упругой силы" пороха Робинс определял как произведение чисел 244 на 4, которое он принимал приближенно равным 1000 атм. Таким образом, Робинс нашел, что „упругая сила", развивающаяся при сгорании пороха в объеме, который он занимает, т. е. пороха, находящегося в замкнутой каморе в достаточно компактном состоянии, отвечающем, как было показано выше, плотности заряжания $\Delta = 1$ кг/дм^3, измеряется давлением в 1000 атм.

После освещения опытов Робинса возникает необходимость раскрытия того, что следует подразумевать с позиций настоящего времени под понятием „упругая сила" пороха, сложившемся в XVIII в.

Полное пиростатическое давление, т. е. максимальное давление, развивающееся при полном сгорании заряда в замкнутом объеме, выражается формулой

$$P = \frac{RT_e}{w - \alpha'} = \frac{p_N w_N}{w - \alpha'} \cdot \frac{T_e}{273}, \qquad (200)$$

где w_N — удельный объем газов, приведенных к нормальным физическим условиям, т. е. к давлению 760 мм рт. ст. и температуре 0° С; p_N — атмосферное давление; w — удельный объем пороховых газов, находящихся под давлением P; T_e — температура взрывчатого превращения пороха, выраженная по абсолютной градусной шкале; α' — приведенный удельный коволюм газов при сгорании дымного пороха.

Ученые XVIII в. и, в частности, Робинс, изучая упругие свойства пороховых газов, считали их идеальными и поэтому не принимали в расчет величину удельного коволюма, так же как в большинстве случаев не учитывали, что не весь пороховой заряд обращается при своем разложении в газообразные продукты. В таком случае формулу для полного пиростатического давления можно представить в виде

$$P = p_N \frac{w_N}{w} \cdot \frac{T_e}{273} . \qquad (201)$$

Робинс нашел, как было показано выше, что отношение $\frac{w_N}{w} = 244$. Вследствие высокой температуры, которая сопровождает взрывчатое превращение пороха, объем образующихся пороховых газов, приведенный к нормальным физическим условиям, увеличивается, согласно Робинсу, в 4 раза, т. е. упомянутое отношение возрастает вчетверо. Иными словами, Робинс находит отношение $\frac{T_e}{273} = 4$, что соответствует температуре раскаленного до бела железа в 800° С, которую Робинс принимал за температуру взрывчатого превращения пороха. В таком случае, если подставить найденные Робинсом значения для $\frac{w_N}{w}$ и $\frac{T_e}{273}$ в формулу (201), то будет найдено полное пиростатическое давление $P_1 = 1 \cdot 244 \frac{800 + 273}{273} = 1 \cdot 244 \cdot 4 = 1000$ атм. при плотности заряжания $\Delta = 1$ кг/дм^3.

Для установления связи понятия „упругой силы" пороха с принятым теперь понятием удельной эффективности или силы пороха целесообразно обратиться к определению этой баллистической характеристики, данной А. Ф. Бринком[1] в 1901 г.

Бринк исходил из формулы полного пиростатического давления (200), которую он представлял в виде

$$P = \frac{R \Delta T_e}{1 - \alpha \Delta} , \qquad (202)$$

где $R = \frac{p_N \, w_N}{273}$ — газовая постоянная.

Обозначая через P_1 полное пиростатическое давление пороховых газов при плотности заряжания $\Delta = 1$ кг/дм^3, Бринк получал из формулы (202)

$$P = P_1 \frac{(1 - \alpha) \Delta}{1 - \alpha \Delta} , \qquad (203)$$

где величины P_1 и $(1 - \alpha)$ — постоянные. Обозначая их произведение через f, Бринк находил

$$P = \frac{f \Delta}{1 - \alpha \Delta} , \qquad (204)$$

---

[1] А. Ф. Бринк. Внутренняя баллистика, ч. I. СПб., 1901.

где $f = P(1-\alpha) = RT_в$ — удельная эффективность, или сила пороха.[1]

Из формулы (204) Бринк заключал, что сила пороха f представляет собой работу расширяющихся пороховых газов, находящихся под постоянным давлением $p_N = 1$ атм. и при температуре $T_в$. Измеряется же величина силы пороха в единицах давления.

Полагая полное пиростатическое давление $P = f$, Бринк находил соответствующую этому случаю плотность заряжания из формулы (204)

$$\Delta_f = \frac{1}{1+\alpha} \tag{205}$$

и отвечающий этой плотности заряжания удельный объем $w_f = 1 + \alpha$.

Изложенное позволяло Бринку определить силу пороха как давление газов, образующихся при сжигании 1 г пороха в замкнутом сосуде, объем которого равен 1 см^3 вместе с коволюмом пороховых газов, образовавшихся при сжигании принятой единицы веса пороха. При этом плотность заряжания

$$\Delta_f = \frac{1}{w_f + \alpha} < 1.$$

Из формулы, определяющей силу пороха через полное пиростатическое давление P (204) видно, что она всегда меньше давления P_1, соответствующего плотности заряжания $\Delta = 1$ кг/дм^3.

Ранее было сказано, что ученые XVIII в. и в том числе Робинс считали пороховые газы идеальной упругой жидкостью. Кроме того, часто принималось, что весь пороховой заряд превращается в газообразные продукты. В таком случае удельный коволюм пороховых газов $\alpha = 0$ и формулы Бринка позволяют заключить, что сила пороха совпадает по величине с полным пиростатическим давлением P_1, соответствующим плотности заряжания $\Delta = 1$ кг/дм^3. Следовательно, силу пороха можно определить, согласно Бринку, как величину, численно равную давлению, которое развивается при сжигании 1 г пороха в замкнутом сосуде объемом в 1 см^3.

Во времена Робинса и Эйлера, как видно из всего вышесказанного, фигурировал термин „упругая сила“ пороха, близ-

[1] Приведенная формула для удельной эффективности пороха справедлива лишь для бездымных порохов, когда отсутствуют нелетучие продукты разложения. Формула может быть также использована и для случая сгорания дымного пороха, когда не учитываются нелетучие продукты взрывчатого превращения.

кий к употребляемому теперь для определения удельной эффективности пороха, почему в течение долгого времени, и даже теперь, эта баллистическая характеристика сохранила название „силы пороха“. Величина „упругой силы“ пороха совпадает, как видно, со значением удельной эффективности пороха только при плотности заряжания, равной единице, и приведенном удельном коволюме, равном нулю. В действительности этого никогда не может быть, так как приведенный удельный коволюм, даже если пренебречь объемом, занимаемым молекулами единицы веса газа, никогда не обращается для дымного пороха в нуль, ввиду значительного количества твердых продуктов разложения. Поэтому, хотя в некоторых случаях, как например у Робинса, значение „упругой силы“ и удельной эффективности пороха совпадают, неправильно было бы полагать эти две характеристики идентичными. „Упругая сила“ пороха, как следует из всего изложенного, представляет собой полное пиростатическое давление при плотности заряжания, равной единице, и именно этой величиной ученые XVIII в. оценивали энергию, выделяемую при взрывчатом превращении пороха.

Комментируя первые шесть Предложений книги Робинса, посвященные изучению упругости пороховых газов и установлению величины „упругой силы“ пороха, Эйлер достаточно ясно высказывался по этим вопросам. Точка зрения Эйлера на физическую сторону происходящих при горении пороха явлений подробно изложена им в 1760 г. в „Письмах к принцессе“[1] (№№ 9, 10 и 13).

Эйлер придерживался общепринятой механистической теории горения пороха и утверждал в более категорической форме, чем Робинс, что при взрывчатом превращении пороха образующееся упругое вещество является воздухом. Эйлер обращал внимание на то, что воздух материален и кажущаяся на первый взгляд пустота содержит материю. Тело и материя, по мнению Эйлера, — синонимы. Тела разделяются на твердые и жидкие, причем воздух относится ко второй из названных форм существования материи.

Анализируя приводимые Робинсом опытные данные и его метод определения „упругой силы“ пороха, Эйлер внес ряд уточнений в полученную английским артиллеристом зависимость, определяющую величину этой характеристики.

Эйлер высказывал сомнение в том, что принятое Робинсом четырехкратное увеличение давления при повышении температуры пороховых газов до 800° C справедливо для газов, нахо-

[1] L. Euler. Oeuvres complètes, t. I, Bruxelles, 1839.

дящихся под большим давлением. Этот коэффициент в точности отражал действительность, полагал Эйлер, лишь для газов, находящихся под атмосферным давлением.

Точка зрения Эйлера требует некоторого уточнения.

Известно, что уравнение состояния газов имеет в общей форме следующий вид:

$$P = \frac{RT}{w - a'} - F(w,\ T),$$

откуда видно, что давление, вообще говоря, возрастает непропорционально температуре. Однако при значительных температурах, какие имеют место при взрывчатом превращении пороха, второй убывающий с повышением температуры член правой части становится весьма малым и не влияет сколько-нибудь значительно на величину развивающегося давления. С другой стороны, этот же член значительно возрастает при больших давлениях, что как раз и имеет место при выстреле. Стало быть, точка зрения Эйлера не лишена основания, хотя он и не мог знать приведенного выше уравнения.

Другое замечание Эйлера относится к принятой Робинсом формуле сжимаемости, основанной на законе Бойля—Мариотта. Эйлер правильно считал, что этот закон отражает действительность только при незначительных степенях сжатия. Для больших давленчй, которые развиваются при горении пороха в замкнутом объеме, закон Бойля—Мариотта, по мнению Эйлера, совершенно неприменим. Высказавшись таким образом о принятой Робинсом формуле в добавлениях к первым Предложениям его книги, Эйлер дал в замечаниях, относящихся к изложению его собственной теории движения снаряда в канале ствола орудия, другую формулу сжимаемости, отражающую действительность более точно. Об этой формуле речь будет идти в следующем параграфе.

Эйлер вновь обратился к анализу величины „упругой силы“ пороха в 3-м добавлении к 11-му Предложению книги Робинса. Значения этой характеристики ученые XVIII в., в том числе и Робинс, определяли, как уже говорилось, исходя из удельного объема пороховых газов, приведенных к нормальным физическим условиям. Этот объем брался по отношению к удельному объему газов в момент их образования. При этом не принималось во внимание, что газы не занимали всего объема заряда, хотя оставшиеся после взрывчатого превращения пороха твердые продукты и говорили о том, что не весь его объем был заполнен газами. Эйлер обратил внимание на это обстоятельство и утверждал, что вместо первоначального объема, занимаемого пороховыми газами, следует принимать не единицу, а 0.3. В результате Эйлер получил для величины „упругой силы" пороха, измеряемой полным пиростатическим давлением,

$$P_1 = \frac{244}{0.3} \cdot 4 \approx 3200 \text{ атм.}$$

Для выяснения физической сущности внесенного Эйлером уточнения следует обратиться к формуле полного пиростатического давления, учитывающей приведенный удельный коволюм пороховых газов

$$P = p_N \cdot \frac{w_N}{w - \alpha'} \cdot \frac{T_e}{237},$$

где приведенный удельный коволюм

$$\alpha' = (1 - \varepsilon)\,\alpha + \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}. \qquad (206)$$

При рассмотрении предложенного Эйлером уточнения с точки зрения настоящего времени можно раскрыть его сущность следующим образом. Эйлер не учитывал объема, занимаемого молекулами газа, что отвечало уровню развития физики того времени. В результате приведенный удельный коволюм представлялся в виде $\alpha' = \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon} = 0.7$, так как величина относительного веса нелетучих продуктов взрывчатого превращения пороха ε принималась Эйлером равной 0.7, а δ_ε — средняя плотность нелетучих продуктов взрывчатого превращения при температуре T_e — полагалась как бы равной единице.

Формула Нобля и Эйбла для полного пиростатического давления, которой, в сущности, пользовался Эйлер, не пригодна для плотности заряжания $\Delta = 1$ кг/дм^3. Как известно, ее можно применять в том случае, когда $w > 2\,\alpha'$. Поэтому полученное Эйлером значение „упругой силы" пороха в 3200 атм. не отвечает действительности.

При изучении эффективности действия пороха Робинс и Эйлер уделяли большое место определению влияния на величину „упругой силы" влажности пороха.

Содержащаяся в порохе влага сказывается, по мнению Робинса, на объеме газов, образующихся при его разложении так же, как и на понижении температуры взрывчатого превращения пороха, что приводит к уменьшению величины „упругой силы" пороха. Эксперименты привели Робинса к выводу, что обычно порох включает от 1/30 до 1/20 части влаги, содержание которой можно снизить нагреванием пороха. В том случае, когда в порохе отсутствует хлористый натрий (поваренная соль), сильно поглощающий влагу, порох может храниться без существенного ухудшения его баллистических качеств до 50 лет. Эйлер уточняет приведенные Робинсом данные о влиянии влажности на величину „упругой силы "пороха. Так, он сообщал, что при влажности в 1/30 веса заряда „упругая сила" пороха уменьшается на 1/17, тогда как при содержании влаги в 1/100 значение этой характеристики остается практически неизменным.

Изыскания по определению более достоверной величины „упругой силы" пороха продолжались и после публикации в 1745 г. книги Робинса с добавлениями Эйлера. В начале XIX в. изучение с количественной и качественной точки зрения явлений, сопровождающих взрывчатое превращение пороха, продолжало привлекать внимание ученых и артиллеристов. В 1823 г. Гей-Люссак[1] определил экспериментальным путем состав газообразных продуктов разложения, что было крупным шагом вперед, открывшим путь к верному пониманию процессов, происходящих при горении пороха. Результатом этого открытия явилось установление факторов, обусловливавших большое разнообразие в величине „упругой силы" пороха. В 40-х годах один из наиболее крупных специалистов по внутренней баллистике первой половины XIX в. французский артиллерист Пиобер уже довольно отчетливо представлял себе причины этих больших расхождений, которые, несмотря на прогресс экспериментальной физики в этот период, все еще оставались значительными. Пиобер определял объем пороховых газов, образующихся при сгорании 1 кг пороха и приведенных к нормальным физическим условиям, в 330 — 350 дм^3; Гей-Люссак находил этот объем равным 500 дм^3, а Пруст — от 400 до 420 дм^3.

Позднее, в связи с повышением техники эксперимента и углублением знаний о процессах, происходящих при горении пороха, уточнялись и данные о количестве газов, выделяющихся при взрывчатом превращении 1 кг пороха. Постепенно устанавливаются условия, при которых следует определять удельный объем w_N газобразных продуктов превращения.

Бринк приводит значения удельного объема для различных сортов дымного пороха,[2] которые колеблются, по его данным, от 195.4 до 343 дм^3/кг.

---

[1] L. G. Gay-Lussac. Rapport au Gomité des poudres et salpêtres. 1823.
[2] А. Ф. Бринк. Внутренняя баллистика, ч. 1. СПб., 1901.

Теоретические и экспериментальные изыскания конца XIX в. давали для „упругой силы“ пороха значения, во много превышающие полученную Робинсом величину. Бринк, например, экспериментально установил эту характеристику равной 6356 атм.

Определение истинного значения „упругой силы“ пороха играло большую роль для изучения движения снаряда в канале ствола орудия и для решения некоторых других задач внутренней баллистики, которыми занимался Эйлер. В своих исследованиях он чаще всего оперировал с величиной в 1000 атм., установленной Робинсом. Обращаясь к этому значению „упругой силы“ пороха, Эйлер имел, очевидно, в виду исходить в своих исследованиях из тех же начальных данных, как и английский артиллерист. Значение для полного пиростатического давления P_1, или „упругой силы“ пороха, полученное Бринком, показывает, что эта характеристика значительно превышает полученную Робинсом. Тем не менее значения дульной скорости, которые Робинс находил теоретическим путем, исходя из величины „упругой силы“ пороха в 1000 атм., близко совпадали с данными, полученными экспериментально с помощью баллистического маятника. Такое совпадение можно объяснить отчасти тем, что в действительности, при опытном определении начальной скорости, плотность заряжания никогда не достигала единицы, почему и давление, развивавшееся к моменту полного сгорания заряда всегда было значительно меньше, чем при плотности заряжания $\Delta = 1$ кг/дм^3. Вполне вероятно, что истинное полное пиростатическое давление было весьма близко по своей величине к найденному Робинсом, что и объясняет достаточно удовлетворительным образом совпадение данных, полученных Робинсом теоретическим и экспериментальным путем.

В вопросе определения „упругой силы“ пороха Эйлеру принадлежит уточнение ее величины принятием в расчет относительного веса нелетучих продуктов превращения, а также предположением, что расширение пороховых газов при больших давлениях не следует закону Бойля—Мариотта. Эта последняя мысль базировалась на его более раннем исследовании, в котором Эйлер дал формулу сжимаемости газов, положенную в основу его теории движения снаряда в канале ствола орудия.

§ 21. ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ ГАЗОВ ПО ЭЙЛЕРУ

Разбирая первые Предложения книги Робинса, в которых устанавливается величина „упругой силы“ пороха, или по принятой в настоящей работе терминологии — полное пиростатическое давление P_1, Эйлер подчеркивал, что едва ли можно считать закон Бойля—Мариотта справедливым для больших давлений, развивающихся при взрывчатом превращении пороха. Эйлер, как уже говорилось, полагал, что полученная Робинсом величина „упругой силы“ пороха в 1000 атм. является заниженной. Значение этой характеристики в 10000 атм., полученной Даниилом Бернулли, отражало, по мнению Эйлера, действительность более точно и могло полнее объяснить явления, происходящие при выстреле. Однако если принять эту величину в качестве истинного значения полного пиростатического давления, то, как полагал Эйлер, закон сжимаемости должен иметь совершенно иной вид, чем тот, которым пользовался Робинс. Высказав эту мысль, Эйлер, переходя к изучению движения снаряда в канале ствола орудия, обратился к формуле упругости, выведенной им в самом начале своего пребывания в Петербургской Академии наук.

При установлении этой формулы Эйлер исходил из построенной им структуры воздуха, которую он изложил в мемуаре „Tentamen explicationis phaenomenorum aeris“, доложенном конференции Академии в 1727 г.[1] Теория Эйлера базировалась на положении Иоганна Бернулли, высказанного в одном из его мемуаров первой четверти XVIII в. Бернулли объяснял возникновение упругости воздуха вихревым движением частиц, из которого он состоит, и стремлением их отдаляться от центра вращения под действием центробежной силы. Сущность своей теории Эйлер формулирует так: „Constet itaque aer infinito bullularum minimarum numero, quarum crusta exterior sit aquea pro diverso aeris statu maior minorve; intra hanc crustam gyretur materia subtilis certa cum velocitate, quae subinde ab alia subtiliori adhuc materia omnes poros penetrante accelerationes nanciscitur, ne motus tandem consumatur et evanescat. Constat enim aerem calorem semel acceptum sensim amittere, cum autem aer calore rarefiat, sequitur materiam subtilem motu vehementiore agitari; cessante ergo calore, indicio id est, motum materiae esse retardatum.

„Ex hisce de structura aeris praemissis consequitur, eum in infinitum se expandere debere atque extremum raritatis gradum accipere, quando nihil est quod eius conatum compescat. Sed accedente gravitate, aliter se res habebit, eritque, quod vi aeris elasticae se opponet. Quum enim aer superior inferiorem premat pondere suo, inferior ulterius expandere nequit, quam

---

[1] Comm. Acad. Imp. Petropolitanae, 1729, t. II, стр. 347—368.

quoad eius vis elastica, quae expansione continuo diminuitur, aequalis sit vi incumbentis aeris comprimenti.

„Patet porro ex concepta aeris constitutione, eum in infinitum comprimi non posse, propter gravitatem specificam, quae in infinitum augeretur. Nam cum in qualibet bullula certa et determinata materiae subtilis quantitas comprehendatur, eaque semper superficiei adhaereat ob vim centrifugam, necesse est ut circa centrum spatium vacuum relinquatur; id quod eo maius esse debet, quo magis aer rarus fuerit: Contra autem continuata aeris compressione, id spatium vacuum continuo diminuetur, donec tandem prorsus evanescat, ultra quem densitatis gradum aerem comprimere impossibile erit".[1] („Итак, пусть воздух состоит из бесконечного числа мельчайших пузырьков, внешняя оболочка которых будет водянистой и большей или меньшей, соответственно различному состоянию воздуха; внутри этой оболочки пусть с известной скоростью вращается тонкое вещество, которое затем от другого, еще более тонкого вещества, проникающего через все поры, получает ускорения, чтобы движение не растратилось в конце концов и не исчезло. Ведь известно, что воздух постепенно теряет раз приобретенную теплоту, а когда воздух разрежается теплотой, то отсюда следует, что тонкое вещество приводится в более сильное движение; следовательно, исчезновение теплоты есть признак замедления движения вещества.

