ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

К 250-ЛЕТИЮ
СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ГЕРМАНСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК В БЕРЛИНЕ

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER UdSSR
DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN

SAMMELBAND
DER ZU EHREN DES 250. GEBURTSTAGES
LEONHARD EULERs
DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER UdSSR VORGELEGTEN ABHANDLUNGEN

UNTER VERANTWORTLICHER REDAKTION
VON
M. A. LAWRENTJEW,
A. P. JUSCHKEWITSCH,
A. T. GRIGORJAN

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER UdSSR
MOSKAU 1958

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

СБОРНИК СТАТЕЙ В ЧЕСТЬ 250-ЛЕТИЯ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА,
А. П. ЮШКЕВИЧА,
А. Т. ГРИГОРЬЯНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА 1958

223

ПРЕДИСЛОВИЕ

15 апреля 1957 г. исполнилось 250 лет со дня рождения Леонарда Эйлера — гениального ученого, который, как немногие другие, обогатил и распространил математические науки.

Эйлер прожил 31 год в Петербурге (1727—1741 гг. и 1766—1783 гг.) и Петербургской академии наук посвятил большую часть своего бессмертного творчества. В Берлине Эйлер провел 25 лет (с 1741 по 1766 г.), заполненных плодотворнейшей деятельностью, и Берлинская академия наук обязана ему многочисленными ценнейшими мемуарами, служащими ее непреходящим украшением. В годы жизни в Берлине Эйлер оставался активным сотрудником Петербургской академии наук. Возвратившись в Россию, он поддерживал тесный контакт с Берлинской академией наук. Таким образом, Эйлер сыграл крупную роль в научных связях между Россией и Германией и ныне его имя олицетворяет дружеское сотрудничество советских и немецких ученых.

Академия наук Союза Советских Социалистических Республик и Германская академия наук в Берлине сочли своим особым долгом почтить память великого мыслителя, созвав для этого две торжественные сессии (21—23 марта 1957 г. в Берлине и 15—18 апреля 1957 г. в Ленинграде), а также приступив к совместному изданию юбилейного сборника в двух томах, из которых один издается Академией наук СССР, а другой — Германской академией наук в Берлине.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материалы сборника углубляют и дополняют наши сведения о жизни и деятельности Эйлера, характеризуют его воздействие на мировую науку вплоть до наших дней. В сборнике помещены также статьи о современных актуальных научных проблемах. Публикации представляют собой либо текст докладов на юбилейных сессиях, либо статьи, специально написанные для сборника. Каждая публикация сопровождается резюме на немецком или, соответственно, на русском языке.

Приглашение внести свой вклад в чествование памяти Эйлера приняли не только члены и сотрудники Академии наук СССР и Германской академии наук в Берлине, но и советские и немецкие ученые, не связанные непосредственно с этими Академиями, а также ученые других стран. Мы выражаем здесь благодарность всем авторам, принявшим участие в настоящем юбилейном сборнике.

Председатель
Эйлеровского юбилейного
комитета
Академии наук СССР
М. А. Лаврентьев

Председатель
Эйлеровской комиссии
Германской академии наук
в Берлине
К. Шредер

Москва и Берлин, декабрь 1957

М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ РЕЧЬ НА ЮБИЛЕЙНОЙ НАУЧНОЙ СЕССИИ, ПОСВЯЩЕННОЙ 250-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА[1]

15 апреля 1957 г. — дата 250-летия со дня рождения Леонарда Эйлера — знаменательное событие в истории мировой культуры и науки. Эйлер принадлежит к числу гениев, чье творчество стало достоянием всего человечества. Открытия Эйлера в математике, механике, физике и технике прочно вошли в современную науку и технику. До сих пор школьники всех стран изучают тригонометрию и логарифмы в том виде, какой им придал Эйлер. Студенты проходят начала высшей математики по руководствам, первым образцом которых явились классические монографии Эйлера. Формулы и методы Эйлера повседневно применяются учеными нашего времени; инженеры используют открытия Эйлера в сопротивлении материалов, теории механизмов, теории турбин, оптической технике и пр. Деятельность Эйлера продолжает и в наши дни служить ярким примером плодотворного синтеза теории и практики. Эйлер был прежде всего математиком, воспринимавшим и развивавшим математику как целое, но он знал, что почвой, на которой расцветает математика, является практическая деятельность. Новые общие и эффективные методы Эйлер создавал, по большей части отправляясь от трудных частных задач естествознания и техники. Тончайшие методы, разработанные им в теории чисел, находили неожиданные применения в технике.

Имя Леонарда Эйлера дорого всему передовому человечеству, которое чтит в нем одного из величайших геометров мира. Творчество Эйлера служило и служит прогрессу, объединению усилий всего человечества и прежде всего ученых в мирном созидании нового, лучшего мира.

Деятельность Эйлера имела прежде всего международное значение. Вместе с тем Эйлер внес большой вклад и в развитие национальных культур. Двадцатилетним юношей он покинул свой родной город Базель и

[1] Произнесена при открытии сессии Отделения физико-математических наук и Отделения технических наук АН СССР в Ленинграде 15 апреля 1957 г.

жил затем в Петербурге, в Берлине, а потом снова в Петербурге. В качестве члена Петербургской и Берлинской академий наук Эйлер содействовал развитию математических наук в обеих странах и распространению в них физико-математических знаний. В нашей стране роль Эйлера как пионера научных математических исследований и роль его учеников была особенно значительна и отнюдь не ограничивалась рамками XVIII в. Идеи Эйлера как математика получили блестящее развитие в Петербургской математической школе.

Тридцать один год научной работы Эйлера прошел в Петербурге, двадцать пять лет — в Берлине. Следует заметить, что и в годы жизни в Берлине, когда Эйлер так высоко поднял деятельность научного общества, основанного великим Лейбницем, его связь с Россией оставалась прочной. Он и в эти годы состоял почетным членом Петербургской академии и активно участвовал в разнообразных ее трудах. Возвратившись в Россию, Эйлер продолжал столь же интенсивно поддерживать научные отношения с Берлинской академией.

Таким образом, Эйлер сыграл большую роль в плодотворном сотрудничестве ученых России и Германии. Имя его и сейчас является символом дружбы немецких и советских ученых.

Открывая настоящую сессию, я рад приветствовать от имени Академии наук СССР представителей иностранных академий наук и научных обществ, прибывших сюда почтить вместе с нами память Леонарда Эйлера. Я приветствую также всех собравшихся советских ученых и учащуюся молодежь.

Мне хочется особенно приветствовать большую делегацию ученых Германии. Эйлер был одним из первых академиков Петербургской академии, он же был одним из первых академиков Берлинской академии. Германская академия наук провела сессию, посвященную великой дате, причем в этой сессии приняли участие наши ученые, весьма тепло принятые учеными Германии.

Я приветствую также представителей советских и партийных организаций славного города Ленинграда. Петербург — Ленинград явился первым городом русской науки, в нем на протяжении 200 с лишним лет была сосредоточена деятельность Академии, в нем жили и работали Леонард Эйлер и его великий собрат по Петербургской академии — Михаил Васильевич Ломоносов. Ленинград и ныне является крупнейшим центром научной мысли нашей страны во всех областях знания.

На этой сессии нам предстоит заслушать ряд докладов, в которых будет освещена многосторонняя деятельность Леонарда Эйлера. Разрешите сказать несколько слов о жизни и работе Эйлера в Петербургской академии.

Леонард Эйлер родился в 1707 г. в семье небогатого пастора Пауля Эйлера. Первые уроки по математике мальчик получил у отца, который в молодости занимался этой наукой под руководством Якова Бернулли. Тринадцати с половиной лет Леонард Эйлер поступил в Базельский университет и через четыре года, произнеся речь о натурфилософии Декарта и Ньютона, получил первую научную степень магистра. Отец желал, чтобы юноша занимался богословием, но Леонард Эйлер, следуя склонности и природным дарованиям, обратился к математике. В этих занятиях руководителем его был Иоганн Бернулли. Уже вскоре, в 1726—1727 гг., Эйлер выступил в печати с первыми своими исследованиями по дифференциальной геометрии и приложениям анализа к механике. Тогда же он принял участие в конкурсе Парижской академии наук на тему о наилучшем расположении мачт на корабле; сочинение его было опубликовано в 1728 г. Так с первых шагов своей научной деятельности Эйлер проявил интерес как к теоретическим проблемам математики, так и ее практическим приложениям.

Попытки молодого Эйлера найти применение своим силам в Швейцарии не увенчались успехом. Когда в 1727 г. в Базельском университете открылась вакансия по кафедре физики, Эйлер не был включен в число кандидатов, среди которых, по тамошнему обычаю, счастливца избирал жребий. Между тем в учрежденной в 1725 г. Петербургской академии наук имелась вакансия по физиологии. Друзья Эйлера, Николай и Даниил Бернулли, сыновья его наставника, уже работавшие тогда в Петербурге, помогли Эйлеру получить приглашение на эту должность. Эйлер стал штудировать анатомию и медицину, чтобы затем применить в физиологии математические методы. В начале апреля 1727 г. он навсегда покинул Базель и 24 мая приехал в Петербург.

Иоганн Бернулли в связи с отъездом молодых швейцарцев в Россию писал: «Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз презирают и обижают».

В молодой русской столице Эйлер нашел благоприятные условия для быстрого расцвета своих дарований. В Академии не стали настаивать на том, чтобы Эйлер занимался физиологией и предоставили ему полную возможность работать над теми проблемами, которые его особенно привлекали. Замечу, однако, что все же труд, затраченный Эйлером на изучение физиологии, не пропал даром. В Петербурге собралось тогда немало хороших ученых—математиков, механиков, физиков, астрономов. К ним принадлежали Даниил Бернулли, сподвижник Лейбница Яков Герман, разносторонне эрудированный Христиан Гольдбах и другие. Научное общение с коллегами, материальная обеспеченность, широкая возможность публикации работ в изданиях Академии наук создавали хорошую основу для деятельности Эйлера. За 14 лет жизни в Петербурге он подготовил к печати около 90 работ по различным вопросам анализа, геометрии, теории чисел и механики, напечатано было около 50. Среди последних была и двухтомная «Механика» (1736), где впервые аналитически изложена механика точки. Впрочем, Эйлер еще только набирал силы. Общее количество его сочинений, опубликованных при жизни или посмертно, приближается к 900. Из них около двадцати больших монографий, нередко в двух или трех томах. Сюда не входят многие сотни писем научного содержания, отзывы о научных трудах и технических изобретениях и пр.

Деятельность Эйлера в Петербургской академии наук не ограничивалась теоретическими исследованиями. Он активно помогал в подготовке кадров и издании учебной литературы, а также участвовал в решении большого числа актуальных практических проблем.

По специальному поручению Академии Эйлер написал выдающееся по педагогическим достоинствам «Руководство к арифметике» (1738). Наряду со знаменитой двухтомной «Алгеброй», составленной Эйлером во второй его приезд в Петербург, эта книга сыграла большую роль в создании позднейших русских учебников.

Эйлер подготовил к научным занятиям и педагогической деятельности ряд крупных русских деятелей, таких как будущие академики С. К. Котельников, С. Я. Румовский, М. Софронов, позднее — М. Е. Головин, приходившийся племянником Ломоносову по матери. Учеником Эйлера был и Николай Иванович Фус. Котельников, Румовский и Софронов подолгу жили в семье Эйлера и вместе со старшим его сыном Иоганном-Альбрехтом ежедневно занимались под его руководством.

Эйлер вообще оказывал широкую поддержку талантливым выходцам из народа, в частности великому Ломоносову и гениальному изобретателю Кулибину. Когда в 1747 г. влиятельный академический чиновник Шумахер направил Эйлеру для отзыва работы Ломоносова в надежде на то, что он их резко раскритикует, Эйлер разочаровал Шумахера. Эйлер в полной мере оценил дарование Ломоносова и глубину его идей. «Все сии сочинения,— гласил отзыв,— не токмо хороши, но и превосходны, ибо он (т. е. Ломоносов.— *М. Л.*) изъясняет физические и химические материи самые нужные и трудные, кои совсем неизвестны и невозможны были к истолкованию самым остроумным ученым людям, с таким основательством, что я совсем уверен о точности его доказательств. При сем случае я должен отдать справедливость господину Ломоносову, что он одарован самым счастливым остроумием для объяснения явлений физических и химических. Желать надобно, чтобы прочие Академии были в состоянии показать такие изобретения, которые показал господин Ломоносов.»

С Кулибиным Эйлеру пришлось работать в 70-е годы в связи с экспертизой проекта постоянного одноарочного деревянного моста через Неву, предложенного замечательным русским самоучкой. Проблема строительства мостов стояла в Петербурге весьма остро и Академия наук неоднократно обсуждала при участии Эйлера и его учеников различные проекты постоянных и наплавных мостов через Неву. Кулибин предложил метод проверки прочности моста на модели и формулу пересчета от модели к натуре. Методы моделирования были в то время делом новым, а правила Кулибина мало обоснованными. Эйлер дал не только обоснование эмпирического правила Кулибина, но и создал теорию, сохранившую значение до наших дней.

Большое государственное значение имела многолетняя деятельность Эйлера в области черчения карт. В 1735 г. по поручению правительства предстояло в связи с составлением новых карт провести большие расчетные работы, на исполнение которых в Академии предполагали затратить многие недели. Эйлер потратил некоторое время на разработку расчетного метода, но зато выполнил расчеты за три дня. Впоследствии о своей работе он писал: «Я уверен, что география российская через мои и г. профессора Гейнзиуса труды приведена в гораздо исправнейшее состояние, нежели география немецкой земли.»

Россия в начале XVIII в. стала морской державой и большую важность приобрели вопросы корабельного строительства и управления кораблями.

С конца 30-х гг. Эйлер по специальному заданию Академии наук приступил к работе над книгой, посвященной этим вопросам. Плодом этих трудов явилась изданная в Петербурге в 1749 г. двухтомная «Морская наука». Трактат Эйлера делится на две части. В первой излагается общая теория равновесия и остойчивости плавающих тел. Во второй части даются приложения теории к вопросам, связанным с конструкцией и нагрузкой кораблей. Позднее в 1773 г. Эйлер издал для учащихся морских школ более краткий и облегченный учебник на французском языке, вскоре вышедший в русском переводе и с примечаниями Головина. Это сочинение было издано также на английском и итальянском языках.

От названных трудов Эйлера отправлялись затем морские архитекторы XIX в. и нити от них протягиваются к классическим исследованиям по «морской науке» А. Н. Крылова.

Замечательным образцом сочетания теории и практики являются также работы Эйлера по оптике. В середине XVIII в. представлялось, что достигнут предел в увеличении силы преломляющих телескопов, которые обладали хроматической аберрацией. Ньютон считал этот недостаток принципиально неустранимым и отчасти под влиянием его авторитета оптики перешли к созданию все более мощных рефлекторов. Эйлер показал теоретически, что, соединяя стекло с другим веществом, например водой, можно устранить рассеяние цветов и произвел в этом направлении первые опыты. Под влиянием идей Эйлера англичанин Доллонд в конце 50-х г. XVIII в. начал строить ахроматические линзы из двух сортов стекла — кронгласа и флинтгласа — и конструирование рефракторов было выведено из тупика. Несколько позднее Эйлер в своей «Диоптрике» описал конструкцию различных видов ахроматических микроскопов, полный расчет которой выполнил под его руководством Фус, а Кулибин и другой мастер Петербургской академии Беляев тогда же приступили к изготовлению микроскопа по инструкции, составленной Эйлером и Фусом. Впрочем, средства оптической техники того времени не позволили, по-видимому, выполнить все требования, которые предъявляла к линзам эта инструкция.

Возвратимся к жизненному пути Эйлера. В начале 1734 г. он женился на дочери академического живописца Катерине Гзель. От этого брака родилось тринадцать детей, но выжило пять—три сына и две дочери. Старший сын Иоганн-Альбрехт занимался математическими науками и был впоследствии секретарем Петербургской академии, второй сын — Карл стал врачом, а третий — Кристоф служил в русской армии. Эйлер был замечательным семьянином и любил детей. Во второй приезд Эйлера в Петербург в семье его вместе с внуками было около 30 человек.

Эйлер обладал весьма широкими интересами и замечательной памятью. Фус писал о нем: «Он прочитал всех наилучших римских писателей, знал совершенно древнюю историю математики, деяния всех времен и народов имел в памяти, ни мало не запинаясь, в пример приводил маловажнейшие приключения. О врачебной науке, ботанике, химии большее имел сведение, нежели ожидать можно от человека, который не поставлял сих наук особливым упражнением.»

В 1741 г. при регентстве Анны Леопольдовны в Петербурге сложилась тревожная обстановка. В это самое время Эйлер получил предложение

Фридриха II переехать в Берлин, где король хотел значительно активизировать деятельность Берлинской академии. Эйлер принял это предложение. Летом 1741 г. он прибыл в Берлин и прожил там 25 лет. Однако, как я говорил, и в этот период жизни Эйлера сохранялась столь неразрывная связь его с Петербургской академией, что мы можем вслед за Фусом повторить: Эйлер никогда не переставал принадлежать Петербургской академии. Поистине поразительно, как Эйлер, не нарушая интересов обеих Академий, но объединяя их всей своей деятельностью, с неизменным успехом выполнял все принимавшиеся им обязательства. Почти половину своей научной продукции он публикует в то время в журналах Петербургской академии, печатает в Петербурге уже упомянутую «Морскую науку», по поручению нашей Академии издает в Берлине «Теорию движения луны» (1753 г.), «Дифференциальное исчисление» (1755) и редактирует математический отдел «Новых комментариев» нашей Академии. Он закупает для Академии различные машины и приборы, книги и журналы, ведет от ее имени переговоры с возможными кандидатами на вакантные должности, постоянно соблюдая при этом интересы Академии. Он рецензирует работы студентов Академического университета и начинающих русских ученых и т. д.

В годы берлинской жизни перед Эйлером неоднократно вставал вопрос о возвращении в Россию, где его очень ждали. Основной причиной была неприязнь к Эйлеру короля Фридриха, непримиримые расхождения их во многих философских вопросах, в самих вкусах и манерах. Антагонизм достиг максимума из-за разногласий в финансово-административных вопросах работы Берлинской академии. Эйлер решительно потребовал согласия на выезд, однако король, не желая лишиться первого геометра мира, некоторое время не давал согласия. Имея за собой поддержку русского правительства, Эйлер настоял на своем и 28 июля 1766 г. возвратился в Петербург.

Эйлер вторично прибыл в Россию почти шестидесяти лет. Вскоре после возвращения его постигло большое несчастье — почти абсолютная потеря зрения (правым глазом он не видел уже с 1738 г.). Несмотря на это, в научной деятельности Эйлера не произошло ни малейшего ослабления.

С помощью своих учеников-секретарей (старшего сына, академиков Л. Ю. Крафта, А. И. Лекселя, М. Е. Головина и особенно Н. И. Фуса) он за второй, 17-летний, петербургский период подготовил около 400 работ и среди них два тома «Алгебры» (1768—1769), три тома «Интегрального исчисления» (1768—1770), три тома «Диоптрики» (1769—1771), три тома «Писем к одной немецкой принцессе» (1768—1772), колоссальную

«Новую теорию движения Луны» (1772). В основном, разумеется, Эйлер реализовал в столь гигантском масштабе идеи, сложившиеся ранее, но ряд работ содержал новые идеи и методы, как, например, названная вторая теория Луны.

Эйлер продолжал вести работы и в других направлениях. В качестве старейшего академика он вел обширную официальную переписку, работал членом правления Петербургской академии, принимал участие в технических экспертизах, занимался с молодыми математиками.

Эйлер сохранял полную ясность ума и работоспособность до последнего дня жизни. В этот день, 18 сентября 1783 г., как сообщает Фус, «за столом беседовал он с академиком Лекселем о новой планете, открытой около того времени (речь шла об Уране), и о других предметах с обыкновенным проницанием. После обеда лег отдохнуть, потом, пьючи чай, шутил с одним из своих внуков, как вдруг поражен будучи ударом, произнес: «я умираю». Сии были последние его слова, а по прошествии нескольких часов кончил славное течение жизни, имея от роду 76 лет 5 месяцев и 3 дня.»

Своим гением Эйлер охватил все отрасли современных ему физико-математических наук — анализ и алгебру, аналитическую и дифференциальную геометрию, механику твердого тела, жидкостей и газов, оптику и учение об электричестве, астрономию, а также ряд отделов технических наук. Он заложил основы нескольких самостоятельных дисциплин — вариационного исчисления, теории дифференциальных уравнений и теории чисел.

В своих работах Эйлер нередко развивал идеи и методы, полное значение которых выяснилось лишь через сто и более лет после его смерти. Так, Эйлер первоначально вывел необходимое условие абсолютного экстремума функционала, рассматривая задачу как предельный случай задачи на экстремум функции многих переменных. У самого Эйлера созданный им прямой метод служил еще средством редукции к дифференциальному уравнению. В XX в. выяснились существенные неудобства такого сведения, и необходимость в более точных расчетах привела к выдвижению на первый план и широкому развитию восходящих к Эйлеру прямых методов, которые получили применение и в решении самих дифференциальных уравнений. Другим примером может служить эйлерова концепция и предложенные им методы обобщенного суммирования расходящихся рядов. Эйлер получил ряд ценных результатов с помощью расходящихся рядов, хотя и недостаточно строго с современной нам точки зрения. В частности, он вывел таким образом функциональное уравнение для введенной им же дзета-функции, уравнение, вновь найденное позднее Риманом. Эти идеи и методы Эйлера в уточненном виде вошли в состав современной теории суммирования расходящихся рядов.

Дело Эйлера в России было продолжено крупнейшими учеными — М. В. Остроградским, П. Л. Чебышевым и другими представителями Петербургской математической школы, а в наши дни — глубочайшими исследованиями академика И. М. Виноградова. Русские ученые не только высоко ценили творчество Эйлера, но видели в нем своего идейного предшественника в умении сочетать теорию и практику, в постоянном интересе к конкретным трудным задачам естествознания, техники и самой математики, которые приводят ученого к широким и общим математическим методам, в постоянном стремлении выражать решение проблемы в форме алгоритма, дающего ответ с заранее данной и притом любой степенью точности. И мы почитаем в Эйлере великого ученого, который мощно продвинул вперед развитие математики, как важнейшего средства исследования естествознания и техники и покорения природы человеком.

M. A. LAWRENTJEW

EINLEITENDE REDE AUF DER WISSENSCHAFTLICHEN JUBILÄUMSSITZUNG ZU EHREN DES 250. GEBURTSTAGES VON LEONHARD EULER

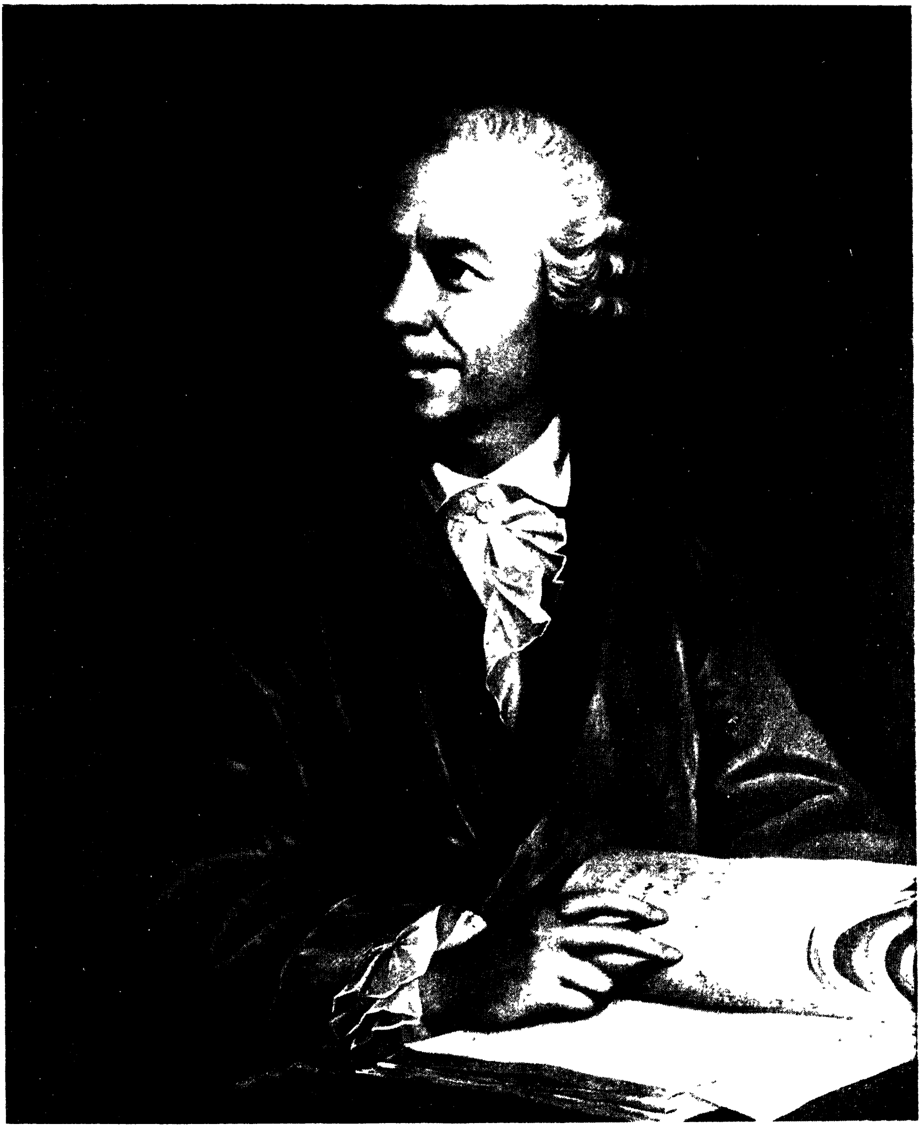
(Zusammenfassung)

Das Datum des 15. April 1707, als vor genau 250 Jahren Leonhard Euler geboren wurde, ist ein bedeutsames Ereignis in der Geschichte der Weltkultur und Wissenschaft. Euler gehört zu jenen Genies, deren Schaffen zum Gemeingut der gesamten Menschheit wurde. Eulers Ergebnisse in der Mathematik, Mechanik, Physik und Technik haben in der modernen Wissenschaft und Technik feste Wurzeln geschlagen. Die Tätigkeit Eulers im ganzen fährt auch in unseren Tagen fort, als ein leuchtendes Beispiel für die fruchtbringende Synthese von Theorie und Praxis zu dienen. Euler war vor allem ein Mathematiker, der die Mathematik als Ganzes auffaßte und entwickelte, aber er wußte, daß der Boden, auf dem die Mathematik aufblüht, die praktische Tätigkeit ist. Neue allgemeine und effektive mathematische Methoden schuf Euler größtenteils, indem er von schwierigen speziellen Aufgaben der Naturwissenschaft und Technik ausging.

Die Tätigkeit Eulers hatte vor allem eine internationale Bedeutung. Gleichzeitig leistete Euler einen großen Beitrag in der Entwicklung nationaler Kulturen. Nachdem er als zwanzigjähriger Jüngling seine Heimatstadt Basel verlassen hatte, lebte er 14 Jahre in Petersburg, danach 25 Jahre in Berlin und schließlich 17 Jahre wieder in Petersburg. Als Mitglied der Akademien von Petersburg und Berlin hat Euler sowohl die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften in beiden Ländern als auch die Verbreitung der physikalisch-mathematischen Kenntnisse in ihnen gewaltig gefördert. In unserem Lande war die Rolle Eulers, als eines Pioniers der mathematischen Forschung, und die seiner Schüler besonders bedeutend und beschränkte sich keinesfalls auf den Rahmen des 18. Jahrhunderts. Die Ideen Eulers als Mathematikers kamen in der von P. L. Tschebyschew gebildeten Petersburger mathematischen Schule zu glänzender Entwicklung und werden auf einer neuen Grundlage, einem höheren Niveau von den Gelehrten der Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken erfolgreich weiterentwickelt.

Гравюра В. Соколова с портрета работы И. Бруккера. 1737 г.

(Государственная публичная библиотека им. М. Е. Салтыкова-Щедрина, Ленинград)



Портрет работы Э. Хандмана. 1756 г.

(Университет в Базеле)

31 Jahre wissenschaftlicher Arbeit Eulers verliefen in Petersburg, 25 Jahre in Berlin. Es wäre zu bemerken, daß in den Jahren seines Berliner Lebens, als Euler die Tätigkeit der vom großen Leibniz gegründeten wissenschaftlichen Gesellschaft auf ein so hohes Niveau gehoben hatte, seine Verbindung mit Rußland fest blieb. In seiner Eigenschaft als Ehrenmitglied der Petersburger Akademie während dieser Jahre blieb er durch seine Teilnahme an ihren verschiedenartigen Unternehmen ihr überaus aktives ordentliches Mitglied. Nach seiner Rückkehr nach Rußland hielt Euler seine wissenschaftlichen Verbindungen mit der Berliner Akademie weiter aufrecht.

Euler hat demnach in der fruchtbaren Zusammenarbeit der Gelehrten Rußlands und Deutschlands eine hervorragende Rolle gespielt. Sein Name stellt auch jetzt ein Symbol der Freundschaft der deutschen und der sowjetischen Gelehrten dar.

Nachdem die dem 250. Geburtstag Leonhard Eulers gewidmete wissenschaftliche Jubiläumssitzung der Abteilungen für physikalisch-mathematische und für technische Wissenschaften im Auftrag des Präsidiums der Akademie der Wissenschaften der Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken eröffnet worden war, begrüßte M. A. Lawrentjew alle Teilnehmer der Jubiläumsfestlichkeit. Eine besondere Begrüßung M. A. Lawrentjews galt den zur Tagung eingetroffenen ausländischen Delegierten, sowie den Vertretern der Partei- und der öffentlichen Organisationen der ruhmreichen Stadt Leningrad. Leningrad wurde zur ersten Stadt der russischen Wissenschaft, in ihm konzentrierte sich im Verlauf von über 200 Jahren die Tätigkeit unserer Akademie, in ihm lebten und wirkten Leonhard Euler und sein Kollege von der Petersburger Akademie der Wissenschaften Michail Wassiljewitsch Lomonossow. Leningrad ist heutzutage ein der bedeutendsten Zentren des sowjetischen wissenschaftlichen Denkens auf allen Wissensgebieten.

Ferner gab M. A. Lawrentjew eine kurze Beschreibung vom Lebensweg Eulers, charakterisierte die Hauptrichtungen seines Schaffens und speziell seine Arbeit an der Petersburger Akademie der Wissenschaften. Er betonte, daß die Tätigkeit Eulers an der Petersburger Akademie der Wissenschaften sich nicht auf theoretische Forschungen beschränkte. Rußland ist Euler für die Hilfe bei der Vorbereitung der Kader und der Unterrichtsliteratur und für seine aktive Teilnahme an der Lösung einer großen Zahl von aktuellen praktischen Problemen verpflichtet. So hat z. B. Euler eine Reihe russischer Gelehrter — künftiger Akademiemitglieder — zu wissenschaftlichen Arbeiten und pädagogischer Tätigkeit vorbereitet: Kotelnikow, Rumowski, Sofronow, später Golowin u. a. Euler pflegte aus dem Volke stammende talentierte Menschen weitgehend zu unterstützen, im besondern den großen Lomonossow und den talentierten Erfinder Kulibin, mit dem er in den 70-er Jahren anläßlich der Begutachtung des Kulibinschen Entwurfs einer ständigen freitragenden Holzbrücke über die Newa zusammengeführt wurde. Kulibin hatte eine Methode für die Prüfung der Brückenstabilität am Modell und eine Formel zur Umrechnung vom Modell auf die Natur vorgeschlagen. Die Methoden der Analogieprozesse waren zu der Zeit etwas Neues und die Regeln Kulibins wenig begründet. Euler lieferte nicht nur die Begründung der empirischen Regel Kulibins, sondern schuf auch eine Theorie, die ihre Bedeutung bis auf unsere Tage erhalten hat.

Nach einer Kennzeichnung der großen Bedeutung von Eulers Arbeiten auf dem Gebiet des Kartenzeichnens und seiner klassischen Arbeiten zur Schiffstheorie für den Staat sowie des praktischen Wertes seiner Werke über die Optik fuhr M. A. Lawrentjew fort:

Euler erfaßte durch sein Genie alle Zweige seiner zeitgenössischen physikalisch-mathematischen Wissenschaften — Analysis und Algebra, analytische Geometrie und Differentialgeometrie, Mechanik der festen Körper, Flüssigkeiten und Gase, Optik und Elektrizitätslehre, Astronomie sowie eine ganze Reihe von Gebieten der technischen Wissenschaften. Er legte das Fundament zu mehreren selbständigen Disziplinen — Variationsrechnung, Theorie der Differentialgleichungen und Zahlentheorie. In seinen Arbeiten entwickelte er des öfteren Ideen und Methoden, deren volle Bedeutung erst 100 und mehr Jahre nach seinem Tode zutage kam. So hat z. B. Euler ursprünglich die notwendige Bedingung für das absolute Extremum eines Funktionals abgeleitet, indem er das Problem als Grenzfall der Aufgabe über das Extremum einer Funktion mehrerer Veränderlicher betrachtete. Bei Euler selbst diente die von ihm geschaffene direkte Methode noch als Mittel der Reduktion auf eine Differentialgleichung. Im 20. Jh. zeigten sich wesentliche Unbequemlichkeiten dieser Reduktion, und die Notwendigkeit genauerer Berechnungen führte zur Förderung und breiten Entwicklung der auf Euler zurückgehenden direkten Methoden, die auch in der Lösung der Differentialgleichungen selbst zur Anwendung kamen. Als ein anderes Beispiel können Eulers Auffassung und die von ihm vorgeschlagenen Methoden der verallgemeinerten Summation der divergenten Reihen dienen. Euler erhielt eine Reihe wertvoller Ergebnisse mit Hilfe der divergenten Reihen, wenn auch auf eine vom modernen Standpunkt unzureichend begründete Art. Im besonderen leitete er auf diese Weise eine Funktionalgleichung für die von ihm selbst aufgestellte Zeta-Funktion ab, eine Gleichung, die später von Riemann wiedergefunden wurde. Diese Ideen und Methoden Eulers sind in präzisierter Form in den Bestand der modernen Theorie der Summierung divergenter Reihen eingegangen.

Die Arbeiten Eulers wurden in Rußland von den großen Wissenschaftlern M. W. Ostrogradski, P. L. Tschebyschew und anderen Mitgliedern der Petersburger mathematischen Schule und heute durch tiefgehenden Forschungen des Akademiemitglieds I. M. Winogradow fortgesetzt. Die russischen Gelehrten schätzten nicht nur Eulers schöpferische Arbeit hoch, sondern erblickten in ihm ihren geistigen Vorgänger in der Fähigkeit, Theorie und Praxis zu vereinbaren, im ständigen Interesse an konkreten schwierigen Aufgaben der Naturkunde, der Technik und der Mathematik selbst, die den Gelehrten zu weiten und allgemeinen mathematischen Methoden führen, in der steten Bestrebung, die Lösung eines Problems in der Gestalt eines Algorithmus zu erhalten, der die Antwort mit einem vorgegebenen und dabei beliebigen Genauigkeitsgrad liefert. Und wir verehren in Euler einen großen Gelehrten, der die Entwicklung der Mathematik als des wichtigsten Mittels der naturkundlichen und technischen Forschung und der Beherrschung der Natur durch den Menschen machtvoll weiterentwickelt hat.

K. SCHRÖDER

BEMERKUNGEN ZU LEONHARD EULERS ARBEITEN AUF DEM GEBIET DER ANWENDUNGEN

(Seine Wirksamkeit unter besonderer Berücksichtigung der Berliner Jahre)[1]

Die Akademie der Wissenschaften der UdSSR und die Deutsche Akademie der Wissenschaften haben den 250. Geburtstag Leonhard Eulers am 15. April 1957 zum Anlaß genommen, gemeinsam eines ihrer hervorragendsten Mitglieder zu gedenken.

Der in Basel in der Schweiz geborene Mathematiker hat 25 Jahre (1741—1766) in Berlin und insgesamt 31 Jahre in Petersburg gewirkt. Man kann ihn als den bedeutendsten Mathematiker des 18. Jahrhunderts und überhaupt als einen der größten Mathematiker, die je gelebt haben, bezeichnen. Schon rein umfangsmäßig ist sein wissenschaftliches Werk kaum begreiflich. Man hat abgeschätzt, daß allein das Abschreiben der Eulerschen Werke 50 Jahre mit einer täglich 8-stündigen Arbeitszeit erfordern würde. Die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft hat ab 1910 begonnen, seine gesammelten Werke herauszugeben. Vorgesehen sind 75 Quartbände von durchschnittlich 40 Bogen. Bisher ist ungefähr die Hälfte herausgegeben. Sein Enkel Nikolaus Fuss, der auf ihn vor der Petersburger Akademie am 23.10.1783 eine sehr bekanntgewordene Gedächtnisrede hielt, sagte hinsichtlich seiner erstaunlichen wissenschaftlichen Fruchtbarkeit, daß für ihn die vielen sehr wertvollen und komplizierten Arbeiten nur die Mühe kosteten, sie aufzuschreiben. Nichts aber wäre mehr ungerecht, als Euler einen Vielschreiber zu nennen. Alle seine Arbeiten sind gediegen und gründlich durchdacht. Für viele Teilgebiete der Mathematik und der mathematischen Physik hat er erste Fundamente gelegt. Er liebte eine breite Darstellungsweise, die uns, in vollem Gegensatz zu Gauß, einen freien Blick in die Genesis seiner Entwicklungen zu tun gestattet. Mancher von seinen Nachfolgern, wie Lagrange, Laplace, Gauß und Bessel, haben mathematische Zusammenhänge,

[1] Vortrag, gehalten in Leningrad am 16. April 1957 auf der wissenschaftlichen Jubiläumssitzung der physikalisch-mathematischen und der technischen Abteilung der Akademie der Wissenschaften der UdSSR.

die er als erster aufdeckte, noch tiefer durchforscht, sie verallgemeinert oder elegantere Beweismethoden gefunden. Abgesehen aber von einigen physikalischen Theorien ist nichts veraltet. Jacobi, der durch seine Untersuchungen über Differentialgleichungen immer wieder zur Lektüre der Eulerschen Schriften geführt wird, schreibt einmal an Fuss [2]:

«Ich habe in der letzten Zeit wieder ein anhaltendes Studium aus Eulers Integralrechnung gemacht und mich aufs Neue gewundert, wie frisch sich dieses über 70-jährige Buch erhalten hat, während der gleichzeitige D'Alembert ganz unmöglich zu lesen ist. Der Grund scheint mir in seinen Beispielen zu liegen. Denn diese Beispiele spielen nicht so bloß beiher und erläutern; sie sind der ganze Inhalt, den die allgemeine Proposition zu der Zeit hat.»

Euler konnte sich auf dem jungen Gebiet der Analysis und ihrer Anwendungen, nachdem einmal der Zugang gefunden war, mit ganzer Entdeckerfreude daran machen, überall größte Schätze zu heben. Das wissenschaftliche Gesamtwerk Leonhard Eulers wird auf der Feier der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften von hervorragenden Fachvertretern gewürdigt werden. Lassen Sie mich bei dieser festlichen Gelegenheit auf die Teile des Eulerschen Gesamtwerkes mit einigen allgemeinen Betrachtungen eingehen, denen ich mich fachlich besonders verbunden fühle. Ich meine die Leistungen Eulers auf dem Gebiete der mathematischen Physik und allgemeiner der Anwendungen der Mathematik in der Praxis überhaupt. Dabei möchte ich besonders auf seine Wirksamkeit in diesen Gebieten während seiner Berliner Jahre eingehen. Eulers Arbeiten auf den Gebieten der mathematischen Physik, insbesonders der Mechanik, der Optik, der Elektrizitätslehre, des Magnetismus und der Astronomie kommen an Zahl fast denen aus der reinen Mathematik gleich.

Euler gehört zusammen mit den Bernoullis zu den Mathematikern, die als erste die Infinitesimalrechnung, die große Entdeckung von Leibniz und Newton, in vollem Umfange zur Naturbeschreibung herangezogen haben. Damit sind sie die eigentlichen Begründer der mathematischen Physik geworden. Der hauptsächlich von Euler geschaffene Begriff der Funktion erweist sich als das entscheidende Hilfsmittel für die mathematische Analyse von Naturerscheinungen. Verschaffen wir uns in aller Kürze einen Überblick über die Hauptleistungen Eulers auf dem Gebiet der Anwendungen.

Bei den Grundlagen der Mechanik unterschied Euler im Gegensatz zu Newton klar zwischen dem Kraft- und Impulsbegriff. Der von ihm ebenso

---

[2] 14. April 1842, zitiert aus L. Koenigsberger [1, S. 284].

klar definierte Begriff der Masse wurde später von Lagrange übernommen. Seine Arbeiten zeigen, daß er implizit schon mit Vektoren arbeitete. Die Benutzung von beweglichen Koordinatensystemen war ihm geläufig. Auch von dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten machte er Gebrauch. Es ist auch zu sehen, daß er schon beide Formen der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen benutzte.

Sehr bekannt geworden ist sein Beitrag zum Prinzip der kleinsten Wirkung. Auf dieses Prinzip machte zuerst Maupertuis, der eine Zeit lang Präsident der Berliner Akademie war, aufmerksam. Es ist anzunehmen, daß es vor Maupertuis auch Leibniz schon besessen hat. Maupertuis hatte aber noch keine klare Vorstellung. Durch ihn wurde Euler angeregt, es schärfer zu formulieren. Von Euler stammt auch die Form, daß

$$\int_a vds$$

ein Extremum haben soll. In einem Prioritätsstreit, der von Koenig, Malebranche und Wolff gegen Maupertuis entfacht wurde und in dem von Koenig auf einen nicht mehr im Original vorhandenen Brief von Leibniz hingewiesen wurde, trat Euler für Maupertuis in einem Maße ein, das zeigt, wie es auch aus neueren Quellen hervorgeht, daß Euler persönlich an dem Ausgang dieses Streites, der von den ihm verhaßten Wolffianern begonnen wurde, interessiert war. Nach der Eulerschen Auffassung kann man die Naturerscheinungen nicht nur aus den wirkenden Ursachen, sondern auch aus dem Endzweck begreifen. Bei dem letzteren Standpunkt kommt man zu der Ansicht, daß die Naturerscheinungen aus Extremalprinzipien müßten abgeleitet werden können. Euler meint, daß die Art des Extremums sich kaum durch metaphysische Betrachtungen ermitteln lasse. Die zu behandelnde Aufgabe muß erst zeigen, welche Größe jeweils ein Extremum annehmen soll. Bei dieser vorsichtigen Handhabung geht Euler, obwohl auch er metaphysische Gründe anführt, viel wissenschaftlicher vor als Maupertuis. Bei der Anwendung dieses Prinzips hatte Euler Gelegenheit, die von ihm nach den ersten Versuchen von Jakob Bernoulli aufgestellte Variationsrechnung in der Mechanik anzuwenden.

Euler hat viele Teilgebiete der Mechanik eingehend untersucht. Wir denken an seine Beiträge zur Integration der Differentialgleichung des ebenen, des konischen und des physischen Pendels. Er beschäftigte sich mit der Nutation der Erdachse und der Praezession der Tag- und Nachtgleichen. Berühmt sind seine Untersuchungen zur Kreiseltheorie. Viele Teile der modernen Kreiseltheorie stammen von ihm. Erinnert sei in diesem Zusammenhang an die von ihm eingeführten unsymmetrischen Winkel, die sogenannten Eulerschen Winkel, die die Drehung um einen bestimmten Punkt festzulegen gestatten. Aus der Elastizitätstheorie heben wir seine Beiträge zum Stoßproblem und seine Untersuchung der Knicklast bei einem in der Längsrichtung gedrückten Stab hervor [Berlin, Nouv. Mém., 13 (1759)]. Die übrigen Eulerschen Arbeiten zur Elastizitätstheorie, nämlich seine Untersuchungen über Saiten und Platten, gehören mehr der Akustik an. Bei seiner Diskussion mit Daniel Bernoulli über die allgemeine Form der Lösung der eindimensionalen Schwingungsgleichung gab Euler die Lösung in Form einer fortschreitenden Welle an, während Bernoulli auf eine trigonometrische Form der Lösung, wie sie von Taylor angegeben wurde, verwies. Euler erkannte, daß die letztere Form in seiner enthalten war. Es gelang ihm, die Koeffizienten der Glieder einer trigonometrischen Reihe zu bestimmen. Erst später traten diese Reihen voll bei Problemen der Wärmeleitung durch Arbeiten von Fourier (1822) in Erscheinung.

Seine Untersuchungen über Schwingungen von Ringen, Glocken, Pauken und den sogenannten offenen Pfeifen wurden erst durch spätere Bearbeiter zum Abschluß gebracht. Interessant ist, daß Euler für die Musikwissenschaft eine physikalisch-mathematische Theorie der Konsonanz und Dissonanz entwickelt hat. Wenn auch diese Theorie, die darauf basierte, daß unser Wohlgefühl beim Hören von Tönen umso geringer wird, je komplizierter das Verhältnis der Schwingungszahlen ist, sich nicht durchsetzen konnte (man vergleiche hierzu die spätere Untersuchung von Helmholtz, der die Ursache der Dissonanz in dem Entstehen von Schwebungen sah), so zeigt dieses Beispiel doch, an welches Problem sich Euler im Vollgefühl der Wirksamkeit der neuen Analysis heranwagte.

In der Hydromechanik hat uns Euler die berühmten Grundgleichungen für die nicht reibenden Medien geschenkt, die später von Navier und Stokes auf den Fall der zähen Medien ausgedehnt wurden und die die Grundlage der gesamten modernen Hydromechanik bilden. Auch die heutige Art der Herleitung dieser Gleichungen stammt von Euler [Berlin, Hist. de l'Acad., 1755, Petersb., Novi Comm. 14 (1770)]. Aus seinen hydromechanischen Untersuchungen ist zu ersehen, daß er schon vor Lagrange den Begriff des Geschwindigkeitspotentials und damit den Begriff des Potentials überhaupt, besaß. Euler ist der erste, der über die Wirkungsweise des Wassers in einer Turbine Berechnungen anstellte. Sein Berechnungsverfahren ist bis heute für den praktischen Maschinenbau von Bedeutung. Es beruht auf den Ergebnissen der Stromfadentheorie. Die von Euler untersuchte Turbine war das Segnersche Reaktionsrad. Sie besteht aus Röhren, die in einer um eine Achse drehbaren Trommel befestigt sind. Über der Trommel befindet sich ein Behälter, aus dem den Röhren Wasser zugeführt wird. Euler war also schon der sogenannte Leitapparat bekannt.

Johann Andreas von Segner war Arzt und Professor für Mathematik und Physik in Göttingen (1735—1754) und Halle (1754—1777), wo er auch starb. Seine deutschen Vorfahren kamen im 15. Jahrhundert nach Ungarn. Er wurde 1704 in Pressburg geboren[3]. Mit seiner Erfindung beginnt die Geschichte des Turbinenbaues. Euler erstattete der Berliner Akademie ein ausführliches Gutachten über das Segnersche Laufrad (abgedruckt in «Recherches sur l'effet d'une machine hydraulique proposée par Mr. Segner, Professeur à Göttingue» [Hist. de l'Acad. (1750)] und «Application de la machine hydraulique de Mr. Segner à toutes sortes d'ouvrages et de ses avantages sur les autres machines hydrauliques dont on se sert ordinairement» [Hist. de l'Acad. (1751)]. Neben einer Theorie des Rades, der Berechnung des Wirkungsgrades werden hier bereits eine Reihe von konstruktiven Verbesserungen angegeben (Umgebung des Apparates mit einem kreisförmigen Gehäuse zur Verminderung des Luftwiderstandes, glockenförmige Ausbildung der Trommel zur Gewichts- und damit Reibungsverminderung). In der folgenden Arbeit «Théorie plus complète des machines, qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau» (gelesen 1753) wird die Theorie viel weiter ausgedehnt und die konstruktiven Einzelheiten werden so verbessert, daß man bereits von einer Eulerschen Turbine sprechen kann. Es wird eine allgemeine Theorie für die Bewegung einer idealen, inkompressiblen Flüssigkeit in engen doppelt gekrümmten Röhren, die sich um eine feste Achse drehen, entwickelt. Dabei arbeitete Euler schon implizit mit dem Begriff der Coriolisbeschleunigung, der in voller Allgemeinheit erst 1823 durch Coriolis angegeben wurde. Die Eulersche Theorie enthält die noch heute üblichen Formeln für die Reaktionskräfte und -Momente. Die Flüssigkeitsreibung wird allerdings vernachlässigt. Rein technisch erfindet Euler den schon erwähnten Leitapparat. Durch festliegende zu einem vollständigen Ring vereinigte Leitschaufeln wird das Wasser durch einen stoßfreien Übergang dem Laufrad zugeführt. Schließlich gibt Euler in Hinsicht auf das praktische Ziel eine Tabelle und rechnet fünf Beispiele vollständig durch. Man kann sagen, daß diese hervorragenden Arbeiten Euler im heutigen Sinne als einen wissenschaftlich arbeitenden Ingenieur kennzeichnen. Der erwähnte Segner hat auch noch durch seine Entdeckung der Hauptträgheitsachsen eines starren Körpers auf

[3] Ich verdanke diese biographischen Daten Herrn A. Rényi [2].

Eulers Arbeiten fördernd eingewirkt (Euler: Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum).

Obwohl es heute nicht möglich ist, bei einer modernen Francis-Turbine die Form des Laufrades mit den Eulerschen Mitteln zu bestimmen, so darf doch die Bedeutung der Eulerschen Untersuchung auf diesem Gebiete nicht unterschätzt werden. Die ursprünglich von Bernoulli stammende Stromfadentheorie wurde später in der Turbinentheorie durch Prášil, Lorenz, Kaplan und von Mises durch eine auch auf Euler zurückgehende analytische Behandlungsmethode ersetzt.

Genau so wie die Eulersche Turbinentheorie ist eine Leistung auf einem ganz anderen Gebiet für die heutige Technik von fundamentaler Bedeutung. Ich meine die Erfindung des Achromaten in der konstruierenden Optik. Euler knüpft an Newtonsche Untersuchungen zur Aufstellung einer Dispersionsformel an. Euler war der, allerdings irrigen Ansicht, daß in unserem Auge keine farbigen Randstrahlen vorkommen und bemühte sich nun, eine Dispersionsformel aufzustellen, die gestattete, eine Kombination von zwei Linsen derart herzustellen, daß keine farbigen Ränder auftreten. Die Newtonsche Formel lehnte er ab und stellte eine eigene auf, die sich allerdings, wie sich später herausstellte, nicht halten ließ. Die Eulerschen Untersuchungen veranlaßten jedoch den englischen Optiker Dollond (1706—1761), der die Eulersche Formel ablehnte, nachzuprüfen, ob eine Kombination einer Kronglas- und einer Flintglaslinse eine achromatische Linsenkombination ergäbe. Durch diesen Versuch wurde der erste Achromat hergestellt, dessen Erfindung also Euler unmittelbar angeregt hat. Euler war über diesen Erfolg so glücklich, daß er Friedrich II. einen von ihm berechneten Feldstecher als Geschenk überreichte. Er berechnete in der Folgezeit nach diesem großen Erfolg zahlreiche Linsenkombinationen für Fernröhre und Mikroskope, bei denen sich bis zu einer Öffnung von 30° die Achromasie erreichen ließ. Die von ihm berechneten Fernröhre, die bis zu 8 Linsen enthielten, übertrafen bei weitem die früher üblichen. Sie zeichneten sich auch durch verhältnismäßig geringe Länge aus. Euler wies auch auf die Bedeutung eines zusammengesetzten Okulars hin, mit dem man in gewissem Maße Aplanatismus und Achromatismus erreichen konnte. Die Eulerschen Bemühungen auf diesem Gebiet fanden erst durch die dioptrischen Untersuchungen von Gauß, in denen die Hauptpunkte und Hauptebenen des Systems eingeführt wurden, einen vorläufigen Abschluß. Damit wurde die Behandlung zusammengesetzter Systeme wesentlich erleichtert.

In der Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung erzielte Euler dadurch Erfolge, daß er für die Erscheinung eine Differentialgleichung auf-stellte, die er in einigen speziellen Fällen integrieren konnte. In der Optik kannte er bereits den Unterschied von Lichtstärke und Beleuchtungsstärke. Seine weiteren Bemühungen in der Optik, bei denen er das Licht als longitudinale Ätherschwingung ansah und bei denen er durch weitere Zusatzannahmen, z. B. die Farben dünner Blättchen, erklären wollte, können nicht als erfolgreich bezeichnet werden. Hier hat er sich oft zu sehr durch einen Vergleich der Lichtwellen mit den Schallwellen leiten lassen. Da er mit longitudinalen Wellen arbeitete, konnte er für die Interferenzerscheinungen kein rechtes Verständnis aufbringen. Die Vorstellung eines unendlich flüssigen, den Raum unter einem sehr großen Druck erfüllenden Äthers, wurde von Euler auch herangezogen, um Erscheinungen der Gravitation, der Elektrizität und des Magnetismus zu erklären. Die Gravitationskraft wird auf einen Ätherdruck zurückgeführt. Euler kommt in Verfolgung dieser Vorstellung zu der merkwürdigen Aussage, daß die Massendichte eine universelle Konstante sei. A. Speiser hat in einer interessanten Arbeit in Crelles Journal 157 (1927) darauf hingewiesen, daß begriffliche Schwierigkeiten, die im Zuge dieser Äthertheorie bei Euler auftreten, für Riemann der Anlaß zu naturphilosophischen Betrachtungen waren, die schließlich zu seiner bekannten Habilitationsschrift führten.

Eulers Arbeiten aus dem Gebiet der Anwendungen der Mathematik bezogen sich aber nicht nur auf die allgemeinen theoretischen Grundlagen, sondern sie griffen direkt in das praktische Leben ein. Schon als Student interessierte sich Euler, der ursprünglich Theologe werden sollte, für die Mathematik und ihre Anwendungen. Mit einem Vortrag über die Philosophie Newtons im Vergleich mit der Descartes wurde er Maître ès arts. Seine Dissertation befaßte sich mit der Natur und Fortpflanzung des Schalls. Gleichzeitig beantwortete er 1727 eine Frage der Pariser Akademie über die Bemastung der Schiffe. Bei der Preisverteilung wurde er ehrenvoll erwähnt. Seine Bemühungen, in Basel einen Lehrstuhl für Physik zu erhalten, waren ergebnislos. Auf diesen Lehrstuhl reflektierten 1727 neben Euler noch sieben weitere Bewerber, außer vier anderen Kandidaten, die bereits vorher ihre Bewerbung zurückgezogen hatten. Drei Gruppen, bestehend aus Vertretern der Professorenschaft und der höheren Universitätsadministration wählten aus den Genannten acht Konkurrenten je einen Kandidaten für eine Auslosung aus. Die zweite Gruppe, die u. a. über Eulers Bewerbung zu entscheiden hatte, wählte Benedikt Staehelin aus, während Leonhard Euler nur eine Stimme erhielt und daher für die eigentliche Auslosung nicht mehr in Frage kam. Diesen Hinweis verdanke ich Herrn G. K. Mikhailow, der sich auf A. Burckhardt, «Über die Wahlart der

Baseler Professoren, besonders im 18. Jahrhundert»; Baseler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde, Bd. 15, 1914—1915, sowie auf einen Hinweis von Herrn O. Spiess, Basel, bezieht.

Auf Betreiben seiner Freunde Nikolaus und Daniel Bernoulli kam er 1727 als Adjunkt der Mathematik nach Petersburg. Im ersten Zeitabschnitt seiner Petersburger Jahre beschäftigte sich Euler intensiv mit Fragen der Theorie des Schiffes. 1735 veröffentlichte er eine Schrift über die Bewegung der schwimmenden Körper und gab ein Maß für ihre Stabilität an. In seinem 1749 veröffentlichten großen Werk «Scientia navalis» berechnete er den Schiffswiderstand. Kurz vorher (1746) war von dem Astronomen Bouguer, der zur Gradmessung nach Peru gesandt wurde, ein «Traité du navire» erschienen. Beide Bücher stellen die ersten und grundlegenden Werke über die Theorie des Schiffes dar. Euler war bereits die moderne Unterscheidung von Form- und Reibungswiderstand geläufig. Beide Widerstandsarten setzte er proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit an. Diese Annahme hat sich allerdings in der Folgezeit nicht halten können. Besonders seit Froude (1872) hat man bessere Grundlagen für den Schiffswiderstand.

Während seiner Berliner Jahre kam Euler durch viele Aufträge der Staatsführung unmittelbar mit der Praxis in Verbindung.

Auf eine Anfrage Friedrich II. nach einer guten Darstellung der Ballistik verwies Euler auf das Werk des Engländers Robins. Euler gab eine Übersetzung mit sehr wertvollen Anmerkungen heraus [3], die darauf wieder ins Englische und Französische übersetzt wurde.

In Berlin hat man sich oft und gern seines Rates bedient. In dem mir vom Institut der Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik der Akademie der Wissenschaften der UdSSR liebenswürdigerweise zugänglich gemachten Archivmaterial findet sich eine Fülle von Beweisen hierfür. Von dieser rein praktischen Seite der Mathematik her schätzte Friedrich II. hauptsächlich Euler, während er zur eigentlichen mathematischen Wissenschaft kein rechtes Verhältnis fand. 1749 wurde Euler mit der Revision des Nivellements des Finow-Kanals zwischen der Havel und der Oder beauftragt. Man übertrug ihm ein Hauptgutachten über die Salinen bei Schönebeck. Über eine einzuführende Staatslotterie und die Reform der Witwenkasse gab er wesentliche Gutachten ab. Alle diese Arbeiten hat Euler mit größter Gewissenhaftigkeit durchgeführt. Der König legt in seinen Briefen an Euler großen Wert darauf, daß dieser eingereichte Erfindungen auf ihre allgemeine Verwendbarkeit und ihren Nutzen untersuche. Einige neu gefundene Aktenstücke in den Archiven unserer Akademie, die Herr Biermann in unserer gemeinsamen Euler-Festschrift herausbringen wird, zeigen, mit welcher Sorgfalt er sich z. B. um den Zustand des damaligen Observatoriums kümmerte, das auf dem Gelände der heutigen Universitätsbibliothek stand. In derselben Arbeit wird ein Eulersches Gutachten über die Erfindung eines Schlossermeisters wiedergegeben, das sich auf Rollenlager bezieht. Euler schließt mit dem in die Zukunft weisenden Satz:

«Überhaupt ist hier zu bemerken, daß alle Verbesserungen, welche bei den meisten Maschinen noch zu erwarten stehen, bloß allein in der Verminderung der Friktion zu suchen sind. Dahero alle Vorschläge, welche dahin abzielen, nicht nur alle Aufmerksamkeit verdienen, sondern es wäre auch zu wünschen, daß darüber würkliche Proben im Großen angestellt würden, weil es alsdann umso viel leichter fallen würde, die Fehler, so noch mit denselben verknüpft sein möchten, zu verbessern, als welches das einzige und sicherste Mittel zu sein scheinet, die Maschinen zum höchsten Grad der Vollkommenheit zu bringen.»

Euler hat zahlreichen Gelehrten, Technikern und sonstigen Erfindern bei der Gestaltung und Beurteilung ihrer Erfindungen geholfen. G. W. Pötzinger drückte sicher die Überzeugung vieler aus, die sich bei Leonhard Euler Rat und Hilfe holten, als er im Oktober 1749 Euler eine Frage vorlegte, da dieser «in wenigen Minuten ausmachen könne, wozu ein anderer so viele Jahre brauchet». Aus dem vorliegenden Briefwechsel geht hervor, daß Euler gewissenhaft die an ihn gestellten Fragen beantwortet und seine Hilfe niemandem versagt hat. So ließ sich November und Dezember 1749 ein v. d. Borne, der eine Sägemaschine konstruiert hatte, von Euler beraten. Im Juli 1755 erbittet ein v. Bergen von Euler Auskunft über die Wirkung und Handhabung des «schweizerischen künstlichen Magneten». C. E. Gellert berichtet im September 1742 über verschiedene Erfindungen, wie z. B. diese, «die großen Eisenhämmer und Blasbälge vor den Oefen, worinnen das Eisen geschmolzen, mit Pferden zu treiben». Gellert erinnert in seinem Brief daran, daß er bereits früher, als er noch in Petersburg weilte, Unterweisung und Anleitung von Euler in technischen Fragen erhalten habe und sich daher gewissermaßen zu seinem Bericht ermutigt fühle. G. W. de Henning läßt sich im September 1744 von Petersburg aus durch Euler beim Bau einer Elektrisiermaschine beraten, da er weiß, daß Euler elektrische «Experimenta» vorgeführt hat. Der erwähnte Pötzinger legt im Januar 1752 Euler seine Gedanken zur technischen Verbesserung der Fähren dar. Er fühlt sich dazu berechtigt, weil Euler ihn in «der Lehre vom Vermögen des Keiles wieder auf den rechten Weg» gebracht hat. Über eine Musicalmaschine korrespondiert mit ihm G. F. Unger. Diese Beispiele könnten beliebig erweitert werden. Sie genügen aber, das Charakteristische herauszuarbeiten: Eulers Interesse und seine Beschäftigung mit Fragen der Technik und der Praxis überhaupt. Nicht selten hat Euler aus den ihm vorgelegten Fragen Anregungen für weitergehende, wissenschaftliche Untersuchungen gewonnen, worauf wir schon anläßlich der Entstehungsgeschichte der Turbinentheorie hinweisen. So knüpften sich z. B. an den Auftrag des Königs, die Zahlenlotterie zu begutachten, mehrere wahrscheinlichkeitstheoretische Studien, in denen u. a., wie Herr Kurt Biermann in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit zeigen wird, die Anfänge der Iteratorik enthalten sind. Sein Gefühl für den Wert mathematischer Untersuchungen für die menschliche Gesellschaft war so gesteigert, daß er keine Mühe scheute, die Ergebnisse denen, die die Theorie anwenden sollten, in unmittelbar zugänglicher Form zu liefern. Wir denken an seine Anweisungen für die Konstrukteure optischer Instrumente, die er als Anhang der deutschen Ausgabe seiner Dioptrik anfügte, und wir denken auch an die 1773 erschienene «Théorie complète de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux», die hauptsächlich auf diejenigen zugeschnitten ist, die sich mit der Konstruktion von Schiffen und mit der Navigation beschäftigen. Das letztere Werk wurde ein großer Erfolg. Der König von Frankreich ließ ihm für die französische Ausgabe 6.000 Livres schicken. Es erschien auch eine italienische, englische und russische Ausgabe. Für die letztere wurden ihm 2.000 Rubel gewährt. Das englische Parlament ließ ihm für seine Beiträge zur Mondtheorie, die eine bessere Bestimmung der geographischen Länge ermöglichten, 300 Sterling zahlen.