„Из этих предпосылок относительно структуры воздуха вытекает, что он должен расширяться до бесконечности и принимать крайнюю степень разреженности, когда ничто не сдерживает его стремления. Но так как прибавляется тяжесть, то дело будет обстоять иначе: появится то, что будет противодействовать упругой силе воздуха. Так как верхний воздух давит своим весом на нижний, то нижний не может расшириться больше, чем до тех пор, пока его упругая сила, уменьшаемая постоянным расширением, не станет равной сжимающей силе лежащего сверху воздуха.

„Далее, из понимания структуры воздуха ясно, что он не может сжиматься до бесконечности вследствие специфической тяжести (удельного веса, — *А. М.*), которая увеличивалась бы до бесконечности. Ведь когда в каком-нибудь пузырьке содержится известное и определенное количество тонкого вещества, причем оно вследствие центробежной силы всегда прилегает к поверхности, то необходимо, чтобы оставалось пустое про-

---

[1] L. Euler. Tentamen explicationis phaenomenorum aeris. Comm. Ac. Sc. Petrop., 1729, t. 2, стр. 349—350.

странство около центра; и оно должно быть тем большим, чем более редким будет воздух. Напротив, при продолжающемся сжатии воздуха это пространство постоянно уменьшается, пока, наконец, совершенно, не исчезнет, больше этой степени плотности воздух сжать будет невозможно").

На основе этой модели структуры воздуха и, в частности, исходя из действия центробежных сил тонкой жидкости, находящейся в пузырьках, Эйлер вывел формулу сжимаемости, вполне объясняющую основные физические свойства газа. Эйлер в следующих словах писал о том, что выведенная чисто теоретическим путем формула всегда должна отражать действительность: „Quanquam ad intima rerum penetralia et cognitionem ultimae partium structurae aditus non ita patet, ut phaenomenorum, quae inde oriuntur ratio reddi queat: Tamen, ut plerumque a Physicis factum est, a corporum naturalium proprietatibus, quas observavimus, quodammodo ad ipsam eorum structuram concludere licet. Ex qua percepta corporum structura, quo plura phaenomena explicari possunt, eo perfectior ea est; Et, si ex qua Theoria omnes prorsus proprietates, quas quidem cognoscere impossibile est, derivari possent, dubium non est, quin ea vera sit, et re ipsa existat".[1] („Хотя доступ к сокровенным недрам вещей и к познанию частей строения последнего не так открыт, чтобы было возможно дать отчет о возникающих оттуда явлениях, однако, так как это часто делалось физиками, по наблюдаемым свойствам природных тел, возможно как-то заключить и о самом их строении. Чем большее число явлений объясняет данное понимание строения тел, тем оно совершеннее; и если из какой-нибудь теории можно вывести решительно все свойства, даже которые не поддаются познанию, то не подлежит сомнению, что она правильна и действительно существует").

Важнейшим положением теории структуры воздуха, которое Эйлер использовал при выводе своей формулы сжимаемости, является допущение, что воздух или какой-нибудь другой газ, например, образующийся при горении пороха, не может быть сжат сверх определенной границы, т. е. даже при весьма большом давлении плотность газа достигает некоторого предела, далее которого она увеличена быть не может. Стало быть, Эйлер вводит понятие, аналогичное понятию удельного коволюма.

Эйлер излагал смысл, который он вкладывал в свою формулу сжимаемости, следующим образом.

---

[1] *Там же, стр. 347.*

Пусть n_q — предельная плотность пороховых газов (по отношению к плотности воздуха, находящегося при нормальных физических условиях), далее которой они сжаты быть не могут; полагая плотность n_q известной, Эйлер находил: давление воздуха (пороховых газов), находящегося при нормальных физических условиях, относится к давлению воздуха, в n_m раз более плотного (плотность воздуха, находящегося в нормальных физических условиях принимается за единицу), как

$$\sqrt[3]{n_q^2} - \sqrt[3]{(n_q-1)^2}$$

относится к

$$\sqrt[3]{n_q^2} - \sqrt[3]{(n_q-n_m)^2}.$$

Если p_N — атмосферное давление, то давление воздуха в n_m раз более плотного будет представлено, согласно Эйлеру, следующей формулой:

$$P = p_N \frac{\sqrt[3]{n_q^2} - \sqrt[3]{(n_q-n_m)^2}}{\sqrt[3]{n_q^2} - \sqrt[3]{(n_q-1)^2}}. \tag{210}$$

Для того чтобы учесть увеличение давления пороховых газов в результате воздействия той высокой температуры, которая сопутствует взрывчатому превращению пороха, Эйлер вводил некоторый коэффициент, который, как и Робинс, он полагал равным 4. В предыдущем параграфе было показано, что этот коэффициент есть не что иное, как отношение температуры взрывчатого разложения пороха T_e, выраженной в абсолютной градусной шкале, к температуре, отвечающей абсолютному нулю, т. е. что $\frac{T_e}{273} = 4$. В таком случае формула сжимаемости Эйлера получает вид:

$$P = p_N \frac{\sqrt[3]{n_q^2} - \sqrt[3]{(n_q-n_m)^2}}{\sqrt[3]{n_q^2} - \sqrt[3]{(n_q-1)^2}} \cdot \frac{T_e}{273}. \tag{211}$$

Принимая во внимание, что плотность до предела сжатого воздуха n_q значительно больше плотности n_m, Эйлер упрощает формулу упругости (210). Разлагая $\sqrt[3]{(n_q-n_m)^2}$ и $\sqrt[3]{(n_q-1)^2}$ в ряд, пренебрегая степенями $\frac{n_m}{n_q}$ и $\frac{1}{n_q}$ высших порядков, он получает

$$P = p_N \left[n_m + \frac{n_m(n_m-1)}{6n_q} \right]. \tag{212}$$

В том случае, если плотность пороховых газов n_m невелика, можно пренебречь вторым членом в квадратных скобках, после чего формула сжимаемости Эйлера сводится к закону Бойля — Мариотта, которым пользовался Робинс:

$$P = p\gamma n_m. \tag{213}$$

При значительных плотностях n_m, когда пренебрегать величиной дроби $\frac{n_m - 1}{6 n_q}$ сравнительно с единицей нельзя, формула сжимаемости сильно отличается от той, которой пользовался Робинс. Следовательно, значение дроби $\frac{n_m - 1}{6 n_q}$, а значит, и граница применяемости формулы (212) определяется величиной той предельной плотности n_q, до которой могут быть сжаты пороховые газы. К установлению численной величины этой характеристики и переходил Эйлер.

Для определения предельной плотности воздуха n_q Эйлер обращался к результатам опытов Робинса и брал за исходную данную отношение удельных объемов $\frac{w\gamma}{w} = 244$. При этом он учитывал, что только 0.3 объема заряда превращается в пороховые газы. Эйлер находил, что после расширения газов и приведения их к нормальным физическим условиям они занимают объем в 800 раз больший по сравнению с первоначальным. Отсюда он заключал, что газы, высвободившиеся при взрывчатом превращении пороха, обладают в момент их образования плотностью в 800 раз большей, чем воздух, находящийся при нормальных физических условиях. Это и есть, по мнению Эйлера, та наибольшая плотность n_q, далее которой газы не могут быть сжаты. В подтверждение выбранного им значения для n_q Эйлер указывал на то, что едва ли в природе существует упругая жидкость, сжатая в большей степени, чем воздух в зернах пороха. Кроме того, он замечал, что наибольшая плотность, до которой может быть сжат воздух, совпадает с плотностью воды; это еще раз подтверждало, по его мнению, правильность найденной им величины.

После установления формулы сжимаемости, достаточно удобной для приложений, и величины предельной плотности n_q, Эйлер переходил к демонстрации того, как выведенная формула отражает действительность, и к выяснению границ ее применимости.

Для определения давлений, отвечающих плотностям воздуха $n_m < 1$, т. е. когда воздух разрежен, Эйлер предлагал пользоваться формулой (213), т. е. законом Бойля—Мариотта. Для плотностей воздуха $n_m > 1$ Эйлер обращался к формуле (212), но уже не ограничивался ее первым членом. Здесь Эйлер соблюдал, пожалуй, чрезмерную осторожность, лимитируя границы приложимости закона Бойля—Мариотта атмосферным давлением. То же можно сказать и в отношении верхней границы плотности, до которой он считал возможным употреблять формулу (212). Эйлер устанавливал этот предел равным 16 атм., подчеркивая, что такая величина давления является наибольшей, достигнутой в физике. Для границы $n_m = 16$ формула (212) давала давление, еще нечувствительно отличающееся от того, которое получалось по закону Бойля—Мариотта. Однако в приложениях (при изучении движения снаряда в канале ствола орудия) Эйлер широко пользовался формулой (212), употребляя ее для давлений, далеко превосходящих 16 атм. Таким образом, Эйлер здесь не вполне последователен.

Полагая, что для случая, когда плотность пороховых газов $n_m > 16$, формула (212) уже недостаточно точна, так как при ее выводе были отброшены члены высших порядков, влияние которых после указанной плотности становится существенным. Эйлер предлагал находить давления по другой, более точной формуле, устанавливаемой из основной его зависимости (210),

$$P = p_N \left[\frac{3}{2} n_q - 3\sqrt[8]{100 (n_q - n_m)^2}\right] \left(1 - \frac{1}{6n_q}\right) \frac{T_e}{273}.$$

Если определять по этой формуле величину полного пиростатического давления[1] P_1, численно равное „упругой силе“ пороха, то следует положить, как это делал Эйлер, плотность газов $n_m = 800$, что соответствует моменту их образования. В таком случае

$$P_1 = 1200 \cdot 4 = 4800 \approx 5000 \text{ атм.}$$

Стало быть, выведенная Эйлером формула упругости, в которой весьма своеобразным образом учтен объем, занимаемый молекулами газов, приводила к величине „упругой силы“ пороха, в 5 раз превосходящей установленное Робинсом значение. Величина „упругой силы“ пороха в 5000 атм. может, по его мнению, вполне объяснить все те противоречия, какие возникали при сопоставлении опытных данных с теоретическими подсчетами, основанными на значении этой характеристики, принятой Робинсом. Уместно подчеркнуть, что найден-

[1] При дальнейшем изложении давления пороховых газов будут выражаться, как это делал Эйлер, через высоты столба воздуха, которыми они измеряются.

ная Эйлером величина полного пиростатического давления довольно близка к ее значениям, выведенным на основании современных данных для удельного объема пороховых газов w_N и температуры взрывчатого превращения T_e.

Эйлер пользовался при выводе своей формулы сжимаемости структурой воздуха, основанной на чисто априорных допущениях. При этом, однако, Эйлер пошел дальше своих предшественников, получив формулу, отражающую действительность для широкого диапазона давлений, начиная от весьма незначительных и кончая теми громадными давлениями, которые развиваются в канале ствола орудия при выстреле. Хотя Эйлер исходил из абстрактных построений, он постоянно опирался на опыт, стремясь к тому, чтобы его теория отражала явления природы. К этому следует прибавить, что весьма сложно было воссоздать близкую к действительности модель молекулярного строения воздуха и других газов на базе уровня развития теоретической и экспериментальной физики середины XVIII в. Все это позволяет подойти к оценке формулы Эйлера несколько с иной точки зрения, чем известный французский механик Понселе, который отозвался по поводу этой формулы скептической фразой: „Всегда стремясь привести в соответствие теорию с практикой, Эйлер направил свое решение по пути, мало достойному его гения и основанному на совершенно гипотетической теории физической структуры газов“.[1]

Несмотря на всю примитивность созданной им структуры воздуха и искусственность принятых гипотез, Эйлеру удалось получить формулу, довольно удачно отражающую действительность. Эта зависимость, связывающая давление газов с их плотностью, позволила ему глубже своих современников проникнуть в сущность тех сложных физических явлений, которые имеют место в канале ствола при выстреле. Введением величины, аналогичной удельному коволюму, Эйлер близко подошел к современной форме уравнения состояния газов. Правда, нужно сказать, что это чрезвычайно важное для развития физики открытие осталось мало замеченным. Первым, кто обратил внимание на установленную Эйлером формулу сжимаемости, был М. В. Ломоносов, который, занимаясь в конце 40-х годов изучением свойств селитры, столкнулся с необходимостью исследовать упругие свойства воздуха более об-

[1] Rapport sur un mémoire de M. Poncelet sur les effets de la poudre et exposé des recherches antérieures sur le même sujet, fait à l'Académie des Sciences dans la séance du 22 août 1836, par une Commission composé de M. M. Arago, Dulong et Poncelet (Rapporteur).

стоятельно, чем это делалось до него. Создавая свой закон упругости, Ломоносов неоднократно обращался к Эйлеру и глубоко изучил его добавления к книге Робинса, посвященные установлению величины упругой силы пороха. Ломоносов писал Эйлеру 5 июля 1748 г.: „Я читаю, с большой пользой для себя, «Артиллерию» Робинса, снабженную Вами превосходнейшими замечаниями. Но так как я полагаю, что, узнав настоящую причину упругости воздуха, легче можно раскрыть силу, которая сгущает воздух в селитре, то поэтому я счел целесообразным предпослать трактату о рождении селитры теорию упругости воздуха, которой начало я положил еще тогда, когда начал серьезно размышлять о мельчайших составных частях вещей“.[1]

Формула Эйлера так и не нашла применения во внутренней баллистике. В середине XIX в. французский артиллерист Пиобер[2] при изучении движения снаряда в канале ствола орудия основывался на эмпирической формуле Румфорда, установленной в 1792 г. Только в 70-х годах XIX в., исходя из проведенных ими экспериментов, английские баллистики Нобль и Эйбл ввели в практику внутренней баллистики формулу полного пиростатического давления с учетом удельного коволюма пороховых газов, т. е. получили действительно достоверную формулу, первое грубое представление которой было дано Эйлером за полтораста лет перед тем.

§ 22. МЕТОД РОБИНСА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ДУЛЬНОЙ СКОРОСТИ

В середине XVIII в. были установлены первые, основанные на эксперименте и теоретических изысканиях, положения внутренней баллистики, хотя и очень примитивные с точки зрения настоящего времени. Сложились понятия не только о природе выделяемой при взрывчатом превращении пороха энергии, но и первое, правда весьма грубое, представление об ее величине — определено значение „упругой силы“ пороха, измеряемой, как это было показано в § 20, полным пиростатическим давлением P_1. Создается баллистический маятник, появление которого явилось крупным событием, открывшим новые перспективы для развития баллистики. Задача по теоретическому определению дульной скорости становится в середине XVIII в. на

[1] М. В. Ломоносов. Труды по физике и химии (1747—1752), т. 2. Изд. АН СССР, М.—Л., 1951, стр. 171—173.

[2] W. Piobert. Traité d'artillerie théorique et pratique. Paris, 1847.

реальную почву и привлекает внимание крупных ученых мира. Биго де Морог[1] в Париже, Даниил Бернулли[2] в Петербурге, Бенджамен Робинс в Лондоне и Леонард Эйлер в Берлине почти одновременно обратились к решению этого вопроса.

В 1737 г. Биго де Морог сформулировал важнейшее положение, на котором в течение целого столетия постоянно основывались ученые при решении задач внутренней баллистики. Биго де Морог высказал гипотезу, что пороховой заряд полностью сгорает, т. е. превращается в пороховые газы до того момента, как снаряд сдвинулся с места. Одновременно, как уже говорилось, он дал и формулу для определения давления пороховых газов в замкнутом пространстве. В 1738 г. Даниил Бернулли получил формулу, которая в принятых теперь обозначениях выглядит так

$$v_\partial = B\frac{\omega}{q}\ln\left(\frac{l_\partial}{l_1}\right), \tag{220}$$

где ω — вес заряда, q — вес снаряда, l_∂ — полная длина канала, l_1 — часть длины канала, заполненная пороховым зарядом, а B — некоторый коффициент.

Новая попытка теоретического определения дульной скорости принадлежала Робинсу, изложившему свою теорию в 7-м Предложении его книги „New principles of gunnery". В отличие от Бернулли английский артиллерист уже пользовался баллистическим маятником, опираясь, таким образом, в своих теоретических изысканиях на достаточно точную методику. Баллистический маятник позволял Робинсу подойти более строго к обоснованию принятых им допущений. Его теория, наконец, послужила толчком к появлению изысканий Эйлера, оставившего далеко позади других ученых того времени как по глубине, так и по широте охвата задачи, стоявшей перед баллистикой в XVIII в. Все это дает право остановиться на методе Робинса более подробно.

Задачу внутренней баллистики Робинс ставил так: зная калибр и длину канала ствола орудия, вес заряда, вес снаряда, величину „упругой силы" пороха, определить дульную скорость.

Для того чтобы решить эту задачу, Робинс принял два допущения:

---

[1] Bigot de Morogues. Essay de l'application des forces centrales aux effets de la poudre a canon. Paris 1737.

[2] Daniel Bernoulli. Hydrodinamica, sive de viribus et motibus fluidorum. Commentarii opus Academicum ab auctore dum Petropoli ageret Congentum, 1738.

1) пороховые газы действуют на снаряд до тех пор, пока он не пройдет дульный срез и не вылетит из канала ствола орудия;

2) пороховой заряд полностью сгорает к моменту начала движения снаряда.

Робинс обосновывал первое допущение тем, что газы, истекающие вслед за выброшенным из канала ствола снарядом, сильно расширяются. Действие пороховых газов на снаряд становится настолько незначительным, что перестает сказываться на увеличении его скорости. Принимая это допущение, Робинс приходил к выводу об отсутствии последействия газов. Для своего времени гипотеза Робинса была близка к действительности. Дульные давления для орудий середины XVIII в. были невелики и не могли сколько-нибудь существенно повлиять на изменение скорости снаряда после его вылета из канала ствола. Вообще говоря, Робинс вполне мог не говорить об этом допущении. Однако тот факт, что он не обошел его молчанием, лишний раз подтверждает большие знания, которыми обладал английский артиллерист, обративший внимание на явление последействия газов, задолго до того, как его влияние стали принимать в расчет.

Справедливость второго допущения Робинс доказывал тем, что температура взрывчатого превращения пороха велика, почему скорость, с которой пламя распространяется от одного конца заряда к другому, достигает большой величины, откуда следует, что время горения заряда мало. Другим способом, который служил Робинсу для обоснования второго допущения, являлось сравнение дульных скоростей, полученных для ружей теоретическим путем на основе принятых им гипотез, с найденными при помощи баллистического маятника. Сопоставление этих данных привело Робинса к заключению о справедливости его допущения.

Вторая гипотеза Робинса встретила многочисленные возражения как со стороны строевых артиллеристов, так и среди ученых. Основным доводом его противников являлось то, что к моменту вылета снаряда из канала ствола заряд сгорает неполностью. Об этом свидетельствовал тот неоспоримый факт, что после выстрела впереди дульной части орудия постоянно находили несгоревшие или частично сгоревшие зерна пороха. Противники теории мгновенного сгорания, среди которых был и Эйлер, полагали, что подобное явление можно объяснить только постепенным сгоранием заряда. Полемизируя со своими оппонентами, Робинс утверждал, что наблюдаемые после выстрела несгоревшие или частично сгоревшие зерна пороха принадлежат к зернам большего размера или к тем, которые не воспламенились по случайным причинам.

К доводам Робинса можно прибавить, что размешивание составных частей пороха в середине XVIII в. было недостаточно тщательным. Это могло приводить к неравномерности содержания отдельных компонентов в каждом из зерен. В результате некоторые из них или вовсе не сгорали, или сгорали частично.

Эйлер обстоятельно комментирует принятое Робинсом допущение. В том, что касается горения порохового заряда в канале ствола, он расходился с точкой зрения Робинса. Эйлер строил свою теорию движения снаряда в канале ствола орудия из иного представления о характере горения заряда. Он полагал, вообще говоря, что его сгорание происходит постепенно. Однако в поисках более простого решения Эйлер в конце концов приходил к допущению, что заряд почти полностью обращается в пороховые газы (93%) до смещения снаряда. Таким образом, Эйлер фактически считал, что заряд сгорает мгновенно.

Наиболее сильным доказательством, которое Робинс приводит в пользу своего предположения, Эйлер считал согласие величин дульных скоростей, полученных теоретическим путем с найденным при помощи баллистического маятника. Однако, по мнению Эйлера, в теоретической части своей работы Робинс допустил ряд погрешностей. В частности, согласно его точки зрения, не были учтены факторы, замедляющие движение снаряда по каналу ствола орудия. Эйлер подчеркивал, что, несмотря на эти неточности, величины дульных скоростей, найденные Робинсом теоретически, поразительно совпадают с теми, которые были получены экспериментально. Он обращал внимание на удивительную „ловкость“, с какой Робинс согласовал свою теорию с опытом, несмотря на то, что, по мнению Эйлера, подобного соответствия ожидать было трудно.

При разработке теории движения снаряда в канале орудия Эйлер уделял серьезное внимание, о чем подробнее будет сказано ниже, оценке влияния сил сопротивления на уменьшение величины дульной скорости. Кроме того, он считал, что на скорости снаряда значительно сказывается и то обстоятельство, что расширяющиеся пороховые газы приводят в движение несгоревшие части заряда и нелетучие продукты разложения. Однако в действительности эти причины обусловливают лишь весьма незначительное уменьшение скорости снаряда. Обращая внимание на эти второстепенные факторы, Эйлер не учитывал ряда других обстоятельств, оказывающих существенное влияние на характер движения снаряда в канале ствола орудия.

Останавливаясь на приведенном Робинсом доказательстве мгновенности сгорания порохового заряда, основанном на том, что наличие несгоревших или частично сгоревших зерен объясняется их большими размерами, Эйлер отмечал неубедительность этого довода. По его мнению, наличие несгоревших пороховых зерен убеждает только в том, что пороховой заряд сгорает к моменту прохождения снарядом дульного среза неполностью. Рассуждения Эйлера сводились к тому, что хотя время движения снаряда по каналу ствола и невелико, но нельзя считать время полного сгорания заряда настолько малым, чтобы полагать его мгновенным. Постепенность горения порохового заряда, заключал Эйлер, показывает, что „упругую силу“ пороха необходимо выбирать меньше той величины, которой пользовался Робинс.

Разбирая гипотезу о мгновенности сгорания заряда в добавлении к 7-му Предложению книги Робинса, Ломбар в еще более резкой форме, чем Эйлер, выступал против принятого английским артиллеристом допущения: „Мнение нашего автора (Робинса, — *А. М.*) о быстроте воспламенения пороха так противоречит достоверным законам природы, что удивительно не то, что он полагал его мгновенным, но то, что он был ослеплен до такой степени, что взялся это показать... Огонь, сообщенный одному концу заряда не может достигнуть другого, не пройдя всех его промежуточных частей. Если рассматривать только отдельное зерно пороха, то воспламенение различных слоев, из которых оно состоит, может быть только последовательным, от внешней поверхности к центру. Достаточно высказать эту истину, чтоб убедиться в ее очевидности“.[1]

Точка зрения Ломбара о постепенности сгорания порохового заряда была более близка к действительности, чем гипотеза Робинса. Однако в середине XVIII в. зерна пороха обладали небольшими размерами, а их плотность была невелика. Взрывчатое превращение пороха происходило весьма интенсивно. Пламя проникало вглубь зерен с большой быстротой, и сгорание заряда происходило за промежуток времени, который можно было принять весьма малым сравнительно со временем движения снаряда по каналу. Поэтому допущение Робинса о мгновенности сгорания заряда было наиболее рациональным применительно к пороху, употреблявшемуся в то время.

---

[1] B. Robins. Nouveaux principes d'Artillerie commentés par M. Léonard Euleur, traduit de l'allemand par M. Lombard. Paris, 1783, стр. 107.

В течение двух столетий, предшествовавших опытам Робинса, развитие техники открыло возможность изготовлять зернистый порох, заменивший пороховую мякоть. Зернение было введено первоначально для порохов, предназначенных для стрельбы из мушкетов, с тем, чтобы облегчить их заряжание. В середине XVI в. зернистый порох вводится и для орудий. Окончательно он вытесняет пороховую мякоть в начале XVII в.

Заряд зернистого пороха сгорал быстрее, чем состоящий из пороховой мякоти. Это дало право Биго де Морогу, Даниилу Бернулли, а затем и Робинсу принять гипотезу мгновенного сгорания. В середине XVIII в. понятия воспламенения и горения еще не были разграничены. В баллистике фигурировало одно лишь понятие „воспламенение". Ученые считали, что пороховое зерно воспламеняется мгновенно, в результате чего пороховые газы сразу же полностью высвобождаются. В этом представлении процесса сгорания порохового зерна объединялось два явления — воспламенение и горение. По существу же, ученые XVIII в., оперируя с понятием мгновенного воспламенения заряда, подразумевали процесс его мгновенного сгорания. В том же случае, когда речь шла о постепенном горении заряда, полагали, что пороховые зерна, входящие в его состав, сгорают так же мгновенно, но не одновременно. В этом и состояло различие между мгновенным и постепенным сгоранием заряда в понимании ученых того времени.

Только спустя 20 с лишним лет после выхода в свет книги Робинса, д'Антони[1] разграничил понятия воспламенения и горения, открыв тем самым путь к правильному изучению процесса сгорания порохового заряда в орудии. В 1765 г. он установил, что пороховой заряд воспламеняется в результате передачи огня от одного зерна к другому посредством горения их внешних слоев. Скорость воспламенения заряда, зависящая от промежутков между зернами и давления, значительно превосходит скорость распространения пламени внутрь зерна. Стало быть, воспламенение заряда происходит значительно быстрее, чем его горение. Какова бы ни была кажущаяся быстрота горения порохового зерна, тем не менее оно протекает в сравнительно небольшой промежуток времени, продолжительность которого тем значительнее, чем размеры зерна больше.

После открытия д'Антони стало очевидным, что допущение Робинса можно рассматривать лишь как первое приближение.

---

[1] A.-V.-P. d'A n t o n i. Examen de la poudre, traduit par Flavigny. 1773.

Однако гипотеза мгновенного сгорания заряда оказалась весьма плодотворной. Это допущение открыло путь для решения задач внутренней баллистики и позволило определить теоретически, хотя бы в первом приближении, величину дульной скорости. Предположение о том, что заряд сгорает полностью до того, как снаряд сдвинется с места, прочно укоренилось во внутренней баллистике и служило более ста лет основой при изучении движения снаряда в канале ствола орудия.

„Все авторы (кроме Резаля), — писал профессор Михайловской артиллерийской академии П. М. Альбицкий, — занимавшиеся решением рассматриваемого вопроса, предполагали, что заряд до смещения снаряда обращается в газы, так что никто не принимал во внимание ни последовательного воспламенения, ни последовательного горения заряда. В силу этого допущения наибольшее давление пороховых газов всегда получается в самом начале движения снаряда. На основании непосредственных опытов мы знаем, что наибольшее давление на стены орудия всегда получается после смещения снаряда; эти данные, добытые путем опыта, указывают на необходимость принимать во внимание последовательное образование пороховых газов при горении заряда при рассмотрении движения снаряда в канале орудия, но недостаток наших сведений по этому предмету делает сказанное допущение необходимым“.[1]

При теоретическом определении величины дульной скорости Робинс избрал геометрический метод решения, видимо, потому, как писал Эйлер, чтобы его исследование было доступно широкому кругу артиллеристов, не владевших еще новым для того времени математическим аппаратом — алгеброй.

Робинс полагал, что движение снаряда происходит под действием одной лишь силы, обусловленной давлением расширяющихся пороховых газов, которое определяется законом Бойля—Мариотта. Иными словами, Робинс полагал, что давление пороховых газов изменяется по длине канала ствола, следуя гиперболической кривой с ассимптотами: одной, совпадающей с осью канала ствола, и другой, ей перпендикулярной и проходящей через точку, отвечающую донной части канала.

Если принять ассимптоты гиперболы: первую — за ось абсцисс, по которой откладывается путь снаряда по длине канала ствола, а вторую — за ось ординат, отвечающую изменению

---

[1] П. М. Альбицкий. Современное положение вопроса о движении снаряда в канале орудия. Арт. журн., 1875, № 8, стр. 694.

давления пороховых газов, то уравнение гиперболы будет иметь вид

$$P = P_1 \frac{l_1}{l}, \tag{221}$$

где P_1 — полное пиростатическое давление при плотности заряжания $\Delta = 1$ кг/дм^3; l — расстояние от дна канала, отвечающего началу координат до данного положения снаряда в канале ствола; l_1 — длина канала ствола, занимаемого зарядом.

Для определения искомой дульной скорости Робинс рассматривал две площади: первую, ограниченную ветвью гиперболы, осью абсцисс и двумя ординатами, проведенными через точки, отвечающие соответственно первоначальному положению снаряда и дульному срезу; вторую, представляющую собой прямоугольник со сторонами, — одной, равной расстоянию, которое проходит снаряд по каналу ствола, и второй, равной по величине весу снаряда q.[1]

Если обозначить первую из площадей через s_1, а вторую — через s_2, то предложенную Робинсом формулу для определения дульной скорости можно представить в следующем виде:[2]

$$v_\partial = v\sqrt{\frac{s_1}{s_2}},$$

где v — скорость, с которой выбрасывался бы снаряд из канала ствола, если бы он находился под действием постоянной силы, равной по величине силе тяжести. Иными словами,

$$v = \sqrt{2g(l_\partial - l_1)}.$$

---

[1] Эйлер и Робинс выражают давление пороховых газов и вес снаряда через соответственные высоты столба воды с поперечным сечением, равным площади поперечного сечения канала. Для того чтобы приблизить формулы к употребительным, теперь эти величины представлены через единицы давления и веса.

[2] Для вывода приведенной формулы Робинс обращается к положению Ньютона, по которому потеря живой силы равна произведенной работе, т. е. к уравнению живых сил. В начальный момент времени скорость снаряда равна нулю. В таком случае, когда снаряд находится под действием давления пороховых газов, уравнение живых сил имеет вид $\frac{qv_\partial^2}{2g} = A_1$. Для случая, когда снаряд вылетал бы из канала ствола под действием силы тяжести со скоростью v, уравнение живых сил было бы $\frac{qv^2}{2g} = A_2$. Почленное деление первого уравнения на второе дает $v_\partial = v\sqrt{\frac{A_1}{A_2}}$, где A_1 и A_2 определяются величинами площадей s_1 и s_2.

Величина площади s_2 будет равна $s_2 = q(l_\partial - l_1)$. Площадь s_1 может быть определена, исходя из следующих соображений. Как известно,

$$s_1 = \int_{l_1}^{l_\partial} P dl,$$

или, так как P определяется формулой (221),

$$s_1 = P_1 l_1 \int_{l_1}^{l_\partial} \frac{dl}{l} = P_1 l_1 \ln\left(\frac{l_\partial}{l_1}\right),$$

откуда определяется дульная скорость

$$v_\partial = \sqrt{2g(l_\partial - l_1)} \sqrt{\frac{P_1 l_1}{q(l_\partial - l_1)} \ln\left(\frac{l_\partial}{l_1}\right)} = \sqrt{2g \frac{P_1}{q} l_1 \ln\left(\frac{l_\partial}{l_1}\right)}, \quad (222)$$

которая идентична[1] с формулой для дульной скорости, найденной Даниилом Бернулли.

Для случая, когда между зарядом и снарядом остается незначительный промежуток, дульная скорость определялась Робинсом по той же формуле (222), но вместо P_1 подставлялась величина $P_1 \frac{l_з}{l_1}$, где $l_з$ — длина заряда.

После установления приведенной выше формулы Робинс переходил к сопоставлению полученных на ее основании результатов с данными, найденными экспериментальным путем с помощью баллистического маятника. Этот прибор позволял определять скорости быстро движущихся тел и то лишь небольшой массы, т. е. ружейных пуль.[2] Два других известных метода определения скоростей снарядов и пуль Робинс считал совершенно непригодными: первый из них, основанный на определении скорости по времени прохождения снарядом данного расстояния, он полагал ненадежным из-за отсутствия до-

---

[1] Если ввести в подкоренное выражение формулы (222) плотность пороха δ, то произведение $l_1\delta$ будет равно весу заряда ω. В таком случае легко убедиться, что формула (222) идентична с формулой (220), если положить, следуя Бернулли и придерживаясь принятых теперь обозначений, что $2g \frac{P_1}{\delta} = B$.

[2] Баллистический маятник, позволявший определять скорости снарядов, выброшенных из орудий небольшого калибра, был изготовлен по проекту английского профессора Хэттона в 1775 г.

статочно точного прибора для измерения времени; другой метод, по которому начальная скорость определялась по известной дальности, также не мог считаться надежным вследствие недостоверности принятого в то время закона сопротивления воздуха. Баллистический маятник оставался, таким образом, единственным прибором, которым мог воспользоваться Робинс.

Сопоставление скоростей, полученных с помощью баллистического маятника и посредством выведенной им формулы, привело Робинса к заключению об удовлетворительности разработанной им теории и справедливости положенных в ее основу допущений.

Тщательно изучив материал экспериментов Робинса, Эйлер обратил внимание, как уже отмечалось, на большую согласованность между значениями дульных скоростей, полученных теоретическим и опытным путем. Подобного совпадения, по мнению Эйлера, быть не могло вследствие ряда неучтенных Робинсом обстоятельств, тормозящих движение снаряда по каналу ствола. Следовательно, наблюдавшееся Робинсом соответствие между результатами, полученными теоретическим и опытным путем, могло явиться следствием того, что в методике проведения экспериментов он допустил погрешности, которые компенсировали неточности, имевшие место при выводе его формулы.

Эйлеру принадлежит разработка первой классической теории баллистического маятника и методики постановки экспериментов с его помощью. В частности, он обнаружил ряд серьезных недостатков, которые допустил Робинс при своих опытах. Величины скоростей, определяемые с помощью баллистического маятника, только тогда близки к действительности, как показал Эйлер, когда пули попадают в приемник маятника вблизи от центра удара. В опытах Робинса ограничения такого рода не соблюдались и все попадания считались пригодными.

Несмотря на ряд неточностей, теория Робинса сыграла положительную роль как в общем развитии артиллерийской науки, так и в вопросах практического характера, в частности для проектирования орудий.

Теорию Робинса о движении снаряда в канале ствола орудия и его метод теоретического определения величины дульной скорости можно изложить с точки зрения настоящего времени вкратце следующим образом.

Пороховой заряд сгорает мгновенно и полностью обращается в пороховые газы до начала движения снаряда. При этом допускается, что плотность заряжания равна единице. При сгорании порохового заряда в замкнутом пространстве развивается полное пиростатическое давление, определяемое по формуле (221). Снаряд приходит в движение под действием силы, обусловленной полным пиростатическим давлением. С перемещением снаряда по каналу ствола орудия пороховые газы получают возможность расширяться, и давление изменяется по закону Бойля—Мариотта.

Робинс допустил две существенные неточности, которые привели его к ошибочному выводу о характере изменения давления по длине канала ствола. Первая из них заключалась в том, что не учитывался объем нелетучих продуктов разложения. В итоге полное пиростатическое давление получалось заниженным сравнительно с его действительным значением. Правда, эта погрешность, как уже говорилось в § 20, компенсировалась тем, что в действительности плотность заряжания никогда не достигала единицы, почему давление, развивающееся при сгорании заряда в замкнутом пространстве, могло быть ниже величины полного пиростатического давления, из которого исходил Робинс.

Вторая существенная неточность теории Робинса состояла в том, что, приняв закон расширения пороховых газов Бойля—Мариотта, он допустил тем самым постоянство температуры газов для всего времени движения снаряда по каналу ствола. На самом деле температура пороховых газов значительно понижается (до 30%) и в качестве зависимости, определяющей характер изменения давления пороховых газов, следует принять адиабатический закон расширения.

С точки зрения ученых XVIII в. и, в частности, Эйлера, теория Робинса содержала и некоторые другие неточности. По мнению Эйлера, он, так же как и Даниил Бернулли, не принимал во внимание и не оценивал влияния ряда факторов, сказывающихся на уменьшении величины дульной скорости. Сюда относится учет действия сил, замедляющих движение снаряда, обусловленных действием атмосферного давления и сопротивления воздуха, а также энергии расширяющихся пороховых газов, которая затрачивается на приведение в движение массы самих газов и твердых продуктов разложения. Кроме того, Робинс не принимал во внимание сопротивления, возникающего от трения снаряда о поверхность канала ствола.

Добавления Эйлера к изложенному разделу книги насыщены критическими замечаниями теории Робинса. Это — обстоятельный анализ метода Робинса с позиций ученого XVIII в., в совершенстве владеющего математическим анализом. После тщательной критики положений Робинса, о которой вкратце было уже сказано в настоящем параграфе, Эйлер переходит к изложению собственной теории движения снаряда по каналу ствола орудия, теории, в которой он пытается учесть влияние тех факторов, которые не были приняты в расчет английским артиллеристом.

§ 23. МЕТОД ЭЙЛЕРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДУЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПРИ ГИПОТЕЗЕ МГНОВЕННОГО СГОРАНИЯ ЗАРЯДА

Добавления Эйлера к 7-му Предложению первой главы книги Робинса „New principles of gunnery“ посвящены решению той же задачи, которую поставил перед собой английский артиллерист, т. е. теоретическому определению дульной скорости при гипотезе мгновенного сгорания заряда. Исследование Эйлера по своей глубине, обстоятельности и строгости изложения значительно превосходит работу Робинса. Добавления Эйлера отличаются прежде всего широким применением новейших достижений математического анализа, проникновением в физический смысл сложных явлений и использованием экспериментального материала, которым изобилует книга Робинса. Именно эти методы исследования, свойственные, вообще говоря, специальным областям механики, получившим развитие во второй половине XIX в., и привлекают внимание к изучению добавлений Эйлера. Кроме того, ему удалось получить ряд выводов, которые и в настоящее время почти в той же форме применяются во внутренней баллистике. Эйлер полностью разработал теорию движения снаряда по каналу ствола орудия, построенную при различных упрощающих допущениях, с последующим усложнением постановки задачи.

Изучение движения снаряда по каналу ствола орудия и определение дульной скорости Эйлер начинает с простейшего случая, допуская, что пороховой заряд сгорает мгновенно, а на снаряд действует сила, обусловленная давлением расширяющихся пороховых газов. Это была та же задача, которая интересовала и Робинса. Однако если автор „New principles of gunnery“ решал ее, пользуясь геометрическим методом, то Эйлер обратился к аналитическим приемам исследования. Решаемая Эйлером задача сводилась, как и у Робинса, к определению дульной скорости по известному полному пиростатическому давлению, развивающемуся при сгорании порохового заряда в объеме каморы. Эйлер основывается на том же допущении, как и Робинс, а именно, что с перемещением снаряда по длине канала ствола давление пороховых газов изменяется по закону Бойля—Мариотта.

В первом приближении Эйлер принимает, что на снаряд действует лишь давление пороховых газов. В таком случае уравнение движения снаряда имеет вид[1]

$$dh = \frac{P_1 s}{q} \cdot \frac{l_1 dl}{l},$$

где h — высота, с которой должен падать в безвоздушном пространстве снаряд, чтоб приобрести скорость v, соответствующую данному положению снаряда по длине канала ствола.

Интегрируя это дифференциальное уравнение, Эйлер получил ту же формулу для дульной скорости, которую нашел и Робинс. Эйлер, как и Робинс, основывается на законе расширения газов Бойля—Мариотта, исходя, таким образом, из наиболее распространенного для середины XVIII в. положения физики. В дальнейшем, постепенно усложняя постановку задачи, Эйлер обращается уже к закону расширения, более точно отражающему действительность.