Aus dem angeführten Überblick über die Leistungen Eulers in der mathematischen Physik und der Praxis ist klar zu erkennen, daß es für ihn keine Abgrenzung des Gebietes der reinen Mathematik von dem ihrer Anwendungen gab. Euler war besessen darauf, alle ihm zugänglichen meßbaren Größen der Natur seinem Kalkül zu unterwerfen. In einer seiner Schriften findet sich das Bekenntnis:

«Hieraus folget also ganz deutlich, daß der Nutzen der Mathematik keineswegs in den gemeinen Teilen derselben bestehe, als deren Gebrauch nicht sonderlich weit sich erstrecket; sondern daß man der höheren Mathematik allein alle diejenigen Vorteile zu danken habe, welche man von dieser Wissenschaft teils schon wirklich erhalten, teils aber noch zu erwarten hat. Es ist also, sofern, daß man diese Untersuchungen zu weit treiben könnte, daß man vielmehr die wichtigsten Vorteile nicht sehr zu erreichen vermögend ist, als bis man noch sehr große Erweiterungen und Entdeckungen darinnen wird gemacht haben» [3, S.9].

Dabei kann man Euler nicht eigentlich als einen Physiker ansprechen. Er hat nur äußerst selten Experimente angestellt. Er verließ sich mehr auf seinen Instinkt. Ich zitiere mit dem Schweizer Mathematikhistoriker Fleckenstein eine Eulersche Antwort auf eine Frage, weshalb er eine fehlerhafte dioptrische Arbeit habe drucken lassen:

«Sie irren sich, mein Lieber, wenn Sie glauben, diese Arbeit sei deshalb unnütz. Sie ist im Gegenteil sehr wertvoll, weil sie Rechnungen enthält, die unabhängig vom Objekt an sich, durch ihren Gang und ihre Anwendung zum Modell dienen können; kurz, es sind immerhin Rechnungen, Rechnungen einer neuen Art, das ist durchaus nicht unnütz.» Welch Gegensatz offenbart sich hier zu dem unendlich vorsichtigen und abwägenden Gauß!

Schon als Neunzehnjähriger war Euler stolz als Maxime in einer Preisschrift zu formulieren:

«Ich habe nicht für nötig gehalten, diese neue Theorie durch das Experiment zu bestätigen; denn sie ist ganz aus den sichersten und unangreifbarsten Prinzipien der Mechanik abgeleitet, weshalb der Zweifel, ob sie wahr sei und in der Praxis statt habe, in keiner Weise aufgeworfen werden kann.»

Im Sinne des angeführten Zitats ist Euler ein naiver Anhänger Descartes. Seine Hypothesen waren manchmal zu kühn, und es kam öfters vor, daß die folgenden Generationen in der Physik ihn korrigieren mußten. In keinem Fall kann man sagen, wie das manchmal geschehen ist, daß er Fragestellungen der mathematischen Physik nur suchte, um genügend Stoff für Anwendungen der Analysis zu haben.

Eulers nüchterner Sinn, der sicher von dem Geist seiner Vaterstadt Basel beeinflußt war, hielt ihn von allen zu phantasievollen Geistesschöpfungen fern. Als Rationalist glaubte er an die mathematische Durchdringbarkeit aller Naturerscheinungen. Mit dieser Grundeinstellung war es für ihn durchaus vereinbar, gewissermaßen als ein Axiom an seinem Christentum festzuhalten. Er verteidigte es sogar durch einige Schriften. Seine Bestrebung war darauf gerichtet, es gegen den Bereich der Naturwissenschaften abzugrenzen. Damit wird er in gewissem Sinne ein Vorläufer des Philosophen Kant. Er war ein erbitterter Gegner der Leibnizschen Monadenlehre, die damals sehr modern war und verhalf einem Gegner dieser Theorie bei einer Preisaufgabe der Berliner Akademie zu einem Preis. In einer herben Schrift gegen die Monadenlehre verfällt er in einen satirischen Ton, wie man ihn sonst nur von Voltaire kennt. Von seinen philosophischen Gegnern wurde ihm vorgeworfen, daß er wohl etwas von Mathematik aber nichts von Philosophie verstände.

Von allen wurde aber einhellig anerkannt, daß Euler zu seiner Zeit unzweifelhaft das bedeutendste Mitglied der Berliner Akademie war. Das Verhältnis zu Friedrich II. war immer etwas gespannt. Die Wesensart dieser beiden Menschen war zu verschieden. Wohl wußte Friedrich II. welch ungeheure geistige Kraft Euler damals in Europa darstellte, und deswegen hatte er ihn auch zum Schmuck seiner neu gegründeten Akademie, wie er selbst einmal bekannte, nach Berlin berufen lassen. Zu seinem Fach fand er allerdings, wie schon erwähnt, wenig Beziehungen. Er vermißte insbesondere auch bei Euler die leichte witzige und geistreiche französische Art der Unterhaltung, die er so sehr bei Maupertuis, D'Argens, D'Alembert und vielen anderen schätzte. Er selbst war schließlich auch ein Meister darin, sich so zu geben. D'Argens vergleicht einmal in einem Brief an Friedrich II. De Mairan mit Euler und schreibt wörtlich:

«Il y a autant de différence de sa conversation à celle de Monsieur Euler, qu'il y en a entre les écrits d'Horace et ceux du savantissime et pédantissime Wolffius» [4].

Der König vermißte auch bei Euler eine Vorliebe für Poesie. Der folgende höhnische Ausspruch Friedrich II. ist bekannt geworden:

«Un certain géomètre, qui a perdu un oeil en calculant, s'avisa de composer un menuet par *a* plus *b*. Si on l'avait joué devant le spectacle D'Apollon, le pauvre géomètre courait risque d'être écorché vif comme Marsyas» [5].

Bekannt ist, daß Euler auch im Theater seinen mathematischen Problemen nachging. Auch hierüber gibt es ein Spottgedicht Friedrich II. Aber ich glaube, diese Tatsache zeigt nur zur Ehre Eulers, wie sehr er von seinen mathematischen Ideen besessen war, daß er selbst bei seinen Zerstreuungen ihnen nachging. Es ist sonst sehr wohl bekannt, daß Euler nicht einseitig veranlagt war und daß er sehr gediegene Kenntnisse in Medizin, Botanik und Chemie hatte. Für den Umgang mit dem König war er offenbar nicht geschmeidig genug.

Ihm war ein ausgesprochenes Selbstbewußtsein inne. Sein ehrlicher gerader Charakter zeigte sich darin, daß er offen seine Ansicht mitteilte, selbst dann, wenn keine Veranlassung vorlag, sein Urteil abzugeben. Das zeigte sich z. B. bei dem Streit in der Monadenlehre. Manchmal hielt er äußerst starr an einmal getroffenen Entscheidungen fest. Als er in der Affaire des Rendanten Köhler auch dem König gegenüber durchaus für Köhler eintrat, brachte ihm das zunächst die Ungnade Friedrich II. ein. Aus einem neu aufgefundenen Brief Friedrich II. in den Archiven der Akademie der UdSSR ist aber zu ersehen, daß Friedrich in dieser Angelegenheit später wieder einlenkte. Aus Eulers Selbstbewußtsein heraus erklärt sich auch sein ausgesprochener Wunsch, als Nachfolger von Maupertuis Präsident der Berliner Akademie zu werden. Friedrich hatte dafür aber in erster Linie D'Alembert ausersehen. Dadurch geriet D'Alembert bei Euler etwas in Mißkredit, weil Euler glaubte, D'Alembert arbeitete gegen ihn. Solche Mißstimmungen verleideten Euler allmählich den Aufenthalt in Berlin, und er wandte sich selbst an die Petersburger Akademie, um unter günstigen Bedingungen eine erneute Übersiedlung nach dorthin zu erreichen. Es kostete Euler eine große Mühe, um von Friedrich II. seinen Weggang zu erreichen. Hier zeigte sich, daß Friedrich ihn doch sehr ungern weggehen ließ.

Euler war in seinem Leben nie ein nachtragender Mensch. Das zeigte sich bei seinem Streit mit Robins und Dollond und schließlich in seinem späteren Verhalten zu Friedrich II., der auf Betreiben Eulers Ehrenmitglied der Petersburger Akademie wurde. Euler war auch keineswegs eitel. Für sein Selbstbewußtsein, das aber nicht mit Eitelkeit verknüpft ist, und sein im Kern einfaches Wesen spricht sein Wunsch, lediglich Vizepräsident der Petersburger Akademie zu werden, da Präsident nur ein «großer Mann» werden könne. Euler hat fremde Verdienste stets voll anerkannt.

Die Fülle der Eulerschen Gedanken und die ungeheure Arbeitskraft erfüllt uns mit tiefer Bewunderung. Selbst Schicksalsschläge verschiedener Art, der Verlust nächster Angehöriger, die Zerstörung seines Heims durch Brand und schließlich die Katastrophe seiner völligen Erblindung, ließen in keiner Weise seine Schaffenskraft erlahmen. Hier halfen ihm sein phänomenales Gedächtnis und seine große Vorstellungskraft.

Literaturverzeichnis

1. L. Koenigsberger, C. G. J. Jacobi, Leipzig, 1904.
2. Weszprémi István, Succinta Medicorum Hungariae et Transsilvaniae Bibliographia, Bd. I. Leipzig, 1774; Jakucs István, Segner András, Fizikai Szemle 5, 65—56 (1955).
3. Neue Grundsätze der Artillerie, Berlin, 1745.
4. Oeuvres de Frédéric le Grand, v. 19, 19, 1852.
5. Oeuvres de Frédéric le Grand, v. 9, 64, 1848; Neue Berlinische Monatsschrift, hrsg. von Riester, Bd. 1, 211, 1799.
6. Leonardi Euleri Opera omnia, Ser. 2, Bd. 12. Herausgegeben v. Cl. A. Truesdell, 1954; Ser. 2, Bd. 13. Herausgegeben v. Cl. A. Truesdel, 1955.
7. L. Euler, Vollständigere Theorie der Maschinen, die durch Reaktion des Wassers in Bewegung versetzt werden. Herausgegeben von Ernst A. Brauer und M. Winkelmann, Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften, Nr. 182.

8. L e o n h a r d E u l e r, Anleitung zur Natur-Lehre, worin die Gründe zur Erklärung aller in der Natur sich ereignenden Begebenheiten und Veränderungen festgesetzt werden. Op. post. Petropoli, 1862, II, S. 449—560.
9. L e o n h a r d E u l e r s Briefe über verschiedene Gegenstände aus der Naturlehre. Deutsche Ausgabe, Leipzig, 1793.
10. N i c o l a s F u s s, Éloge de Monsieur Léonard Euler, St. Pétersbourg, 1783.
11. Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages von Leonhard Euler, Herausgegeben vom Vorstand der Berliner Mathematischen Gesellschaft, Leipzig und Berlin, 1957, Mit Beiträgen von G. Valentin, A. Kneser, F. Müller, E. Lampe.
12. E. H o p p e, Geschichte der Optik, Leipzig, 1926.
13. E. H o p p e, Geschichte der Physik, Braunschweig, 1926.
14. W i l h e l m S t i e d a, Die Übersiedlung Leonhard Eulers von Berlin nach St. Petersburg, Leipzig, 1931.
15. E. M a c h, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, Leipzig, 1933, 9. Aufl.
16. J o a c h i m O t t o F l e c k e n s t e i n, Leonhard Euler, 1707—1783, Berlin, 1957.
17. K.-R. B i e r m a n n Iteratorik bei Leonhard Euler; L'enseignement marhématique, 4, 1958, S. 19—24 (inswischen erschienen).

К. ШРЕДЕР

О ТРУДАХ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА В ОБЛАСТИ ПРИКЛАДНЫХ НАУК[1]

(Деятельность Эйлера, особенно в годы жизни в Берлине)

В связи с исполнившимся 15 апреля 1957 г. 250-летием со дня рождения Леонарда Эйлера Академия наук СССР и Германская академия наук решили совместно почтить память одного из наиболее выдающихся своих членов.

Деятельность знаменитого математика, который родился в Базеле (Швейцария), в течение 25 лет (1741—1766) протекала в Берлине и около 31 года— в Петербурге. Эйлер является наиболее значительным математиком XVIII в. и вообще одним из величайших математиков мира. Один лишь объем его научного наследства кажется непостижимым. Как было подсчитано, лишь для того, чтобы переписать труды Эйлера при ежедневной восьмичасовой работе понадобилось бы 50 лет. Швейцарское общество естествоиспытателей, начиная с 1910 г., издает собрание его сочинений. Предусмотрено 75 томов in quarto, в среднем по 40 печатных листов. До сих пор вышла примерно половина. Муж внучки Эйлера, Николай Фус, 23 ноября 1783 г. произнес в Петербургской академии речь, посвященную памяти Эйлера и получившую впоследствии большую известность. Он говорил, поражаясь научной плодовитостью Эйлера, что работа ученого над многими весьма ценными и сложными трудами сводилась только к процессу их написания. Однако было бы величайшей несправедливостью сказать, что Эйлер был просто плодовитым автором. Все его работы тщательно отделаны и глубоко продуманы. Он заложил первые основы многих отделов математики и математической физики. Эйлер в противоположность Гауссу любил излагать вопрос пространно и это позволяет нам рассмотреть генезис его исследований. Ряд последователей Эйлера (Лагранж, Лаплас, Гаусс и Бессель) глубже исследовали математические взаимосвязи, которые он открыл первый, обобщили их или нашли более изящные методы доказательства. Но, кроме отдельных фи-

[1] Доклад, прочитанный на Юбилейной сессии Отделения физико-математических наук и Отделения технических наук АН СССР в Ленинграде 16 апреля 1957 г.

зических теорий, ничто в творчестве Эйлера не устарело. Якоби, которому при исследовании дифференциальных уравнений снова и снова приходилось обращаться к трудам Эйлера, писал П. Фусу[1]: «В последнее время я вновь основательно изучал интегральное исчисление Эйлера и опять удивлялся, какой свежей сохранилась эта 70-летняя книга, в то время как современную ей книгу Даламбера совершенно невозможно читать. Причина, мне кажется, в его примерах. Потому что эти примеры имеют не просто побочное значение иллюстраций, они составляют все содержание, которое имели в то время общие предложения.»

После того как был уже открыт доступ к молодой тогда области анализа и его приложений, Эйлер со всей страстью исследователя мог приняться за поиски величайших сокровищ. О разных сторонах научного наследия Леонарда Эйлера здесь будут говорить выдающиеся специалисты. Позвольте и мне в связи с этой торжественной датой высказать некоторые общие соображения о тех областях творчества Эйлера, с которыми я особенно связан в моей работе. Я имею в виду его достижения в математической физике и шире — в приложениях математики к практике вообще. При этом я хочу особо остановиться на его деятельности за годы жизни в Берлине. Число работ Эйлера по математической физике и особенно механике, оптике, учению об электричестве, магнетизме и астрономии почти равно числу его работ по чистой математике.

Наряду с братьями Бернулли Эйлер принадлежит к плеяде тех математиков, которые первыми применили в полном объеме к описанию явлений природы исчисление бесконечно малых — великое открытие Лейбница и Ньютона. Благодаря этому они являются подлинными создателями математической физики. Понятие функции, разработанное главным образом Эйлером, оказывается решающим средством при математическом анализе явлений природы. Бросим же беглый взгляд на основные достижения Эйлера в области прикладных наук.

В основах механики Эйлер, в отличие от Ньютона, четко различал понятия силы и импульса. Понятие массы, которое он сформулировал с такой же ясностью, было впоследствии воспринято Лагранжем. Труды Эйлера говорят также о том, что он уже неявным образом работал с векторами. Он свободно пользовался подвижными системами координат и применял также принцип возможных скоростей. Видно также, что Эйлер уже пользовался обеими формами уравнений движения Лагранжа.

---

[1] 14 апреля 1842 г. Цитировано по книге Кенигсбергера [1].

Широко известен вклад Эйлера в разработку принципа наименьшего действия. На этот принцип впервые обратил внимание Мопертюи, который некоторое время занимал пост президента Берлинской академии; можно предположить, что до Мопертюи этим принципом владел Лейбниц.

Представления Мопертюи были еще далеки от ясности, но они побудили Эйлера уточнить формулировку принципа. И именно Эйлеру принадлежит утверждение, что $\int_a^b v ds$ должен иметь экстремальное значение. В споре о приоритете, который Кёниг, Мальбранш и Вольф затеяли с Мопертюи и в котором Кёниг ссылался на письмо Лейбница, не сохранившееся в оригинале, Эйлер выступил в защиту Мопертюи с решительностью, которая, как это подтверждают новые данные, свидетельствует о его личной заинтересованности в исходе спора, начатого ненавистными ему вольфианцами. По мнению Эйлера, явления природы можно постигнуть, исходя не только из действующих причин, но также из конечной цели. Отсюда вытекает мысль, что явления природы могли бы быть выведены из экстремальных принципов.

Эйлер считает, что конкретный вид экстремальной величины вряд ли может быть определен на основании метафизических соображений. Лишь сама рассматриваемая задача показывает, какая величина должна принимать экстремальное значение. Такой осторожный подход позволяет Эйлеру, хотя и он приводит метафизические доводы, действовать гораздо более научно, чем Мопертюи. Применяя принцип наименьшего действия, Эйлер имел случай приложить в механике вариационное исчисление, развитое им после первых попыток Якова Бернулли.

Эйлер детально исследовал многие отдельные вопросы механики. Таковы, например, его работы по интегрированию дифференциальных уравнений плоского, конического и физического маятника. Далее, он занимался нутацией земной оси и прецессией равноденствий. Знамениты его исследования по теории волчка, и многие отделы современной теории гироскопа восходят к его работам. В этой связи следует напомнить о введенных им несимметричных углах, так называемых углах Эйлера, которые характеризуют вращение вокруг данной точки. В теории упругости мы отметим его работы по задаче об ударе и исследование критической нагрузки при продольном изгибе колонны [Berlin, Nouv. Mém., 13 (1759)]. Другие работы Эйлера по теории упругости — исследования о струнах и пластинках — относятся больше к акустике. В споре с

Д. Бернулли об общей форме решения одномерного уравнения колебаний Эйлер дает решение в форме распространяющейся волны, тогда как Бернулли рекомендовал тригонометрическую форму решения, восходящую к Тейлору. Эйлер считал, что его форма включает и эту последнюю. Ему удалось определить коэффициенты членов тригонометрического ряда. Такие ряды приобрели свое подлинное значение лишь позднее в работах Фурье по теплопроводности (1822).

Исследования Эйлера о колебаниях колец, колоколов, литавр и так называемых открытых труб были завершены только позднейшими учеными. Интересно, что в теории музыки Эйлер развил физико-математическое учение о консонансе и диссонансе. И хотя его учение, в основе которого лежит мысль, что музыкальные звуки тем менее приятны для слуха, чем сложнее соотношение колебаний, не оправдало себя (сравним это с позднейшими исследованиями Гельмгольца, который причину диссонанса усматривал в появлении биений), все же этот пример показывает, за какие проблемы брался Эйлер, твердо уверенный в действенности нового анализа.

В области гидромеханики Эйлер оставил нам знаменитые основные уравнения для сред без трения, распространенные впоследствии Навье и Стоксом на вязкие среды и ставшие основой всей современной гидромеханики. От Эйлера исходит и современный способ вывода этих уравнений [Berlin, Hist. de l'Acad., 1755; Петербург, Novi Comm., 14(1770)]. Из исследований Эйлера по гидромеханике видно, что он еще до Лагранжа владел понятием потенциала скоростей и таким образом вообще понятием потенциала. Эйлер первый производил расчеты водяных турбин. Его способ расчета и поныне не потерял значения для практического машиностроения; он основывается на результатах струйной теории. Турбина, исследованная Эйлером, представляла собой реактивное колесо Сегнера. Она состоит из трубок, закрепленных на барабане, который вращается вокруг оси. Над барабаном помещается резервуар, подводящий к трубкам воду. Таким образом, Эйлеру уже был известен так называемый направляющий аппарат.

Иоганн Андреас Сегнер был врачом, а также профессором математики и физики в Геттингене (1735—1754) и Галле (1754—1777), где он и умер. Его немецкие предки в XV в. переселились в Венгрию. Сегнер родился в 1704 г. в Прессбурге[2]. С открытия Сегнера начинается история турбостроения. Эйлер представил в Берлинскую академию подробное заклю-

[2] Я обязан этими биографическими данными А. Реньи [2].

чение о рабочем колесе Сегнера [напечатано в «Recherches sur l'effet d'une machine hydraulique proposée par Mr. Segner, Professeur à Göttingue» (Hist. de l'Acad., 1750) и «Application de la machine hydraulique de Mr. Segner à toutes sortes d'ouvrages et de ses avantages sur les autres machines hydrauliques dont on se sert ordinairement» (Hist. de l'Acad., 1751)]. Наряду с теорией сегнерова колеса и расчетом его коэффициента полезного действия здесь уже предлагается целый ряд конструктивных усовершенствований (для уменьшения сопротивления воздуха аппарат заключается в цилиндрический колпак, для уменьшения веса и трения барабану придается колоколообразная форма). В следующей работе «Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau» (представлена в 1753 г.) теория разрабатывается значительно дальше, а детали конструкции усовершенствуются настолько, что можно уже говорить о турбине Эйлера. Он развивает общую теорию движения идеальной несжимаемой жидкости в узких трубах двоякой кривизны, вращающихся вокруг неподвижной оси. При этом Эйлер уже работает неявным образом с понятием ускорения Кориолиса, которое во всей общности было сформулировано Кориолисом только в 1823 г. Теория Эйлера содержит формулы сил и моментов реакции, которые употребляются и сейчас. Правда, трение жидкости им не учитывалось. В чисто технической области Эйлер изобрел уже упоминавшийся направляющий аппарат. С помощью неподвижных направляющих лопастей, соединенных с кольцом, вода без удара подается к рабочему колесу. Наконец, учитывая практические цели, Эйлер приводит таблицу и полностью рассчитывает пять примеров. Можно сказать, что эти выдающиеся работы характеризуют Эйлера как ученого-инженера в современном смысле слова. Сегнер оказал стимулирующее влияние на работы Эйлера также своим открытием главных осей инерции твердого тела (E u l e r, Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum).

Хотя сейчас уже невозможно средствами Эйлера определить форму рабочего колеса для современной турбины Френсиса, все же не следует недооценивать значения исследований Эйлера в этой области. Струйная теория, первоначально предложенная Д. Бернулли, была позднее в теории турбин Пражилем, Лоренцом, Капланом и фон-Мизесом заменена аналитическим методом, который ведет начало от Эйлера.

Фундаментальное значение для современной техники имеет, помимо теории турбин, другое замечательное достижение Эйлера, относящееся совсем к иной области. Я имею в виду изобретение ахроматических линз в оптотехнике. Эйлер отправлялся от исследований Ньютона, посвященных закону дисперсии. Эйлер придерживался того неверного, впрочем, взгляда, что наш глаз не дает цветорассеяния, и стремился установить закон дисперсии, позволяющий так сочетать две линзы, чтобы изображение было свободно от хроматической аберрации. Закон Ньютона он отклонил и предложил свою собственную формулу, которая, однако, позднее не удержалась. Вместе с тем исследования Эйлера побудили английского оптика Доллонда (1706—1761), отвергавшего формулу Эйлера, проверить, не является ли комбинация линз из кронгласа и флинтгласа ахроматической. В результате этих опытов были изготовлены первые ахроматические линзы, изобретению которых, следовательно, непосредственно способствовал Эйлер. Эйлер был так рад этому успеху, что преподнес Фридриху II рассчитанную им зрительную трубу. После этого большого успеха Эйлер рассчитал многочисленные оптические системы телескопов и микроскопов, ахроматических для отверстий до 30°. Рассчитанные им телескопы, которые имели до 8 линз, далеко превосходили все существовавшие до того времени. Они отличались также относительно небольшой длиной. Эйлер указал также на значение составного окуляра, с помощью которого в некоторой мере можно добиться апланатизма и ахроматизма. Усилия Эйлера в этой области получили предварительное завершение лишь в диоптрических исследованиях Гаусса, который ввел главные точки и плоскости системы. Это значительно облегчило изучение составных оптических систем.

В учении о преломлении лучей в атмосфере Эйлер достиг успеха, составив для этого явления дифференциальное уравнение, которое он смог в некоторых специальных случаях проинтегрировать. В оптике ему была известна разница между силой света и силой освещенности. Другие изыскания по оптике, в которых Эйлер рассматривал свет как продольное колебание эфира и, например, цвета тонких пластин пытался объяснить с помощью дополнительных допущений, нельзя признать успешными. Здесь он слишком часто руководствовался аналогией между световыми и звуковыми волнами. Оперируя продольными волнами, Эйлер мог прийти к правильному пониманию явлений интерференции. Для объяснения явлений тяготения, электричества и магнетизма Эйлер привлек представление о бесконечно текучем эфире, наполняющем пространство под очень большим давлением, причем сила тяготения сводится к давлению эфира. Развивая эту мысль, Эйлер приходит к удивительному выводу, что плотность частиц вещества есть универсальная константа. В интересной работе, напечатанной в журнале Крелля, 157 (1927), А. Шпайзер указал, что логические трудности, которые возникли у Эйлера в разработке этой теории эфира, послужили для Римана поводом к натурфилософским рассмотрениям, которые в конце концов привели к его известной пробной лекции о гипотезах, лежащих в основании геометрии.

Однако работы Эйлера в области приложений математики касались не только общетеоретических основ, они вторгались непосредственно в практическую жизнь. Еще будучи студентом, Эйлер, которого сначала предназначали в богословы, интересовался математикой и ее применениями. Выступив с речью, где сравнивались философские взгляды Ньютона и Декарта, он получил звание магистра искусств. Темой его диссертации была природа и распространение звука. В то же время, в 1727 г., он принял участие в конкурсе Парижской академии по вопросу об установке мачт на корабле, и его работа при распределении премий была признана достойной опубликования. Старания Эйлера получить в Базеле кафедру физики не имели успеха. Наряду с Эйлером в 1727 г. на эту кафедру претендовали еще семь человек, не считая четырех лиц, перед конкурсом снявших свои кандидатуры. Три группы представителей профессуры и высшей университетской администрации должны были выбрать из восьми конкурентов по одному кандидату для последующей жеребьевки. Вторая группа, которая решала судьбу Эйлера, выбрала Бенедикта Штехелина, а Леонард Эйлер получил всего один голос и, таким образом, не участвовал в самой жеребьевке. Этими сведениями я обязан Г. К. Михайлову, который сам опирается на статью А. Буркхардта «Über die Wahlart der Baseler Professoren, besonders im 18. Jahrhundert»; Baseler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde, 15 (1914—1915), а также на указание О. Шписа из Базеля.

По совету своих друзей Николая и Даниила Бернулли Эйлер в 1727 г. переехал в Петербург и начал работать в качестве адъюнкта математики.

В первые годы своей деятельности в Петербурге Эйлер интенсивно занимался вопросами теории корабля. В 1735 г. он опубликовал работу о движении плавающих тел и дал критерий их остойчивости. В своем большом труде «Scientia navalis», опубликованном в 1749 г., он рассчитывает сопротивление корабля. Незадолго до этого (1746) появился «Traité du navire», труд астронома Буге, направленного в Перу для измерения градуса меридиана. Обе эти книги являются первыми и основополагающими трудами по теории корабля. Эйлер был уже хорошо знаком с современным различием сопротивления трения и сопротивления формы. Оба вида сопротивления он принимал прямо пропорциональными квадрату скорости. Однако это допущение впоследствии не подтвердилось. Теперь, особенно после работ Фруда (1872), мы располагаем лучшими основаниями для расчета сопротивления корабля.

Во время своей работы в Берлине Эйлер, выполняя многочисленные поручения правительства, непосредственно занимался практическими задачами.

В ответ на запрос Фридриха II о хорошем изложении баллистики, Эйлер указал на работу англичанина Робинса. Эйлер издал перевод этого сочинения с очень ценными примечаниями [3], которые затем были переведены на английский, а также на французский языки.

В Берлине часто и охотно пользовались советами Эйлера. Многочисленные доказательства этому имеются в архивных документах, любезно предоставленных мне Институтом истории естествознания и техники Академии наук СССР. Фридрих II, который не понимал значения собственно математических наук, ценил Эйлера именно с точки зрения чисто практических приложений математики. В 1749 г. Эйлеру было поручено обследование нивелирования Финов-канала между Гавелем и Одером. Он должен был дать заключение о солеварнях у Шенебека. Кроме того, он дал ценные советы в связи с намечавшейся организацией государственной лотереи и с реформой вдовьей кассы. Все эти работы Эйлер выполнял с величайшей добросовестностью. В своих письмах к Эйлеру король придает большое значение тому, чтобы Эйлер рассматривал все вновь поступающие изобретения с точки зрения их общей применимости и полезности. Некоторые документы, недавно обнаруженные в архивах нашей Академии, которые К.-Р. Бирман публикует в нашем совместном юбилейном сборнике памяти Эйлера, показывают, как заботился Эйлер, например, о тогдашней обсерватории, находившейся на территории теперешней университетской библиотеки. В работе Бирмана приводится заключение Эйлера по поводу изобретения одного слесаря, которое относится к шарикоподшипникам. Эйлер кончает свое заключение такими провидящими будущее словами: «Вообще здесь следует заметить, что все усовершенствования, которых еще можно ожидать в большинстве машин, необходимо искать в направлении уменьшения трения. Поэтому все клонящиеся к этому предложения не только заслуживают всякого внимания, но желательно было бы производить в большом объеме практические испытания, ибо при этом будет много легче устранить ошибки, которые могут еще иметься, и это представляется единственным и самым верным средством довести машины до высшей степени совершенства.»

Эйлер помогал многочисленным ученым, техникам и другим изобретателям в осуществлении и оценке их изобретений. Г. В. Пётцингер безусловно выразил мнение многих, кто пользовался советами и помощью Леонарда Эйлера, когда, обратившись к Эйлеру с одним вопросом в октябре 1749 г., обосновал это тем, что последний «в несколько минут может сделать то, для чего другому понадобятся многие годы».

Из хранящейся в архивах переписки видно, что Эйлер добросовестно отвечал на вопросы и никогда не отказывал в помощи. Так, в ноябре и декабре 1749 г. за советом к Эйлеру обратился Борне, который сконструировал механическую пилу. В июле 1755 г. Берген просит Эйлера дать сведения об использовании и действии «швейцарских искусственных магнитов». К.-Е. Геллерт сообщает в сентябре 1742 г. о различных изобретениях, с помощью которых можно, например, «приводить в движение лошадьми большие железные молоты и раздувальные мехи печей для плавки железа». В своем письме Геллерт напоминает, что, еще живя в Петербурге, он пользовался наставлениями и указаниями Эйлера по техническим вопросам, что и ободряет его в известной степени сделать свое сообщение. Г. В. де-Геннинг в сентябре 1744 г. просит из Петербурга совета относительно постройки электрической машины, так как знает, что Эйлер производил «электрические эксперименты». Упоминавшийся уже Пётцингер присылает Эйлеру в январе 1752 г. свои соображения о техническом усовершенствовании паромов. Он считает себя вправе это сделать, ибо Эйлер направил его «на верный путь в учении о действии клина». Г.-Ф. Унгер ведет переписку с Эйлером по поводу музыкальной машины. Число таких примеров можно увеличить неограниченно, но и этих достаточно, чтобы представить себе деятельный интерес Эйлера к вопросам техники и практики вообще. Вопросы, предлагавшиеся Эйлеру, нередко заставляли его начинать обширные научные исследования; об этом мы уже говорили в связи с историей возникновения теории турбин. Например, поручение короля дать заключение о числовой лотерее послужило поводом для ряда исследований по теории вероятностей, в которых, между прочим, как показывает Курт Бирман в одной еще не опубликованной работе, содержатся начала учения об итерациях.