Любопытно отметить, что с формулой для дульной скорости, выведенной на основе гипотезы мгновенного сгорания заряда, в России ознакомились в самом начале XIX в., именно из работы Эйлера. Это подтверждают приводимые ниже строки, принадлежащие перу активного сотрудника „Артиллерийского журнала“ майору Плотто: „Но дабы читателю предложить другие способы и хотя кратко упомянуть, какие обстоятельства сопряжены со скоростью ядер, то предлагаются здесь правила, Эйлером из «Артиллерии» Робинса выведенные, посредством которых можно вычислить упомянутую скорость“.[2]

Попытка уточнить решения Робинса и Эйлера была предпринята Ломбаром в 1783 г. в добавлении к 7-му Предложению книги английского артиллериста. Ломбар полагает, что расширение пороховых газов происходит по другому закону, чем тот, которым пользовался Эйлер, не принимавший во внимание понижения давления пороховых газов вследствие уменьшения их температуры за время движения снаряда по каналу ствола орудия. Для того чтобы учесть это обстоятельство,

---

[1] В принятой теперь форме дифференциальное уравнение движения снаряда напишется в виде

$$\frac{q}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = P_1 s = \frac{l_1}{l}.$$

[2] Плотто. О разнородных выстрелах. О скорости пушечных ядер и пути, пробегаемом ими в воздухе, а также и о супротивлении, ядрами в воздухе встречаемом. Арт. журн., 1808, № 5, стр. 29.

Ломбар предлагает закон, по которому давление пороховых газов изменяется обратно пропорционально квадрату объема заснарядного пространства, т. е.

$$P = P_1 \left(\frac{l_1}{l}\right)^2. \tag{230}$$

В таком случае уравнение движения снаряда по каналу ствола принимает вид

$$dh = \frac{P_1 s}{q} \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 dl.$$

После интегрирования этого уравнения Ломбар находит следующую формулу для дульной скорости

$$v_\partial = \sqrt{2g \frac{P_1 s}{q} \cdot \frac{l_1}{l_\partial} (l_\partial - l_1)}.$$

Если сопоставить формулу расширения газов, предложенную Ломбаром, и закон Бойля—Мариотта с принятым теперь во внутренней баллистике адиабатическим законом расширения

$$P = P_1 \left(\frac{l_1}{l}\right)^k,$$

формулы Ломбара и Эйлера можно рассматривать как частные случаи уравнения адиабаты при $k = 2$ и $k = 1$. В действительности для тех температур, которые имеют место в канале ствола, $k = 1.20 \div 1.25$.

Ломбар нашел, что если пользоваться выведенной им формулой для дульной скорости, то ее значение, равное 1621.7 фут./сек., найденное Робинсом экспериментально, может быть получено только в том случае, если „упругая сила“ пороха или полное пиростатическое давление больше 3000 атм., т. е. превышает установленную английским артиллеристом величину более чем в 3 раза.

Следующим шагом в направлении усложнения постановки решаемой Эйлером задачи является учет сил сопротивления, действующих на снаряд во время его движения по каналу ствола. В первую очередь он оценивает влияние действия силы сопротивления воздуха и атмосферного давления p_N. Эйлер принимает, что сила сопротивления воздуха равна весу столба воздуха высотой h и площадью основания, равной площади поперечного сечения канала. Иными словами, он полагает, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. Силу, обусловленную действием атмосферного давления, Эйлер считает постоянной и равной $p_N s$. При названных допущениях Эйлер получает дифференциальное уравнение движения снаряда

$$dh = \frac{P_1 s}{q} l_1 \frac{dl}{l} - \frac{p_N s}{q} dl - \frac{1}{2} \frac{\Pi s}{q} h dl.$$

Ввиду невозможности точно проинтегрировать уравнение Эйлер обращается к приближенному методу, для чего прибегает к рядам. Это приближенное решение проведено Эйлером с большим мастерством, а полученная формула дульной скорости позволила оценить влияние учтенных сил сопротивления. Сопоставляя уточненное значение дульной скорости с результатами, полученными по формуле, выведенной без учета сил сопротивления, Эйлер приходит к выводу: сопротивление воздуха и атмосферное давление не оказывают сколько-нибудь существенного влияния на величину дульной скорости, почему их можно не принимать в расчет. Справедливость полученного Эйлером вывода была подтверждена более поздними исследованиями. В частности, к такому же заключению пришел и профессор Н. В. Маиевский в работе „Об опытах, произведенных в ноябре 1867 года на сталелитейном заводе Круппа, над определением давлений пороховых газов в канале орудий“ (1869 г.).

При оценке влияния сил, замедляющих движение снаряда по каналу ствола орудия, Эйлер избрал довольно сложный путь. Значительно проще этот вопрос можно решить, сопоставляя величину силы сопротивления воздуха и значение силы, обусловленной атмосферным давлением, с действующей на снаряд силой, вызванной давлением расширяющихся пороховых газов. В таком случае незначительность влияния принятых Эйлером в расчет тормозящих сил становится очевидной, и отпадает необходимость в составлении и интегрировании приведенного выше дифференциального уравнения.

Другим обстоятельством, которое, по мнению Эйлера, могло бы влиять на уменьшение дульной скорости, является прорыв пороховых газов через отверстие в казенной части орудия (запал), предназначенное для сообщения огня заряду, и зазор между снарядом и стенками канала ствола. Кроме того, Эйлер указывает еще на одну причину, а именно на трение снаряда о поверхность канала. Влияние утечки газов при определении дульной скорости на основе гипотезы мгновенного сгорания заряда Эйлер не анализирует.

Трение снаряда о поверхность канала в большей степени сказывается, по мнению Эйлера, на уменьшении дульной скорости в огнестрельном оружии с нарезным каналом ствола, т. е. в мушкетах и карабинах. Эйлер полагает в этом случае силу трения равной весу пули. Однако если даже допустить, что сила трения при движении пули по нарезному каналу ствола будет в 100 раз больше, чем ее вес, то и в таком случае уменьшение дульной скорости окажется незначительным. В итоге Эйлер приходит к выводу, что влиянием силы трения можно пренебречь.

С точкой зрения Эйлера можно вполне согласиться. Если даже трение уменьшает дульную скорость, то в современных Эйлеру орудиях оно много меньше сказывается на ее величине, чем утечка пороховых газов.

Наибольший интерес при определении дульной скорости в предположении мгновенного сгорания заряда представляет теория Эйлера о движении пороховых газов и твердых продуктов сгорания. После критики теории Робинса Эйлер ставит и решает задачу определения дульной скорости, принимая во внимание, что не вся энергия расширяющихся пороховых газов расходуется на сообщение движения снаряду. Эйлер принимает во внимание, что часть энергии идет на сообщение скорости пороховым газам и твердым продуктам сгорания, заключенным в заснарядном пространстве. Он перечисляет следующие неточности, допущенные Робинсом в его теории: 1) давление пороховых газов в заснарядном пространстве принимается равным некоторой постоянной осредненной величине, в то время как на самом деле оно в данный момент времени по всей длине заснарядного пространства неодинаково; 2) Робинс не принимает во внимание, что энергия расширяющихся пороховых газов расходуется не только на приведение в движение снаряда, но и на сообщение движения пороховым газам и твердым продуктам сгорания.

Теория движения пороховых газов и твердых остатков была разработана Эйлером весьма основательно, и многие из высказанных им положений сохранили свою научную ценность и в настоящее время.

„...wenn sich die elastische Materie schon würklich ausdehnet, — пишет Эйлер, — so müssen sich alle Theile derselben vorwärts bewegen, und das um so viel geschwinder, je weiter dieselben von dem Boden A entfernet sind. Denn die vordersten Theile, welche die Kugel berühen, haben mit derselben einerley Geschwindigkeit, diejenigen aber, so dem Boden näher sind, eine kleinere. Da nun die Bewegung der vordersten immer schneller wird, so muß auch die Bewegung der übrigen nach Proportion immer geschwinder werden. Ein jeglicher Theil aber dieser elastischen Materie wird von der hintern Luft vorwärts, von der vordern aber rückwärts gestossen, dahero nothwendig der Druck der hintern stärker seyn muß, als der vordern, sonsten würde die Geschwindigkeit dieses Theils nicht zunehmen. Hieraus folget also, daß die Elasticität der hinter der Kugel befindlichen Luft, nicht allenthalben gleich groß sey, sondern daß dieselbe bey dem Boden in A grösser seyn müsse, als an der Kugel, und dahero wird die Kugel mit einer kleineren Kraft fortgestossen, als in der Rechnung angenommen worden: da man gesetzt, daß die Luft hinter der Kugel allenthalben eine gleiche Ausdehnungskraft habe".[1] („... когда упругое вещество находится в стадии расширения, все его части должны продвигаться вперед и с тем большей скоростью, чем далее они находятся от дна канала А. Поэтому передние части, соприкасающиеся с ядром, обладают той же скоростью, как и ядро, в то время как находящиеся ближе к дну канала имеют меньшую скорость. Вследствие того что движение первых все более ускоряется, необходимо, чтобы скорость других увеличивалась бы в той же пропорции. Но каждая часть этой упругой жидкости приводится в движение вперед под действием воздуха, находящегося позади этого слоя, и назад под воздействием впереди лежащей части воздуха. Отсюда необходимо следует, что первое давление больше второго, так как в ином случае скорость впереди лежащего воздуха не возрастала бы. Отсюда вытекает, что упругость вещества, находящегося позади ядра, неодинакова по всему занимаемому ею объему. Упругость больше у дна канала, чем около ядра, следовательно, ядро приводится в движение меньшей силой, чем это принималось при расчетах, так как полагали, что эта упругая сила равномерно распределена по всему объему, занимаемому пороховыми газами позади ядра").

Здесь Эйлер вводит в рассмотрение поперечные слои пороховых газов, для каждого из которых давление неодинаково. Он полагает, что скорость слоев газов в заснарядном пространстве возрастает по линейному закону, изменяясь от нуля у дна канала до скорости, равной скорости снаряда в слое, к нему примыкающему. Вследствие того, что пороховым газам, прилегающим ко дну канала ствола, приходится, как пишет Эйлер, приводить в движение не только снаряд, но и массу впереди лежащих газов, давление у дна канала

---

[1] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 87.

превышает давление в слое, прилегающем к снаряду. Следовательно, и сила, действующая на снаряд, будет меньше той, которая принималась в предположении некоторого осредненного давления, одинакового для всех слоев газов заснарядного пространства. Однако для пороховых газов разница в давлениях невелика, поэтому дульная скорость, вычисленная в предположении неравномерного распределения давления в заснарядном пространстве, незначительно отличается от найденной Робинсом.

Эйлер составляет дифференциальное уравнение для системы снаряд — пороховые газы — твердые продукты сгорания. При выстреле приводятся в движение образующиеся пороховые газы, воздух, заключенный в порах зерен, твердые продукты сгорания и снаряд. После сгорания заряда пороховые газы смешиваются с находящимся в порах зерен воздухом до плотности n_m (взятой по отношению к плотности воздуха при нормальных физических условиях) и заполняют среднюю часть каморы, объем которой равен i-й части объема каморы $\left(\frac{l_1}{i}\right)$. Твердые продукты сгорания занимают две равные части объема каморы $\frac{i-1}{2i} l_1$. Одна из этих частей примыкает ко дну канала ствола и находится в неподвижном относительно него состоянии; другая расположена непосредственно за снарядом и перемещается со скоростью снаряда.

Далее Эйлер рассматривает газообразные продукты сгорания, занимающие заснарядное пространство, через некоторый промежуток времени, когда прилегающие к снаряду твердые продукты передвинутся на расстояние l. К этому моменту обьем, занимаемый пороховыми газами, увеличится, в результате чего их плотность уменьшится и станет равной $\frac{n_m}{l} \cdot \frac{l_1}{i}$.

Массу пороховых газов, движущихся со скоростью снаряда, Эйлер принимает равной

$$m_1 = \frac{n_m l_1}{2ig} s.$$

Масса твердых продуктов сгорания определяется в виде

$$m_2 = \frac{i-1}{2ig} \delta l_1 s,$$

где δ — плотность твердых остатков, взятая по отношению к воде.

Наконец, масса снаряда

$$m_3 = \frac{q}{g}.$$

Действующую на снаряд силу Эйлер определяет на основании формулы давления пороховых газов, установленной им в работе 1729 г. (§ 21). Формулу для давления Эйлер представляет в виде

$$P = p_N \frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{n_m l_1}{i n_q l}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{n_q}\right)^2}} \cdot \frac{T_e}{273},$$

где $\frac{T_e}{273}$ — коэффициент, учитывающий увеличение давления пороховых газов вследствие температурного эффекта, сопутствующего взрывчатому превращению пороха. Эйлер и Робинс обозначали этот коэффициент через β и полагали его равным 4.

После того как Эйлер установил характер изменения давления пороховых газов в заснарядном пространстве в функции от пройденного снарядом пути, он переходит к интегрированию дифференциального уравнения движения, составленного для переднего слоя пороховых газов. При этом Эйлер полагает, что снаряд отсутствует. Уравнение движения он записывает в следующей форме:

$$\frac{[n_m + (i-1)\delta]\, l_1}{2i} \cdot \frac{dh}{dl} = p_N \frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{n_m l_i}{i n_q l}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{n_q}\right)^2}} \cdot \frac{T_e}{273} - p_N.$$

После интегрирования уравнения Эйлер получает формулу, позволявшую вычислить величину той скорости, с какой передний слой пороховых газов вырывается из отверстия дульного среза ствола огнестрельного оружия, в том случае, когда отсутствует снаряд. При наличии снаряда дифференциальное уравнение, по Эйлеру, имеет следующий вид:

$$\frac{\left[n_m l_1 + (i-1)\,\delta l_1 + 2_i \frac{q}{s}\right]}{2i} \cdot \frac{dh}{dl} = p_N \frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{n_m l_1}{i n_q l}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{n_q}\right)^2}} \cdot \frac{T_e}{273} - p_N.$$

Это дифференциальное уравнение отличается от предыдущего только коэффициентом при $\frac{dh}{dl}$, что позволяет Эйлеру воспользоваться решением, найденным для первого уравнения.

Пользуясь формулой для дульной скорости, установленной с учетом движения твердых продуктов разложения, Эйлер получает возможность более глубоко подойти к анализу влияния составных частей пороха на величину дульной скорости. Эйлер, в частности, находит, что твердые остатки сказываются на уменьшении дульной скорости тем сильнее, чем больший относительный вес они занимают среди продуктов разложения, т. е. чем качество пороха ниже. Необходимо выбирать состав пороха с таким расчетом, чтобы твердых продуктов разложения при полном сгорании заряда было возможно меньше. Важнейшую составную часть пороха — селитру — следует, по мнению Эйлера, размешивать более тщательно, что приводит к увеличению скорости воспламенения и уменьшению количества твердых остатков. Далее Эйлер устанавливает значение параметра i, определяющего относительный вес твердых остатков среди продуктов взрывчатого разложения пороха. Эта величина выбирается им для пороха хорошего качества равной $i = \frac{3}{2}$.

Значение исследования Эйлера по изучению движения снаряда в канале ствола в предположении мгновенного сгорания заряда заключается в том, что в результате проведенного им анализа была установлена количественная оценка влияния потери энергии пороховых газов на преодоление вредных сопротивлений. Эйлер уточняет формулу дульной скорости, найденную Даниилом Бернулли и Робинсом, и показывает, что действие сил, обусловленных атмосферным давлением, сопротивлением воздуха и трением снаряда о стены канала ствола, настолько незначительно, что ими можно пренебречь. В дальнейшем при построении теории движения снаряда в предположении постепенного горения заряда, т. е. решения значительно более сложной задачи, Эйлер получает право уже не учитывать влияния перечисленных факторов. Этим самым решение и без того трудной задачи значительно упрощается.

Другой интересный момент заключается в том, что при изучении движения снаряда в канале ствола орудия Эйлер отказался от закона Бойля—Мариотта. В этом случае Эйлер впервые обратился к установленной им формуле сжимаемости

(§ 21), которая в отличие от закона Бойля—Мариотта была справедлива и при больших давлениях.

Теория Эйлера интересна и еще с одной точки зрения. Эйлер впервые составил уравнение движения не для одного только снаряда, но и для движущихся одновременно с ним пороховых газов и твердых продуктов сгорания. В итоге Эйлеру удалось найти более точное решение с учетом потери энергии пороховых газов на сообщение скорости всем движущимся массам. Устанавливая уравнение движения, Эйлер исходил из неравномерного распределения газообразных и твердых продуктов разложения в заснарядном пространстве. Эта гипотеза привела его в конечном итоге к выводу, что со скоростью снаряда перемещается половина всей массы продуктов разложения. В настоящее время наиболее широкое распространение получило другое допущение, а именно, что газообразные продукты взрывчатого разложения и твердые несгоревшие части заряда распределены в заснарядном пространстве равномерно. Однако и это предположение приводит к тому, что со скоростью снаряда перемещается половина всей массы твердых и газообразных продуктов превращения. Стало быть, несмотря на отличие в гипотезах о распределении продуктов взрывчатого превращения в заснарядном пространстве, результат получается один и тот же.

При разработке теории движения твердых и газообразных продуктов сгорания Эйлер впервые устанавливает линейный закон распределения скорости движения поперечных слоев газа в заснарядном пространстве. Позднее к этому допущению обратился Пиобер, которому часто и приписывают включение этой гипотезы в практику решения задач внутренней баллистики. В частности, один из крупных русских специалистов в области внутренней баллистики второй половины XIX в. П. М. Альбицкий[1] считал автором названного допущения Пиобера.

Нельзя также считать вполне правильной точку зрения Пуассона, полагавшего, что до исследования Лагранжа 1793 г. не было попыток учесть влияние движения газообразных продуктов разложения при определении величины дульной скорости. Пуассон писал: „Чтобы прийти к точному определению этой скорости, было необходимо одновременно рассматривать движение пороховых газов и снаряда. Это то, чего обычно

[1] П. М. Альбицкий. Современное положение вопроса о движении снаряда в канале орудия. Арт. журн., 1875, №№ 8—10.

не делают и что Лагранж попытался сделать, как мы увидим далее".[1]

Работа Лагранжа, которая была частично опубликована Пуассоном в 1833 г., является одним из наиболее интересных исследований по внутренней баллистике второй половины XVIII в. Лагранж изучал движение снаряда в канале ствола орудия при той же гипотезе мгновенности сгорания порохового заряда, которой пользовались Даниил Бернулли, Робинс и Эйлер. Однако в отличие от них Лагранж полагал, что плотность пороховых газов в данный момент времени неодинакова в различных сечениях заснарядного пространства. Лагранж принимал в расчет откат орудия и исходил из того, что давление пороховых газов пропорционально некоторой степени их плотности. Задача, которую решал Лагранж, отличалась меньшим числом ограничений, т. е. ставилась более широко, чем это делали его предшественники, и являлась, таким образом, дальнейшим развитием теории Эйлера.

Изучением закономерностей движения снаряда в канале ствола орудия и, в частности, определением дульной скорости занимались и другие ученые второй половины XVIII в. В 1765 г. д'Антони пытался установить характер распределения давлений и скоростей по длине канала ствола теоретическим и экспериментальным путем. Однако его изыскания в этом направлении ограничились одними наблюдениями. В 1780 г. в результате опытов по определению дульных скоростей стрельбой из ружей с последовательно укорачиваемым стволом он вывел линейный закон распределения давлений по длине канала и эллиптическую кривую для закона изменения скоростей. Эмпирическую формулу для определения скорости снаряда в зависимости от пройденного им по каналу ствола пути пытался найти в 1766 г. и Ламбер.[2] Наконец, в результате многочисленных экспериментов Хэттон (70—80-е годы XVIII в.) дал[3] логарифмическую формулу, связывающую скорость снаряда с длиной канала ствола.

Во второй половине XVIII в. в связи с появлением баллистического маятника возрастает число экспериментов и наблюдается тенденция эмпирического установления формулы для

---

[1] S. D. Poisson. Formules relatives au mouvement du boulet dans l'intérieur du canon, extraites des maniscrits de Lagrange. Journ. de l'Ecole Polytechnique, 1833, cahier 13, стр. 188.

[2] I.-F.-H. Lambert. Anmerkungen über die Gewalt des Schiesspulvers und Wiederstand der Luft. Dresden, 1766.

[3] Ch. Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie, traduit par P. L. Villantroys. Paris, 1802.

дульной скорости. Теоретические изыскания по изучению движения снаряда в канале ствола орудия усиливаются к середине XIX в. и связаны с именем Пиобера. Однако вплоть до 60-х годов, когда Сен-Робер и Резаль обратились при решении основной задачи внутренней баллистики к началам термодинамики, ученые продолжали исходить из принятой еще Робинсом гипотезы о том, что заряд полностью обращается в газы до начала движения снаряда. Несмотря на столь большую жизненность гипотезы мгновенного сгорания заряда, вообще говоря, не вполне точно отражавшую действительность, возникают попытки исходить из менее грубых предположений. Первая попытка такого рода была сделана Эйлером в том же 1745 г. и будет освещена в следующем параграфе.

§ 24. МЕТОД ЭЙЛЕРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДУЛЬНОЙ СКОРОСТИ СНАРЯДА В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ ПОСТЕПЕННОГО СГОРАНИЯ ЗАРЯДА

На раннем этапе развития внутренней баллистики движение снаряда в канале ствола орудия изучалось при допущении, что к моменту его смещения пороховой заряд полностью обращается в газообразные продукты. Эта гипотеза была наиболее целесообразна для порохов, употреблявшихся в XVIII в., и сильно упрощала решение основной задачи внутренней баллистики, почему долгое время лежала в основе большей части теоретических исследований.

Одновременно возникает и другое предположение, а именно, что пороховой заряд сгорает к началу движения снаряда не полностью и пороховые газы образуются в течение всего времени движения снаряда по каналу. Гипотеза постепенного сгорания заряда, вообще говоря, точнее отражала действительность даже для того мелкозернистого пороха, который употреблялся в XVIII в. Однако точность решения задачи теоретического определения дульной скорости при названном допущении возрастала настолько незначительно сравнительно с решением, базирующимся на гипотезе мгновенного сгорания, что такое предположение не давало никакого преимущества. В то же время новая гипотеза сильно осложняла решение задачи. Только в конце XIX в. с введением на вооружение правильно и медленно горящих порохов она стала себя оправдывать. Тем не менее Эйлер, стремясь подойти к решению задачи наиболее строго, обращается к определению дульной скорости на основе гипотезы постепенного сгорания заряда. Такая теория была им построена в том же 1745 г. в 6-м добавлении к 11-му Предложению первой главы книги Робинса.

Эйлер не ограничивается одним только утверждением о постепенном характере горения порохового заряда. Возражая Робинсу в добавлениях к 7-му Предложению его книги и в некоторых других своих замечаниях, он пытается обосновать справедливость своего допущения.

Прежде всего Эйлер останавливается на приводимом Робинсом доказательстве в пользу мгновенности сгорания порохового заряда, которое Эйлер считал наиболее убедительным. Робинс подтверждал справедливость этой гипотезы тем, что найденные им теоретическим путем значения дульных скоростей весьма близко совпадают с результатами, полученными при помощи баллистического маятника. Однако Робинс, по мнению Эйлера, при построении своей теории не принимает в расчет влияния некоторых факторов, снижающих величину дульной скорости. Одним из наиболее существенных обстоятельств, не принятых в расчет английским артиллеристом, была утечка пороховых газов через запал и через зазор между стенками канала и снарядом. Следовательно, теория Робинса могла быть согласована с опытом только в том случае, если в действительности имеются факторы, увеличивающие дульную скорость и компенсирующие таким образом влияние утечки газов. Такая компенсация, по мнению Эйлера, происходит за счет большей величины силы, действующей на снаряд, обусловленной постоянным притоком пороховых газов, т. е. постепенным горением заряда.

Обосновывая таким образом гипотезу постепенного сгорания порохового заряда, Эйлер впадает в противоречие с последующими выводами, когда он считает возможным принять, что к началу движения снаряда успевает сгореть 93% всего заряда, т. е. принимая фактически допущение Робинса. Компенсацию потери пороховых газов через запал и зазор правильнее было бы искать не в постепенности горения заряда, а в большей величине полного пиростатического давления, которое имеет место в действительности.

Еще одно подтверждение правильности принятой им теории Эйлер ищет в сопоставлении дальностей, получаемых при стрельбе из ружей с гладким и нарезным каналом ствола. При движении по каналу мушкетов и карабинов (нарезное оружие) свинцовые пули встречают некоторое сопротивление, почему находятся в канале большее время, чем при стрельбе из гладкостенного оружия. Если принять, что заряд сгорает мгновенно, то следовало бы ожидать снижения дальности, так как работа, или, как ее называет Эйлер, сила расширяющихся пороховых газов, частично затрачивалась бы на преодоление силы трения. Однако опыт показывает, что дальность нарезных ружей больше, чем гладкостенных, конечно при идентичных условиях опыта. Эйлер объясняет превосходство нарезных ружей в дальности постепенностью горения заряда, когда постоянно наблюдаемый приток пороховых газов увеличивает силу, действующую на пулю, находящуюся в канале ствола в течение большего времени, чем в гладкостенном оружии.

Третий путь доказательства верности допущения постепенности сгорания порохового заряда Эйлер видит в материалах петербургских опытов 1727 г.[1] Опыты заключались в определении времени полета, выброшенного вертикально вверх 3-фунтового снаряда при стрельбе пороховыми зарядами весом в 1, 4 и 8 унций. Время измерялось при помощи маятниковых часов. Пользуясь квадратичным законом сопротивления воздуха, Бернулли нашел для этих трех зарядов начальные скорости и отвечающие им высоты, на которые поднялись бы снаряды при стрельбе вертикально вверх в безвоздушном пространстве. Для орудия с длиной ствола в 7.7 английских фута и зарядов весом в 1, 4 и 8 унций высоты оказались соответственно равными 541, 13 694 и 58 750 фут.; при стрельбе теми же зарядами из пушки со стволом, укороченным до 6 фут. (на 0.22 его длины), соответствующие высоты оказались равными 274, 2404 и 6604 фут. Сравнивая между собой высоты, отвечающие одинаковым весам зарядов, Эйлер отмечает значительное их уменьшение для орудий с укороченным стволом. Особенно резко это видно на примере стрельбы зарядом в 8 унций, когда высота полета снаряда в безвоздушном пространстве уменьшилась в 9 раз, что отвечает снижению величины дульной скорости втрое. Таким уменьшением величины дульной скорости Эйлер пытается доказать постепенность сгорания порохового заряда. Проходя последний участок канала длиной в 1.7 фут., на которую был укорочен ствол при второй серии опытов, пороховой заряд и сообщал снаряду, по мнению Эйлера, ту добавочную скорость, которая влекла за собой увеличение дульной скорости втрое сравнительно с ее величиной при укороченной длине ствола.

Высказав эти соображения, Эйлер не принимает в расчет, что даже при таких небольших зарядах, как 8 унций, уменьшение длины ствола на 0.22 его длины никак не может по-

---

[1] D. Bernoulli. Dissertationis de actione fluidorum in corpora solida et motu solidorum in fluidis. Comm. Acad. Sc. Imp. Petropolitanae, 1727, t. II; 1728, t. III.

влечь за собой снижение дульной скорости в 3 раза. По всей видимости, при обработке полученных Бернулли опытных данных имеется погрешность, обусловившая столь резкое отличие в найденных Эйлером значениях дульных скоростей для стволов, длины которых разнятся на 0.22 их длины. Проводимое Эйлером третье доказательство звучит не совсем убедительно и не только в наши дни. Оно едва ли могло удовлетворить артиллеристов XVIII в., которым уже было достаточно хорошо известно, как сказывается длина канала на дальности стрельбы, а следовательно, и на величине дульной скорости.

Обосновывая гипотезу постепенного сгорания заряда, Эйлер стремится построить решение задачи на иных, более близких к действительности положениях, чем его предшественники. Метод Эйлера, базирующийся на гипотезе постепенного сгорания заряда, т. е. на теории, целесообразность использования которой стала необходимой для порохов, введенных на вооружение в конце XIX в., должна занять достойное место в развитии методов решения основной задачи внутренней баллистики.

Эйлер переходит к изложению метода определения величины дульной скорости на основе гипотезы постепенного сгорания заряда. Первоначально он допускает, что заряд полностью обращается в пороховые газы уже после того, как снаряд прошел дульный срез.

Эйлер рассматривает некоторое время t, в течение которого снаряд проходит по каналу расстояние $(l-l_1)$, отсчитываемое от дна канала, принятого за начало координат. Для того чтобы учесть постепенность сгорания порохового заряда, Эйлер вводит переменную $l_з$, характеризующую сгоревшую к данному времени часть заряда, выраженную в частях длины канала, занятого пороховым зарядом. Для этой переменной величины он устанавливает специальную зависимость, связывающую ее с пройденным по каналу ствола путем $(l-l_1)$. Эту формулу Эйлер находит исходя из следующих условий: в начальный момент времени, когда снаряд не сдвинулся с места и заряд не начал гореть $l=l_1$, а $l_з=0$; в момент прохождения снарядом дульного среза $l=l_д$ заряд сгорает полностью и переменная $l_з$ обращается в l_1. Однако, по мнению Эйлера, заряд не всегда полностью обращается в пороховые газы к моменту, когда снаряд проходит дульный срез. Поэтому переменная $l_з$ обращается в l_1, т. е. заряд полностью сгорает, когда снаряд уже покинул канал ствола и переменная l достигает некоторого значения $l=l_f>l_д$. В результате Эйлер находит следующую формулу, определяющую сгоревшую часть порохового заряда в частях длины канала, занимаемого зарядом:

$$l_з = l_1 \left(\frac{l - l_1}{l_f - l_1}\right)^{\mu}. \qquad (240)$$

Эйлер устанавливает дифференциальное уравнение движения снаряда и перемещающихся вместе с ним несгоревшей части заряда, твердых и газообразных продуктов разложения. При этом он полагает, что твердые продукты разложения составляют $\frac{i-1}{i}$-ю часть всех продуктов взрывчатого превращения. В таком случае, когда сгорает часть $l_з$ от общей длины заряда l_1, то эти твердые остатки займут часть заснарядного пространства $\frac{i-1}{i} l_з$, выраженную, как всегда у Эйлера, в частях длины заряда. К этому времени несгоревшая часть заряда будет занимать цилиндрический объем, длина образующей которого равна $l_1 - l_з$. Стало быть, к моменту времени t несгоревшая часть заряда и твердые продукты разложения будут занимать часть объема канала длиной $l_1 - \frac{l_з}{i}$. В таком случае длина объема заснарядного пространства, занятого пороховыми газами, будет

$$l - l_1 + \frac{l_з}{i}.$$

Плотность образовавшихся пороховых газов (взятая по отношению к плотности воздуха, находящегося при нормальных физических условиях) к моменту, когда снаряд переместится на расстояние $l - l_1$, Эйлер находит по формуле

$$n_в = \frac{244 l_з}{l - l_1 + \frac{l_з}{i}}, \qquad (241)$$

где $244 = \frac{w_N}{w}$.

Согласно установленной формуле сжимаемости (§ 21), Эйлер получает для давления пороховых газов в заснарядном пространстве для данного момента времени t следующую зависимость:

$$P = p_N \frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{n_в}{n_q}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{n_q}\right)^2}} \beta,$$

которая после разложения в ряд членов, содержащих радикалы по степеням $\frac{n_8}{n_q}$ и $\frac{1}{n_q}$, и отбрасывания „малых“ членов дает

$$P = \beta p_N\left(n_8 + \frac{n_8^2}{6n_q}\right). \tag{242}$$

Далее Эйлер устанавливает левую часть дифференциального уравнения движения. Для этого необходимо найти массы, движущиеся со скоростью снаряда. Эйлер непосредственно этого не делает, так как левая часть уравнения у него представлена в виде произведения суммы весов системы на производную $\frac{dh}{dl}$, где h — высота падения тела в безвоздушном пространстве, отвечающая скорости снаряда в данном сечении канала ствола. Эйлер исходит из предположения, что пороховые газы распределены в заснарядном пространстве в каждый данный момент времени равномерно, причем скорость слоев газов изменяется вдоль канала по линейному закону. В таком случае со скоростью снаряда перемещается половина всей массы пороховых газов m_1, которая выражается формулой

$$m_1 = \frac{122 l_з}{g} s.$$

Массу твердых продуктов разложения и несгоревшей части заряда Эйлер определяет из следующих соображений. Так же как и для случая, рассмотренного в § 23, допускалось, что половина всех твердых частей заряда неподвижна и прилегает ко дну канала, а другая расположена непосредственно позади снаряда и перемещается со скоростью последнего. Если обозначить, как это делает Эйлер, через n_δ среднюю плотность несгоревшего пороха и твердых продуктов разложения, взятую по отношению к плотности воздуха, находящегося при нормальных физических условиях, масса этих частей будет

$$m_2 = \frac{\delta}{2g\left(l_1 - \frac{l_з}{i}\right)} s.$$

Масса снаряда будет

$$m_3 = \frac{q}{g}.$$

Уравнение движения снаряда Эйлер записывает в обычной для него форме с учетом действия атмосферного давления и силы сопротивления воздуха

$$dh\ (2iq + \delta il_1 s - \delta l_3 s + 244il_3 s) = 2i\beta p_N s\left(n_8 + \frac{n_8^2}{6n_q}\right) dl - \\ - 2ip_N sdl - ishdl. \quad (243)$$

Это дифференциальное уравнение содержит четыре переменных — h, l, l_3 и n_8. Для того чтобы исключить некоторые из них и свести его к уравнению с двумя переменными, Эйлер обращается к уравнению (242), выражающему зависимость переменной n_8 от l_3, которую он заменяет ее выражением (241). В результате Эйлер получает соотношение, связывающее переменную n_8 с расстоянием l

$$n_8 = \frac{244il_1\,(l - l_1)^{\mu-1}}{i\,(l_f - l_1)^{\mu} + l_1\,(l - l_1)^{\mu-1}}. \quad (244)$$

Полагая $\mu = 1$, т. е. представляя выражение (240) для l_3 в виде

$$l_3 = l_1 \frac{l - l_1}{l_f - l_1}, \quad (245)$$

Эйлер представляет соотношение (244) в следующей форме:

$$n_8 = \frac{244il_1}{il_f - l_1\,(i - 1)}, \quad (246)$$

из которого следует, что в данном случае, когда $\mu = 1$, плотность пороховых газов n_8 постоянна, т. е. не изменяется с перемещением снаряда по каналу ствола орудия. Это допущение следует считать весьма грубым, так как в действительности плотность пороховых газов сильно изменяется с увеличением объема заснарядного пространства. Эйлер воспользовался этим упрощением с тем, чтобы найти хотя бы приближенное решение дифференциального уравнения (243) и получить пусть даже грубое представление о величине дульной скорости.

Установив таким образом, что при $\mu = 1$ плотность пороховых газов n_8 является величиной постоянной, и заменяя переменную l_3 в соотношении (245), Эйлер получает дифференциальное уравнение движения снаряда, связывающее только две переменные h и l,

$$dh\,[i\,(2q + \delta l_1 s)\,(l_f - l_1) + s\,(244i - \delta)\,(l - l_1)] = \\ = is\left[(l_f - l_1)\,2\beta p_N\left(n_8 + \frac{n_s^2}{6n_q}\right) - 2p_N - h\right] dl.$$

Интегрирование уравнения не представляло затруднений. Для того чтобы упростить решение, Эйлер группирует входящие в него постоянные и полученные таким образом параметры обозначает через γ и ν. В результате он находит формулу

$$h=\gamma-\gamma\left[1+\frac{l-l_1}{\nu(2q+\delta l_1 s}\right]^{\nu}.$$

Формула дает величину дульной скорости, если положить $l=l_{\partial}$ и подставить полученное значение для h в выражение $v_{\partial}=\sqrt{2gh}$.

Вычисляя дульную скорость для одного из частных случаев, Эйлер находит ее равной 860 фут./сек., т. е. вдвое меньше, чем это следовало из опытов Робинса. Эйлер объясняет это несоответствие тем, что показатель степени μ в выражении (240) для $l_з$, выбранный равным 1, чрезмерно велик, почему полученное значение плотности пороховых газов оказалось слишком малым. Для приведения величины дульной скорости, определяемой изложенным методом в соответствие с действительностью, необходимо, по мнению Эйлера, придать показателю μ в выражении (240) для $l_з$ меньшее значение.

В качестве новой величины μ, дающей бо́льшую степень приближения, Эйлер выбирает $\mu=0.5$. В таком случае

$$l_з=l_1\left(\frac{l-l_1}{l_f-l_1}\right)^{0.5}, \tag{247}$$

$$n_в=\frac{244il_1}{l_1+i\sqrt{(l_f-l_1)(l-l_1)}}.$$

После замены в последнем выражении l через $l_з$ Эйлер получает

$$n_в=\frac{244il_1l_з}{l_1^2+i(l_f-l_1)}.$$

Далее Эйлер заменяет дифференциал dl в уравнении (243) его выражением через дифференциал $dl_з$. С этой целью он дифференцирует по переменной l зависимость для $l_з$ (247) и заменяет в найденном соотношении переменную l через $l_з$, согласно формуле (247). Эйлер находит

$$dl=\frac{2(l_f-l_1)l_зdl_з}{l_1^2}.$$

Пренебрегая в дифференциальном уравнении (243) тремя „малыми“ членами, в том числе содержащими силу сопротивления воздуха и атмосферное давление, и подставляя значение для $n_в$, а вместо дифференциала dl его выражение через $dl_в$, Эйлер приходит к уравнению, связывающему h с переменной $l_в$, выражающей сгоревшую часть заряда в частях длины канала, занятого зарядом. Интегрируя это уравнение с учетом того, что при $l = l_1$ заряд еще не начал гореть, т. е. $l_в = 0$, Эйлер получает выражение для величины h. Из этой зависимости он находит формулу для дульной скорости, положив, что в момент прохождения снарядом дульного среза пороховой заряд сгорает полностью, т. е. величина $l_f = l_\partial$, а $l_в = l_1$. Группируя постоянные и поименовав их для сокращения через η и ζ, Эйлер получает следующую формулу для h_∂:

$$h_\partial = \frac{976\beta\gamma_1 l_1 p_N s}{(1+\zeta+q)(2q+\delta l_1 s)} \ln(1+\zeta) - \frac{976\zeta\eta^2 l_1 p_N s}{(1+\zeta\gamma_1)(2q+\delta l_1 s)} \ln\left(1-\frac{1}{\eta}\right). \quad (248)$$

Далее Эйлер сравнивает формулу (248), установленную в предположении постепенного сгорания заряда, с формулой для дульной скорости, выведенной при допущении, что заряд полностью обращается в пороховые газы до смещения снаряда. Для установления этой зависимости Эйлер обращается к дифференциальному уравнению (243), принимая во внимание, что при мгновенном сгорании заряда, когда $l = l_1$, весь заряд обращается в пороховые газы, т. е. $l_в = l_1$. Придерживаясь того же метода, на основе которого была определена формула (248), и пренебрегая в уравнении (243) теми же членами, как и для случая постепенного сгорания заряда, и обозначая, как и ранее, объединенные в группы постоянные через ζ и η, Эйлер находит зависимость, определяющую величину дульной скорости при гипотезе мгновенного сгорания заряда,

$$h_{\partial 1} = \frac{976\beta\gamma_1 l_1 p_N s}{(\gamma_1 - 1)\, l_1 (2q + \delta l_1 s)} \ln(1+\zeta). \quad (249)$$

Теперь Эйлер получает возможность сопоставить между собой выражения для дульной скорости, установленные при двух допущениях. Обозначив через v_{01} дульную скорость, определяемую по формуле (249), а через v_0 — дульную скорость, получаемую по формуле (248), и сравнив выражения для этих скоростей, Эйлер находит

$$\frac{v_{01}^2}{v_0^2} = \frac{1}{\eta-1} \ln\left[-\frac{\frac{1+\zeta}{2}}{1+\zeta\eta}\right] \ln\left(1+\zeta-\frac{2\zeta\eta}{1+\zeta\eta}\right) \ln\left(1-\frac{1}{\eta}\right).$$

Эйлер вычисляет параметры ζ и η для конкретного, ранее уже разобранного случая и находит отношение

$$\frac{v_{01}^2}{v_0^2}=\frac{1}{0.717}=\frac{1000}{717}.$$

Таким образом, рассуждает Эйлер, если при гипотезе мгновенного сгорания заряда дульная скорость $v_{01}=1731$ фут./сек., для случая постепенного сгорания, когда $\mu=0.5$, $v_0=$ $=1245$ фут./сек. Ранее, когда Эйлер принимал $\mu=1$, значение дульной скорости было найдено равным 860 фут./сек., т. е. значительно меньшей величине. Отсюда Эйлер заключает, что если выбрать для показателя степени μ величину, меньшую 0.5, дульная скорость будет превосходить 1245 фут./сек. тем сильнее, чем показатель μ будет значительнее отличаться в меньшую сторону от 0.5. Уменьшая показатель μ, говорит Эйлер, можно добиться хорошего приближения к истинной величине дульной скорости.