Сознание ценности математических исследований для человеческого общества было у Эйлера столь велико, что он не жалел никакого труда на то, чтобы в доступной форме предоставлять свои результаты в распоряжение тех, кто прилагает теорию на практике. Вспомним его указания для конструкторов оптических инструментов, которые он опубликовал в виде приложения к немецкому изданию своей «Диоптрики». Вспомним также появившуюся в 1773 г. «Théorie complète de la construction et de la manoeuvre de vaisseaux», которая написана главным образом для тех, кто занимается кораблестроением и навигацией. Последняя работа имела большой успех. Французский король распорядился выдать Эйлеру 6000 ливров за французское издание. Появились также итальянское, английское и русское издания. За последнее Эйлер получил 2000 рублей. Английский парламент постановил заплатить ему 300 фунтов стерлингов за работы по теории Луны, которые сделали возможным более точное определение географической долготы.

Из приведенного обзора достижений Эйлера в математической физике и в практике ясно видно, что для него не существовало границ между областью чистой математики и ее приложениями. Эйлер был обуреваем идеей подчинить исчислению доступные ему измеримые величины природы. В одной из его работ мы находим следующее признание: «Отсюда совершенно очевидно следует, что польза математики заключается отнюдь не в ее низших частях, ибо их применение простирается не особенно далеко; только высшей математике мы обязаны всеми теми преимуществами, которые частью уже действительно получили, а частью еще получим от этой науки. Следовательно, таким образом, не в том дело, что эти исследования можно было бы проводить чересчур далеко, а скорее в том, что важнейшие выгоды их не смогут быть получены прежде, чем будут сделаны в них еще очень большие и широкие открытия» [4].

Эйлера, собственно говоря, нельзя считать физиком. Он крайне редко ставил опыты и больше полагался на собственную интуицию. Вслед за швейцарским историком математики Флекенштейном я процитирую ответ Эйлера на вопрос, почему он напечатал работу по диоптрике, содержавшую ошибки: «Вы заблуждаетесь, мой дорогой, если думаете, что эта работа потому бесполезна. Наоборот, она очень ценная, ибо содержит расчеты, которые, независимо от объекта самого по себе, по своему ходу и приложению, могут служить образцом; короче говоря, это все-таки расчеты, расчеты нового вида, а это весьма небесполезно.» Какой контраст с бесконечно осторожным, все тщательно взвешивающим Гауссом!

Еще 19-летним юношей Эйлер с гордостью сформулировал в своей конкурсной работе правило: «Я не считал необходимым подтвердить эту новую теорию опытом, потому что она полностью выведена из самых надежных и неопровержимых принципов механики и, таким образом, сомнение в том, верна ли она и имеет ли место в практике, просто не может возникнуть.» Согласно приведенной цитате, Эйлер — наивный сторонник Декарта. Его гипотезы были иногда слишком смелыми, и нередко случалось, что последующим поколениям физиков приходилось его исправлять. Ни в коем случае нельзя, однако, утверждать, как это делается иногда, что вопросы математической физики он ставил только для того, чтобы иметь достаточный материал для приложений анализа.

Здравый смысл Эйлера, на который несомненно повлиял дух родного города Базеля, удерживал его от чересчур фантастических спекуляций. Будучи рационалистом, он верил в математическую познаваемость всех явлений природы. С этой основной установкой он легко сочетал (до некоторой степени как аксиому) христианство. В некоторых сочинениях он даже выступал в защиту последнего. Его усилия были направлены на то, чтобы разграничить сферы христианского вероучения и естественных наук. Таким образом, в известном смысле Эйлер является предшественником Канта. Эйлер был ожесточенным противником модного тогда учения Лейбница о монадах и помог одному из противников этой теории получить премию на конкурсе Берлинской академии. В одном резком сочинении против учения о монадах он впадает в сатирический тон, который встречается только у Вольтера. Философские противники Эйлера упрекали его в том, что если он и разбирается в математике, то ничего не смыслит в философии. Однако все единодушно признавали, что Эйлер был несомненно самым крупным ученым Берлинской академии того времени.

Отношения Эйлера с Фридрихом II были всегда несколько напряженными. Эти два человека были слишком разными. Фридрих II, конечно, знал, какую гигантскую духовную силу представлял собой Эйлер в тогдашней Европе и поэтому-то, а также (как он сам признал однажды) для украшения своей вновь организуемой Академии, пригласил его в Берлин. Однако от специальности Эйлера Фридрих, как уже говорилось, был весьма далек. По мнению короля, в Эйлере не хватало легкой, блестящей и остроумной французской манеры беседовать, которую он так ценил в Мопертюи, Даржане, Даламбере и многих других. Да и сам король владел этим искусством мастерски. Даржан в одном из писем к Фридриху II сравнивает де-Мерана с Эйлером и пишет буквально следующее: «Между его стилем беседы и манерой Эйлера такая же разница, как между сочинениями Горация и трудами ученейшего и педантичнейшего Вольфа» [5].

Королю не нравилось также у Эйлера отсутствие вкуса к поэзии. Известно следующее насмешливое высказывание Фридриха II: «Некий геометр, потерявший при вычислениях глаз, вздумал сочинить менуэт с помощью a плюс b. Если бы его исполнили перед Аполлоном, то геометр рисковал бы тем, что с него, подобно Марсию, заживо содрали бы кожу» [6].

Известно, что даже в театре Эйлер размышлял о своих математических проблемах. По этому поводу Фридрих II также написал насмешливое стихотворение. Но мне кажется, что этот факт лишь свидетельствует, к чести Эйлера, о том, сколь сильно он был увлечен своими математическими идеями, так что даже во время развлечений продолжал о них размышлять. Широко известно, что Эйлер не был склонен к односторонности и располагал весьма основательными познаниями в медицине, ботанике, химии. А для общения с королем ему, очевидно, недоставало гибкости.

Эйлер обладал ярко выраженным чувством собственного достоинства. Прямота и честность его натуры проявлялись в том, что он откровенно высказывал свои мнения даже тогда, когда в этом не было необходимости. Так было, например, в споре по поводу учения о монадах. Иногда Эйлер крайне упорно отстаивал раз принятое решение. Он выступил в деле казначея Келера в защиту последнего, чем навлек на себя немилость Фридриха II. Впрочем, из одного письма Фридриха II, недавно обнаруженного в Архиве Академии наук СССР, видно, что впоследствии король изменил свое мнение. Чувством собственного достоинства Эйлера следует также объяснить его желание занять пост президента Берлинской академии в качестве преемника Мопертюи. Однако Фридрих остановил свой выбор на Даламбере. Из-за этого Эйлер отчасти потерял доверие к Даламберу, полагая, что последний действует против него. Такого рода неприятности постепенно отравили существование Эйлера в Берлине, и он обратился в Петербургскую академию с тем, чтобы при благоприятных условиях вновь переселиться в Петербург. Эйлеру стоило большого труда добиться отставки у Фридриха II, который отпустил его очень неохотно.

Эйлер никогда не был злопамятным. Это проявилось в спорах с Робинсом и Доллондом, наконец, в последующих отношениях с Фридрихом II, который при содействии Эйлера был избран почетным членом Петербургской академии. Эйлер не был также и тщеславным. О том, что чувство собственного достоинства не соединялось у Эйлера с тщеславием и о простоте его натуры говорит его желание быть только вице-президентом Петербургской академии, так как президентом ее должен быть «вельможа». Эйлер всегда полностью признавал чужие заслуги. Богатство идей Эйлера и его неслыханная работоспособность наполняют нас глубоким восхищением. Даже тяжелые удары судьбы, потеря близких, гибель его дома от пожара и, наконец, такая катастрофа, как полная потеря зрения, не сломили его творческой энергии. В этом помогли ему феноменальная память и большая сила воображения.

Литература

1. L. Koenigsberger, C. G. J. Jacobi, Leipzig, 1904, стр. 284
2. Weszprémi István, Succincta Medicorum Hungariae et Transsilvaniae Bibliographia, I, Leipzig, 1774; Jakucs István, Segner András. Fizikai Szemle 5/1955, стр. 56—65
3. Neue Grundsätze der Artillerie, Berlin, 1745
4. Neue Grundsätze der Artillerie, Vorrede, стр. 9
5. Oeuvres de Frédéric le Grand, т. 19, 1852, стр. 19
6. Oeuvres de Frederic le Grand, т. 9, 1848, стр. 64: Neue Berlinische Monatsschrift, hsg. von Riester, т. I, 211 (1799)

Г. К. МИХАЙЛОВ и В. И. СМИРНОВ

НЕОПУБЛИКОВАННЫЕ МАТЕРИАЛЫ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА В АРХИВЕ АКАДЕМИИ НАУК СССР[1]

I. После Лейбница и Ньютона одним из величайших ученых XVIII в. в области физико-математических наук был Леонард Эйлер. Эйлер выделяется необычайным диапазоном своих научных интересов и исключительной продуктивностью научного творчества. Ему принадлежит громадное число работ, изданных как при его жизни, так и посмертно. Кроме того, архив Эйлера содержит большое количество рукописных научных материалов. Во многом эти материалы тесно связаны, естественно, с работами, появившимися в печати в XVIII и XIX вв., но имеются отдельные рукописи и заметки, не связанные непосредственно с опубликованными работами или представляющие собой существенно отличные редакции этих работ. Особо следует отметить среди бумаг Эйлера его записные книжки, общим объемом свыше 3000 страниц, содержащие черновые записи математических работ и охватывающие около полувека его научной деятельности.

Наряду с этим в Архиве Академии наук СССР находится большая научная переписка Эйлера; сохранившаяся часть переписки (около 2250 писем) содержит в основном адресованные ему письма. Эта научная переписка докладывалась частично на Конференции Академии, о чем имеются указания в опубликованных протоколах (Протоколы заседаний Конференции императорской Академии наук, 1725—1803, тт. 1—4, СПб., 1897—1911).

Целью настоящего обзора является краткое описание некоторой части неопубликованных архивных материалов. Подробное описание всего научного архива Эйлера и его сличение с напечатанными работами требует громадного труда и времени и не входило в задачу авторов обзора. Значительная часть архива была переслана перед первой ми-

[1] Переработанный текст доклада, прочитанного В. И. Смирновым на Юбилейной научной сессии Отделения физико-математических наук и Отделения технических наук АН СССР в Ленинграде 16 апреля 1957 г.

ровой войной в Швейцарию в связи с подготовкой издания «Opera omnia» Л. Эйлера. Однако архив был пока мало использован при издании вышедших томов. В 1949 г. все материалы, после снятия с них фотокопий, были возвращены в Архив Академии наук в Ленинград. Надо, однако, отметить, что, как выяснилось в последнее время, не весь архив Эйлера был отправлен в Швейцарию. Более подробно мы будем говорить об этом ниже.

Леонард Эйлер жил в Петербурге с 1727 по 1741 г. и с 1766 гг. до конца своей жизни. При отъезде в 1741 г. в Берлин он увез с собой весь свой архив, но его переписка, в той части, в которой она шла через Конференцию Академии, осталась в Петербурге в делах «Ученой корреспонденции Академии». При возвращении в 1766 г. Эйлер привез свои бумаги в Петербург, и после его смерти большая часть его рукописей научного содержания в разное время поступила в Архив Академии. Судьба же личного архива Эйлера, в котором содержалась и часть его научной переписки, неизвестна.

Хранившиеся в Академии материалы были широко использованы в конце XVIII и в первой половине XIX в. при посмертном издании отдельных работ Эйлера, а также сборников его работ, как например, «Institutionum calculi integralis volumen quartum», 1794 [E. 660][2], «Commentationes arithmeticae collectae», 1849 [E. 791] и «Opera postuma mathematica et physica», 1862 [E. 805].

В середине XIX в. П. Н. Фус, правнук Эйлера, пытался начать полное издание собрания трудов Эйлера. Но эта попытка не увенчалась успехом. До начала XX в. архивные материалы Эйлера почти не изучались. Лишь отдельные документы, в основном касающиеся служебной биографии Эйлера, были использованы в работах П. П. Пекарского (История императорской Академии наук, т. 1, СПб., 1870, и др.) и М. И. Сухомлинова (Материалы для истории императорской Академии наук, 1716—1750, тт. 1—10, СПб., 1885—1900). В 1902 г. академики А. М. Ляпунов и А. А. Марков в связи с приближавшейся датой двухсотлетия со дня рождения Эйлера подняли вопрос об издании полного собрания его сочинений. Специально созданная по этому вопросу комиссия внесла в

---

[2] Ссылки в квадратных скобках с буквой E указывают на соответствующее сочинение Эйлера в перечне его опубликованных трудов: G. Eneström, Verzeichnis der Schriften L. Eulers, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsb. IV, Lief. 1—2, 1910—1913. Аналогичные ссылки с буквой A указывают на помещенный в том же издании перечень опубликованных трудов И.-А. Эйлера, старшего сына Леонарда Эйлера.

Общее собрание предложение об издании собрания сочинений совместно с Берлинской академией, но последняя в письме от 7 февраля 1907 г. отказалась принять участие в издании. В том же 1907 г. Общему собранию Петербургской академии наук было доложено намерение Швейцарского общества естествоиспытателей взять на себя подготовку собрания сочинений Эйлера, и в связи с этим Общее собрание постановило предоставить Эйлеровской комиссии в Швейцарии все имеющиеся в Академии материалы, нужные для издания. После довольно длительной переписки первая, основная часть материалов была переслана Петербургской академией в Швейцарию. Опись их была сделана Б. Л. Модзалевским и напечатана под заглавием: «Перечень рукописей Леонарда Эйлера, хранящихся в Архиве Конференции императорской Академии наук» (1910). Этот перечень, содержавший 209 номеров, включал, наряду с рукописями Леонарда Эйлера, также и бумаги И.-А. Эйлера, Н. И. и П. Н. Фусов, связанные с деятельностью Л. Эйлера. После получения этой посылки в Цюрихе был напечатан в 1911 г. дополнительный список содержавшихся в ней рукописей: «Petersburger Manuskripte, die nach Zürich geschickt worden sind, in der zugehörigen gedruckten Liste aber sich nicht verzeichnet finden». Кроме того, в связи с дальнейшей перепиской Петербургской академии с Цюрихом, туда высылались некоторые дополнительные материалы. Их рукописный перечень был составлен как в Петербурге, так и в Цюрихе. Бóльшая часть рукописей Эйлера, принадлежавших Петербургской академии наук, описана также в отчете G. Eneström «Bericht an die Eulerkommission der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft über die Eulerschen Manuskripte der Petersburger Akademie» (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1913, B.22, H.11—12, 2.Abt.). При составлении этого отчета не проводилось точных сравнений рукописей с напечатанными работами Эйлера. Это делалось в какой-то мере позже, при подготовке отдельных томов «Opera omnia». Все вопросы, связанные с пересылкой бумаг в Швейцарию и с составлением их дополнительных списков, подробно отражены в переписке профессора Ф. Рудио с Петербургской академией наук. В 1949 г. материалы из Швейцарии были, как сказано, возвращены в нашу академию. Так как они, благодаря упомянутому отчету Энестрёма, известны, мы на них не останавливаемся.

Некоторое время тому назад в собрании инкунабул Библиотеки Академии наук в Ленинграде были обнаружены различные рукописи XVIII в. и в том числе три переплетенные тетради научных рукописей Эйлера, рукопись его сочинения «Scientia navalis» [E. 110—111] и еще одна тетрадь, не представляющая интереса и содержащая копии напечатанных работ

Эйлера, Крафта, Сегнера, Лекселя и Котельникова. Последняя тетрадь, включающая в основном работы по геометрии и теории рядов, с указаниями, где они напечатаны, написана неустановленной рукой. Часть находящихся в ней работ переписана П. Н. Фусом, почерком которого записано также содержание некоторых академических изданий. Перечисленные материалы не посылались в Швейцарию. Кроме того, в Швейцарию не были посланы различные отзывы и документы Эйлера из дел Канцелярии Академии, частично опубликованные в упомянутом выше издании М. И. Сухомлинова, значительная часть переписки Л. Эйлера, которая находилась в фондах «Ученая корреспонденция Академии» и «Дела Канцелярии Академии» Архива Академии наук, а также несколько десятков рукописей Эйлера, опубликованных в «Комментариях» и «Новых комментариях» Петербургской академии и хранившихся в других фондах.

Наше дальнейшее изложение разбито на две части. В первой мы даем краткое описание упомянутых выше трех тетрадей Эйлера, которые не были в Швейцарии, а во второй части — останавливаемся на переписке Эйлера, в основном на его письмах в той их части, которая еще не была опубликована.

II. Три новых тетради с рукописями Л. Эйлера содержат разнообразный материал, написанный им в основном во второй четверти XVIII в. Многое имеет отрывочный характер. Бумаги были переплетены в тетради (частью в должном порядке) в середине XIX в. Библиотекой Академии наук. В отдельных местах имеются указания П. Н. Фуса на наличие или отсутствие связи рукописей с напечатанными работами Эйлера. Иногда встречаются и более подробные его суждения о рукописях, впрочем, не всегда правильные.

Переходим к первой из указанных тетрадей (Архив Академии наук СССР, ф. 136, оп. 1, № 158), содержащей 195 листов. Помимо вплетенных в нее шести работ Эйлера по механике и физике, основное содержание работ посвящено различным вопросам математики.

Законченную работу представляет собою ранняя рукопись «Calculus differentialis» (15 листов), являющаяся, по-видимому, вариантом краткого курса дифференциального исчисления. Она содержит четыре главы: I) De calculo differentiarum finitarum; II) De calculo differentiali in genere; III) De differentiatione functionum algebraicarum; IV) De differentiatione quantitatum logarithmicalium et exponentialium. Рукопись, естественно, не соответствует тексту опубликованного трактата Эйлера «Institutiones calculi differentialis» [E. 212], объем которого во много раз больше.

Теории логарифмов посвящена рукопись «De logarithmis eorumque et quantitatum exponentialium differentiatione», доложенная Петербургской академии в июне 1737 г. В первой и, частично, во второй тетрадях содержатся № 1—16, 28—52, 75—111 этого сочинения.

Большой фрагмент (24 листа с 85 чертежами на полях) представляет собой начало написанного по-немецки учебника элементарной геометрии, содержащее планиметрию. Вопросам геометрии посвящены также две небольшие заметки Эйлера «Elementa stereometriae» (4 листа) и «Doctrina de angulis» (6 листов).

Значительное число заметок и отрывков относится к теории чисел и алгебре. Один из отрывков (§ 32—48), являющийся частью большой работы, посвящен исследованию тех случаев, когда корень третьей или четвертой степени из полинома от x делается рациональным при некоторых значениях x. Эти вопросы непосредственно связаны со второй частью курса Эйлера «Vollständige Anleitung zur Algebra» [E.388]. Рассматриваются и задачи следующего типа: если полином является квадратом при $x = q$, то он будет квадратом и при некотором другом, указанном значении x. Часть этого материала вплетена в другую тетрадь. Указываются некоторые рациональные замены переменного x, приводящие корень из полинома от x к рациональному виду. Отдельный фрагмент посвящен исследованию задачи о нахождении такого треугольного числа, при прибавлении к которому заданного числа получается квадрат некоторого целого числа (фиг. 1). Два фрагмента имеют заглавия «Solutio problematum Diophanti redivivi a P. Jacobo de Billy editi» (5 листов) и «Problematum arithmeticorum a P. de Billy propositorum solutiones» (1 лист). В качестве примера приведем задачу: найти такое x, чтобы выражения $x^2 + ax$, $x^2 + abx$ и $x^2 + ab^2x$ были квадратами целых чисел. Ряд арифметических задач формулируется в терминах сторон прямоугольного треугольника и его площади. Заметка «Doctrina de rationibus et proportionibus» (3 листа) написана в форме обращения к слушателям. Отдельный отрывок (§ 34—51) посвящен алгебраическим уравнениям высших степеней. Другой отрывок (§ 80—86), являющийся, по-видимому, частью продолжения первого, хранится в Архиве отдельно (ф. 136, оп. 1, № 91). Он посвящен определению тригонометрических и обратных тригонометрических функций мнимого аргумента.

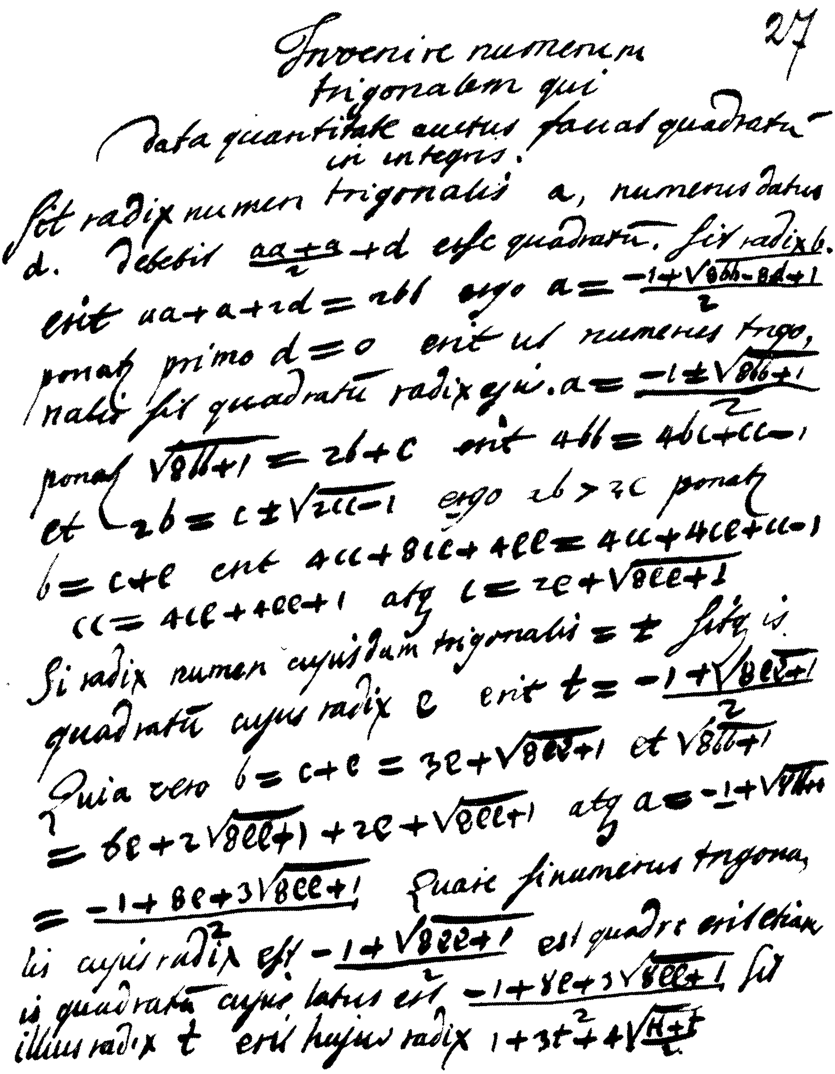
Несколько фрагментов посвящено теории вероятностей. Среди них «Plan einer Lotterie, welche aus vier Classen bestehet» и одна задача из теории математических игр.

Таково содержание математической части первой тетради.

Вопросам механики посвящены в ней два сочинения: «De vi percussionis ejusque mensura vera» (§ 1—24) и «Comparaison entre le choc et la pression» (§ 1—16, 8 листов). Концы этих сочинений вплетены соответственно в третью и во вторую тетради. Первое из них представляет собой неполный латинский оригинал работы Эйлера, французский перевод которой опубликован в первом томе Мемуаров Берлинской академии, 1745 [E. 82]. Конец этой рукописи (§ 25—27) отсутствует. В первую тетрадь вплетен также латинский оригинал сочинения Эйлера «Dissertatio ad quaestionem de optimo modo anchoras attolendi» (§ 1—50), доложенного Петербургской академии в июле 1738 г. и представленного во французском переводе на соискание премии Парижской академии 1739 г. [E. 78].

Наконец, три рукописи посвящены физике: «Pensées sur la lumière et les couleurs» (§ 1—24, 12 листов), «De la plus avantageuse construction des lunnettes à trois verres qui représentent les objets debout» (№ 1—12, 19—52, 12 листов), «Disquisitio physica de causa caudarum cometarum et luminis borealis itemque luminis zodiacalis» (№ 1—10, 15—16, 6 листов). Первая из этих рукописей близка по содержанию к резюме доклада Эйлера, представленного им в феврале 1744 г. Берлинской академии (см. «Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres», 1745, Berlin, 1746, 17—24), и является более подробным изложением вопроса. Она связана также с сочинением Эйлера «Nova theoria lucis et colorum» [E. 88]. Вторая рукопись близка по содержанию к опубликованной работе Эйлера «Des lunnettes à trois verres qui représentent les objets debout» [E. 316], и, по-видимому, представляет собой его доклад Берлинской академии, представленный в мае 1759 г. Наконец, третья рукопись является латинским оригиналом работы Эйлера, опубликованной во французском переводе во втором томе Мемуаров Берлинской академии, 1746 [E. 103]. Вторая половина сохранившихся параграфов этой рукописи вплетена в третью тетрадь.

Вторая, наибольшая по объему тетрадь (Архив Академии наук СССР, ф. 136, оп. 1, № 157, 691 лист) содержит несколько математических рукописей. Сравнительно небольшой фрагмент (№ 26—54, 6 листов) посвящен дифференциальному исчислению и, в частности, разложению функций в ряд. Большое количество (свыше 30) совершенно перепутанных при переплетении тетради фрагментов (всего 130 листов) принадлежит к одному общему сочинению по математическому анализу. Сохранился титульный лист с заглавием «Libri secundi sectio prima, De integratione formularum differentialium unicam variabilem involventium» и фрагменты следующих глав: I) De calculo integrali in genere (№ 1—6, 17—27);



Invenire numerum trigonalem qui data quantitate auctus faciat quadratum in integris. 27

Sit radix numeri trigonalis a, numerus datus d. Debebit $\frac{aa+a}{2}+d$ esse quadratum. Sit radix b. erit $aa+a+2d=2bb$ ergo $a=\frac{-1+\sqrt{8bb-8d+1}}{2}$ ponatur primo $d=0$ erit ut numerus trigonalis sit quadratum radix cujus $a=\frac{-1\pm\sqrt{8bb+1}}{2}$ ponatur $\sqrt{8bb+1}=2b+c$ erit $4bb=4bc+cc-1$ et $2b=c\pm\sqrt{2cc-1}$ ergo $2b>2c$ ponatur $b=c+e$ erit $4cc+8ce+4ee=4cc+4ce+cc-1$ $cc=4ce+4ee+1$ atque $c=2e+\sqrt{8ee+1}$

Si radix numeri cujusdam trigonalis $=t$ fiet is quadratum cujus radix e erit $t=\frac{-1+\sqrt{8ee+1}}{2}$ Quia vero $b=c+e=3e+\sqrt{8ee+1}$ et $\sqrt{8bb+1}=6e+2\sqrt{8ee+1}+2e+\sqrt{8ee+1}$ atque $a=\frac{-1+\sqrt{8bb+1}}{2}=\frac{-1+8e+3\sqrt{8ee+1}}{2}$ Quare si numerus trigonalis cujus radix est $\frac{-1+\sqrt{8ee+1}}{2}$ est quadratum erit etiam is quadratum cujus latus est $\frac{-1+8e+3\sqrt{8ee+1}}{2}$ sit illius radix t erit hujus radix $1+3t+4\sqrt{\frac{tt+t}{2}}$

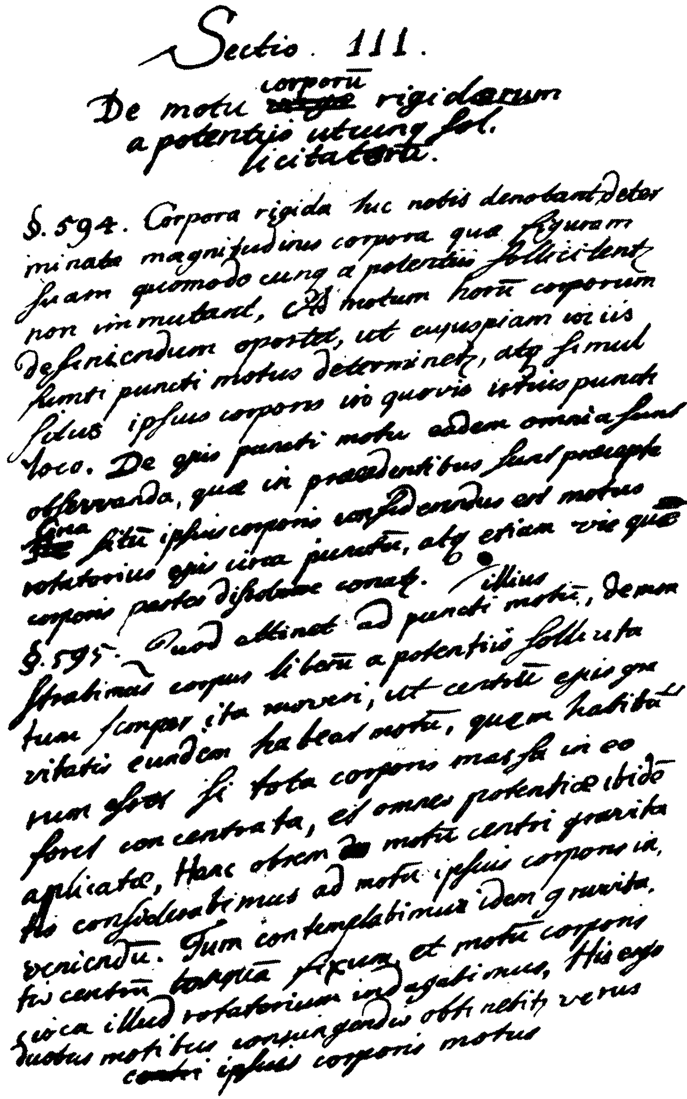
Фиг. 1. Страница из первой тетради с отрывком об отыскании треугольного числа, прибавление которого к заданному дает квадрат целого числа

II) De integratione formularum simpliciorum rationalium (№ 1—35, 55—88); III) De integratione formularum differentialium irrationalium simpliciorum (№ 1—84); V) De reductione formularum differentialium magis compositarum ad simpliciores earumque integratione (№ 1—17, 38—45, 52—111); VI) De integratione formularum differentialium logarithmicarum et exponentialium (№ 1—98). К следующему разделу того же сочинения относится глава De formulis differentialibus in quibus duae insunt variabiles, earumque integratione (№ 1—19, 36—95). Вероятно, к первому разделу сочинения относится и вплетенная здесь же глава IV) De logarithmis imaginariis, eorumque per circuli quadraturam explicatione (№ 1—89, 21 лист), конец которой посвящен интегрированию алгебраических функций, сводящемуся к обратным тригонометрическим функциям. Все эти фрагменты отличны от текста первого тома трактата Эйлера «Institutuonum calculi integralis volumen primum» [E. 342] и представляют собой более ранний вариант курса интегрального исчисления.

Значительное место во второй тетради занимают две рукописи по механике. Первая, более ранняя работа относится к началу 1730-х годов и носит заглавие «Mechanica seu scientia motus». Сохранившаяся часть ее с чертежами на полях содержит с многочисленными пропусками введение и § 1—648 сочинения, составляя 97 листов текста. Почти половина рукописи (всего около 270 промежуточных параграфов) отсутствует.

Судя по началу, рукопись представляет собой раннюю редакцию трактата Эйлера «Mechanica sive motus scientia analytice exposita» [E. 15—16]. Имеется совпадение обозначений и формул, но названия глав и терминология различны. Два листа рукописи, вплетенные в третью тетрадь, содержат название первого раздела первой части сочинения: «Partis I sectio prima, De motu a potentiis in punctum liberum agentibus producto». Принадлежность этих листов к рассматриваемой рукописи подтверждается последней фразой заключительного параграфа (§ 16) из «Introductio» основной рукописи: «... hunc tractatum in duas dartes dividimus, in quarum priore de motu a potentiis producto, in posteriore vero de motu a corporibus motis orto ractabitur».