В 7-м добавлении к 11-му Предложению первой главы книги Робинса Эйлер, чувствуя, очевидно, всю сложность построенной им теории, необоснованность и натянутость некоторых принятых допущений, идет на ее упрощение. Эйлер подчеркивает, что задача определения дульной скорости в предположении постепенного сгорания заряда с математической точки зрения весьма трудна. В особенности сложно было найти математическую интерпретацию явлений, происходящих при движении снаряда по каналу ствола орудия, и, в частности, выразить аналитически зависимость между давлением пороховых газов и сгоревшей частью заряда.

Задача оказалась настолько сложной, что ее удалось разрешить удовлетворительным образом лишь в конце XIX в. на основе геометрической теории горения пороха и введения в обиход внутренней баллистики понятия закона газообразования. Во времена Эйлера внутренняя баллистика находилась в состоянии младенчества, и для того чтобы прийти к геометрическому закону горения пороха, потребовался длительный, более чем вековой путь развития. Кроме того, необходимо помнить, что в XVIII в. зерна пороха обладали сравнительно небольшой плотностью и размерами, сгорали чрезвычайно быстро, почему в то время не могло быть и речи о построении геометрической теории горения пороховых зерен. Только к концу XIX в. создание этой теории стало возможным вследствие освоения производства медленно и правильно горящих порохов.

Для того чтобы найти пригодное для практики решение задачи, Эйлер фактически отходит от принятой теории постепенного горения заряда. Обращаясь к некоторому компромиссному предположению, он допускает, что к моменту, когда снаряд сдвинется с места, значительная часть заряда превратится в пороховые газы, а другая так и не сгорит в течение всего времени движения снаряда по каналу ствола орудия.

„Weil es aber eben so schwer ist, — пишет Эйлер, — die almählige Entzündung[1] des Pulvers in Rechnung zu bringen, als die Rechnung selbst zu vollenden, so kann man sich die Sache dergestalt vorstellen, als wenn sich in ersten Augenblick ein gewisser Theil des Pulvers auf einmahl entzündete, der übrige Theil aber gänzlich unentzündet bliebe. Denn das Pulver mag sich in der That so plötzlich oder langsam, als man immer will, entzünden, so wird es allzeit möglich seyn, ein gewisse Portion zu bestimmen, welche, wenn sie sich im ersten Augenblick auf einmal entzündete, eben diejenige Würkung hervorbringen würde".[2] („Вследствие того, что одинаково сложно выразить математически процесс постепенного воспламенения пороха, как и провести сам расчет, то явление можно было бы представить так, как если бы в первый же момент воспламенилась определенная часть пороха, в то время как другая часть осталась вовсе не воспламенившейся. Если бы порох воспламенялся с желаемой быстротой, то всегда возможно было бы определить часть заряда, которая при полном воспламенении в первое же мгновение произвела то же действие").

Эйлер выводит величину λ, характеризующую полноту сгорания заряда, превратившегося в газообразные и твердые продукты до начала движения снаряда. Значение λ тем ближе к единице, чем полнее сгорает снаряд.

После введения названного допущения Эйлер получает для l_s и n_s следующие выражения

$$l_s = \lambda l_1 \quad \text{и} \quad n_s = \frac{244 i \lambda l_1}{i(l - l_1) + \lambda l_1} = \frac{244 i \lambda l_1}{il - (i - \lambda) l_1}.$$

Заменяя в уравнении (243) l_s его постоянным значением $l_s = \lambda l_1$, Эйлер приводит его к виду

$$dh = [i(2q + \delta l_1 s) - (\delta - 244 i)\lambda l_1 s] = 2i\beta p_N s \times$$
$$\times \left(n_s + \frac{n_s^2}{6 n_q} \right) dl - 2ip_N s dl - ishdl.$$

---

[1] В середине XVIII в. понятия горение и воспламенение порохового заряда еще не различались. Поэтому Эйлер употребляет слово „воспламенение" (Entzündung) вместо слова „горение" (Verbrennung), которое по смыслу контекста следовало бы использовать.

[2] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 201.

После подстановки в уравнение переменной n_s в функции от l и интегрирования полученного уравнения Эйлер находит довольно сложную формулу, с помощью которой можно определять величину дульной скорости для случая, когда к началу движения снаряда сгорает часть порохового заряда λ.

Установив формулу для дульной скорости в предположении, что к началу движения снаряда некоторая часть заряда λ обратилась в пороховые газы, Эйлер переходит к сравнению полученной формулы для дульной скорости с выведенной на основании допущения, что к началу движения снаряда заряд сгорает полностью. Обозначая дульные скорости, полученные в этих двух предположениях, соответственно через v_{02} и v_{01} и вводя, как и ранее, параметры ζ и η, Эйлер получает зависимость для отношения названных скоростей:

$$\frac{v_{01}^2}{v_{02}^2} = \frac{1}{\dfrac{(\eta - 1)\lambda}{\eta - \lambda} \cdot \dfrac{\dfrac{\ln(\zeta + \lambda)}{\lambda}}{\ln(\zeta + 1)}}.$$

Для случая, когда к началу движения снаряда заряд сгорает полностью, т. е. для $\lambda=1$, Эйлер находит дульную скорость, равную 1800 английским фут./сек. Согласно этой же теории, он получает дульную скорость, равную 1605 английским фут./сек., при допущении, что $\lambda=0.75$. Далее Эйлер высказывает мнение, что значение λ можно взять большей этой величины и положить $\lambda = \frac{7}{8} = 0.89$. В таком случае дульная скорость становится равной 1700 английским фут./сек., т. е. превосходит ее значение, полученное опытным путем. В связи с тем, что в решении не учитывался прорыв газов через запал и зазор и порох, который употреблял Робинс, обладал хорошими качествами, Эйлер счел возможным положить $\lambda = 0.93$. В таком случае дульная скорость получалась равной $v_\partial = 1746$ английским фут./сек. Если уменьшить эту скорость на 100 фут./сек. — потеря дульной скорости вследствие прорыва пороховых газов, — то будет получена истинная скорость, установленная на опыте.

Формула для дульной скорости, выведенная Эйлером теоретически с учетом того, что пороховой заряд сгорает постепенно, была использована для исследования вопросов, непосредственно направленных на решение задач, стоявших перед артиллерией во второй половине XVIII в. В частности, в 1783 г. Ломбар использует эту формулу для вычисления дульных скоростей орудий, состоявших на вооружении французской артиллерии. Сопоставляя величины дульных скоростей 24-фунтовой пушки, полученных теоретически и экспериментально, Ломбар отмечает расхождения между их значениями, установленными этими двумя методами. Оказалось, что для зарядов 1 или $1^1/_2$ фунта пороха формула Эйлера дает слишком большие значения для дульной скорости. При заряде в 2 фунта данные, найденные теоретическим путем, хорошо согласуются с опытом. Для весов зарядов, превышающих эту границу, формула дает заниженные значения величины дульной скорости, причем разница между значениями, полученными теоретически и экспериментально, возрастает с увеличением заряда. Эти расхождения Ломбар объясняет не столько заниженной величиной „упругой силы“ пороха, которая была выбрана Эйлером равной 1000 атм., что, вообще говоря, могло привести к снижению величины дульной скорости, определенной теоретически для больших зарядов, сколько тем, что значение этой характеристики не может считаться одинаковым для орудий различного калибра и для изменяющихся весов заряда. При больших зарядах, полагает Ломбар, когда выделяемая при взрывчатом превращении пороха теплота больше, чем при малых зарядах, „упругая сила“ пороха также должна увеличиваться. Этот фактор, способствующий увеличению дульной скорости при больших зарядах, отчасти компенсируется тем, что они сгорают не полностью. Ломбар справедливо отмечает, что подобное обстоятельство трудно учесть с помощью аналитической формулы. Правильно поставив вопрос о том, что нельзя принимать для всех зарядов одно и то же значение „упругой силы“ пороха, Ломбар, однако, пытается объяснить имеющееся различие в величинах этой характеристики одной лишь разницей весов зарядов. В конце XVIII в. в обиход внутренней баллистики еще не вошло понятие „плотности заряжания“, давшего ключ к изучению закономерностей возникновения различных давлений при горении пороха в замкнутом объеме.

Теория движения снаряда, разработанная Эйлером на основе гипотезы постепенного сгорания заряда, отвечала уровню развития баллистики середины XVIII в. Создавая свой метод, Эйлер до конца использовал математический аппарат, которым он располагал. Шарбонье писал: „...формула Эйлера довольно грубо учитывает последовательность горения порохового заряда. Формула основана на законе расширения Мариотта, видоизмененного согласно концепции автора (Эйлера,—*А. М.*) для закона сжимаемости при высоких давлениях. Состояние физики того времени не позволяло, конечно, пойти далее. Робинс трактует один из предельных случаев проблемы. Эйлер рассматривает большую часть членов, которые в ином виде входят в современные формулы. Нельзя не восхищаться гениальностью и интеллектуальной силой этих двух ученых: одного, безусловно более глубокого математика, а другого, по-видимому, более проникнутого в своих схематических упрощения духом хприкладных наук".[1]

Эйлер не мог полностью и вполне строго решить задачу определения дульной скорости для случая постепенного горения заряда. Математический анализ и механика, физика и химия, теория горения пороха в замкнутом объеме являлись той базой, на которой Эйлер строил свою теорию. Уровень развития перечисленных областей науки, лежащих в основе внутренней баллистики, позволил Эйлеру построить лишь весьма приближенную и даже грубую теорию. Однако это не может умалить ценности установленных Эйлером положений. Аналитическая зависимость, связывающая сгоревшую часть заряда с изменяющейся с течением времени плотностью пороховых газов, могла быть установлена при уровне развития науки того времени только таким выдающимся умом, как Эйлер. Лишь спустя сто с лишним лет на базе новых достижений физики и химии, термодинамики и пиростатики создается та стройная теория горения порохового заряда в канале ствола орудия, которая продолжает господствовать и теперь. Попытка Эйлера решить эту задачу на основе совершенно иных методов привлекла мало внимания в баллистической литературе. Однако теория Эйлера представляет несомненный интерес не только в том практическом значении, какое она имела в свое время, но как пример умелой математической интерпретации явлений, представить которые в аналитической форме было чрезвычайно сложно.

§ 25. ТЕОРИЯ ИСТЕЧЕНИЯ ПОРОХОВЫХ ГАЗОВ ПО ЭЙЛЕРУ

Теория истечения газов из отверстия или сопла некоторого сосуда стала на твердую почву только с середины XIX в. на основе достижений термодинамики.

„Давно была найдена формула, — пишет Сен-Робер, — относящаяся к истечению газов. Ее можно найти уже в мемуаре, представленном в 1856 г. гг. Джоулем и Томсоном в Королевское общество в Лондоне. Но только г. доктору Густаву Цейнеру принадлежит заслуга первого приложения

---

[1] P. Charbonnier. Essais sur l'histoire de la Balistique. Mémoriae de l'Artillerie française, 1927, t. VI, стр. 1074—1075.

термодинамики к истечению паров и жидкостей при высокой температуре".[1]

К этому же времени относятся и первые, основанные на законах термодинамики исследования по баллистике, в задачу которых входило определение уменьшения дульной скорости снаряда вследствие прорыва пороховых газов через зазор и запал. В результате постановки ряда новых задач теория истечения пороховых газов после первой мировой войны вылилась в отдельную область — газодинамику. Однако задолго до этого времени теория истечения пороховых газов стояла среди вопросов, привлекавших внимание первостепенных умов мира. Исследованиями в этой области занимались Иоганн и Даниил Бернулли, а позднее Эйлер, продолживший их труды в некоторых направлениях.

В XVIII в. разработка теории истечения пороховых газов была направлена на решение двух задач. Первая заключалась в установлении скорости истечения через дульный срез пороховых газов, свободно расширяющихся в канале ствола орудия. Вторая имела целью изучить влияние утечки пороховых газов через зазор и запал на величину дульной скорости. Вопрос имел большое практическое значение, так как позволял подойти более обоснованно к проектированию и изготовлению орудийных стволов. В середине XVIII в. усовершенствование материальной части артиллерии происходило по пути унификации калибров. Установление влияния зазора на величину дульной скорости давало возможность правильно подойти к выбору допусков при отливке ядер и бомб и обработке канала ствола. Занимаясь решением этих задач, Эйлер дал интересные исследования, помещенные, как и другие его изыскания по внутренней баллистике, в добавлениях к книге Робинса „New principles of gunnery".

Изучение свободного расширения пороховых газов в канале ствола и их истечения через дульный срез интересовало ученых XVIII в. прежде всего как метод, позволявший подойти к определению характера движения снаряда по каналу и установлению величины дульной скорости. Перемещение снаряда по длине канала обусловливается, согласно господствовавшей в то время теории, стремлением пороховых газов к расширению и той большой скоростью, с какой оно происходит. Снаряд движется тем быстрее, чем сильнее разнятся между собой его скорость и скорость, какой обладали бы пороховые

---

[1] Paul Saint-Robert. Principes de thermodynamique. Turin et Florence, 1870, стр. 228—229.

газы при их свободном расширении. Газы воздействуют на снаряд только в том случае, когда первая скорость меньше второй. Это были те основные теоретические положения, на которых базировались Робинс, проводя свои эксперименты, и Эйлер, разрабатывая теорию движения пороховых газов и снаряда в канале ствола.

В 11-м Предложении первой главы своей книги Робинс обращает внимание читателей на сложность теоретического определения скорости истечения пороховых газов через дульный срез. Помимо газов, в движении участвуют твердые продукты сгорания, частицы которых различаются как по величине, так и по скорости их перемещения. Это обстоятельство, по мнению Робинса, сильно осложняет задачу и делает ее практически неразрешимой. После такого пессимистического заключения о слабости теоретических методов исследования Робинс обращается к эксперименту. С этой целью он использует баллистический маятник, который устанавливает в непосредственной близости от дульного среза. Производя стрельбу из ружей при отсутствии пули, в некоторых случаях и без пыжа, меняя величину заряда, Робинс определяет отклонения приемника маятника, обусловленные ударом пороховых газов, вырывающихся с большой скоростью через дульный срез. Измерение этого отклонения дало Робинсу скорость истечения пороховых газов, равную 7000 фут./сек.

Эйлер подходил к определению скорости истечения газов теоретически. Так же как и Робинс, он рассматривает эту скорость как предел, к которому стремится скорость снаряда при уменьшении его веса до нуля. Большая величина дульной скорости обусловливает, по мнению Эйлера, преимущество огнестрельного оружия перед старыми метательными машинами, которые превосходили первые количеством движения, сообщаемым снарядам, обладавшим сравнительно с пушечными ядрами большей массой.

Обращаясь к исследованию движения пороховых газов в канале ствола орудия, Эйлер отмечает чрезвычайную сложность задачи и необходимость ее изучения с привлечением математических методов исследования: „... этот вопрос, — пишет Эйлер, — требует глубокого проникновения в природу явления и в законы движения жидкостей. К тому же не так уже давно получили возможность решать подобные задачи с помощью вычислений.

„Мы обязаны этому важному распространению математических знаний двум известным ученым — Иоганну и Даниилу Бернулли. Последний впервые трактует этот вопрос в своем несравненном труде по гидродинамике, содержание которого в большей части основано на применении так называемой теоремы живых сил".[1]

В самой общей постановке, т. е. без принятия каких-либо ограничений, задача представлялась Эйлеру настолько сложной, что он не видел возможности ее решения. Трудность проблемы заключалась не только в разнообразии скоростей частиц твердых и газообразных продуктов взрывчатого превращения, но и в том, что в данный момент времени давление и плотность пороховых газов неодинаковы в каждом сечении заснарядного пространства. Эти обстоятельства заставляют Эйлера пойти на упрощения, которые он принимал и при разработке теории движения снаряда, когда учитывалась масса перемещающихся газов и нелетучих продуктов разложения. При изучении свободного расширения газов в канале ствола Эйлер допускает, что скорость их слоев изменяется по линейному закону от нуля у дна канала до некоторой максимальной скорости для внешнего слоя газов. Эйлер полагает, что в каждый данный момент времени давление и плотность пороховых газов постоянны для всего заснарядного пространства и равны некоторым осредненным их значениям.

После взрывчатого превращения порохового заряда, которое Эйлер полагает в данном случае мгновенным, образовавшиеся пороховые газы занимают объем заряда длиной l_1. Давление пороховых газов в этот момент равно, согласно §§ 20 и 23, полному пиростатическому давлению P_1, а их плотность по отношению к плотности воздуха, находящегося при нормальных физических условиях, равна n_m. Основываясь на принятых выше допущениях и на законе Бойля—Мариотта, Эйлер получает следующее дифференциальное уравнение движения для внешнего слоя пороховых газов

$$\frac{n_m l_1}{2} \cdot \frac{dh}{dl} = P_1 \frac{l_1}{l}. \qquad (250)$$

Интегрирование уравнения приводит Эйлера к формуле для скорости, с какой внешний слой пороховых газов проходит дульный срез,

$$h_\partial = \frac{2P_1}{n_m} \ln\left(\frac{l_\partial}{l_1}\right), \qquad (251)$$

---

[1] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 163.

или в принятой теперь форме

$$v_{\text{ист.}} = A\sqrt{\ln\left(\frac{l_\partial}{l_1}\right)},$$

где A — постоянная величина, равная

$$A = 2\sqrt{\frac{gP_1}{nm}}.$$

Формула давала для одного из случаев, рассмотренных Робинсом, величину скорости истечения в 3215 фут./сек. Однако это значение скорости Эйлер считает завышенным. При выводе формулы (250) не были приняты в расчет факторы, уменьшающие скорость расширения пороховых газов. Одновременно с ними перемещаются и нелетучие продукты разложения, что, как правильно считал Эйлер, увеличивает массу движущихся частей и тем самым снижает их скорость. Поэтому в действительности, по его мнению, скорость истечения пороховых газов не должна превышать 2000 фут./сек. Если же газы приводят в движение и снаряд, его скорость должна быть еще меньше.

Не ограничиваясь простым утверждением, что скорость снаряда должна быть меньше скорости истечения газов, Эйлер переходит к численному обоснованию этого положения. С этой целью он составляет дифференциальное уравнение движения для снаряда с учетом перемещающейся массы пороховых газов в

$$\frac{nml_1s}{2}\cdot\frac{dh}{dl} + q\frac{dh}{dl} = P_1s\,\frac{l_1}{l}.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$h_\partial = \frac{2P_1sl_1}{nml_1s + 2q}\ln\left(\frac{l_\partial}{l_1}\right),$$

т. е. высоту, с какой должно упасть тело в безвоздушном пространстве, чтобы приобрести дульную скорость снаряда. Из сопоставления формул для дульной скорости и скорости истечения пороховых газов Эйлер находит следующее соотношение, которое в обозначениях запишется в виде

$$\frac{v_\partial}{v_{\text{ист.}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2q}{nml_1s}}}.$$

Формула показывает, что дульная скорость снаряда всегда меньше скорости истечения пороховых газов при их свободном расширении. Эйлер демонстрирует эту формулу для случая, когда $v_{ист.}=2000$ фут./сек., исходя из которой он находит для дульной скорости значение $v_{\partial}=1452$ фут./сек. Эйлер отмечает, что эта скорость меньше полученной Робинсом экспериментально. Ее значение снижается еще более, если решать задачу в предположении, что пороховой заряд сгорает постепенно. Здесь Эйлер вновь высказывается в пользу большей, чем полагал Робинс, величины „упругой силы" пороха в 1000 атм.