Приведем сохранившиеся названия глав рукописи «Mechanica seu scientia motus»: I) De motu punctu a potentiis puris tracti rectilineo; II) De motu puncti rectilineo accedenti potentia impura; IV) De motu puncti curvilineo a potentiis et puris et impuris sollicitati. Далее сохранились названия двух глав второго раздела (заглавие его отсутствует): II) De motu puncti super linea data a potentiis puris et impuris simul sollicitati; III) De motu puncti super data superficie a potentiis tam puris quam impuris



Sectio III.

De motu corporum rigidorum a potentiis utcunque sollicitatorum.

§. 594. Corpora rigida hic nobis denotant determinatae magnitudinis corpora quae figuram suam quomodocunque a potentiis sollicitentur non immutant. Ad motum horum corporum definiendum oportet, ut cujuspiam in iis puncti motus determinetur, atque simul situs ipsius corporis in quovis istius puncti loco. De quo puncti motu eadem omnia fere in praecedentibus sunt praecepta observanda, quae in praecedentibus considerandus est motus circa situm ipsius corporis, atque etiam vis qua rotatorius ejus circa punctum, atque etiam vis qua corporis partes dissolvere conatur. Illius corporis puncti motum, demonstrabimus

§. 595. Quod attinet ad puncti motum, demonstrabimus corpus liberum a potentiis sollicitatum semper ita moveri, ut centrum ejus gravitatis eundem habeat motum, quem haberet, si tota corporis massa in eo unum esset concentrata, et omnes potentiae ibidem forent concentratae, et omnes motu centri gravitatis aplicatae. Hanc ob rem in motu ipsius corporis in his considerabimus ad motum idem gravitatis centrum veniendum. Tum contemplabimus et motum corporis circa centrum torquentem axium et motum corporis circa illud rotatorium indagabimus. His ergo duobus motibus conjungendis obtinebitur verus corporis ipsius motus

Фиг. 2. *Начало третьего раздела рукописи Л. Эйлера «Механика или наука о движении»* sollicitati. Третий раздел, начинающийся с § 594, озаглавлен De motu corporum rigidorum a potentiis utcunque sollicitatorum (фиг. 2). Причем это заглавие — измененное. Первоначальное, впоследствии зачеркнутое, было: De motu virgae rigidae a potentiis utcunque sollicitatae. От третьего раздела сохранились только некоторые параграфы (§ 608—613, 618—648) главы первой De motu corporum rigidorum liberorum a nullis potentiis sollicitatorum.

Вторая, более поздняя, рукопись по механике не имеет общего заглавия (часть ее вплетена в третью тетрадь). Она сохранилась хорошо, утрачены лишь 4 параграфа из 241. Размер сохранившейся части составляет 63 листа. На четырех отдельных таблицах приложены чертежи ко второй половине работы (№ 29—53); первые 28 чертежей отсутствуют. Приведем перечень глав сочинения: I) De motu corporum in genere; II) De legibus motus spontanei; III) De perturbatione motus a viribus oriunda; IV) De mensura virium et massarum absoluta; V) De motu corporum sibi parallelo; VI) De corporum rigidorum motu circa axem fixum; VII) De investigatione momenti inertiae; VIII) De vi, quam axis gyrationis a potentiis sollicitantibus sustinet; IX) De motu oscillatorio corporum rigidorum. Рукопись относится, по-видимому, к концу 1740-х годов.

Большой интерес представит тщательное сравнение этих двух рукописей по механике с напечатанными работами Эйлера. Оно позволит проследить развитие основных положений механики точки и твердого тела в творчестве Эйлера. Существенным дополнением к этим двум большим рукописям Эйлера по механике являются его юношеские заметки по механике, о которых будет сказано при описании третьей тетради.

Помимо указанных двух сочинений по механике, вторая тетрадь содержит еще два сочинения по теории музыки. Это семь глав «Theoriae musicae»: I) De musica et sonis in genere; II) De principiis suavitatis; III) De consonantis; IV) De sequelis consonantiarum; V) De seriebus consonantiarum; VI) De variis intervalli diapasoni divisionibus; VII) De intervallis, quae habentur in expositis generibus (всего 35 листов) и «Tractatus de musica» (§ 1—210, 37 листов), начало которого вплетено в третью тетрадь. Оба эти сочинения связаны с ранней работой Эйлера «Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae» [E. 33], над которой он работал в конце 1720-х и в 1730-х годах.

Еще два фрагмента, входящие во вторую тетрадь, посвящены оптике. Один из них (112 листов) озаглавлен «De instrumentis dioptricis ad visionem accomodatis pars secunda, continens constructionem telescopiorum ex quotcunque lentibus compositorum». Он содержит восемь глав: вступительную, о телескопах с двумя линзами, о телескопах с тремя и четырьмя линзами, дающих прямое и обратное изображение объекта, а также о телескопах с пятью и шестью линзами. Фрагмент пронумерован Эйлером и согласно этой нумерации он составлял страницы 185—404 всей рукописи.

Второй фрагмент по оптике (№ 1—42, 12 листов) не имеет общего заглавия и содержит три главы: I) Quo principia refractionis per experimenta ac rationationem stabiliuntur; II) De modo rationem refractionis pro corporibus diaphanis solidis per experimenta explorandi; III) De modo rationem refractionis corporum diaphanorum fluidorum per experimenta explorandi.

Помимо перечисленных рукописей, вторая тетрадь содержит семь сочинений, представленных на соискание премий Парижской академии:

1. «Meditationes super problemate nautico». Текст рукописи, особенно в конце, отличается от опубликованного [E. 4]. В частности, Эйлер описывает проведенные им в подтверждение своей теории эксперименты с моделью корабля. Сочинение удостоено похвального отзыва (accessit) Академии в 1727 г.

2. «Dissertatio de igne». Рукопись представляет собой полный первоначальный вариант сочинения, несколько отличающийся, преимущественно во второй половине, от опубликованного [E. 34]. Сочинение удостоено премии в 1738 г.

3. «Methodus observandi inclinationem acus magneticae». Первоначальная рукопись сочинения «De observatione inclinationis magneticae dissertatio» [E. 108], удостоенного премии в 1743 г.

4. «De promotione navium sine vi venti». Копия, написанная рукой И.-А. Эйлера, с пометками о чтении первой части в Берлинской академии в ноябре 1763 г., а второй части — в марте 1764 г. Текст рукописи почти не отличается от сочинения, представленного Л. Эйлером на соискание премии 1753 г. и удостоенного похвального отзыва. Это сочинение было опубликовано в Париже только в 1771 г. [E. 413]. Впрочем, рукопись содержит некоторые дополнительные ссылки, например, на гидродинамические исследования Д. Бернулли.

5. «Investigatio perturbationum, quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur» [E. 414]. Начало рукописи отсутствует, сохранились только § 55—70, 103—130 первой части и вся вторая часть с заключением. Текст совпадает с опубликованным. Сочинение удостоено удвоенной премии в 1756 г.

6. «Recherches sur l'arrimage des vaisseaux et quelles bonnes qualités on en peut procurer à un vaisseau». Первые 38 параграфов рукописи

написаны Л. Эйлером, остальная часть, незначительно отличающаяся от опубликованного текста [А. 27], написана И.-А. Эйлером и содержит обширную правку Л. Эйлера. Это сочинение, представленное Парижской академии от имени И.-А. Эйлера, было премировано в 1761 г.

7. Переписанный рукой И.-А. Эйлера текст сочинения, представленного им вместе с отцом на соискание премии 1770 г. по вопросу: Perfectionner les méthodes sur lesquelles est fondée la théorie de la Lune, de fixer par ce moyen celles des équations de ce satellite, qui sont encore incertaines, et d'examiner en particulier si l'on peut rendre raison, par cette théorie de l'équation séculaire du mouvement de la Lune. Текст рукописи почти не отличается от опубликованного [E. 485].

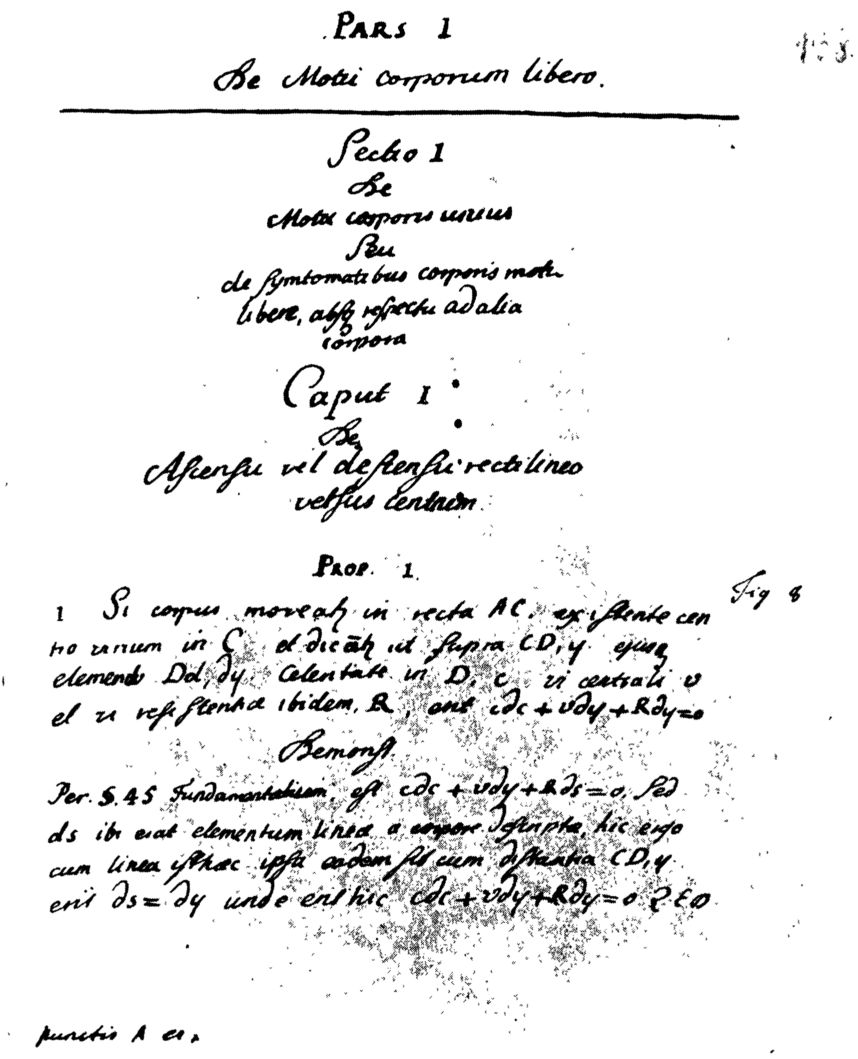
Наконец, вторая тетрадь содержит еще фрагмент рукописи на французском языке (6 листов большого формата), посвященный неравенствам в движении Юпитера и Сатурна. Разделы II—V рукописи близки по содержанию к соответствующим разделам премированного в 1752 г. сочинения Эйлера «Recherches sur les inégalités de Jupiter et de Saturne» [E. 384] и имеют одинаковые заглавия.

Третья тетрадь (Архив Академии наук СССР, ф. 136, оп. 1, № 155) содержит 504 листа и представляет наибольшие затруднения при разборе, поскольку она содержит значительное число мелких, часто сильно разрозненных отрывков.

Вопросы математики практически вовсе не представлены среди рукописей третьей тетради, если не считать одной странички, заключающей «Solution de quelques questions du Livre III de l'Algebre de Mr. Ozanam». Приведем одну из этих задач: найти x и y так, чтобы выражения $x^2 + xy$ и $y^2 + xy$ были квадратами.

Основное содержание тетради посвящено различным вопросам механики, астрономии, оптики. Большое количество заметок и фрагментов относится к раннему периоду научной деятельности Эйлера, частично еще к годам занятий в Базеле с Иоганном I Бернулли.

Среди ранних рукописей по механике отметим начало сочинения по механике точки, № 1—92 которого составляют 17 листов текста. Этот фрагмент имеет заглавие: Pars I, De motu corporum libero: Sectio I, De motu corporis unius seu de symtomatibus corporis moti libere, absque respectu ad alia corpora; Caput 1, De ascensu vel descensu rectilineo versus centrum (фиг. 3). Кроме того, здесь же имеется фрагмент из вступительной части (Fundamentalia) того же сочинения, посвященный криволинейному движению точки под действием центральной силы (№ 24—52, 5 листов). Оба эти фрагмента близки по содержанию к планам и наброскам сочинения по



PARS 1

De Motu corporum libero.

Sectio 1
De
Motu corporis unius
Seu
de symtomatibus corporis moti
libere, absq respectu ad alia
corpora

Caput I
De
Ascensu vel descensu rectilineo
versus centrum.

Prop. 1.

1 Si corpus moveatur in recta AC, existente centro virium in C, et dicatur ut supra CD, y, ejusq elementum Dd, dy, Celeritate in D, c, vi centrali v et vi resistentiae ibidem, R, erit $cdc + vdy + Rdy = 0$ Fig 8

Demonstr.

Per. §. 45 Fundamentalium, est $cdc + vdy + Rds = 0$, sed ds ibi erat elementum lineae a corpore descriptae, hic ergo cum linea ista haec ipsa eadem sit cum distantia CD, y erit $ds = dy$ unde erit hic $cdc + vdy + Rdy = 0$ Q.E.D.

punctis A et

Фиг. 3. Страница из раннего сочинения Л. Эйлера по механике точки механике точки, сохранившимся в записной книжке Эйлера базельского периода (Архив Академии наук СССР, ф. 136, оп. 1, № 129).

Отметим еще следующие ранние заметки Эйлера:

1) «De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium» (2 листа);

2) «De motu corporum a pluribus viribus centralibus sollicitatorum» (3 листа);

3) «De descensu corporum rotundorum super planis inclinatis» (2 листа);

4) «De figuris, quas corpora flexibilia debent indicere a potentiis quibuscunque sollicitata» (12 листов);

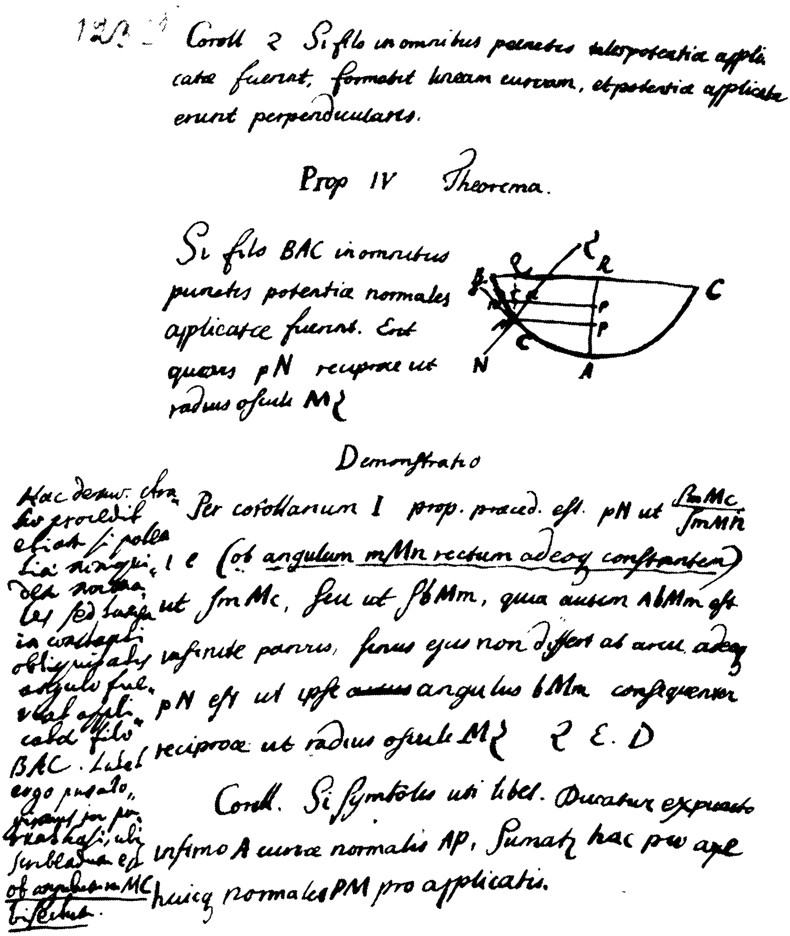
5) «Problema, Si chorda *AB* tendatur a pondere *P* invenire tempora vibrationum ejus datis longtudine et pondere ejus» (1 лист).

Последние три заметки сохранили пометы Иоганна I Бернулли (фиг. 4). Одно из положений заметки о скатывании тел по наклонной плоскости вошло в качестве пятого тезиса приложений (Annexa) к диссертации Эйлера 1727 г. на соискание кафедры физики в базельском универсистете («Dissertatio physica de sono» [E. 2]).

Укажем еще заметку «De communicatione motus in collisione corporum tam elasticorum quam mollium et durorum» (3 листа), фрагмент на 3 листах с разделами: De mensura virium mortuarum и De mensura virium vivarum и фрагмент лекции о статике (7 листов). В третью тетрадь заплетены также «Additamenta» к § 13 опубликованной во втором томе «Opera postuma» заметки «Vera vires existimandi ratio» [E. 824].

Из более поздних рукописей третья тетрадь содержит фрагменты сочинения по статике (глава 1: De statica et potentiis in genere; глава 2: De aequilibrio potentiarum puncto libero applicatarum (всего 31 лист), часть которого вплетена во вторую тетрадь. Это сочинение напоминает в начале развернутое изложение работы «Statica» [E. 823], опубликованной также во втором томе «Opera postuma». Отметим, наконец, еще фрагмент, озаглавленный Caput primum, De motu corporum rigidorum a nullis potentiis sollicitatorum (№ 1—25, 4 листа).

Любопытным явилось обнаружение в третьей тетради нескольких фрагментов (32 листа), дополняющих 8 листов опубликованной во втором томе «Opera postuma» первой главы сочинения о движении тел в движущихся трубках, носящей название De motu corporum in tubo rectilineo mobili circa axem fixum per ipsum tubum transeuntem [E. 827]. Здесь оказались № 49—54, 56—60, 63—68 продолжения указанной первой главы, № 69—104 второй главы (De motu corporum in tubo rectilineo mobili circa axem fixum extra tubum situm), № 111—115, 120, 133—143, часть которых относится к третьей главе сочинения, и № 153—154, 160—161



125. — Coroll 2 Si filo in omnibus punctis talis potentia applicata fuerint, formabit lineam curvam, et potentia applicatae erunt perpendiculares.

Prop IV Theorema.

Si filo BAC in omnibus punctis potentia normales applicatae fuerint. Erit quasi pN reciproce ut radius osculi Mζ

Demonstratio

Hac demonstr. [illegible] procedit etiam si potentiae non sint normales sed tangenti in contactu obliquitatis angulo [illegible] applicatae filo BAC. [illegible] ergo [illegible], [illegible] sinus [illegible] est angulum MC bisecat.

Per corollarium 1 prop. praced. est pN ut $\frac{BnMc}{ʃmMn}$ i e (ob angulum mMn rectum adeoq constantem) ut ʃmMc, seu ut ʃbMm, quia autem AbMm est infinite parvus, sinus ejus non differt ab arcu, adeoq pN est ut ipse angulus bMn consequenter reciproce ut radius osculi Mζ Q. E. D

Coroll. Si symbolis uti libet. Ducatur ex puncto infimo A curvae normalis AP, sumatq hac pro axe huicq normales PM pro applicatis.

Фиг. 4. Четвертая страница рукописи Л. Эйлера «О фигурах, которые должны принимать гибкие тела под действием произвольных сил» с пометами Иоганна Бернулли четвертой главы (Alia methodus facilior haec problemata circa motum corporum in tubis resolvendi).

Несколько ранних заметок Эйлера из третьей тетради посвящены теории сопротивления жидкости и гидравлике. Таковы заметки «Dissertatio de motu corporum super lineis curvis in medio resistente» (1 лист), «Dissertatio de motu corporum in fluidis abstrahendo ab omni gravitate» (8 листов), «Dissertatio de motu corporum oblique projectorum in fluidis» (4 листа), «De effluxu aquae ex tubis cylindricis utcunque inclinatis [et] inflexis» (§ I—VI, XIX—LXXXI, 16 листов), «De natura fluidorum» (4 листа). Имеются несколько отдельных теорем об остойчивости плавающих тел (6 листов).

Вторая из названных здесь заметок находится в непосредственной связи с опубликованной посмертно заметкой Эйлера «Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta» [E. 853]. В последней Эйлер анализирует результаты опытов, проведенных в сентябре 1727 г. с выстреливанием ядер, а в указанной неопубликованной заметке он выводит формулы, на основании которых проведена обработка опытов.

Два фрагмента третьей тетради посвящены вопросам нагнетания воды по трубам при помощи насосов. Один из них имеет заглавие «Détermination de l'effet q'une machine proposée doit produire étant poussée par une force donnée» (8 листов) и близок по содержанию к опубликованной работе Эйлера «Discussion plus particulière de diverses manières d'élever de l'eau par le moyen des pompes avec le plus grand avantage» [E. 207]. Он дополнен разделом «Application de ces formules à la machine de Sans-Soucy» и выводами.

Обширный цикл заметок и фрагментов относится к астрономии и главным образом к небесной механике. Однако бóльшая часть этого материала представляет разрозненные отрывки, окончательная классификация которых без специального исследования затруднительна.

Отметим здесь мелкие, частично весьма ранние, заметки:

1) «De motu Lunae» (4 листа);

2) «De motu Lunae in ellipsi» (3 листа);

3) «Dissertatio de motibus Lunae» (2 листа);

4) «Ex datis initio et fine eclipsis Lunae invenire tempus maximae obscurationis» (2 листа);

5) «De trium corporum mutua attractione» (2 листа);

6) «De attractione corporum finitae magnitudinis» (4 листа).

Из более крупных фрагментов укажем на отрывки из некоего большого сочинения по теории Луны, содержащие, в частности, названия двух первых глав: De viribus, quibus Solis ac Lunae motus determinatur и De motu Solis ejusque perturbatione a Luna. Отдельные ненумерованные главы другого сочинения по теории Луны («Constructio elementorum motus Lunae, Applicatio theoriae ad observationes eclipsium lunarium») позволяют высказать предположение, что часть заключающихся в третьей тетради материалов (до 50 листов) родственна опубликованным в «Opera postuma» трем главам из неизвестного сочинения по теории Луны [E. 838].

Единственное большое сочинение тетради по небесной механике, которое можно легко поставить в соответствие с изданной работой Эйлера, представлено рукописью «Determinatio orbitae cometae, qui mense Martio potissimum hujus anni 1742 fuit observatus» (§ 1—65, 30 листов). Однако текст рукописи не тождественен опубликованному [E. 58].

Отметим еще три сочинения из третьей тетради, связанные отчасти с практической астрономией. Это «De effectu successivae propagationis lucis in apparitione tam planetarum quam cometarum» (§ 1—3, 8—11, 17—28), «Solutio problematis astronomici: Ex datis tribus stellae fixae altitudinibus et temporum differentiis invenire elevationem poli et declinationem stellae» и «Emendatio tabularum astronomicarum per loca planetarum geocentrica» (§ 1—12, 4 листа). Первая из этих рукописей является неполным латинским оригиналом сочинения, опубликованного во французском переводе в Мемуарах Берлинской академии за 1746 г. [E. 104]. Вторая рукопись тождественна сочинению, опубликованному в четвертом томе «Комментариев» Петербургской академии [E. 14]. Наконец, третья рукопись является, вероятно, ранним наброском начала одноименного сочинения, опубликованного в двенадцатом томе «Комментариев» Петербургской академии [E. 131].

Помимо вопросов механики и астрономии, третья тетрадь содержит, как сказано выше, материалы по оптике. Среди них начало главы 1: De radiorum refractione per lentes opticas (§ 1—13) и главы 3—4: De tubis duabus lentibus instructis (§ 1—39) и De telescopiis duabus lentibus instructis (§ 1—6), принадлежащие, возможно, одному и тому же сочинению, а также ряд разрозненных фрагментов, близких по тематике к предыдущим. Кроме того, здесь имеется часть рукописи «Nova theoria lucis et colorum» (§ 1—14, 31—34, 39—42, 55—74, 79—90, 103—125) [E. 88] и ряд ранних фрагментов (10 листов) по геометрической оптике, относящихся, по-видимому, еще к середине 1720-х годов. Среди последних отметим заметку «De tubo trilenticulari seu trium lentium».

Наконец, третья тетрадь включает некоторые рукописи по физике. Отметим план сочинения «De igne», фрагмент на французском языке о земном магнетизме, относящийся ко времени написания Эйлером опубликованной в «Opera postuma» заметки «Réflexions sur la détermination de la déclinaison de la boussole» [E. 849], фрагменты на латинском языке о природе мельчайших частиц вещества.

В заключение укажем еще три заметки третьей тетради, связанные с вопросами географии: «Excerpta ex D-ni Bouguer libro de mensura Terrae» (1 лист), «Vorschlag wie die im geographischen Vorrath befindlichen Karten zu nutzen» (2 листа) и «Methodus universalis superficiem globi in plano repraesentandi» (13 листов). Последняя рукопись состоит из двух частей, написанных разными почерками, принадлежность которых кому-либо из учеников Эйлера установить не удалось.

III. Переписка Эйлера, хранящаяся в Архиве Академии наук СССР, находится в различных фондах Архива: в фонде самого Эйлера, в фонде «Ученой корреспонденции», в фонде Канцелярии и в личных фондах (Миллер, Шумахер и др.). Она содержит около 1700 писем, адресованных Эйлеру, и более 500 оригиналов и копий писем, написанных Эйлером[3]. Многие из этих писем опубликованы. В частности, опубликована почти вся переписка с И. Бернулли, Д. Бернулли, Гольдбахом, Даламбером, Клеро, Лагранжем, Ломоносовым. Но имеется ряд интересных с точки зрения истории науки неопубликованных писем и в переписке с другими учеными. Мы коротко остановимся на содержании таких писем, обращая главное внимание на письма математического содержания. Предварительно укажем на некоторые неопубликованные до сих пор письма из переписки с И. Бернулли, Д. Бернулли и Лагранжем.

Новых писем из переписки Эйлера с Даниилом Бернулли имеется 30. Бóльшая часть их относится к 1735—1741 гг. Основное содержание писем — различные вопросы гидродинамики, вариационное исчисление, колебание упругих стержней, теория приливов, фигура Земли, теория Луны. Упоминается критика трактата Эйлера по механике в Англии. Обсуждаются работы Ньютона, Клеро, Бугера. Кроме того, имеются четыре письма, относящиеся к концу этой переписки (1767—1768) и содержащие указания на работы Д. Бернулли по теории вероятностей и работы Эйлера по теории Луны, по диоптрике и о колебаниях струны. Неоднократно критикуется Даламбер.

Далее имеются три неизданных письма от Иоганна Бернулли (отца Даниила) к Эйлеру (1738), в которых трактуются главным образом вопросы

[3] В приложении приведен список корреспондентов Эйлера с указанием числа сохранившихся писем, составленный по материалам Архива Академии наук СССР.

гидродинамики. Упоминается «Hydrodynamica» Д. Бернулли. Сохранились также копии ряда писем Эйлера к И. Бернулли, позволяющие восстановить отдельные неразобранные места в опубликованных письмах.

Переписка Эйлера с Лагранжем была почти целиком опубликована в «Oeuvres complètes» Лагранжа. Кроме того, отдельные письма из Архива Академии были опубликованы в книге «Ученая корреспонденция Академии наук XVIII века» (1937) и в статье С. Я. Лурье «Неопубликованная научная переписка Леонарда Эйлера» (в сборнике «Леонард Эйлер», 1935). Остались неопубликованными три письма Лагранжа к Эйлеру (1767, 1769, 1772). Приведем их краткую аннотацию: Выражение радости по поводу издания «Institutiones calculi integralis» Эйлера. Особенное восхищение исследованием Эйлера вопроса о том, заключается ли решение дифференциального уравнения в общем интеграле. Упоминание о том, что Лагранж доложил свою работу о движении тел, притягивающихся к двум неподвижным центрам, которая, по словам Лагранжа, является лишь упрощением в изложении и обобщением прежней работы Эйлера по этому вопросу. Просьба сообщить мнение Эйлера о работе Лагранжа о таутохроне (1768). О французском переводе курса алгебры Эйлера. Работа Лагранжа о решении уравнений с помощью рядов с упоминанием в этой связи Лекселя и Ламберта.

Переходим теперь к остальным письмам, написанным Эйлером и хранящимся в Архиве Академии. По числу писем резко выделяются три адресата: Шумахер (177 писем), Миллер (110 писем) и Ветштейн (55 писем). Письма к Шумахеру и Миллеру связаны в основном с делами Академии. Мы не будем их касаться. Каспар Ветштейн, родом из Базеля, был капелланом и библиотекарем принца Уэльского. В 1741 г. он познакомился в Петербурге с Эйлером. Ветштейн не был ученым, но все же его переписка с Эйлером интересна не только для биографии Эйлера, но и для установления его научных взглядов. Переписка эта относится к периоду 1746—1759 гг.

Укажем коротко основное содержание некоторых писем. Эйлер подробно и неоднократно сообщает о русских экспедициях в Восточную Азию и на Тихий океан. Упоминается Делиль в связи с Камчатской экспедицией. Неоднократно говорится о том, что орбиты планет сокращаются и их периоды обращения становятся короче. Имеется указание на невозможность убедиться в этом, опираясь на наблюдения древних. Вообще много говорится о вопросах астрономии и об устройстве телескопов. Неоднократно упоминается Ньютон (теория Луны, рефракция, преломление лучей различного цвета). Выражается недоумение по поводу прекращения переписки со Стирлингом. Эйлер жалуется на условия жизни в Берлине («Интерес к литературе берет верх над интересом к математике»[4]) и выражает желание переехать в Англию. В связи с этим он пишет: «Я вполне понимаю, что если бы иностранцам и дали разрешение поселиться в Англии, то от этого было бы довольно далеко до того, чтобы им дали содержание». Много страниц писем Эйлера посвящено политическим событиям в Германии (1756—1759).

Значительный интерес представляют письма Эйлера к Дж. Полени (1683—1761), математику из Падуи, почетному члену Петербургской академии. Архив располагает десятью копиями писем к Полени. Эти письма относятся к периоду с 1735 по 1742 г. Укажем их содержание. Приводится способ интегрирования общего уравнения Рикатти

$$\frac{ds}{dz} + s^2 = Z(z)$$

при помощи трактрис, причем основание их получается квадратурой. Большое внимание, как и в других письмах Эйлера, уделяется суммированию рядов и разложению функций в ряды. Подробно обсуждается формула

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \alpha_n \pi^{2n}$$

и закон следования коэффициентов α_n. В письме от 1740 г. указываются формулы

$$\alpha_1 = \frac{1}{6}; \qquad \alpha_2 = \frac{2\alpha_1^2}{5};$$

$$\alpha_3 = \frac{4\alpha_1\alpha_2}{7}; \qquad \alpha_4 = \frac{4\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2^2}{9}; \qquad \ldots,$$

где числители получаются как коэффициенты при степенях x в разложении

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots)^2.$$

Рассматривается разложение в степенной ряд функций $\lg \sin \frac{m}{n} 90^\circ$ и $\lg \cos \frac{m}{n} 90^\circ$ и, как и выше, обсуждается вопрос о коэффициентах этих раз-

[4] Здесь и далее цитаты из писем приведены в переводе на русский язык.

ложений. В разложении первой функции выделяется выражение

$$\lg(2n+m)+\lg(2n-m)+\lg m-3\lg n.$$

Приводится формула суммирования Эйлера. Много места уделяется вопросам астрономии. Обсуждается величина скорости света. Поднимается вопрос о том, претерпевают ли периоды вращения планет вокруг Солнца и своей оси какое-нибудь изменение. Как и в письмах к Ветштейну, указывается на невозможность использовать наблюдения древних ввиду изменения меры времени. В одном из писем Эйлер жалуется на отрицательный отзыв о его сочинении «Mechanica sive motus scientia analytice exposita» из-за применения в нем аналитического метода.