Определив скорость истечения для случая перемещения одних лишь пороховых газов, Эйлер отыскивает ее значение с учетом движения и нелетучих продуктов разложения. Допуская, как и при определении дульной скорости, что половина всех твердых продуктов перемещается со скоростью внешнего слоя газов, а другая — неподвижна и прилегает ко дну канала, он находит скорость истечения пороховых газов того же порядка, как и в рассмотренном выше случае.

Изучая истечение пороховых газов через дульный срез, Эйлер с большим мастерством использует имевшийся в его распоряжении математический аппарат. Основываясь на общепринятом в середине XVIII в. законе Бойля—Мариотта, он доводит свое исследование до численных результатов, позволявших уже с количественной точки зрения оценить величину скорости истечения пороховых газов при различных допущениях о составе участвующих в движении продуктов взрывчатого превращения порохового заряда. К сожалению, Эйлер не воспользовался выведенной им формулой упругости, что не позволило ему получить результаты, более близко отвечающие действительности.

Исследование влияния истечения пороховых газов через запал и зазор на величину дульной скорости проведено Эйлером в 8-м добавлении к 11-му Предложению первой главы книги Робинса. Эйлер опирался на изыскания Даниила Бернулли, помещенные в его „Гидродинамике", которая вышла в свет в 1738 г. в Страсбурге.

Определяя уменьшение дульной скорости вследствие прорыва пороховых газов через зазор и запал, Бернулли рассматривает движение одних лишь газообразных продуктов взрывчатого превращения пороха. Бернулли полагает площадь отверстий, через которые истекают газы, достаточно малой сравнительно с площадью поперечного сечения канала ствола, а дульную скорость — небольшой по сравнению со скоростью истечения газов. Эйлеру принадлежит дальнейшее развитие теории Даниила Бернулли в направлении устранения положенных в ее основу ограничений и распространении теории на более широкий круг задач. В частности, Эйлер принимает во внимание, что одновременно с пороховыми газами перемещаются и нелетучие продукты взрывчатого превращения. Кроме того, он распространяет решение на случай, когда площадь отверстий запала и зазора можно считать по сравнению с площадью поперечного сечения канала не малой.

Теория Эйлера обращает на себя внимание своей практической направленностью. Не ограничиваясь составлением исходного дифференциального уравнения, Эйлер стремится довести решение до конкретных результатов, для чего пользуется численным методом интегрирования. Все это позволяет более обстоятельно остановиться на разбираемом исследовании Эйлера, тем более что оно представляет интерес не только для истории развития внутренней баллистики.

При решении основной задачи внутренней баллистики на основе постепенного сгорания заряда Эйлер полагал, что полное пиростатическое давление имеет меньшее значение, чем принимаемая Робинсом величина. В целях упрощения своего решения Эйлер переходит к гипотезе мгновенного сгорания заряда. Для того чтобы при этом не допустить ошибки, он принимает, что к началу движения снаряда в пороховые газы обращается только часть заряда λ, в то время как другая его часть вовсе не сгорает. Иными словами, постепенное сгорание заряда сводится им к мгновенному путем фактического уменьшения веса заряда. Наравне с движением газообразных и твердых продуктов взрывчатого превращения Эйлер рассматривает и перемещение несгоревшей части заряда. Он полагает, что через сечение запала и зазора к моменту времени t истекает относительная часть z объема образующихся пороховых газов. В таком случае объем вырвавшегося газа равен объему столба воздуха, находящегося при нормальных физических условиях, высотой $244\,\lambda l_1 z$, где, как и ранее, $\frac{w_N}{w}=244$. В таком случае на снаряд действуют пороховые газы, объем которых равен $244\,\lambda l_1\,(1-z)$ с плотностью, выражаемой, как и прежде, через

$$n_m=\frac{244\lambda l_1\,(1-z)}{l-l_1+\frac{\lambda l_1}{i}}.$$

Полагая, что скорость поперечных слоев пороховых газов изменяется по длине канала, следуя линейному закону, и что половина массы нелетучих продуктов разложения и несгоревшей части заряда, прилегающая ко дну канала, неподвижна, а другая перемещается непосредственно вслед за снарядом со скоростью последнего, Эйлер составляет дифференциальное уравнение движения снаряда для случая, когда часть пороховых газов истекает через зазор и запал,

$$dh\left[q + \frac{1}{2} l_1 s\left(1 - \frac{\lambda}{i}\right) + 122\lambda l_1 s(1-z)\right] =$$

$$= \beta p_N s\left(n_m + \frac{n_m^2}{6n_q}\right)dl - p_N s dl - \frac{1}{2} shdl, \qquad (252)$$

где последние члены учитывают действие на снаряд атмосферного давления и сопротивления воздуха.

В уравнение входят четыре переменных n_m, h, z и l. Эйлер ищет решение в направлении исключения переменной z, которую он выражает через другие три переменные. С этой целью он вводит новую неизвестную $u = \sqrt{2gh_1}$ — скорость истечения пороховых газов через запал, площадь которого Эйлер брал больше на величину площади зазора. В таком случае, если за промежуток времени dt снаряд переместится на бесконечно малый отрезок пути dl, то за этот же промежуток времени через запал вырвется элементарный объем пороховых газов в форме цилиндра длиной $\frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h}}dl$, причем площадь его основания будет равна $\frac{s}{m}$ — суммарная площадь поперечного сечения отверстий зазора и запала, выраженная через площадь поперечного сечения канала ствола s, где m — отношение площади поперечного сечения канала к сумме площадей запала и зазора. Вследствие того, рассуждает Эйлер, что пороховые газы являются в n_m раз более плотными, чем воздух при нормальных физических условиях, потеря действующей на снаряд силы, обусловленная истечением газов через запал и зазор, отвечает столбу воздуха с площадью основания, равной площади поперечного сечения канала, и высотой $\frac{n_m\sqrt{h_1}}{m\sqrt{h}}dl$. Тогда, приняв во внимание, как это следует из предыдущего, что объем пороховых газов, вырвавшихся через запал и зазор за промежуток времени dt, равен $244\lambda l_1 dz$, Эйлер получает дифференциальное уравнение, связывающее переменную z со скоростями $v=\sqrt{2gh}$ и $u=\sqrt{2gh_1}$,

$$244\lambda l_1 dz = \frac{n_m\sqrt{h_1}}{m\sqrt{h}}\,dl. \tag{253}$$

Далее Эйлер находит скорость истечения газов u, которая определяется давлением пороховых газов в заснарядном пространстве,

$$P=\beta p_N\left(n_m+\frac{n_m^2}{6n_q}\right).$$

Эйлер выражает это давление посредством формулы

$$P=\beta p_N\left(1+\frac{n_m}{6n_q}\right),$$

рассматривая действие пороховых газов как бы в n_m раз более плотных. Эйлер определяет скорость истечения пороховых газов через запал посредством высоты столба воздуха, соответствующего его давлению P

$$h_1=\beta A p_N\left(1+\frac{n_m}{6n_q}\right),$$

или вследствие того, что дробь $\frac{n_m}{6n_q}$ мала по сравнению с единицей, Эйлер находит

$$h_1=\beta A p_N, \tag{254}$$

т. е. получает скорость истечения, как бы независящую от плотности газов n_m и равную, в первом приближении, постоянной величине.

Подставляя в уравнение (253) значения n_m и h_1, Эйлер получает следующую зависимость, связывающую l, z и h

$$\frac{dz}{1-z}=\frac{idl\sqrt{\beta A p_N}}{il-(i-\lambda)\,l_1\sqrt{h}}. \tag{255}$$

Вновь возвращаясь к уравнению (252), пренебрегая в нем „малыми“ членами, имеющими к тому же противоположные знаки, заменяя плотность n_m ее выражением через переменные l и z и исключая посредством уравнения (255) переменную l, Эйлер, в конце концов, приходит к дифференциальному уравнению, связывающему две переменные z и h,

$$dz+\frac{zdh}{2m\sqrt{\beta A p_N}\,h}=\frac{[2iq+\delta l_1 s\,(i-\lambda)+244\lambda l_1 s]\,dh}{488mi\lambda l_1 s\sqrt{\beta A p_N}\,h}. \tag{256}$$

Для того чтобы проинтегрировать это уравнение, Эйлер умножает обе его части на $e^{\frac{\sqrt{h}}{m\sqrt{\beta A p_N}}}$. Интегрируя уравнение при начальных условиях $l=0$, $z=0$ и $h=0$ и вводя обозначение N для группы, объединяющей входящие в нее параметры, Эйлер получает следующее решение:

$$\ln(1-z)=\ln\left[(1+N)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{h}}{m\sqrt{\beta A p_N}}}-N\right].$$

После дифференцирования этого уравнения Эйлер находит

$$\frac{dz}{1-z}=\frac{(1+N)\dfrac{dh}{2m\sqrt{\beta A p_N h}}}{1+N-Ne^{\frac{\sqrt{h}}{m\sqrt{\beta A p_N}}}}.$$

Однако уравнение (255) дает

$$\frac{idl}{il-(i-\lambda)l_1}\cdot\frac{\sqrt{\beta A p_N}}{m\sqrt{h}}=\frac{dz}{1-z}.$$

Приравнивая в двух последних уравнениях правые части, Эйлер находит

$$\frac{2i\beta A p_N dl}{il-(i-\lambda)l_1}=\frac{(1+N)\,dh}{1+N-Ne^{\frac{\sqrt{h}}{m\sqrt{\beta A p_N}}}}, \qquad (257)$$

т. е. уравнение, непосредственно связывающее высоту, отвечающую скорости снаряда в данном сечении канала с длиной пройденного им пути l, и составленное с учетом прорыва пороховых газов через запал и зазор.

Вследствие невозможности найти точное решение этого уравнения, Эйлер прибегает к приближенному его интегрированию. С этой целью он представляет в виде ряда члены, содержащие

$$e^{\frac{\sqrt{h}}{m\sqrt{\beta A p_N}}} \text{ и } \sqrt{\beta A p_N}-N\sqrt{h}.$$

Обратившись к физической сущности истечения газов через зазор и запал, т. е. приняв во внимание, что обычно площади этих отверстий малы сравнительно с площадью поперечного сечения канала ствола, а значит, что число m велико, Эйлер ограничивается первыми членами разложения. В результате, он значительно упрощает последнее уравнение, не внося в него сколько-нибудь существенных погрешностей. Интегрирование этого упрощенного уравнения дало

$$2\beta A p_N \ln\left[\frac{il-(i-\lambda)l_1}{\lambda l_1}\right]=(1+N)h+\frac{2N(1+N)ih\sqrt{h}}{m\sqrt{\beta A p_N}}. \quad (258)$$

Если прорыва пороховых газов через запал и зазор не происходит или он очень мал, что имеет место при весьма большом значении m, в таком случае второй член правой части соотношения (258) обращается в нуль и скорость может быть определена по формуле

$$2\beta A p_N \ln\left[\frac{il-(i-\lambda)l_1}{\lambda l_1}\right]=(1+N)h.$$

Обозначая через $v_{01}=\sqrt{2gh_{01}}$ начальную скорость снаряда при наличии прорыва пороховых газов через запал, а через $v_{02}=\sqrt{2gh_{02}}$ начальную скорость снаряда в том случае, когда истечение пороховых газов отсутствует, Эйлер находит после сопоставления соотношения (258) с только что приведенным уравнением, следующее выражение:

$$h_{02}=h_{01}-\frac{2N\sqrt{h_{01}}}{3m\sqrt{\beta A p_N}}. \quad (259)$$

Для частного случая, когда дульная скорость $v_{01}=1700$ фут./сек. и $m=100$, т. е. площадь отверстий, через которые происходит истечение пороховых газов, составляет сотую часть площади поперечного сечения канала ствола, уменьшение дульной скорости вследствие прорыва пороховых газов составляет 67 фут./сек. Дульная скорость в таком случае оказывается равной 1633 фут./сек.

Интегрирование уравнения, в результате которого было получено выражение дульной скорости с учетом истечения пороховых газов через зазор и запал, проводилось приближенно. Вследствие того что в ходе интегрирования отбрасывались „малые“ члены, была допущена, как отмечал и сам Эйлер, погрешность в сторону увеличения значения дульной скорости. Такое приближенное решение допустимо только при большом значении m, т. е. когда площадь отверстий, через которые осуществляется истечение пороховых газов, составляет лишь незначительную часть площади поперечного сечения канала ствола.

Вторая неточность решения проистекает от того, как это признавал и Эйлер, что через запал и зазор вырываются не только газообразные, но и нелетучие продукты горения, так же как и элементы несгоревшей части заряда. Это обстоятельство сказывается в сторону увеличения дульной скорости вследствие того, что при движении снаряда по каналу ствола та часть энергии пороховых газов, которая расходуется на перемещение несгоревших частей заряда и нелетучих продуктов разложения, частично сохраняется, так как эти частицы сразу же выбрасываются. Таким образом, истечение пороховых газов, по мнению Эйлера, в действительности снижало скорость снаряда в меньшей степени, чем это следовало из приведенной теории. Для того чтобы ввести некоторую поправку, учитывающую выбрасывание вместе с газообразными продуктами и твердых частиц, Эйлер предлагает при употреблении его формулы уменьшать площадь сечения отверстий, через которые осуществляется прорыв посредством соответствующего выбора величины m.

С мнением Эйлера об уменьшении затраты энергии расширяющихся пороховых газов на приведение в движение несгоревших частей заряда и нелетучих продуктов разложения можно согласиться. Также следует считать вполне рациональным и метод, которым он воспользовался для внесения названной поправки. В сущности, Эйлер обращается к исправлению решения путем изменения коэффициента.

В заключение Эйлер разработал теорию истечения пороховых газов для случая, когда m не слишком мало: Эйлер уже не ограничивается первыми членами разложения выражений, содержащих $e^{\frac{\sqrt{h}}{m\sqrt{\beta A p_N}}}$, а принимает во внимание члены более высокого порядка, содержащие $\frac{\sqrt{h}}{m\sqrt{\beta A p_N}}$ в третьей степени. Решая дифференциальное уравнение, связывающее переменные h и l, он находит довольно сложную формулу для определения потери дульной скорости в рассмотренном случае.

Проведенные Эйлером расчеты относились к установлению влияния истечения пороховых газов на величину дульной скорости для стрельбы из ружей. Прорыв пороховых газов через зазор сказывается на величине дульной скорости в орудиях еще более значительно, так как сферические снаряды прилегают к стенкам канала менее плотно, чем ружейные пули.

Теория движения снаряда в канале ствола орудия, разработанная Эйлером в предположении, что часть пороховых газов истекает через зазор и запал, весьма оригинальна. Эту теорию можно рассматривать как исходный пункт в развитии газодинамики.

Изучение влияния утечки пороховых газов через зазор на величину дульной скорости не переставало привлекать внимание артиллеристов вплоть до середины XIX в., хотя к этому времени допуски при изготовлении снарядов и обработке поверхности канала ствола уменьшились, что привело к значительному снижению потери пороховых газов. Этот вопрос вовсе теряет значение после введения на вооружение нарезных артиллерийских систем, стрелявших продолговатыми снарядами, снабженными сперва свинцовой оболочкой, а затем медными ведущими поясками, фактически устранившими прорыв газов. Что касается истечения газов через запал, то его влияние на дульную скорость всегда было значительно меньше, в особенности в орудиях большого калибра.

После публикации книги Робинса с добавлениями Эйлера изыскания по определению влияния истечения пороховых газов на уменьшение величины дульной скорости продолжались, главным образом по экспериментальному направлению. Среди предпринятых в конце XVIII в. опытов обращают на себя внимание обширностью и точностью их проведения эксперименты Хэттона.[1] В частности, им было установлено, что при зазоре в 1/20 калибра теряется от 1/4 до 1/3 объема образующихся пороховых газов. Из работ в этой же области, относящихся уже к середине XIX в., можно отметить труд по экспериментальной баллистике французского артиллериста Эли. Среди других результатов им были получены и весьма интересные данные об истечении пороховых газов через зазор. В частности, он писал: „Таким образом, приходится допустить, что потеря скорости снаряда, обусловленная наличием зазора, почти не зависит от веса последнего или, другими словами, что количество движения, потерю которого дает зазор, почти пропорционально весу движущегося тела“[2].

Исследования Эйлера по теории истечения пороховых газов были непосредственно связаны с производством материальной части артиллерии, в первую очередь с изготовлением ядер

---

[1] Ch. Hutton. Nouvelles expériences d'Artillerie, traduites par le colonel Villantroys. Paris, 1802.

[2] F. Hélie. Traité de Balistique expérimentale, t. I. Paris, 1865, стр. 68.

и гранат, а также с обработкой канала ствола орудий. Еще большее значение для решения прикладных вопросов артиллерийской науки имели освещенные в предыдущих параграфах настоящей главы исследования Эйлера, относящиеся к изучению движения снаряда по каналу ствола орудия. Содержащиеся в них результаты были особенно важны для проектирования орудий — баллистического расчета ствола и выбора рациональной толщины его стен.

§ 26. МЕТОД ЭЙЛЕРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАИВЫГОДНЕЙШЕГО ВЕСА ЗАРЯДА И РАЦИОНАЛЬНОЙ ДЛИНЫ КАНАЛА СТВОЛА

Две задачи артиллерийской науки, связанные с проектированием орудий, издавна привлекали внимание ученых. Одна из них состояла в определении заряда, при котором снаряд летел бы возможно дальше, т. е. сообщал бы ему максимальную дульную скорость. Другая имела целью установить длину канала, которая при данном весе заряда и угле бросания обеспечивала бы наибольшую дальность. Эти вопросы и входили на раннем этапе развития артиллерии в задачу баллистического проектирования ствола орудия. Вначале отыскание наивыгоднейшего заряда и рациональной длины канала ствола основывалось на повседневной практике изготовления орудий и их боевого использования. В дальнейшем в связи с общим подъемом математической культуры и разработкой теории движения снаряда в канале ствола изменяются и способы решения этих вопросов. Больший удельный вес приобретают теоретические изыскания, в которых видное место занимает механико-математический анализ явлений, происходящих при выстреле. К такому направлению принадлежат исследования Эйлера, помещенные в добавлениях к книге Робинса.

До начала XVIII в. имела наибольшее распространение теория, согласно которой дальность или определяющая ее дульная скорость, постоянно возрастает с увеличением веса заряда. Однако уже и тогда далеко не все ученые разделяли это ошибочное положение. Первым, кто высказал мнение о существовании некоторой промежуточной величины заряда, обеспечивающей наибольшую дальность, был Тарталья,[1] изложивший свои соображения по данному вопросу в труде 1546 г.

Существование некоторой оптимальной дальности при увеличении заряда в бескамерных гладкостенных пушках обусловлено, с одной стороны, уменьшением пути проходимого снарядом по каналу ствола, а с другой — тем, что при боль-

[1] N. Tartalea. Quesiti et inventioni diverse, sopra li tiri delle artiglеria et altri suoi varii accidenti. Venetia, 1546.

ших зарядах он успевал сгорать лишь частично. Именно на этих соображениях Тарталья и строил свою теорию. Все же эта правильная мысль долгое время не получала признания и утвердилась в артиллерии лишь к середине XVIII в., когда, наконец, было внедрено верное положение о зависимости между длиной канала ствола и рациональной величиной заряда. В 1731 г. Белидор[1] опровергает ложное представление о том, что дальность стрельбы возрастает прямо пропорционально величине заряда. В том же году Мопертюи[2] пытается решить задачу о наивыгоднейшей величине порохового заряда уже математически. Пользуясь теорией экстремумов, он устанавливает наименьшую величину заряда, сообщающую при стрельбе под определенным углом бросания заданную дальность. В направлении установления количественного значения наивыгоднейшего заряда на базе использования математического аппарата проводили свои изыскания Даниил Бернулли и Бенджамен Робинс.