По содержанию близко к предыдущему единственное письмо (1740) математику из Иоахимсталя, члену Берлинской академии и Лондонского королевского общества, Ф. Ноде (1684—1745). Кроме упомянутых выше результатов (не всех) в нем приводится формула

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\frac{1}{3n-m}-$$
$$-\frac{1}{3n+m}-\ldots=\frac{\pi}{n\sin\frac{m}{n}90^\circ}$$

и суммируется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pm n}.$$

Последнее в некоторой части имеется и в письме к Полени. Далее Эйлер указывает, что выражение

$$\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}\quad (n\text{ — целое положительное})$$

есть общая форма целых чисел, квадраты которых суть треугольные числа. Указывается число разбиений целого числа на неравные слагаемые при заданном числе слагаемых.

Пять писем к немецкому астроному Т. Майеру (1723—1762) из Гёттингена, относящиеся к 1751—1755 гг., касаются главным образом движения Луны, которым занимался Майер, и других астрономических вопросов. Мы остановимся на одном из этих писем (1751) математического характера. Начало его содержит пространное рассуждение о скорости звука, связанное с работой Эйлера «De propagatione pulsuum per medium elasticum» [E. 136]. Далее идет исследование интегрального логарифма

$$y = \int_0^x \frac{dx}{\lg x}.$$

При помощи последовательного интегрирования по частям Эйлер получает расходящийся ряд

$$y = -ux(1 - 1!\,u + 2!\,u^2 - 3!\,u^3 + \ldots),$$

где $u = -\frac{1}{\lg x}$. Далее приводится разложение расходящегося ряда, стоящего в скобках, в непрерывную дробь вида

$$S = 1 + \cfrac{u}{1 + \cfrac{u}{1 + \cfrac{2u}{1 + \cfrac{2u}{1 + \cfrac{3u}{\ldots\ldots}}}}}$$

Затем, используя подходящие дроби, Эйлер представляет интегральный логарифм сходящимся рядом. Указанное выше непосредственно связано с работой Эйлера «De transformatione seriei divergentis: $1 - mx + m(m + n)x^2 - m(m + n)(m + 2n)x^2 + m(m + n)(m + 2n)(m + 3n)x^3$ etc. in fractionem continuam» [E. 616].

Большой интерес представляют два письма Эйлера к Дж. Стирлингу. Мы не будем о них говорить, поскольку они напечатаны в десятом выпуске «Историко-математических исследований». Там же опубликованы и письма Эйлера к Я. Брюсу — известному сподвижнику Петра I.

Интересны письма Эйлера к бургомистру города Данцига К. Элеру, по предложению которого Эйлер вступил в переписку с Г. Кюном — преподавателем математики в Данциге и членом Петербургской академии. Имя Кюна постоянно упоминается в переписке Эйлера с Элером. Эта переписка относится к периоду 1735—1740 гг. и содержит шесть писем, пять из которых велики по объему. В них Эйлер приводит весьма подробно все рассуждения и доказательства.

Большое место в письмах Эйлера занимает вопрос об отрицательных и мнимых числах. Сам Эйлер защищает законность и необходимость этих чисел в математических исследованиях и неоднократно полемизирует по этому вопросу с Кюном, и особенно с X. Вольфом. Эйлер упоминает и об иррациональных и трансцендентных числах, приводя $3^{\sqrt{2}}$, как пример этих последних чисел. Рассуждения Эйлера о природе чисел связаны в рассматриваемых письмах с вопросами алгебры — решением уравнений и разложением полиномов на множители. Эйлер говорит, что он согласен с теми учеными, которые утверждают, что всякое алгебраическое уравнение разлагается на множители первой степени, число которых равно степени уравнения. Далее он применяет это и к уравнению бесконечной степени

$$y = \sin s = \frac{s}{1!} - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \ldots$$

и таким путем выводит суммы известных числовых рядов, выражающиеся через степени π.

Далее приводится формула суммирования в виде

$$S = \alpha \int F dx + \beta F + \gamma \frac{dF}{dx} + \delta \frac{d^2F}{dx^2} + \varepsilon \frac{d^3F}{dx^3} + \ldots,$$

где

$$\alpha = 1, \ \beta = \frac{\alpha}{2}, \qquad \gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3},$$

$$\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2\cdot 3} + \frac{\alpha}{2\cdot 3\cdot 4}.$$

Она применяется к ряду примеров. В частности, Эйлер указывает сумму миллиона членов гармонического ряда (до шестнадцатого десятичного знака). Приводится много примеров численных рядов.

Большое место в письмах Элеру занимают также вопросы теории чисел. Эйлер рассматривает делимость $2^{n/2} \pm 1$ на простое число $(n+1)$ и те случаи, когда при простом m число $2^m - 1$ также будет простым (в связи с совершенными числами). Он указывает, что $2^{32} + 1$ делится на 641. Далее он формулирует, как доказанную, малую теорему Ферма для случая, когда показатель степени есть произведение различных простых чисел. В одном из писем Эйлер формулирует обобщение известной задачи о кёнигсбергских мостах и дает решение этой задачи. Далее он пишет: «...ты можешь убедиться, славнейший муж, в том, что это решение по своему характеру, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне не понятно, почему скорее от математика, нежели от какого-нибудь другого человека, следует ожидать этого решения, ибо оно подкрепляется одним только рассуждением, и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике. Итак.

я не знаю, каким образом получается, что вопросы, имеющие совсем мало отношения к математике, скорее разрешаются математиками, нежели другими. Между тем ты, славнейший муж, определяешь место этого вопроса в геометрии положения, и что касается этой новой науки, то, признаюсь, мне неизвестно, какого рода относящиеся сюда задачи были желательны Лейбницу и Вольфу». Эйлер просит прислать ему трудные задачи такого рода.

Письма содержат некоторые задачи по геометрии и механике. В частности, приводятся подробные рассуждения, касающиеся решения задачи, рассмотренной в работе Эйлера «De motu cymbarum remis propulsarum in fluviis» [E. 94], представленной в Конференцию Академии в 1738 г. В ряде мест имеется критика Х. Вольфа, но Эйлер пишет, что желательно ее исключить, если письма будут печататься.

В одном из писем разбирается рукопись профессора математики и логики в Кёнигсберге М. Кнутцена (1713—1751) «Решение некоторых петербургских задач». В Архиве имеются и копии двух писем Эйлера к самому Кнутцену, причем только в одном из них (1741) трактуются научные вопросы: теория магнетизма, устройство барометров и термометров. Как уже упоминалось, письма к Элеру связаны в основном с Кюном. Сохранилось также одно письмо Эйлера непосредственно к Кюну (1742), посвященное главным образом вопросу о фигуре Земли.

Одно письмо Эйлера (1766), содержащее вопросы астрономии — неравенства в движении Луны и Юпитера, адресовано члену Парижской академии Ж. Байи (1736—1793).

Два письма (1737, 1740) адресованы датскому морскому офицеру Ф. Вегерслёфу (1702—1763), который приезжал в Россию для изучения гидротехнических сооружений в Петербурге и Кронштадте. Эти очень интересные письма содержат подробные рассуждения об остойчивости плавающих тел и сопротивлении воды. Они во многом близки к содержанию «Scientia navalis».

Семь писем (1742—1751) адресованы астроному Г. Гейнзиусу (1709—1769), который был экстраординарным членом Петербургской академии (1736—1744) и потом профессором в Лейпциге. В основном письма посвящены астрономии — орбиты комет, движение Луны, построение телескопов. В письмах содержатся таблицы. В последнем письме обсуждаются некоторые геометрические вопросы, связанные с работами архидиакона И. де Фаньяно и его отца К. де Фаньяно.

Имеются в Архиве две выдержки из писем (1746) Эйлера к Делилю (1688—1768), который в 1746 г. жил еще в Петербурге. В одном из писем

Эйлер подробно обсуждает вопрос об уменьшении периодов обращения планет и их эксцентриситетов из-за сопротивления эфира. Далее он пишет о своих лунных таблицах и о фигуре Земли в связи с работами Бугера я де Кондамина.

Одно письмо (1752) к X. Крагценштейну (1723—1795), который в то время жил в Петербурге, посвящено обсуждению приборов адресата. В письме выражается пожелание, чтобы Кратценштейн составил извлечение из «Scientia navalis» Эйлера «для потребностей мореплавания».

Письмо (1755) к французскому астроному Н. Лакайлю (1713 — 1762) содержит обсуждение вопроса о фигуре Земли и ее неоднородности. Имеется три небольших письма (1738—1740) к Мопертюи (1698—1759). Основное их содержание — теория фигуры Земли и ее неоднородность, а также выражение радости по поводу того, что Мопертюи одобрил трактат Эйлера по механике.

Четыре письма адресованы членам Петербургской академии наук. Первое письмо (1745) содержит обсуждение книги Филелейтера «De conservatione virium vivarum dissertatio» в связи со спорами между петербургскими академиками Вейтбрехтом и Рихманом по поводу этой книги. Это письмо приведено в указанной выше статье С. Я. Лурье. Во втором письме (1746) упоминается о сопротивлении эфира движению небесных тел в связи с письмом к Делилю. Третье письмо (1754) написано в связи с предложенной Петербургской академией по инициативе М. В. Ломоносова темой о причинах электрических явлений. Высоко оценивается речь М. В. Ломоносова «Слово о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих» и его объяснение внезапно возникающего холода. Эйлер, обсуждая этот вопрос, говорит, что он нашел доказательство того, что атмосфера может находиться в равновесии только в тех случаях, когда на одной и той же высоте давление, плотность и температура — постоянные. Последнее письмо (1768) содержит отчет о последних работах Эйлера — написание сочинений по диоптрике и теории Луны. Указывается на помощь в работе, ввиду потери зрения, со стороны Л. Ю. Крафта и И.-А. Эйлера.

Два письма Эйлера (1736, 1740) адресованы И. Маринони (1676—1755). который с 1730 г.был королевским астрономом в Вене, а в 1746 г. был избран членом Берлинской академии и почетным членом Петербургской академии. Первое из них содержит подробное изложение решения задачи о кёнигсбергских мостах. При этом Эйлер пишет: «Вопрос этот хотя и банальный, показался мне, однако, достойным внимания тем, что для его решения недостаточны ни геометрия, ни алгебра, ни комбинаторное искусство. Поэтому мне пришла в голову мысль, не относится ли он к геометрии положения, которую в свое время искал Лейбниц». Во втором письме подробно обсуждается вопрос о построении рядов, наиболее удобных для вычисления числа π. Это письмо опубликовано в десятом выпуске «Историко-математических исследований».

Пять писем (1742—1744) адресованы члену Петербургской академии Г.-В. Крафту (1701—1754). Они изложены в упомянутой выше статье С. Я. Лурье. В письме (1767) к Г.-М. Ловицу (1722—1774), астроному в Гёттингене, а с 1768 г. члену Петербургской академии, Эйлер сообщает о тех работах, которые его ожидают в Петербургской академии. Первая работа— это участие в экспедиции для наблюдения прохождения Венеры через диск Солнца. Далее Эйлер пишет о том, что, возможно, будет осуществлен проект канала, соединяющего Дон с Волгой у Царицына.

Два письма Эйлера (1742—1743) адресованы А. Д. Кантемиру (1709—1744). Во втором из них Эйлер пишет о влиянии комет на наклон эклиптики и о теории кометных хвостов, которую ему сообщил Кюн.

Четыре письма (1770—1772) адресованы польскому королю Станиславу и польскому географу Пертесу. В них Эйлер по поручению Петербургской академии сообщает географические координаты ряда городов России. Упоминается о пересылке Станиславу письма, полученного Эйлером от Г.-Г. Тотлебена, о военных действиях на Кавказе.

Два письма Эйлера адресованы маркизе Э. дю Шатле (1706—1749). Первое помечено 1740 г., а второе — без даты. Во втором письме Эйлер хвалит книгу адресата «Institutions physiques» и пишет: «больше всего удовольствия доставило мне то, что Вы так твердо и основательно боретесь с некоторыми английскими философами, которые желали вовсе изгнать гипотезы из физики, а по моему мнению гипотезы являются единственным способом прийти к достоверному познанию физических причин». Далее он резко порицает голландского физика Мушенбрёка — сторонника Ньютона — за то, что он отрицает существование «тонкой материи», и пишет, что и де-Меран (французский физик) будет убежден доводами адресата. Письмо не закончено. Приведем заключительные фразы: «Я начинаю с первого принципа механики, что каждое тело само по себе сохраняет свое состояние покоя или движения. Этому свойству вполне можно дать название силы, если только не утверждать, что всякая сила есть стремление к изменению состояния, как это делает г. Вольф. Итак, всякое тело обладает...»

Два больших письма (1770), адресованные члену-корреспонденту Парижской академии энтомологу Ш. Бонне (1720—1793), содержат разбор книги адресата «Palingénésie philosophique», присланной Эйлеру. Второе письмо повторяет по существу первое, которое по предположению Эйлера не дошло до адресата. Письмо содержит общие взгляды Эйлера на некоторые научные вопросы и вопросы метафизического характера.

Отношение Эйлера к философии Х. Вольфа очень ясно выявляется из двух его писем (1738) к Г. Бильфингеру и письма к самому Х. Вольфу. Бильфингер (1693—1750) — профессор философии в Тюбингене, ученик Х. Вольфа — с 1726 по 1731 г. был профессором Петербургской академии. Эйлер пишет о том, что по поручению президента Петербургской академии он составил заметки о «Космологии» Х. Вольфа, и просит адресата прочитать их и сообщить свое мнение. Оба письма к Бильфингеру были напечатаны в 1860 г. в Петербурге в сборнике «Briefe von Christian Wolff aus den Jahren 1719—1753». В начале письма к Вольфу Эйлер высоко оценивает его работу, но потом пишет, что он не согласен с некоторыми суждениями «Космологии». Приведем характерную в этом отношении выдержку из письма: «... в любом теле нет никакой другой действующей силы, кроме постоянного стремления (conatus) сохранить свое состояние. Отсюда следует, что по аналогии и в элементах тел не может быть никаких других сил, кроме стремления сохранить свое состояние». В письме к Бильфингеру эта мысль изложена подробнее—особенно в отношении понятия «силы». В конце письма к Вольфу имеются также и замечания по поводу математических работ Вольфа.

Переходим теперь к общему обзору писем, адресованных Эйлеру. Остановимся сначала на письмах некоторых лиц, о которых упоминалось уже выше.

В письмах (1762—1772) Бонне содержится высокая оценка «Писем к немецкой принцессе» Эйлера, но Бонне не соглашается с его теорией света и цветов. Он оспаривает также возражения Эйлера на его книгу «Palingénésie philosophique». Много писем о вопросах астрономии от Гейнзиуса (1739—1764). В письмах Делиля кроме научных вопросов, главным образом по астрономии, много места уделяется делам Петербургской академии. Чрезвычайно разнообразны по содержанию многочисленные письма Кнутцена — алгебра, магнетизм, оптика, астрономия, барометры, логика и т. п. Таковы же письма Г.-В. Крафта, в которых рассматриваются различные научные вопросы — от теории чисел до ботаники, причем большое место занимает механика и, в частности, принцип наименьшего действия и движение тел во вращающихся трубках. Содержание писем Кюна — мнимые числа, решение кубического уравнения, форма Земли, хвосты комет, водный режим на Земле, природа и развитие человека. Письма (1751—1755) Т. Майера, кроме вопросов астрономии, касаются также обсуждения водяных колес, в частности, сегнерова колеса. Содержание писем Мопертюи — вопросы механики, теория фигуры Земли, оптические стекла. Письма Полени посвящены в основном вопросам астрономии.

Наибольшее число (158) писем к Эйлеру сохранилось от Сегнера. Они относятся к периоду с 1735 по 1766 г., и одно небольшое письмо — к 1771 г. Ни одного письма Эйлера к Сегнеру в Архиве нет. Содержание писем Сегнера чрезвычайно разнообразно: вопросы теории чисел в связи с изучением Сегнером работ Ферма̀, логарифмы отрицательных чисел, корни алгебраических уравнений, курс алгебры Сегнера, ряды с мнимыми членами, вопросы геометрии, механика, магнетизм и электричество, оптические приборы, астрономия, сегнерово колесо, философские вопросы (материалисты и понятие материи). Большое место в письмах занимает критика Х. Вольфа и его учеников. Много пишет Сегнер о своем сыне, которому Эйлер оказывал поддержку в его служебной карьере.

Остановимся еще на некоторых корреспондентах Эйлера. Очень содержательны многочисленные письма (1751—1756) Бугера, затрагивающие вопросы фигуры Земли, астрономии (в частности, рефракции) и навигации. Основное содержание писем (1753—1758) И. Дитриха из Базеля — электричество и магнетизм, а также различные приборы. Упоминается о совместной работе с Д. Бернулли. Содержание писем (1752—1768) Лаланда — астрономия, принципы наименьшего действия и живых сил.

Содержание известной переписки (1748—1765) М. В. Ломоносова с Леонардом Эйлером — вопросы химии, упругая сила воздуха, учение о цветах, изготовление мозаик, теория монад и история России.

Единственное письмо И. Канта к Эйлеру также опубликовано.

В настоящем обзоре лишь кратко перечислены богатейшие материалы Архива Академии наук СССР, которые подлежат дальнейшему изучению. Это — большая и кропотливая работа, которая потребует много труда и времени, но даст новые интересные материалы к истории развития физико-математических наук в XVIII в.

При работе над архивными материалами авторы получили большую помощь от сотрудников Архива и Ленинградского отделения Института истории естествознания и техники Академии наук СССР. Авторы глубоко благодарны Т. Н. Кладо, Ю. Х. Копелевич, Т. А. Красоткиной, М. В. Крутиковой и Н. М. Раскину.

СПИСОК КОРРЕСПОНДЕНТОВ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА[5]

Abbt T.—, 1 (1759)
Adami J.—, 11 (1746—59)
Aepinus A. G. D.—, (1754)
Aepinus F.U.T.—, 10 (1754—58)
Alembert J. d'—, 24 (1746—66)
Aubar S.—, 1 (1776)
Bailly J. S. 1,— (1766)
Barbut —, 2 (1749—51)
Bärmann G. F.—, 6 (1745—53)
Bayer G. S.—, 1 (1736)
Beausobre L. I.—, 1 (1765)
Beguelin N.—, 2 (1755—67)
Beister —, 2 (1750)
Bergen —, 3 (1755—58)
Берлинская академия наук 1,—(1768)
Bernhard S. G. 1,1 (1769)
Bernoulli D. 14, 79 (1726—68)
Bernoulli J. I. 9, 18 (1728—46)
Bernoulli J. II —, 2 (1733—59)
Bernoulli N. I —, 4 (1742—43)
Bertrand L.—, 10 (1752—61)
Бестужев-Рюмин М. П.—, 1 (1749)
Bidersee —, 11 (1759—63)
Bilistein —, 1 (1766)
Блюментрост Л. Л. (Blumentrost L.) 4,— (1726—31)
Böldicke J.—, 13 (1746—54)
Bonnet C. 2, 5(1762—72)
Borne C. F.—,5 (1749—51)
Bose G. M.—, 8 (1744—45)
Bouguer P.—, 17 (1751—56)
Bousquet M. M.—, 1 (1743)
Boysen F. E.—, 1 (1760)
Brandmüller J. L.—, 1 (1737)
Braun J. A.—, 4 (1746—60)
Brauser W.—, 4 (1746—47)
Бреверн К. (Brewern K. v.) 3,— (1741)
Brown H.—, 1 (1776)
Брюс Я. В. (Bruce J. v.) 2, 2 (1732—33)
Brucker I.—, 2 (1742—43)
Buck F. J.—, 2 (1751—54)
Bülffinger G. B.—, 3 (1729—42)
Büttner N.—, 4 (1749—52)
Cagus R.—, 1 (1778)
Castillion J.—, 5 (1745—65)
Catt H. A.—, 10 (1765—66)
Chatelet E. L. du 2, 1 (1740—44)
Clemm H. W.—, 4 (1753—56)
Condorcet M. J.—, 4 (1775—76)
Clairaut A. C. 6, 45 (1740—64)
Cramer G.—, 8 (1743—50)
Cramer P.—, 3 (1752)
Cuenz —, 1 (1749)
Dannies J. D.—, 3 (1753)
De la Valubier —,1 (1771)
De l'Isle J. N. 2, 26 (1735—46)
Dietrich J.—, 29 (1753—58)
Diwisch P.—, 4 (1753—55)
Dresig A. H.—, 1 (1750)
Duhamel de Monceau H. L. —, 3 (1755)
Duhan C. G.—, 1 (1745)
Eberhard J. P.—, 1 (1754)
Egerland W.—, 1 (1747)
Ehler K. G.—, (1742)
Ehler K. L. 5, 14 (1735—42)
Fontenelle B. de 1,—(1739)
Formey J. H. S.—, 5 (1766—71)
Forster J. R.—, 1 (1746)
Franz J. M.—, 7 (1745—51)
Friedrich II 14, 57 (1741—77)
Fricker J. L.—, 3 (1753—55)
Frisi P.—, 1 (1759)
Gellert C. E.—, 3 (1742—50)
Gerdil G. S.—, 1 (1750)
Gmelin J. G.—, 1 (1746)
Головин Н. Ф.—, 2 (1742—43)

[5] В список включены лишь авторы писем, хранящихся в Архиве АН СССР. После каждой фамилии указано число сохранившихся в Архиве писем Эйлера к данному адресату и число писем от него к Эйлеру, в скобках— годы, к которым относятся эти письма. В число писем включены, наравне с подлинниками, черновики и хранящиеся в делах копии писем. Список составлен Ю. Х. Копелевич.

G. K. MIKHAILOW und W. I. SMIRNOW

DIE UNVERÖFFENTLICHTEN MATERIALIEN LEONHARD EULERS IM ARCHIV DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER UdSSR

(Zusammenfassung)

Der Artikel gibt eine kurze Übersicht der unveröffentlichten Handschriften Leonhard Eulers und Briefe aus seinem Schriftwechsel, die im Archiv der Akademie der Wissenschaften der UdSSR in Leningrad aufbewahrt werden.

Im ersten Teil des Artikels wird eine allgemeine Übersicht über das handschriftliche Erbe Eulers gegeben. Der zweite Teil ist den früher unbekannten Handschriften Eulers gewidmet. Zu den Handschriften gehören drei gebundene Konvolute von einzelnen Aufzeichnungen, die zusammen etwa 4000 Seiten ausmachen. Diese Konvolute enthalten in der Hauptsache unveröffentlichte Notizen aus Eulers Jugendzeit, die Urfassungen seiner Werke zur Erlangung von Preisen der Pariser Akademie der Wissenschaften, einige lateinische Aufsätze, die in französischer Übersetzung in den «Mémoires» der Berliner Akademie der Wissenschaften veröffentlicht sind, sowie Varianten der Werke Eulers über Mechanik, Integralrechnung, Optik und Astronomie.

Der größte Teil der Handschriften ist verschiedenen Fragen der Mechanik gewidmet. Im besonderen befinden sich hier die Notizen aus Eulers Jugendzeit (die an einigen Stellen Bemerkungen Johann Bernoullis aufweisen), die Urfassung von Eulers «Mechanik», betitelt «Mechanica seu scientia motus», eine Variante von Eulers «Mechanik des festen Körpers», der Anfang eines umfangreichen Werkes über die Statik u. v. a. m. Alle Handschriften sind unvollständig erhalten geblieben; besonders viele Lücken enthält die an erster Stelle erwähnte.

Unter den entdeckten Werken Eulers bieten die ursprünglichen Texte der Prämienwerke «Meditationes super problemate nautico», «Dissertatio de igne» und andere Interesse. Von den Arbeiten mathematischen Inhalts sei auf den Anfang des in deutscher Sprache geschriebenen Lehrbuchs der Elementargeometrie (Planimetrie) sowie die erste Variante der «Integralrechnung» hingewiesen.

Der dritte Teil des Artikels ist dem Briefwechsel Eulers gewidmet. Eine große Anzahl der Briefe an Euler und einige von ihm selbst, die im persönlichen Bestand von L. Euler des Archivs der Akademie der Wissenschaften aufbewahrt wurden, wurden zu Beginn des 20 Jh. in die Schweiz geschickt, wo jetzt ihre Photokopien vorliegen. Neben diesen Briefen gibt es jedoch viele andere, die in verschiedenen Beständen des Archivs aufbewahrt werden, über die eine systematische Übersicht mancherorts fehlt. Die Gesamtzahl der Briefe aus dem Schriftwechsel Eulers, die in Originalen oder Kopien im Archiv der Akademie der Wissenschaften aufbewahrt werden, beläuft sich auf 2250 (über 500 von ihnen sind Briefe Eulers). Am Schluß des Artikels ist ein Verzeichnis der Korrespondenten Eulers beigefügt mit Angabe der Zahl der Briefe Eulers an sie und ihrer Briefe an Euler sowie der Jahre, in die die Briefe gehören.

Zuerst werden einige früher unbekannte Briefe aus dem Schriftwechsel Eulers mit Daniel und Johann I Bernoulli und Lagrange angegeben. Dann werden einige Briefe Eulers an C. Wettstein, G. Poleni, Ph. Naudé, T. Mayer, K. Ehler, J. Marinoni, Marquise du Chatelet, Chr. Wolff u. a. kurz untersucht. Der letzte Abschnitt behandelt den Inhalt einiger Briefe an L. Euler von Ch. Bonnet, M. Knutzen, G. W. Krafft, G. Kühn, T. Mayer, P. L. Maupertuis, G. Poleni, J. A. Segner, P. Bouguer, J. Lalande.

Der vorliegende Artikel gibt nur eine kurze Aufzählung der interessantesten Materialien L. Eulers aus dem Archiv der Akademie der Wissenschaften der UdSSR in Leningrad. Das weitere Studium aller dieser Materialien wird viel neues für die Entwicklungsgeschichte der physikalisch-mathematischen Wissenschaften im 18. Jh. ans Tageslicht fördern, aber noch viel Zeit und mühselige Arbeit in Anspruch nehmen.

А. О. ГЕЛЬФОНД

РОЛЬ РАБОТ Л. ЭЙЛЕРА В РАЗВИТИИ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ [1]

Трудно переоценить роль работ Л. Эйлера в создании большого отдела математики — теории чисел. Богатство и глубина идей Эйлера предопределили пути развития этой теории на столетия, и созданные им методы продолжают развиваться и давать многочисленные важные результаты до настоящего времени. До Эйлера существовал лишь набор отдельных числовых результатов, наибольшее количество которых мы встречаем у александрийского математика Диофанта (конец III в.) и французского математика XVII в. П. Ферма́. В работах Эйлера, доказавшего ряд основных для теории чисел общих теорем, введшего много новых понятий и разработавшего многочисленные новые методы для решения числовых задач, был заложен фундамент этой теории, оформившейся в достаточно законченном виде после К. Гаусса (1801 г.). Ферма́ не публиковал своих исследований и ограничивался только формулировками полученных им числовых теорем. Более того, неясно сейчас, всегда ли он имел их доказательства. Эйлер доказал или опроверг почти все теоремы, высказанные Ферма́, и попутно ввел в рассмотрение ряд новых понятий, ставших в дальнейшем фундаментальными для теории чисел, в особенности для теории сравнений. Очень большое количество исследований Эйлер посвятил вопросу о свойствах простых чисел и их распределению в натуральном ряде. Эйлер создал также основные аналитические методы в теории распределения простых чисел и аддитивной теории чисел. Ему принадлежат и первые высказывания об арифметической природе чисел, другими словами, о трансцендентности некоторых классов чисел, получающихся в результате трансцендентных операций над числами рациональными или, более общее, алгебраическими. Как и Ферма́, находившийся под влиянием работ Диофанта, Эйлер, посвя-

[1] Доклад, прочитанный на Юбилейной научной сессии Отделения физико-математических наук и Отделения технических наук АН СССР в Ленинграде 17 апреля 1957 г.

Портрет работы Э. Хандмана. 1756 г.
(Национальный музей в Мюнхене)

Копия неизвестного мастера с портрета работы Э. Хандмана. XIX в.
(Академия наук СССР, Москва)

тил около 50 исследований вопросам диофантова анализа, другими словами — решению алгебраических уравнений в целых или рациональных числах.

Остановимся прежде всего на работах Эйлера по теории делимости целых чисел, разделу теории чисел, носящему в настоящее время название теории сравнений. Зафиксировав целое число m, мы все целые числа разобьем на m классов, если к одному классу отнесем все числа, разности между которыми делятся на m. Каждое число определенного класса дает при делении на m один и тот же остаток и называется вычетом класса по модулю m. Два числа одного класса называются сравнимыми по модулю m. Ферма́ высказал утверждение, что если p простое число и a не делится на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p. Другими словами, если выписать последовательность степеней $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{p-2}, a^{p-1}, \ldots$, то в этом ряду периодически будут повторяться числа, принадлежащие к одному классу, или, что то же самое, периодически будут повторяться вычеты, причем период для повторения будет или $p-1$ или меньшее число. Эйлер доказал [1] это утверждение Ферма́ и установил существование периода для чередования вычетов в ряде последовательных степеней числа a, взаимно простого с m, по модулю m. Он ввел в рассмотрение [2] функцию $\varphi(m)$, значение которой равно числу чисел, меньших и взаимно простых с m. Доказав ее мультипликативность, другими словами, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, если a и b взаимно просты, и что $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$, если p простое и α — целое, он нашел ее выражение для произвольного m, если известно, как m может быть представлено в виде произведения простых чисел. Рассматривая [3] ряд степеней числа a, взаимно простого с m, он установил периодичность этого ряда, доказав, что $a^{\varphi(m)}-1$ делится на m. Но $\varphi(m)$ не обязательно является точным периодом ряда $a^0, a^1, \ldots, a^{\varphi(m)-1}, a^{\varphi(m)}, \ldots$ Можно только утверждать, что если q период этого ряда, то q есть делитель $\varphi(m)$ и что q зависит, конечно, от a. Если бы по модулю m существовало a, для которого $\varphi(m)$ есть период, то любое число, взаимно простое с m, представлялось степенью этого a по модулю m, и это число a играло бы роль, аналогичную основанию логарифмов, а его степень k являлась как бы логарифмом представляемого числа N по модулю m. Проводя эту аналогию, Эйлер вводит [4] понятие первообразного корня по модулю m, называя число g первообразным корнем по модулю m, если $g^k - 1$ делится на m тогда и только тогда, когда k кратно $\varphi(m)$, и понятие индекса числа N по модулю m при основании g,— другими словами, показателя степени k числа g такого, что разность $g^k - N$ делится на m. Эйлер установил основные свойства индексов, но доказать существование первообразных корней, которые существуют только по модулям p^α, $2p^\alpha$, 4, где p простое, а α—целое, ему не удалось даже для m простых, и это было строго доказано позднее Гауссом.

Любопытно отметить, что Эйлер с помощью теории индексов доказал [5], правда, не строго, существование первообразного корня по любому простому p и теорему, называемую теоремой Вильсона, утверждающую, что сумма $(m-1)!+1$ всегда делится на m, если m простое. Ход доказательства Эйлера, если пользоваться современным способом записи, следующий. Пусть a первообразный корень модуля p (p — простое). Тогда

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)\equiv a^{0+1+2+\ldots+m-2}=a^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}$$

$$\equiv a^{\frac{m-1}{2}}\cdot a^{(m-1)\frac{m-3}{2}}\equiv a^{\frac{m-1}{2}}\equiv -1 \mod m,$$

так как (при простом m) $a^{m-1}\equiv 1$ и $\left[a^{\frac{m-1}{2}}\right]^2\equiv 1$, откуда $a^{\frac{m-1}{2}}\equiv -1$, вследствие того, что a — первообразный корень, и сравнение $a^{\frac{m-1}{2}}\equiv 1$ невозможно.

К этому кругу идей непосредственно примыкает и созданная Эйлером [6] теория степенных вычетов. Если мы поставим вопрос о нахождении таких целых чисел x, чтобы разность $x^n - a$ при заданных n и a делилась на простое p, то сразу же возникает и вопрос о том, для каких a такие x существуют, и для каких не существуют. Эйлер вводит понятие вычета степени n по модулю p, называя число a вычетом степени n по модулю p, если существует такое целое x, что разность x^n-a делится на p. Вопрос о свойствах степенных вычетов важен не только для решения двучленных сравнений $x^n-a\equiv 0 \mod p$, но играет большую рольи в других задачах теории чисел, например, в проблеме представления чисел квадратичными формами.

Исследуя свойства наиболее интересного класса степенных вычетов, именно квадратичных вычетов, Эйлер установил [6, 7] и глубоко лежащее их свойство, носящее название закона взаимности квадратичных вычетов. Это свойство представляет собой просто и точно формулируемую связь между существованием решений сравнения $x^p\equiv a \mod q$ и сравнения $x^q\equiv a \mod p$ при p и q простых. Если или p или q имеет вид $4n+1$, то a — одновременно вычет или невычет по модулям p и q. Если же и p и q имеют вид $4n-1$, то a обязательно вычет по одному из простых и невычет по другому. Трудность доказательства этого свойства заключается в том, что не существует сколько-нибудь простых и обозримых связей между системами вычетов по различным простым модулям, и закон взаимности, найденный

Эйлером, после многолетних попыток был строго доказан только Гауссом. Сам Эйлер ограничился проверкой закона взаимности на многих числовых примерах. Точная формулировка этого закона, при отсутствии средств к его доказательству, является одной из многочисленных иллюстраций глубины и гениальности интуиции Эйлера. Глубокие связи между свойствами различных числовых полей по различным простым модулям или, более обще, по простым идеалам, служат предметом исследования и в наше время. Наиболее интересные обобщения закона взаимности после Гаусса были получены Э. Куммером, Д. Гильбертом, А. Артином и самое последнее — И. Р. Шафаревичем.

Из этого обзора видно, что уже Эйлер ввел и исследовал основные понятия теории сравнений, построение которой было завершено Гауссом.

Эйлеру принадлежит также заслуга систематического построения и строгого обоснования теории непрерывных дробей [8]. Он нашел ряд приложений аппарата непрерывных дробей, в частности в теории так называемого уравнения Пелля.

Как уже говорилось выше, очень много исследований Эйлер посвятил вопросам решения уравнений в целых и рациональных числах.

Рассматривая [9] общую задачу решения в целых числах уравнения второго порядка с двумя неизвестными

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

при целых $a, b, .., f$, Эйлер ставит и решает вопросы о конечности или бесконечности числа решений этого уравнения и их виде, если известно, что одно решение $x=\alpha$, $y=\beta$ существует. В случае бесконечности числа решений он сводит [9] вопрос о получении бесконечной последовательности решений из одного к решению уравнения Пелля $x^2-Dy^2 = 1$, где D — целое положительное число, не являющееся квадратом целого числа. Для решения этого уравнения — отыскания его наименьшего решения, с помощью которого могут быть построены все остальные, он предлагает метод непрерывных дробей. Он устанавливает связь между подходящими дробями для непрерывной дроби, представляющей $\sqrt{D}$, и наименьшим решением уравнения Пелля. На численных примерах он обнаруживает также периодичность непрерывной дроби для $\sqrt{D}$, которая строго была доказана Лагранжем и носит название теоремы Лагранжа. Это исследование Эйлер заканчивает таблицей наименьших решений уравнения Пелля, доводя ее до $D = 99$.

Из других задач диофантова анализа для двух переменных приведем еще предложенный Эйлером [10] способ получения бесконечного множества рациональных решений уравнения

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=0}^{2} a_{i,k}x^i y^k = 0,$$

если известно одно решение его $x = a$, $y = b$, где числа a, b и $a_{i,k}$ — рациональные. В общем случае, когда левая часть уравнения не разбивается на произведение множителей второй степени относительно x и y, как указывает Эйлер, мы можем, положив $y = b$, найти другое значение $x, x = a_1$, отличное от $x = a$ и притом рациональное. Продолжая этот процесс и по x и по y, мы получим, вообще говоря, бесконечную последовательность рациональных решений этого уравнения.

В области диофантовых уравнений с тремя неизвестными Эйлер также получил первоклассные результаты. Еще Ферма́ высказывал утверждение, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых, взаимно простых числах x, y, z при целом $n \geqslant 3$. Это утверждение носит название великой теоремы Ферма́. Эйлер доказал [11] эту теорему для $n = 3$ и 4. Ферма́ не оставил ее доказательства и ограничился сообщением, что он обладает замечательным доказательством своей теоремы (в настоящее время обнаружено доказательство Ферма́ для $n = 4$).

Эйлер доказал теорему Ферма́ для $n = 3$ и 4 методом спуска. Этот метод, могущий с успехом служить для доказательства отсутствия решений широких классов уравнений в целых числах, был в дальнейшем использован многими другими авторами в аналогичных задачах диофантова анализа. Продолжая исследования Эйлера в области уравнения Ферма́, Куммер доказал теорему Ферма́ для всех показателей до 100. Попытка Куммера дать полное доказательство теоремы Ферма́ привела его к открытию замечательного факта — отсутствия единственности разложения на простые множители в алгебраических полях. Обход этой трудности привел к созданию так называемой теории идеалов, играющей фундаментальную роль в современной теории чисел и алгебре. Метод спуска, широко развитый Эйлером, заключается в том, что, предполагая существующим нетривиальное решение уравнения Ферма́ x, y, z, $xyz \neq 0$, он строит другое нетривиальное решение x_1, y_1, z_1, где x_1, y_1, z_1 — целые положительные и меньшие по величине, чем соответственно x, y, z. Естественно, что существование неограниченной последовательности убывающих нетривиальных положительных целых решений приводит нас к противоречию и доказывает теорему Ферма́ для всех тех случаев, когда существование такой последовательности может быть установлено. Эйлер [12] занимался также и уравнением $ax^2 + by^2 = cz^2$ при произвольных a, b и c, общее решение которого в целых x, y, z при $a = b = c = 1$ было найдено еще в древности.

Обобщая утверждение Ферма́, Эйлер [13,14] высказал, например, предположение, что уравнение $z^n = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_m^n$ при $m < n$ не имеет нетривиальных решений в целых положительных числах $z, x_1, \ldots, x_m$. К этому кругу вопросов примыкает и решенная Эйлером [13, 14] задача об отыскании всех целых решений уравнения $x^4 + y^4 = z^4 + t^4$. Эйлер также доказал [15], что уравнение $x^3 + 1 = y^2$ не имеет решений даже в рациональных числах x и y, кроме $x = 0$; 2.

Эйлер получил многочисленные результаты и в области целочисленных и рациональных решений систем алгебраических уравнений. В частности, ряд его мемуаров [5, 16, 17] посвящен решению одной проблемы Ферма́ и ее обобщений для большего, чем 2, числа неизвестных. Ферма́ поставил задачу найти прямоугольный треугольник, стороны которого выражались бы целыми числами, и, кроме того, такой, чтобы сумма катетов была квадратом, а гипотенуза — четвертой степенью целого числа. Уравнения этой задачи имеют вид $x + y = u^2$, $x^2 + y^2 = v^4$, и любопытно отметить, что наименьшим по величине решением является $x = 4565486027761$, $y = 106165293520$.

К вопросам о виде простых делителей тех или иных алгебраических выражений, о возможности представления простых чисел квадратическими формами и в особенности о лучших, наиболее удобных для практического использования критериях простоты и сложности числа Эйлер неоднократно возвращался на всем протяжении своей творческой деятельности. Первая печатная работа Эйлера [18] была посвящена именно одному из этих вопросов. Хорошо известно, что для ответа на вопрос о простоте или сложности числа N достаточно проверить, делится ли это число N на какое-либо простое число $q < \sqrt{N}$. Если нет, то N — простое. Но если N велико, то велико и число делений для установления его простоты или сложности. В своей первой работе Эйлер разбирает вопрос о простоте и сложности чисел, вид которых заранее известен, например, $N = a^n \pm b^n$, где a, b и n — целые. Простые делители чисел этого вида, вследствие малой теоремы Ферма́ о делимости на p числа $a^{p-1} - 1$ при простом p и ее обобщений, которыми Эйлер уже пользуется в своей работе, должны принадлежать только к определенным арифметическим прогрессиям, разности которых тем больше, чем больше n. Это позволяет либо сразу установить сложность числа $N = a^n \pm b^n$, либо существенно сократить число проб, нужных для доказательства его простоты. К этому типу чисел принадлежит и наибольшее по величине известное Эйлеру простое число $2^{31} - 1 = 2147483647$.

К числам аналогичной структуры относятся и так называемые «совершенные числа», другими словами, числа, суммы делителей которых равны им самим. Вопрос о виде и количестве совершенных чисел также был предметом исследований Эйлера. В своей первой работе Эйлер опровергает также одно высказывание Ферма́, утверждавшего, что все числа вида $2^{2^n}+1$ будут простыми, на примере числа $2^{2^5}+1$, имеющего делитель 641. К вопросу о возможности существования алгебраических выражений, зависящих от одного переменного, значения которых были бы простыми числами при любом целом положительном значении переменного, Эйлер возвращается [19] в последующих работах. Доказав, что нет многочлена от x, принимающего только простые значения при любых целых x, он находит многочлен $41 - x + x^2$, принимающий простые значения для всех x от нуля до сорока.

Ферма́ высказал утверждение, что всякое простое число p вида $4n+1$ есть сумма квадратов, $p = x^2 + y^2$ (x и y — целые). Эйлер доказал [20] не только эту теорему, но также и то, что всякое простое p вида $4n+1$ единственным образом представляется в виде суммы квадратов, другими словами, что уравнение $n = x^2 + y^2$ в целых положительных x и y, $x<y$ имеет единственное решение для простого n, а сложное $n=4m+1$ представляется, если это возможно, обязательно неединственным образом. Неединственность представления суммой квадратов сложных чисел и единственность представления простых натолкнула Эйлера на новый метод определения простоты или сложности числа. Действительно, имея в распоряжении таблицу квадратов натуральных чисел, мы можем определить по этой таблице, сколько раз разность $N-x^2$ будет точным квадратом, и если только для одного $x<\sqrt{\frac{N}{2}}$ она встретится в таблице, утверждать, что N— простое. Такой метод определения простоты числа естественно неизмеримо проще, чем метод последовательных делений числа N на простые до $\sqrt{N}$.

Развивая этот метод, Эйлер [21] занялся вопросом о представлении простых и сложных чисел формами x^2+2y^2, x^2+3y^2 и, более обще, формами вида ax^2+by^2, обладающими тем свойством, что простые представляются, если это возможно, единственным образом, а сложные неединственным или не представляются вообще. Формы x^2+2y^2 и x^2+3y^2 обладают этим свойством. Выяснив, что такое свойство формы ax^2+by^2 зависит только от произведения $n = ab$, Эйлер назвал числа n, порождающие подобные формы, удобными числами, и ряд работ посвятил отысканию таких удобных чисел. Он нашел условие, позволяющее в случае его выполнения утверждать, что число n — удобное. Число n будет удобное, если для каждого, взаимно простого с n, целого числа x, меньшего $\sqrt{3n}$, сумма $n + x^2$ будет или простое или удвоенное простое, или квадрат простого числа, или, наконец, степень числа 2. Опираясь на этот критерий удобности n, Эйлер нашел 65 удобных чисел, наибольшее из которых 1848.

Продолжая свои попытки найти бо́льшие, чем 1848, удобные числа, доведя их до значений n, бо́льших 10 000, Эйлер не обнаружил новых удобных чисел и высказал предположение, что 1848 — последнее удобное число. Дальнейшие поиски удобных чисел, предпринятые Гауссом, также не дали положительных результатов, но строгое доказательство предположения Эйлера не найдено до настоящего времени. Исследования Эйлера, посвященные вопросам представления чисел значениями квадратичных форм и виду простых делителей, послужили фундаментом для созданной впоследствии Гауссом общей теории квадратичных форм.

Велико было влияние Эйлера и на тематику аддитивной теории чисел. Следует только вспомнить, что именно в переписке Х. Гольдбаха с Эйлером[2] мы находим формулировки трех знаменитых проблем Гольдбаха: всякое нечетное число есть сумма трех простых, всякое четное число — сумма двух простых, и, наконец, всякое нечетное число — сумма простого и удвоенного квадрата целого числа. Последнее утверждение Гольдбаха было проверено Эйлером до 2500. Эйлер также высказал [23] предположение, что всякое число вида $8n + 3$ есть сумма квадрата нечетного числа и удвоенного простого вида $4k + 1$. Это предположение он проверил для чисел из прогрессии $8n + 3$, не превосходящих 187. Первое из утверждений Гольдбаха было уже в наше время доказано И. М. Виноградовым, все остальные до сего времени не доказаны.

Все результаты Эйлера, изложенные выше, были получены им средствами самой арифметики или алгебры. К числу особо важных заслуг Эйлера в развитии теории чисел следует отнести то, что он впервые привлек теорию функций к решению числовых задач. Созданные им аналитические методы в области распределения простых и аддитивных проблем опираются на глубокую связь между свойствами целых чисел и аналитическими свойствами аналитических функций, представляющихся в каждой регулярной точке плоскости степенным рядом, другими словами — хорошо сходящейся суммой целых положительных степеней $z - a$. На этих идеях Эйлера мы теперь остановимся подробнее.

---

[2] Литературу к проблемам Гольдбаха см. в работе Диксона [22].

Эйлер впервые [24] ввел в рассмотрение функцию $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

и установил связь между аналитическими свойствами этой функции и проблемой распределения простых чисел в натуральном ряде, доказав замечательное тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

где произведение справа взято по всем простым числам. Это тождество носит его имя. Пользуясь им и рассматривая значения левой и правой частей при $s>1$ и сколь угодно близких к единице, он впервые доказал аналитическим методом бесконечность числа простых в натуральном ряде. Пользуясь этим же тождеством, он, без строгого обоснования, высказал утверждение, которое мы приводим в нашей современной терминологии, именно, что

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \cong \ln \sum_{n < x} \frac{1}{n}.$$

Эти работы Эйлера положили начало наиболее сильному в настоящее время методу исследования законов распределения простых чисел в натуральном ряде и арифметических прогрессиях. Именно на этом пути П. Л. Чебышев в дальнейшем установил, что число простых чисел, не превышающих x $\pi(x)$ с ростом x колеблется около отрезков ряда, асимптотически приближающего $Li(x) = \int_2^x \frac{dx}{\ln x}$, а Ж. Адамар, используя глубокие соображения Римана о поведении $\zeta(x)$ в комплексной плоскости, доказал предельный закон распределения простых, т. е. что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} = 1$. Не следует думать, что сведения Эйлера о $\zeta(x)$ ограничивались ее самыми элементарными свойствами. Ему было уже известно одно из самых тонких свойств $\zeta(s)$,— что она удовлетворяет уравнению, носящему название уравнения Римана

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s),$$

дающему, в частности, возможность продолжить $\zeta(s)$ налево от прямой $\sigma = 0$, $s = \sigma + i\tau$.

В работе, посвященной связи между суммами прямых и обратных степеней натурального ряда, Эйлер [25] приводит уравнение

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - \dots}{1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \dots} = -\frac{(n-1)!\,(2^n - 1)}{\pi^n (2^{n-1} - 1)} \cos \frac{\pi n}{2},$$

определяя сумму расходящегося ряда в числителе равенством

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - \dots = [1 - 2^{n-1} x + 3^{n-1} x^2 - \dots]_{x=1}$$

и считая $n \geqslant 1$. Вычисляя значения числителя и знаменателя левой части, он проверяет это соотношение для большого числа четных значений n, а также для ряда отрицательных и дробных значений n. Для n нецелых положительных $(n-1)!$ он считает равным $\Gamma(n)$ и для n дробных рассматривает приближенные числовые значения числителя и знаменателя. Эйлер пишет, что, конечно, проверка соотношения для частных случаев не есть его доказательство, но правильность соотношения для многих случаев делает его таким «достоверным, что можно будет рассматривать его как вполне строго доказанное». Отметим еще, что значения числителя он находит с помощью открытой им формулы суммирования, применяемой к степенному ряду, а значения знаменателя вычисляются путем сведения к формулам, связывающим числа $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$ со степенями π при целых n.

Если, согласно Эйлеру, определить $\zeta(s)$ предельным соотношением

$$\zeta(s) = \frac{2^s}{2^s - 2} \lim_{x \to 1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^{-s} x^k$$

и положить $(s-1)! = \Gamma(s)$ для всех s, то соотношение Эйлера полностью совпадет с уравнением Римана, которое следовало бы поэтому называть уравнением Римана — Эйлера.

Рассматривая эйлеровское представление $\zeta(s)$, непосредственно дающее значения $\zeta(s)$ для любого комплексного s, кроме $s = 1 \pm \frac{2k\pi i}{\ln 2}$ $(k = 0, 1, \dots)$ и, по существу, дающее аналитическое продолжение $\zeta(s)$ в полуплоскости $Rs < 0$, мы легко можем получить также вполне строгое доказательство уравнения Эйлера — Римана. Действительно, рассмотрим при $0 < x < 1$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$ вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+t)}\, |n + t|^{\alpha - 1}\, e^{-q|n+t|}, \quad q = \ln \frac{1}{x},\ 0 \leqslant x < 1,$$

связанную с эйлеровским степенным рядом соотношением

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^{\alpha-1} x^k = -\frac{1}{2}\varphi(0).$$

Разлагая, при $\alpha > 1$, $\varphi(t)$ в ряд Фурье, мы получаем

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q|t|-\pi i(2k-1)t} \, |t|^{\alpha-1} \, dt,$$

откуда, вычисляя интегралы и полагая $t = 0$, получаем

$$-\frac{1}{2}\varphi(0) = -2\pi^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2} \times$$

$$\times \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^\alpha}\left[\left(1+\frac{q}{\pi i(2k-1)}\right)^{-\alpha} + \left(1-\frac{q}{\pi i(2k-1)}\right)^{-\alpha}\right].$$

Отсюда уже следует, что при $s > 1$

$$\zeta(1-\alpha) = -2\pi^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}\,\frac{1}{1-2^\alpha}\lim_{q\to 0}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^\alpha}R\left(1+\frac{q}{\pi i(2k-1)}\right)^{-\alpha} =$$

$$= 2\pi^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}\,\frac{1}{2^\alpha-1}\cdot\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\cdot\zeta(\alpha);$$

другими словами — уравнение Эйлера — Римана.

Необходимые для полной строгости доказательства дополнительные соображения очевидны. Мы получили, таким образом, один из многочисленных вариантов доказательства этого уравнения. Любопытно отметить, что единственная попытка Эйлера использовать полученное им уравнение симметрии относится к вопросу об арифметической природе чисел вида $\zeta(2n+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n+1}}$.

Связь этих чисел с классическими постоянными его особенно интересовала потому, что сумма четных степеней обратных величин чисел натурального ряда есть степень числа π с рациональным коэффициентом. Эта попытка Эйлера оказалась неудачной, как он пишет, так как $\zeta(-2n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Другой, очень общий аналитический метод, пригодный для решения задач на представление целых чисел слагаемыми определенного вида, также был открыт Эйлером. Для решения предложенных Эйлеру профессором Ноде задач о числе представлений целого числа N суммами k целых положительных чисел, одинаковых или различных, Эйлер [26] применил метод степенных рядов.

Идея, лежащая в основе этого метода, заключается в том, что если мы рассмотрим два бесконечных произведения

$$\prod_1^\infty (1 + a_k z), \qquad \prod_1^\infty (1 - a_k z)^{-1},$$

то коэффициент при z^n степенного ряда, в который можно разложить первое произведение, есть сумма всех возможных произведений по n в каждом из чисел a_k без повторений и, соответственно, у второго те же суммы, но с произвольными повторениями a_k. Эту идею Эйлер четко формулирует в форме двух лемм.

Для решения задач Ноде Эйлер в частном случае рассматривает два произведения

$$f_1(x) = \prod_1^\infty (1 + x^k z) = \sum_0^\infty A_k(x) z^k, \qquad f_2(x) = \prod_1^\infty (1 - x^k z)^{-1} = \sum_0^\infty B_k(x) z^k,$$

где

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^\infty a_{n,k} x^k, \qquad B_n(x) = \sum_1^\infty b_{n,k} x^k,$$

причем $a_{n,k}$ — число представлений числа k в виде суммы n различных положительных слагаемых, а $b_{n,k}$ — число представлений k в виде суммы n произвольных положительных слагаемых без учета порядка сложения.

Далее, Эйлер находит функциональные уравнения для $f_1(z)$ и $f_2(z)$, и с их помощью определяет функции $A_n(x)$ и $B_n(x)$. Он получает

$$A_n(x) = \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)\ldots(1-x^n)}, \quad B_n(x) = \frac{x^n}{(1-x)\ldots(1-x^n)}.$$

Разлагая в степенной ряд функцию

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)} = \sum_0^\infty c_{n,k} x^k,$$

Эйлер устанавливает, что обе задачи Ноде сводятся к задаче отыскания числа решений уравнения

$$N = \sum_{k=1}^n k x_k$$

в целых неотрицательных числах $x_1, \ldots, x_n$, которое равно $c_{n,N}$.

Для практического решения этой последней задачи Эйлер указывает простые правила построения таблицы чисел $c_{n,N}$, имея которую без труда можно решить обе задачи Ноде. Переходя далее к задаче определения чисел c_n из равенства

$$\sum_0^\infty c_n x^n = \prod_{k=1}^\infty \frac{1}{1-x^k},$$

другими словами, к определению числа решений уравнения

$$n = \sum_1^n k x_k$$

в целых неотрицательных числах $x_1, \ldots, x_n$, он эмпирически находит свое замечательное тождество

$$\prod_1^\infty (1-x^n) = 1 + \sum_1^\infty (-1)^n \left(x^{\frac{3n^2-n}{2}} + x^{\frac{3n^2+n}{2}}\right).$$

Используя полученные им соотношения между бесконечными рядами и произведениями, Эйлер доказывает много предложений о связях между числами представлений целых чисел различными способами. Особо следует отметить полученное им [27] замечательное тождество для функции $s(n)$, суммы делителей числа n, именно

$$s(n) = s(n-1) + s(n-2) - s(n-5) - s(n-7) +$$
$$+ (-1)^k \left[s\left(n - \frac{3k^2-k}{2}\right) + s\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right)\right].$$

Наконец, Эйлер дает исключительно простое, также основывающееся на свойствах бесконечных произведений, доказательство теоремы о том, что всякое целое число может быть представлено, и притом единственным образом, суммой различных степеней двойки. Эту теорему он получает непосредственно из тождества

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2n})\ldots = \sum_0^\infty x^n.$$

Метод Эйлера в дальнейшем получил широкое развитие. Например, Якоби, используя тождества типа Эйлера, доказал теорему Лагранжа о возможности представления целого числа суммой четырех квадратов и получил число представлений. Усиливая метод Эйлера, используя аналитические свойства функции, представляемой бесконечным произведением вблизи его круга сходимости, С. Рамануджан нашел главный член асимптотики для чисел $c_{n,N}$, коэффициентов бесконечного произведения $\prod\limits_{1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}$. Новые идеи, внесенные С. Рамануджаном в метод Эйлера, позволили Харди и Литтльвуду не только дать этим методом решение проблемы Варинга о представлении целого числа суммами ограниченного числа заданных степеней целых чисел, но и найти число представлений в виде функции от представляемого числа, дав главный член ее асимптотики. Метод Эйлера и в настоящее время играет большую роль как в теории чисел, так и в теории вероятностей.

Эйлера также весьма интересовали вопросы об арифметической природе чисел, об арифметических связях между классическими постоянными. Об одном таком вопросе мы уже упоминали в связи с уравнением Эйлера—Римана. В § 105 своего «Введения в анализ» (1748 г.) Эйлер указывает, что логарифм рационального числа при рациональном основании, не являющийся целым числом, не может быть ни рациональным, ни даже иррациональным (алгебраическим) числом, а должен быть числом трансцендентным. В частности, если $a^{\sqrt{n}} = b$, где n не есть точный квадрат, то Эйлер утверждает, что a и b одновременно не могут быть числами рациональными. Проблема арифметической природы чисел вида a^b при алгебраических a и b была в общем виде сформулирована в дальнейшем Д. Гильбертом и полностью решена уже в наше время. Можно только удивляться глубине интуиции Эйлера, высказавшего такое предположение без каких-либо возможных подходов к его доказательству, а также без возможности числовой проверки его на сравнительно простых числовых примерах.

Помимо тех направлений в теории чисел, о которых шла речь выше, Эйлер много занимался и другими числовыми вопросами, модными в его время, например вопросом о дружественных числах [28] или проблемами построения магических квадратов [29]. Наконец, Эйлеру принадлежит решение задачи об обходе конем всей шахматной доски при условии, что на каждом поле конь может быть только один раз [30]. Математическое содержание этой задачи, вероятно, ближе к комбинаторной топологии, чем к теории чисел. Решение, данное Эйлером, заключается в том, что конем каждый раз надо ходить на ту клетку доски, из которой у него будет больше всего ходов.

В работах Эйлера поражает не только глубина идей и тонкость методов, но и то, что он никогда не останавливается перед чисто вычислительными трудностями, и, как правило, сопровождает свои общие теоремы сколь угодно сложными примерами и таблицами, в особенности в тех случаях, когда доказательство общего предложения ему не удается довести до конца с полной строгостью. Числовые работы Эйлера почти все включены в двухтомник «Commentationes Arithmeticae Collectae», изданный Петербургской академией наук в 1849 г. Первый том этого издания снабжен систематическим указателем, с аннотациями работ, составленным П. Л. Чебышевым и В. Я. Буняковским. Некоторые арифметические вопросы, которыми занимался Эйлер, не вошедшие в двухтомник, изложены в первом томе «Введения в анализ», русский перевод которого вышел в 1936 г., и во втором томе «Алгебры», появившейся в русском переводе в 1768 г. под названием «Универсальная арифметика».

В заключение мы хотим отметить, что при составлении настоящего очерка, помимо других материалов, была существенно использована также превосходная статья Б. А. Венкова «О работах Леонарда Эйлера по теории чисел», опубликованная в сборнике «Леонард Эйлер», изданном в 1935 г. к 150-летию со дня смерти Эйлера.

Литература[3]

1. CAC, т. I, стр. 21, № IV
2. CAC, т. I, стр. 274, № XX
3. CAC, т. I, стр. 260, № XIX
4. CAC, т. I, стр. 516, № XXXVII
5. CAC, т. II, стр. 44, № XLV
6. CAC, т. I, стр. 477, № XXXIV
7. CAC, т. I, стр. 487, № XXXV
8. De fractionibus continuis. Comm. Ac. Petr., т. 9 (1737), 1744, стр. 98; De fractionibus continuis observationes, Comm. Ac. Petr., т. 11 (1739), 1750, стр. 32
9 CAC, т. I, стр. 570, № XLI
10. CAC, т. II, стр. 467, № XXXV
11. L. Euler, Elements d'algèbre, vol. II, Sec. III, Lyon, 1774; CAC, т. I, стр. 24, № V
12. CAC, т. I, стр. 556, № XL
13. CAC, т. I, стр. 473, № XXXIII
14. CAC, т. II, стр. 450, № LXXXIII
15. CAC, т. I, стр. 24, № V

[3] Литературу к статье мы даем, в основном, по двухтомнику «Commentationes Arithmeticae Collectae Leonhardi Euleri», Petropoli, 1849. При этом мы указываем только номер мемуара и страницу его начала в двухтомнике, а принадлежность мемуара к двухтомнику отмечаем тремя буквами CAC.

16. САС, т. II, стр. 403, № LXXVI
17. САС, т. II, стр. 397, № LXXV
18. САС, т. I, стр. 1, № 1
19. САС, т. I, стр. 356, № XXV; т. I, стр. 584. Extrait d'une lettre à M. Bernoulli
20. САС, т. I, стр. 155, № XII
21. САС, т. II, стр. 198, 220, 249, 261, 270, № LIX, LXI, LXIII, LXIV, LXVI
22. L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers, т. I, Washington, 1919, стр. 421
23. САС, т. II, ср. 134—135, № LIII
24. Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, т. I, гл. XV, М., 1936
25. Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques. Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Berlin, т. XVII (1761), 1768, стр. 83—106.
26. САС, т. I, стр. 73, № IX; т. I, стр. 391, № XXVII
27. САС, т. I, стр. 234, № XVI
28. САС, т. I, стр. 102, № X
29. САС, т. II, стр. 302, 593, № LXX, XCII
30. САС, т. I, стр. 337, № XXIV

A. O. GELFOND

DIE ROLLE DER ARBEITEN L. EULERS IN DER ENTWICKLUNG DER ZAHLENTHEORIE

(Zusammenfassung)

Die Rolle der Arbeiten L. Eulers in der Entwicklung der Zahlentheorie ist außerordentlich groß. Der Reichtum und die Tiefgründigkeit der Ideen, die Euler in die Erforschung der Gesetzmäßigkeiten der Zahlen hineingebracht hat, haben die Wege der Ausarbeitung dieser Theorie auf Jahrhunderte hinaus festgelegt, und die von ihm erschaffenen Methoden setzen ihre Entwicklung bis in die Gegenwart fort. Man darf behaupten, daß gerade in den Arbeiten Eulers das Fundament eines großen Zweiges der modernen Mathematik gelegt wurde, der den Namen Zahlentheorie erhalten hat und nach den Arbeiten von C. F. Gauß zu seiner definitiven Form gelangt ist. Euler hat erstens die zahlentheoretische Funktion eingeführt und untersucht, die seinen Namen führt und die Anzahl der ganzen Zahlen ausdrückt, die kleiner als eine vorgegebene und teilerfremd zu ihr sind. Er führte auch die Untersuchung des Begriffs der primitiven Wurzel und des Indexes durch und gab mit Hilfe dieser für die Teilbarkeitstheorie fundamentalen Begriffe die Lösung einer Reihe von arithmetischen Problemen an. Er bewies ferner den nach ihm benannten Fundamentalsatz über das Produkt der Reste eines reduzierten Systems. Euler hat auch die Theorie der Potenzreste geschaffen, wobei er für die quadratischen Reste auch das Reziprozitätsgesetz (ohne strengen Beweis) formulierte.

Euler gehört auch das Verdienst, die Theorie der Kettenbrüche systematisch aufgebaut und streng begründet und diesen Apparat in der Theorie der Pellschen Gleichung verwendet zu haben. Viele Arbeiten widmete Euler auch der Aufgabe, zu entscheiden, ob eine ganze Zahl prim oder zusammengesetzt ist. Er hat nicht nur die Behauptung P. Fermats bewiesen, daß Primzahlen der Form $4n + 1$ sich als Summe zweier Quadrate darstellen lassen, sondern auch die Eindeutigkeit dieser Darstellung. Durch Verallgemeinerung dieser Untersuchungen gelangte er zu einer Methode zur Bestimmung der Primeigenschaft einer Zahl, die sich auf die Eindeutigkeit der Darstellung von Primzahlen durch gewisse quadratische Formen stützt, die er «tauglich» nannte. Diese Untersuchungen dienten als Grundlage für die von Gauß geschaffene Theorie der quadratischen Formen. Eine sehr große Menge von Untersuchungen widmete Euler der Lösung ganzzahliger algebraischer Gleichungen und Gleichungssysteme. So gab er z. B. eine Lösung der Fermatschen Aufgabe, die den Namen «Großer Fermatscher Satz» erhalten hat, nach der Methode der «descente infinie» für $n=3$ und 4.