Бернулли находит величину наивыгоднейшего заряда из выведенной им формулы для дульной скорости (220). Анализируя ее, Бернулли заключает, что дульная скорость достигает наибольшего значения, когда $\ln\left(\frac{l_\partial}{l_1}\right)=1$, т. е. при отношении $\frac{l_\partial}{l_1}=e$. Стало быть, Бернулли основывается, в сущности, на решении задачи о максимуме функции, определяющей дульную скорость, принимая длину заряда l_1 за независимую переменную.

При решении той же задачи Робинс основывается на свойствах гиперболы, выражающей, согласно закону Бойля—Мариотта, зависимость между давлением пороховых газов и пройденным по каналу ствола путем. Из рассмотрения двух площадей, которые Робинс полагает равными при длине заряда, сообщающей снаряду наибольшую дульную скорость, он получает ту же зависимость, что и Бернулли, т. е. $\frac{l_\partial}{l_1}=e$.

Физический смысл рассуждений Робинса уловить затруднительно. Рациональную величину заряда он отыскивает, приравнивая работу, производимую пороховыми газами при движении снаряда по каналу ствола, некоторой работе, выполненной силой, отвечающей полному пиростатическому давлению P_1 на пути, равном длине наивыгоднейшего заряда.

---

[1] B. Bélidor. Le bombardier français ou la nouvelle méthode de jeter les bombes avec précision. Paris, 1731.

[2] P. L. Maupertuis. Balistique arithmétique. Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1731.

Исследования Бернулли и Робинса отличаются излишним упрощением постановки задачи. Однако такой подход был вполне естественен и основывался на сложившихся в то время положениях внутренней баллистики. Найденная Бернулли и Робинсом формула для наивыгоднейшей величины заряда была весьма приближенной. Поэтому на практике подбор веса заряда производился эмпирически на основе опытных отстрелов.

Уже в ранний период развития артиллерии было высказано верное положение, что с увеличением длины канала дальность постоянно возрастает. Однако эта точка зрения в течение длительного времени не находила полного подтверждения. В первой половине XVIII в. определение рациональной длины канала ствола продолжало базироваться на эмпирических методах исследования. Изменился только способ отыскания длины ствола, обеспечивающей, по мнению ученых того времени, наибольшую дальность. Ранее длина канала находилась из условия, при котором к моменту прохождения снарядом дульного среза не оставалось бы несгоревших зерен пороха. На смену этому методу пришел другой, согласно которому рациональная длина канала устанавливалась по наибольшей дальности стрельбой из орудия с различной длиной ствола при одинаковых углах бросания и весе заряда.

Вследствие дефектов в изготовлении орудийных и ружейных стволов (искривление канала, раковины, забоины и т. п.), приводящих к ударам снаряда о стенки канала и тормозящих его движение, опыт давал весьма разнообразные данные для рациональной длины канала ствола. В результате сильно затруднялось выяснение характера изменения дальности в зависимости от увеличения длины канала. Поэтому верное представление об увеличении дульной скорости с длиной канала затемнялось настолько, что ученые приходили к выводу о существовании некоторой его длины, после которой дульная скорость уменьшается. Эту точку зрения даже в середине XIX в. разделял и Пиобер,[1] полагавший, что до XVIII в. была распространена ложная теория о постоянном увеличении дальности с длиной канала ствола.

Французский артиллерист Биго де Морог считал, что найти рациональную длину канала ствола теоретически чрезвычайно сложно и, в сущности, отвергал этот метод исследования. Придерживаясь второго из вышеназванных эмпирических способов решения задачи, Биго де Морог пришел к ряду весьма интересных обобщений. В частности, в 1737 г., исходя из до-

[1] W. Piobert. Traité d'artillerie théorique et pratique. Paris, 1847.

пущения о более интенсивном сгорании порохового заряда в орудиях крупного калибра, он установил, что выраженная в калибрах рациональная длина канала ствола для таких орудий меньше, чем для более мелкого калибра. Это был один из наиболее ценных выводов, который был получен в середине XVIII в. непосредственно перед появлением книги Робинса „New principles of gunnery" с добавлениями Эйлера.

Своеобразие исследований Эйлера в области баллистического проектирования ствола орудия заключалось в том, что он сумел отрешиться от чисто математического исследования вопроса, что, правда, иногда и проскальзывает в его дабавлениях. Эйлер принимает в расчет специфически артиллерийские факторы, которые легко могли ускользнуть из поля зрения математика. Сочетание теоретических изысканий с запросами практики и умелым использованием экспериментального материала привело Эйлера к результатам, которые оказались не только серьезным подспорьем для проектирования орудий в его время, но и к выводам, сохранившим свою ценность и теперь.

Основные вопросы теории баллистического проектирования ствола Эйлер изложил в добавлениях к 4-му Предложению второй главы книги Робинса. В своих примечаниях Эйлер построил обстоятельную теорию, раскрывающую многие неясные и мало изученные в середине XVIII в. вопросы, связанные с выбором наивыгоднейшей величины заряда и рациональной длины канала ствола. Решение задачи он начинает с анализа влияния увеличения веса заряда и длины канала ствола на изменение дульной скорости, причем эта взаимосвязь устанавливается на чисто количественной основе.

Исходной формулой Эйлеру служит зависимость, установленная в добавлении к 12-му Предложению первой главы книги Робинса. Это соотношение, связывающее дульную скорость с весом заряда, весом снаряда и длиной канала ствола, было выведено в предположении, что между зарядом и снарядом имеется значительный промежуток, обусловливающий, по мнению Эйлера, ударное воздействие пороховых газов на снаряд. Формула основана, кроме того, на допущении, что к началу движения снаряда сгорает значительная часть заряда, а одновременно со снарядом перемещаются твердые и газообразные продукты взрывчатого превращения. Эта зависимость, согласно его точки зрения, наиболее близка к действительности. В принятых теперь обозначениях формула Эйлера выглядит так

$$v_\partial^2 = A\frac{\omega}{2q+\omega}\ln\left(\frac{B'\partial q + C\omega}{C\omega}\right), \tag{260}$$

где A, B и C — постоянные коэффициенты. Эйлер придает этим коэффициентам соответственно различные значения для двух составленных им таблиц, определяющих величины дульных скоростей для орудий различного калибра в зависимости от относительного веса заряда и длины ствола, выраженного в калибрах. Вторая из этих таблиц, вычисленная для меньшего интервала между последовательными значениями относительного веса заряда, является, по мнению Эйлера, более точной, так как при ее вычислении было взято иное значение для удельного веса пороха.

Анализируя данные, помещенные в таблице, Эйлер приходит к ряду ценных заключений, сущность важнейших из которых сводится к следующему: при равных относительных зарядах дульные скорости возрастают с увеличением длины канала ствола, выраженной в калибрах; дульная скорость в орудиях крупного калибра меньше, чем в орудиях небольшого калибра.

Уместно подчеркнуть, что Эйлер приходит к правильному выводу, состоящему в том, что дульная скорость возрастает с увеличением длины канала ствола. Правда, он оговаривается, что опыт этого не подтверждает. Однако для случая стрельбы из вполне исправных орудий и ружей, когда канал ствола не искривлен и снаряд не ударяется об его стенки, что не всегда соблюдалось в опытных стрельбах, заключение Эйлера о связи дульной скорости с длиной канала следует считать верным.

Изучение сопротивления воздуха движению артиллерийского снаряда и анализ помещенных в таблицах результатов позволили Эйлеру вполне обоснованно подойти к доказательству преимущества в дальности орудий крупного калибра. Обладая большей массой, снаряды таких орудий при движении в воздухе испытывают меньшее относительное сопротивление, чем снаряды орудий более мелкого калибра. Вот почему, хотя орудия большого калибра и обладают меньшей дульной скоростью, их дальности значительно превышают те, которые дают орудия небольшого калибра. Эйлер пишет об этом в следующих словах: „... alsdenn müßte auch ohne Zweifel ein Schuß unter einerley Richtung des Stücks um so viel weiter reichen, je grösser die Geschwindigkeit wäre, mit welcher die Kugel heraus getrieben wird. Weil aber der Weiderstand der Luft so erstaunlich groß ist, wie allbereit dargethan worden, und derselbe insonderheit von der Größe der Kugel abhängt, so ist es möglich, daß eine grössere Kugel weiter reicht, als eine kleinere, wenn auch jener anfänglich eine kleinere Geschwindigkeit eingedruckt worden, als dieser. Um dieses begreiflicher zu machen, so ist zu merken, daß die Würkung des Wiederstands nicht so wohl aus der Grösse desselben selbst, als aus der Verhältniß desselben zum Gewicht der Kugel beurtheilet werden müße".[1] („...поэтому, без сомнения, ядра, брошенные при одном и том же возвышении, летели бы тем дальше, чем больше была бы скорость, с которой ядро брошено из пушки. Но вследствие того, что сопротивление воздуха, как уже было показано, так необыкновенно велико и зависит главным образом от размера ядра, то возможно, что ядро большей величины летит далее, чем менее крупное, если бы даже оно и обладало меньшей скоростью. Для того чтобы сделать это более понятным, необходимо заметить, что о действии сопротивления следует судить не столько по самой его величине, сколько по отношению его к весу ядра").

Вычисленные Эйлером таблицы, особенно вторая, получили распространение во многих государствах Западной Европы. Этому способствовало то обстоятельство, что при переводе добавлений Эйлера Ломбар пересчитал упомянутую выше таблицу для орудий французской артиллерии, сделав ее, таким образом, доступной для практического использования уже за пределами Пруссии.

Эйлер считал составленные таблицы основой для выбора наивыгоднейшей величины заряда и рациональной длины канала ствола. Однако из одного лишь анализа таблиц, по его мнению, нельзя найти достаточный материал для определения дульной скорости, веса заряда и длины канала. В этом вопросе следует руководствоваться требованиями, которые предъявляет боевое использование артиллерии к проектируемым орудиям. Таким образом, Эйлер говорит о необходимости исходить при составлении баллистического проекта ствола из тактико-технических требований, что и теперь лежит в основе работ по созданию новых артиллерийских систем.

Подготовив в виде только что разобранных таблиц числовую основу для выбора наилучшего варианта ствола, Эйлер переходит к изложению метода для отыскания наивыгоднейшего решения. Эйлер строит свой метод на положении, что в существующих образцах пушек отношение длины канала, выраженной в калибрах, к относительному весу заряда является величиной постоянной. Анализ отношения между длиной канала и относительным весом заряда для принятых на вооружение образцов показывает, как пишет Эйлер, что оно заключено в довольно узких границах — между 36 и 48. Останавливаясь на 24-фунтовой пушке, которая считалась в се-

---

[1] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 321—322.

редине XVIII в. одним из лучших образцов, он принимает отношение[1] $\frac{l_\partial}{\omega_q}=45$, имеющее место для этого орудия, справедливым и для других пушек, независимо от их калибра. В результате открывается возможность находить для данной длины канала, выраженной в калибрах, наивыгоднейший относительный вес заряда и обратно. В сущности, Эйлер использует в данном случае теорию механического подобия артиллерийских систем.

Следующим этапом в решении задачи баллистического проектирования ствола является, по Эйлеру, установление рационального веса заряда и длины канала для заданной дульной скорости. С этой целью он обращается к формуле (260), которую представляет в виде

$$v_\partial^2 = A\frac{\omega_q}{2+\omega_q}\ln\left(\frac{B\frac{l_\partial}{\omega_q}-C}{C}\right). \qquad (261)$$

Вследствие того что отношение $\frac{l_\partial}{\omega_q}$, согласно принятому Эйлером допущению, постоянно, дробь, стоящая после знака логарифма, также остается неизменной. Обозначая

$$\ln\left(\frac{B\frac{l_\partial}{\omega_q}-C}{C}\right)=D$$

и имея в виду, что $\omega_q=\frac{l_\partial}{45}$, Эйлер получает из формулы (261) следующее соотношение между длиной канала и дульной скоростью

$$1+\frac{90}{l_\partial}=\frac{AD}{v_\partial^2}. \qquad (262)$$

С помощью этой формулы Эйлер вычисляет обширную таблицу, связывающую дульную скорость с величинами относительного веса заряда и длины канала. Таким образом, таблица позволяет найти, при каких значениях этих характеристик может быть получена требуемая дульная скорость. При определении для вновь проектируемого орудия величины относительного заряда и соответствующей ей длины канала Эйлер пред-

---

[1] В приведенном соотношении l_∂, как и раньше, выражено в калибрах. ω_q — относительный вес заряда, т. е. $\omega_q=\frac{\omega}{q}$.

лагает находить дульную скорость, которую необходимо знать при пользовании таблицей, путем стрельбы из близких по типу орудий или посредством формул, установленных теоретически. При задании величины дульной скорости необходимо также учитывать, пишет Эйлер, те цели, для которого данное орудие предназначено.

Один из наиболее интересных выводов, к которым пришел Эйлер, анализируя помещенные в таблице данные, сводился к тому, что для пушек небольшого калибра невозможно добиться такой величины дульной скорости, которая обеспечила бы большую дальность: „Wenn man aber auf eine sehr grosse Entfernung mit einer Canonen-Kugel noch gewiß schiessen wolte, und zu diesem Ende die Kugel eine Geschwindigkeit von 1900 Schuhen in einer Secunde haben müßte, so würde dieser Endzweck mit keiner nach Art der Carthaunen verfertigten Canone erreicht werden können, sondern die beste Canone müßte fast 44 Caliber lang seyn, und die Ladung an Pulver beynahe dem ganzen Gewicht der Kugel gleich genommen werden. Mit einer solchen Canone würde man also viel weiter schiessen können, wofern nur die Kugel nicht allzuklein angenommen wird, als mit einer Feldschlange, welche 30 Caliber lang, und mit 2/3 des Cewichts der Kugel geladen wird“.[1] („Но если нужно попасть ядром в цель с очень большого расстояния и для этого ядро должно обладать скоростью 1900 фут./сек., то это не может быть достигнуто никакой из существующих пушек вида картаунов, а наиболее подходящая для этого пушка должна была бы иметь длину почти в 44 калибра и заряд пороха почти в полный вес ядра. Из такой пушки можно было бы стрелять — причем только не слишком мелкими ядрами — гораздо дальше, чем из фельдшланга длиной в 30 калибров, заряженного в 2/3 веса ядра“).

К вопросу определения величины рационального заряда Эйлер подходит и с чисто математической точки зрения, рассматривая его как задачу на теорию экстремумов.

В 4-м добавлении к 11-му Предложению первой главы труда Робинса Эйлер отыскивает величину рационального заряда для случая, когда до начала движения снаряда заряд сгорает полностью, а одновременно со снарядом перемещаются газообразные и твердые продукты разложения. Исходной зависимостью является довольно сложная формула, служащая для определения дульной скорости в названных предположениях. После дифференцирования по независимой переменной l_1 Эйлер в ре-

---

[1] L. Euler. Opera omnia, Series secunda, t. XIV, 1922, стр. 335.

зультате ряда приближений находит выражение, позволяющее определить величину рационального заряда. Пользуясь установленной формулой, Эйлер вычисляет таблицу наивыгоднейших весов заряда в зависимости от длины канала ствола. Однако данные, помещенные в таблице, значительно расходятся с опытом, что Эйлер объясняет принятием некоторых допущений, в частности положения о мгновенности сгорания заряда. Это обстоятельство и побудило Эйлера искать решение на основе более широких предположений.

В 5-м добавлении к 4-му Предложению второй главы книги Робинса Эйлер дает еще один метод установления наивыгоднейшей величины заряда. Так же как и в предыдущем случае, он опирается на теорию экстремумов. За исходную зависимость Эйлер берет формулу для дульной скорости, выведенную с учетом движения газообразных и твердых продуктов превращения, при допущении, что между зарядом и снарядом имеется значительный промежуток, а к началу движения снаряда успевает сгореть бóльшая часть заряда. Для того чтобы найти длину заряда, отвечающую максимальной дульной скорости, Эйлер ищет производную от выражения для дульной скорости по независимой переменной l_1 и приравнивает ее нулю. Однако это выражение оказывается настолько сложным, что Эйлеру приходится отказаться от общего решения и искать его для частного случая, когда орудие имеет длину канала $l_ð = 30$ калибрам, а снаряд изготовлен из железа. В результате уравнение, служащее для определения величины рационального заряда, приобретает вид

$$\ln u = 1 + \frac{7}{u}, \tag{263}$$

где $u = \dfrac{2l_ð - l_1}{l_1}$.

Решая это уравнение методом последовательных подстановок, Эйлер находит для данного конкретного случая зависимость между относительным весом рационального заряда ω_q, его длиной l_1 и калибром d

$$\omega_q = \frac{l_1}{5d}. \tag{264}$$

На основе изложенного метода Эйлер составляет специальную таблицу для рациональных весов заряда, которую считает достаточно надежной. Использованная при составлении таблицы теория учитывает, по его мнению, почти все обстоятельства, имеющие место при движении снаряда в канале ствола орудия. Единственный, не принятый в расчет фактор, считает Эйлер, — постепенность горения заряда — повлияет в случае принятия его в расчет в сторону понижения величин рациональных весов зарядов, помещенных в таблице. Так же как и бóльшая часть таблиц, приводимых Эйлером в добавлениях к 4-му Предложению второй главы книги Робинса, эта таблица была пересчитана Ломбаром для орудий французской артиллерии и получила, таким образом, широкое распространение.

Во второй половине XVIII в. исследования по определению влияния веса порохового заряда и длины канала ствола на величину дульной скорости проводились главным образом экспериментально. В этом направлении изыскания продолжались и в первой половине XIX в. Получившие широкую известность эксперименты д'Арси и Хэттона подтвердили в основном выводы, к которым пришел Эйлер теоретически. „... Д'Арси, Эйлер, Ломбар и Хэттон, хотя и шли различными путями, получили совершенно согласные между собой результаты", — писал переводчик книги Хэттона французский артиллерист Виллантруа.[1] В частности, опыты, поставленные над орудиями и ружьями, показали справедливость заключения Эйлера о том, что с увеличением длины канала ствола дульная скорость возрастает. В этот период качество изготовления огнестрельного оружия значительно повысилось, снизились причины, сказывающиеся на неправильности движения снаряда в канале ствола, что привело к более единообразным результатам проводившихся экспериментов.

Столетие, последовавшее за появлением немецкого перевода книги Робинса, характеризовалось развитием эмпирических методов определения наивыгоднейшего заряда и рациональной длины канала ствола. Теоретическое направление, которому следовал Эйлер при баллистическом проектировании ствола орудия, сводившееся к составлению таблиц, не получило в XIX в. сколько-нибудь существенного развития. Изыскания Эйлера открывшего, в сущности, аналитический подход к решению задачи, не были продвинуты сколько-нибудь существенно вперед вплоть до второй половины XIX в., когда в развитии внутренней баллистики наступил новый этап, основанный на прогрессе физико-математических наук.

---

[1] C. Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie, traduit par Villantroys. Paris, 1802, стр. 168.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

ОГЛАВЛЕНИЕ

А. П. Мандрыка
Баллистические исследования Леонарда Эйлера

Утверждено к печати
Институтом истории естествознания и техники
Академии наук СССР

Технический редактор *А. В. Смирнова*
Корректоры *Н. Г. Гилинская* и *К. С. Феноменов*

Сдано в набор 18 IX 1958 г. Подписано к печати 8/XII 1958 г. РИСО АН СССР № 14в—102В. Формат бумаги $60 \times 92^{1}/_{16}$. Бум. л. $5^{7}/_{8}$. Печ. л. $11^{3}/_{4} = 11^{3}/_{4}$ усл. печ. л. +1 вкл. Уч.-изд. л. $11^{1}/_{2}$+1вкл. (0.06). Изд. № 718. Тип. зак. № 809. М-02040.
Тираж 2500. *Цена 9р. 60 к.*

Ленинградское отделение Издательства Академии наук СССР (Ленинград, В-164, Менделеевская лин., д. 1)

1-я типография Издательства Академии наук СССР (Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12)

9р.60к.