In den Arbeiten Eulers nimmt die moderne analytische Zahlentheorie ihren Anfang. Er untersuchte die sogenannte ζ Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

wo sich das Produkt über alle Primzahlen erstreckt, und erbrachte, nachdem er die Gleichheit der Produktsumme für alle s bewiesen hatte, einen neuen, analytischen Beweis für die Unendlichkeit der Anzahl aller Primzahlen. Euler fand auch die berühmte Funktionalgleichung, die den Namen Riemannsche Gleichung führt, die die Werte $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$ verbindet. Der Zusammenhang der analytischen Eigenschaften von $\zeta(s)$ mit der Primzahlverteilung in der natürlichen Reihe ist auch gegenwärtig die Hauptquelle für die Gewinnung tiefgründiger Tatsachen aus der Theorie der Primzahlverteilung. Zur Lösung von Aufgaben über die Darstellung von ganzen Zahlen als Summen ganzer Zahlen irgendwelcher Form hat Euler eine analytische Methode vorgeschlagen; diese besteht in der Feststellung und Untersuchung von Identitäten zwischen Potenzreihen mit einer gegebenen Folge von nichtverschwindenden Exponenten und den ihnen entsprechenden unendlichen Produkten, z. B.

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n) = 1 + \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \left(x^{\frac{3n^2-n}{2}} + x^{\frac{3n^2+n}{2}}\right).$$

Diese Methode wurde in ihrer weiteren Entwicklung und in verschiedenen Modifikationen zur Hauptmethode der Lösung additiver Aufgaben.

Schließlich gehören Euler auch die ersten Problemstellungen auf dem Gebiet der transzendenten Zahlen. So hat er z. B. als erster die Behauptung ausgesprochen, daß das Verhältnis der Logarithmen zweier rationaler Zahlen entweder rational oder transzendent ist.

А. И. МАРКУШЕВИЧ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ В ТРУДАХ ЭЙЛЕРА[1]

§ 1. Когда в наше время говорят об основных понятиях какой-либо математической дисциплины, то обычно представляют эту дисциплину как дедуктивную систему, логически развиваемую из некоторой исходной системы основных понятий, отношений и предложений (аксиом). Ясно, что подобный подход к творчеству Эйлера был бы антиисторическим. В действительности, основные математические понятия в творчестве Эйлера, являвшегося одним из величайших математиков-естествоиспытателей, должны рассматриваться по аналогии с основными понятиями естествознания. Для Эйлера математические понятия — это абстракции от реально существующих и не зависящих от нашего сознания предметов и отношений между предметами. Чтобы изучать их, нужно лишь иметь верные и четкие представления о рассматриваемых вещах и черпать из запаса этих представлений по мере того, как в этом проявляется надобность. Утверждение М. Я. Выгодского «Идеал строгости в XVIII в. состоял в согласовании рассуждений с законами природы»[2] представляется нам справедливым именно по отношению к эйлеровскому пониманию строгости. В своей научной деятельности Эйлер стремился открывать наиболее общие законы природы. Критерием истинности для него служило согласие выводов и следствий из изучаемого принципа с действительностью. Разумеется, математики имеют все основания скептически оценивать проверку какого-либо положения по следствиям из него, ибо из ложного можно логически вывести истинное. Однако ясно, что при широкой и критически направленной проверке ложного положения мы, наряду с истинными следствиями, будем получать также и ложные. Поэтому истинность следствий укрепляет

[1] Доклад, прочитанный на Юбилейной научной сессии Отделения физико-математических наук и Отделения технических наук АН СССР в Ленинграде 17 апреля 1957 г.

[2] См. М. Я. Выгодский, Вступительное слово к «Дифференциальному исчислению» Л. Эйлера [1, стр. 16].

убеждение в справедливости общего принципа (гипотезы) [3]. Фактически Эйлер широко применял гипотезы в математической науке, превращая гипотезу в общематематический принцип (закон), по мере того как обнаруживались все более и более широкие ее подтверждения.

История математики дает многочисленные примеры изменчивости и относительной значимости понятия научной строгости. В частности, в истории математического анализа мы не обнаруживаем даже в пределах одной и той же эпохи, ни в прежнее время, ни в наши дни, единого общепризнанного критерия достаточной научной обоснованности предложений и целых теорий [2,3]. Можно сказать лишь, что критерии, претендующие на такую роль, появляются и исчезают, уступая место другим.

Теория флюэнт и флюксий Ньютона вызвала критику Беркли, а изложение основ дифференциального исчисления в первом по времени учебнике дифференциального исчисления И. Бернулли — Л'Опиталя — нападки М. Ролля [4]. Выводы Эйлера о мнимости логарифмов отрицательных чисел или его же выводы о законности применения «произвольных» функций в решении задачи о струне оспаривались Даламбером. Гаусс критиковал доказательства основной теории высшей алгебры, предложенные Эйлером и Даламбером, указывая, в частности, что ограниченная функция может и не достигать своей верхней (или нижней) грани. Позже сам Гаусс, а за ним Дирихле и Риман, применяя так называемый принцип Дирихле для доказательства существования гармонических функций с определенными свойствами, заслужили аналогичный упрек со стороны Вейерштрасса. Критика Вейерштрасса лишила доказательной силы некоторые результаты Римана. Лишь Гильберт реабилитировал «принцип Дирихле», разработав способ применения его к проблемам существования [5]. Коши старался придать «геометрическую строгость» своему «Алгебраическому анализу», выступая против доводов, основанных на «алгебраической общности», применяемых обычно «при переходе от сходящихся рядов к расходящимся и от действительных количеств к мнимым»

[3] Ср., например, приписывание сумм расходящимся рядам, в защиту чего Эйлер говорит, что эти суммы «никогда не приводят к ошибкам и что, напротив, приняв их, мы получаем множество замечательных вещей, которых мы должны были бы лишиться, если бы пожелали совсем отказаться от этих суммирований. Но ведь эти суммы, если они были бы ложными, не могли бы всегда приводить к истинным результатам, тем более, что они уклонялись бы от истины не на малое, а на бесконечное количество и, следовательно, они должны были бы бесконечно далеко уводить нас от истины. Так как этого, однако, не происходит, то нам остается развязать этот труднейший узел» [1, стр. 101].

[6, стр. II—III], т. е. против приемов, привычных для Эйлера. Впрочем, изложение Коши еще далеко от того, чтобы удовлетворять требованиям строгости, привычным для позднейших учебников математического анализа (хотя бы конца XIX в.). Например, Коши неявно считает, что сходимость функционального ряда всегда есть сходимость равномерная, и «доказывает», что сумма сходящегося ряда непрерывных функций есть функция непрерывная [6, стр. 120]. Напомним еще, что в основном тексте «Алгебраического анализа» доказательство теоремы о том, что непрерывная функция переходит от одного значения к другому через все промежуточные значения, основывается на геометрической наглядности [6, стр. 51—52]. Подобного рода рассуждения не могли удовлетворить Б. Больцано, предложившего за несколько лет до «Алгебраического анализа» Коши свою попытку «чисто аналитического» доказательства этой важной теоремы [7].

Коши и, в особенности, Абель с ожесточением вычеркивали из анализа расходящиеся ряды, широко изучавшиеся и использовавшиеся их предшественниками. Однако в конце XIX в. расходящиеся ряды вновь вернулись в математику на основаниях, представляющих в значительной части развитие идей Эйлера [8].

В качестве примеров того, что и в новое время в науку продолжают вторгаться новые понятия и методы, не успевающие получать логическое оформление, соответствующее распространенным ныне требованиям «математической строгости», можно назвать операционное исчисление Хевисайда и дельта-функцию Дирака. Как известно, понадобилось почти полстолетия, прежде чем широко применявшееся в физике и технике операционное исчисление получило форму, удовлетворяющую математиков [9].

Отметим еще, что ряд фактов анализа, доказательства которых были бы признаны безупречно строгими не только со стороны Коши и Больцано, но и Вейерштрасса, Дедекинда и Г. Кантора, подверглись уже в первой четверти нынешнего века критике, так как эти доказательства основывались на аксиоме Цермело, или, если идти еще дальше, на принципе исключенного третьего в применении к бесконечным множествам (Брауэр).

Число подобных примеров можно было бы умножить. Из них вытекает не только то, что в разное время предъявляются различные требования к научному обоснованию и изложению математических открытий, но и более существенный вывод. Этот вывод состоит в том, что развитие математики не следует тем логическим канонам, которые каждая последующая эпоха вырабатывает для систематизации ранее накопленных материалов. Напротив, все развитие математики показывает, что здесь, как и в развитии естественных наук, убежденность в истинности и значимости каждого открытия возникает, как только оно представляется в качестве недостающего звена целой цепи фактов и отношений и укрепляется по мере того, как это открытие, пусть используемое в качестве эвристического приема или гипотезы, позволяет открывать новые факты и отношения.

* * *

§ 2. В XVIII в. был еще весьма распространен тип ученого, совмещавшего в себе математика, механика, физика, астронома и техника. К числу таких универсальных ученых принадлежал и Леонард Эйлер. Хорошо известно, что в юности, уже избрав математику своей специальностью, он почти одновременно предлагал свои услуги и кафедре физики Базельского университета и кафедре физиологии Петербургской академии наук. В перечне трудов Эйлера, составленном Г. Энестрёмом, мы встречаем следующие основные рубрики, к каждой из которых относятся соответствующие сочинения Эйлера [10, стр. 271]: философия, математика, механика, астрономия, физика, география, сельское хозяйство. При этом в механику, например, входит и прикладная механика со следующими подразделениями: учение о машинах, баллистика, инженерное дело, корабельное дело.

Работая творчески в столь разнообразных и обширных областях знания, Эйлер при переходе к следующей не забрасывал других областей, но одновременно занимался многими. В виде иллюстрации достаточно привести содержание работ Эйлера, опубликованных в одном только томе мемуаров Берлинской академии за 1748 г. [11]. Здесь мы встречаем статьи: №1. «О колебании струн»; №2.«О согласии двух последних затмений Солнца и Луны с моими таблицами для отыскания истинных моментов полнолуний и новолуний». № 3.«Об атмосфере Луны, доказываемой последним затмением Солнца»; №4. «О трении твердых тел»; № 5. «Об уменьшении сопротивления трению»; № 6.«Исследование о наибольших и наименьших, обнаруживаемых в действиях сил»; № 7. «Размышления о некоторых общих законах природы, наблюдаемых по результатам действий каких угодно сил»; №8.«О кажущемся противоречии в учении о кривых линиях»; № 9.«Теорема о количестве точек, в которых могут пересекаться две линии любых порядков»; № 10. «Размышления о пространстве и времени»[4].

[4] Нумерация статей, введенная нами для удобства ссылок, в оригиналс отсутствует.

Не удивительно, что у исследователя с таким творческим диапазоном создавалось такое научное мировоззрение и вырабатывались такие методы и приемы исследования и сообщения полученных результатов, благодаря которым он в своих математических работах продолжал оставаться также и естествоиспытателем, а в работах по естествознанию и технике — также и математиком.

За последние годы в ряде статей советских авторов об Эйлере уже неоднократно указывалось, что распространенный взгляд на Эйлера как на виртуозного вычислителя, мало озабоченного теоретическим осмысливанием разрешаемых им проблем, неоправдан и несправедлив [12,13]. И действительно, научное мировоззрение Эйлера — это целостное мировоззрение мыслителя, убежденного в объективной реальности природы, в неограниченных возможностях познания природы человеком. Эйлер знает, что природа является источником всех абстракций, имеющих научную значимость, включая и математические понятия, и в этом отношении не отделяет математику от совокупности естественных наук[5]. Соответствующие высказывания Эйлера содержатся, например, в «Письмах к немецкой принцессе» [15]. Важно подчеркнуть, однако, что широта и целостность подхода Эйлера к проблемам науки проявляется и в его отдельных, нередко довольно специальных по теме работах. Для иллюстрации вернемся к упоминавшимся выше статьям и приведем из них некоторые постановки вопросов и высказывания Эйлера.

Откладывая разбор статьи №1 («О колебании струн») до § 6, где ее содержание будет рассмотрено в связи с развитием понятия функции, остановимся коротко на других статьях.

В статье № 2 Эйлер, обеспокоенный расхождениями между предсказанными им и фактически наблюденными в Берлине моментами, относящимися к солнечному затмению 25.VII 1748 г. и лунному затмению 8.VIII 1748 г., вновь анализирует свои вычисления и выявляет причины расхождений (достигавших нескольких минут).

В статье № 3 Эйлер сообщает, что, наблюдая упомянутое солнечное затмение, он не ограничивался целью прийти к более точному определению движения Луны и ее параллакса, но и следил за преломлением лучей света, проходящих вблизи краев лунного диска, желая получить подтверждение существования лунной атмосферы. При этом Эйлер подробно рассказывает, как он обставил для выполнения наблюдений одну из комнат своего дома, снабдив ее девятифутовой астрономической трубой. Наблюдения привели

[5] О материалистических взглядах Эйлера см. [14].

его к выводу (не подтвержденному позднейшим развитием науки), что Луна обладает атмосферой, в 200 раз более разреженной, чем земная.

В статье № 4, посвященной трению, Эйлер начинает с оценки практического значения изучения природы и величины трения. Далее он строит простую схему для объяснения явления трения, допуская, что поверхности трущихся твердых тел обладают многочисленными мелкими выступами.

В статье № 5 Эйлер изучает трение частей машины при вращательном движении и делает выводы относительно того, как следует конструировать оси вращения для уменьшения трения.

В статье № 6 Эйлер отмечает как истину, в которой невозможно более сомневаться, что действия всех природных сил всегда доставляют максимум или минимум определенной величины. Он упоминает при этом принцип наименьшего действия Мопертюи, незадолго перед тем опубликованный, указывая, что и он сам открыл аналогичный закон [16][6]. Эйлер выражает уверенность, что этот принцип может быть обобщен. Чтобы прийти к такому обобщению, нужно рассмотреть значительное количество отдельных проблем механики «прямым методом», основываясь на законах равновесия и движения, и обнаружить в каждой из них, какие именно «формулы» получают наибольшее и наименьшее значение. С этой целью Эйлер рассматривает фигуру равновесия нити, при разных предположениях относительно сил, действующих на ее частицы.

Чтобы не упустить ничего в сложном облике ученого, в котором естествоиспытатель-материалист уживался с глубоко религиозным человеком, любившим в свободные часы помечтать о неограниченном расшире-

---

[6] Эта статья представляет собой второе прибавление к эйлеровскому руководству вариационного исчисления: «Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti», Lausannae et Genevae, 1744 (см. русский перевод «Метод нахождения кривых линий и т. д.» Леонарда Эйлера, ГТТИ, М.— Л., 1934).

Мопертюи в предисловии к статье «Законы движения и покоя, выведенные из одного принципа метафизики» следующим образом пишет о работах своей и Эйлера: «Я предложил принцип, на котором основывается следующая работа, 15 апреля 1744 на публичном собрании Парижской академии наук, как это удостоверено в актах Академии. Г-н профессор Эйлер выпустил в конце того же года свою превосходную книгу «Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes». В дополнении, которое там было приложено, этот знаменитый геометр доказал, что в траекториях, описываемых телами под действием центральных сил, скорость, умноженная на элемент кривой, всегда имеет минимум.

Это замечание доставило мне тем больше удовольствия, что оно является хорошим применением моего принципа к движению планет, для которого этот принцип действительно является законом» [11, стр. 267].

нии масштабов научного творчества в «загробной жизни» [17], укажем, что Эйлер считает исследования о «наибольших и наименьших» относящимися не столько к математике, сколько к метафизике, поскольку речь идет «о познании цели, которой природа задается в своих действиях». Для нас существенно, что даже там, где Эйлер облекает свои замыслы в метафизическую форму (как в разбираемой статье), он все же выполняет их как ученый, исследователь природы.

В работе № 7 Эйлер продолжает исследования, изложенные в предыдущей статье, рассматривая фигуру равновесия жидкости при разных предположениях относительно сил, действующих на ее частицы. В конце работы он облекает принцип наименьшего действия в общую математическую форму, показывая, что этому принципу подчиняются и состояния равновесия и свободного движения тел. Существенно подчеркнуть, что Эйлер не ограничивается в разбираемых статьях принципом наименьшего действия для одной материальной точки, как он это делал в работе [16] во втором прибавлении к «Методу нахождения кривых линий», но формулирует принцип наименьшего действия для системы. Так, он приводит «общее правило для нахождения состояния равновесия какого угодно тела, подверженного действию каких угодно сил. Если умножить каждый элемент тела на количество действия сил, к нему относящееся, то интеграл от этого произведения, который будет количеством полного действия на все тело, должен иметь минимум» [11, стр. 211—212]. Поэтому нельзя согласиться, например, с Л. С. Полаком—автором специальной работы по истории принципа наименьшего действия—утверждающим, что Лагранж первый распространил на случай системы принцип, сформулированный Эйлером лишь для одной материальной точки [18]. На самом деле, соответствующая работа Лагранжа [19, стр. 365], в которой он ссылается только на прибавление к эйлеровскому «Методу нахождения кривых линий», появилась в свет более чем через 10 лет после разбираемых работ Эйлера, уже содержащих принцип наименьшего действия, распространенный на системы.

Работы № 8 и 9 посвящены вопросу о числе точек пересечения двух алгебраических кривых. В статье № 9 впервые доказывается теорема, высказанная еще Маклореном и получившая позднее наименование теоремы Безу [7], о том, что две алгебраические кривые, порядок одной из которых есть m, а другой n, пересекаются в mn точках (если соответствующие многочлены не имеют общих делителей). Эйлер отмечает, что если в частных случаях число точек пересечения оказывается меньшим, то лишь потому,

[7] Относящаяся сюда работа Безу является значительно более поздней [20].

что некоторые точки удаляются в бесконечность, а другие становятся мнимыми. Доказательство основывается на построении результанта, получающегося путем исключения координаты y из уравнений кривых.

В работе № 8 рассматривается парадокс, впервые обнаруженный Маклореном, но названный впоследствии «парадоксом Крамера»[8]. Суть его заключается в том, что две различные кривые третьего порядка пересекаются в 9 точках, тогда как общее уравнение кривой третьего порядка содержит 9 различных параметров и, следовательно, 9 точек достаточно для однозначного определения такой кривой. Парадокс этот (а также ему аналогичные, возникающие для кривых высших порядков), разрешается Эйлером вполне правильно указанием на то, что уравнения, выражающие факт прохождения одной кривой через ее точки пересечения с другой кривой, не являются, вообще говоря, независимыми между собой.

В начале статьи Эйлер высказывает убеждение, что вообще противоречия, возникающие в науке, могут быть только кажущимися, что источником их является недостаток знаний и недостаточно ясное представление о рассматриваемом предмете и, наконец, что в математике, далекой от того, чтобы довольствоваться расплывчатыми и недостаточно определенными идеями, менее всего возможно встретить два предложения, находящиеся в противоречии между собой.

Статья 10, помещенная по классу умозрительной философии (предыдущие 9 статей относились к классу математики), направлена против метафизиков, отрицающих объективную реальность пространства и времени. Отправной точкой для Эйлера служат принципы механики. «Хотя принципы механики и не удается вывести из общих метафизических принципов, все же чудесное согласие всех следствий из них, извлекаемых посредством вычислений, со всеми движениями твердых и жидких тел на Земле, а также и движениями небесных тел, является достаточным, чтобы поставить их истинность вне сомнений» [11, стр. 324]. Далее Эйлер приводит в качестве такого несомненного принципа закон инерции и предлагает отбросить в метафизике все, что приводит к выводам, не согласным с этим законом.

Прежде всего должно быть отброшено, как ложное, утверждение метафизиков о том, что пространство и время не имеют никакой реальности. Напротив, следует признать, что пространство и время существуют реально, вне нашего воображения. Статья заканчивается заявлением, что автор

[8] Книга Крамера [21] вышла в Женеве в 1750 г., т. е. в том же году, когда вышел и том мемуаров Берлинской академии за 1748 г., содержащий рассматриваемые статьи Эйлера.

обращается к тем метафизикам, которые еще признают некоторую реальность в телах и в движении, ибо на тех, кто абсолютно отрицает эту реальность, проведенные рассуждения вряд ли могут произвести хотя бы малейшее впечатление.

* * *

§ 3. Вклад Эйлера в математический анализ настолько грандиозен, что даже путем простого перечисления нелегко было бы представить его в пределах одной статьи. В самом деле, речь должна была бы идти о множестве идей, методов, понятий и теорем, которыми Эйлер обогатил дифференциальное и интегральное исчисление, исчисление конечных разностей, теорию рядов, теорию дифференциальных уравнений — обыкновенных и с частными производными, вариационное исчисление, теорию функций комплексного переменного, теорию специальных функций. Все названные дисциплины испытали на себе влияние могучего духа Эйлера, многих из них он, если можно так выразиться, воспринял из колыбели слабыми и беспомощными и, вспоив, вскормив и взлелеяв, выпустил их из своих рук жизнеспособными и полнокровными.

Наша статья ставит перед собой скромную цель — рассмотреть лишь понятие функции в трудах Эйлера и на этом примере проследить за глубокой переработкой, которой подвергались математические понятия в творческой лаборатории великого математика.

Начнем с одного из наиболее ранних математических трактатов Эйлера — «Метода нахождения кривых линий». Сочинение это, содержащее основы вариационного исчисления, было закончено весной 1743 г. и издано в 1744 г. Мы увидим из него, что еще до 1743 г. Эйлер систематически пользовался в вариационном исчислении общим понятием функции. Более того, понятие функции, из которого он там фактически исходил, имело столь общий характер, что включало, как частные случаи, и функцию точки или кривую, и функцию линии, т. е. функционал.

Обратимся к тексту первой главы «Метода нахождения кривых линий» [9].

[9] Мы пользуемся в дальнейшем русским переводом работы [16], сверяя его с немецким переводом соответствующих глав, изданным в серии Ostwald's Klassiker: Abhandlungen über Variations-Rechnung, Erster Theil: Abhandlungen von Joh. Bernoulli (1696), Jac. Bernoulli (1697) und Leonhard Euler (1744). Herausgegeben von P. Stäckel, Zweite durchgesehene Auflage, Leipzig und Berlin, Verlag von W. Engelmann, 1914. Разбор этого сочинения Эйлера см. в статье [22].

В соответствии с названием своего трактата Эйлер последовательно пользуется в нем геометрической терминологией. Он утверждает (п. 32), что вопросы, «относящиеся к учению о кривых линиях, могут быть сведены к чистому анализу. И обратно, если вопрос этого рода будет поставлен в области чистого анализа, то он может быть отнесен к учению о кривых линиях и здесь получить разрешение». Связывать же их с кривыми линиями (т. е. пользоваться геометрическим языком.— *А. М.*) полезно потому, что задачи становятся проще, изящнее, и их польза и значение более очевидны; кроме того, рассмотрение фигур и представление величин отрезками исключительно помогают изложению и усвоению метода решения этих задач. Вот почему Эйлер излагает и решает их в применении к кривым линиям (п. 33). Поэтому там, где у него идет речь о кривых линиях, отнесенных к определенной системе координат и «принадлежащих одной и той же абсциссе» (п. 5), мы, выражаясь современным языком, сказали бы, что речь идет о функциях одного переменного, определенных на одном и том же отрезке.

В п. 23 указывается, что в каждой задаче та величина, которая для искомой кривой должна принимать наибольшее или наименьшее значение, будет называться формулой максимума или минимума. Это определение дополняется в последующих пунктах, в которых поясняется, что речь идет о величине и притом величине переменной, зависящей от той определенной абсциссы, к которой принадлежат все рассматриваемые кривые, но не только от одной этой абсциссы. В п. 28 сказано: «... формула максимума или минимума должна, кроме общей всем рассматриваемым кривым абсциссы, зависеть также особым образом от каждой кривой, так чтобы среди них была кривая, для которой она (формула) могла иметь наибольшее или наименьшее значение».

Отсюда становится ясным, что понятие «формулы» соответствует здесь позднейшему понятию функционала, определенного на всем множестве функций, непрерывных на определенном отрезке или на некотором его подмножестве (Эйлер указывает в п. 24, что кривая, обладающая свойством максимума или минимума, разыскивается «либо среди всех кривых, либо только среди бесчисленных кривых, известным образом определенных»).

Эйлер не дает в этой книге определения понятия функции. Однако термином «функция» он пользуется, придавая ему весьма широкий смысл переменной величины, з а в и с я щ е й от других переменных.

Так в замечании 1 (п. 29) Эйлер говорит: «... И так как всякая кривая определяется соотношением между абсциссой и ординатой, то величина W должна быть образована из абсциссы, ординаты и зависящих от них величин. Если, следовательно, обозначить неопределенную абсциссу через x, соответствующую неопределенную ординату через y, то W должна быть функцией обеих переменных x и y...». Здесь мы обращаем внимание на то, что термин функция применяется к «формуле» W на том основании, что она зависит от «неопределенной абсциссы x и соответствующей ей неопределенной ординаты y», т. е. «зависит особым образом от природы кривой». Чтобы не оставалось сомнений в том, что эйлеровское понимание термина «функция» здесь столь широко, что оно включает в себя понятие функционала («формулы») как частный случай, процитируем еще п. 31.

«Если поэтому задана такая формула W или функция от x и y и задача относится к абсолютному методу максимумов и минимумов, то ищется такое уравнение между x и y, чтобы после подстановки в W значения y, выраженного через x, значение W становилось бы бо́льшим или меньшим, чем если бы было взято какое-либо другое уравнение между x и y.»

Не останавливаясь на других деталях, отметим только, что Эйлер проводит рассуждения, оформленные в виде теоремы, которые не столько доказывают, сколько наводят на мысль, что «формула» должна выражаться «неопределенной интегральной величиной (quantitas integralis indefinita), которая может быть проинтегрирована только тогда, когда будет задано уравнение между x и y» (п. 34).

Таким образом, «формула» W представляется в виде $\int Zdx$, «где Z должно быть такой величины, чтобы интеграл $\int Zdx$ получал определенное значение, если установить уравнение между x и y». Эйлер указывает далее, что «существуют три рода формул, которые для искомых кривых должны иметь максимум или минимум. Первый род охватывает формулы, в которых Z является алгебраической или же определенной функцией от x, y, $p=\frac{dy}{dx}$, $q=\frac{d^2y}{dx^2}$, ... Ко второму роду принадлежат формулы, в которых Z, кроме того, содержит интегралы. К третьему роду принадлежат формулы, в которых значение Z определяется дифференциальным уравнением, интегрирование которого не известно» (п. 37). Выше Эйлер приводит следующий пример: $dZ = ydx + Z^2dx$ (ср. его «Дифференциальное исчисление», стр. 200 и сл.).

Заметим в заключение этого параграфа, что понятие функции точки — кривой употребляется Эйлером в «Методе нахождения кривых линий» вне связи с каким бы то ни было аналитическим выражением. Более того, самый метод, опирающийся на использование вариации в точке, существенно предполагает отсутствие такой связи. Действительно, для кривой, определяемой посредством единого аналитического выражения, по Эйлеру не может быть допущено никакого изменения в частях кривой «без нарушения связи непрерывности». Но вариация в точке в том и состоит, что кривая изменяется только в окрестности какой-либо определенной точки (или в окрестностях нескольких различных точек).

В дальнейших работах Эйлера понятие функции подвергалось расчленению и дальнейшему развитию в соответствии с потребностями математического анализа.

* * *

§ 4. Через два года после окончания работы над «Методом нахождения кривых линий», т. е. в 1745 г., Эйлер завершил двухтомный труд «Введение в анализ» [23], вышедший в свет, однако, лишь в 1748 г. Как известно, первый том этого произведения содержит теорию элементарных функций, рассматриваемых вместе с важнейшими средствами их аналитического представления: степенными рядами, бесконечными произведениями и непрерывными дробями. В соответствии с таким назначением книги Эйлер исходит в ней из узкой концепции функции: функции — аналитического выражения. Именно, его определение гласит: «функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств» [23, стр. 30].

Это определение не было оригинальным. Оно представляло лишь несколько расширенную и уточненную формулировку определения, предложенного еще в 1718 г. учителем Эйлера Иоганном Бернулли: «функцией переменной величины называют количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных». Эйлер лишь включил в эту формулировку условие, что функция является аналитическим выражением (по-видимому, это условие неявно подразумевалось И. Бернулли).

По форме определение Эйлера отождествляет функцию с аналитическим выражением и, следовательно, не имеет достаточно ясно очерченных границ. Однако Эйлер строил аналитические выражения из элементарных функций одного или нескольких переменных посредством операций сложения, вычитания, умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня, решения уравнений (алгебраических) и интегрирования [23, стр. 30]. Поэтому он неизменно должен был получать функции аналитические всюду, за исключением изолированных особых точек, в окрестности которых функции все же допускали разложение в обобщенный степенной ряд (содержащий дробные или отрицательные степени). Вот почему Эйлер считал степенной ряд своего рода универсальным аналитическим выражением, пригодным для представления любой функции, примыкая здесь к Ньютону [24, 25].

Так, глава IV «Введения в анализ», посвященная выражению функций бесконечными рядами, открывается следующим высказыванием: «Так как дробные и иррациональные функции переменной не заключаются в целой форме $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ и т. д. с конечным числом членов, то обычно ищут такого рода бесконечные выражения, которые представляли бы значение любой функции — дробной или иррациональной. Даже природа трансцендентных функций считается более понятной, когда они выражены в этой, хотя и бесконечной форме». И далее Эйлер пишет: «... если же кто сомневается, чтобы можно было выразить функцию посредством бесконечного ряда членов подобного рода, то это сомнение устранится при развертывании каждой функции. Для большей ясности этого утверждения следует допустить, кроме степеней переменной z с целыми положительными показателями, еще какие угодно степени. В таком случае не будет никакого сомнения в том, что всякая функция z может быть преобразована в такое бесконечное выражение

$$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + \text{ и т. д.},$$

где показатели α, β, γ, δ и т. д. обозначают любые числа» [23, стр. 77]. Мы видим, что Эйлер рассматривает здесь разложимость функций — аналитических выражений в степенной ряд как факт, непосредственно подтверждаемый всей практикой современного ему математического анализа.

Сказанное в достаточной мере объясняет, почему Эйлер, а также его современники и последователи, включая Лагранжа [25, стр. 41], понимая функцию как аналитическое выражение, считали ее представимой степенными рядами и приписывали ей свойства, вытекающие из такого представления. Иными словами, эйлеровское понятие функции в узком смысле практически совпадало по своей роли с позднейшим понятием аналитической функции. «Факты иного рода, где аналитическое выражение, например, в виде сходящегося ряда элементарных функций, представляло неаналитическую функцию, являлись единичными в практике математики того времени (тригонометрические ряды у Д. Бернулли); эти «исключения» математический анализ XVIII века не мог охватить и, как правило, не считал нужным оговаривать» [25, стр. 17].

Действительно, хотя Эйлер и указывает в конце своей работы о струне [11, стр. 84—85], что формула струны в начальный момент может быть задана уравнением

$$PM = \alpha \sin \frac{\pi u}{a} + \beta \sin \frac{2\pi u}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi u}{a} + \delta \sin \frac{4\pi u}{a} + \text{ и т. д.}$$

(a — длина струны; u — абсцисса точки струны), он остается в убеждении, что изображаемая суммой этого ряда функция (как определенная «аналитическим выражением») не может представить произвольную (графически определенную) функцию ни при каком выборе коэффициентов α, β, γ, δ, ... В дальнейшем Эйлер оспаривает Д. Бернулли, утверждавшего, что решение задачи о струне, соответствующее такому ряду, является наиболее общим [10].

Дело здесь, конечно, в том, что в XVIII в. проблема предельного перехода для последовательности функций не только не изучалась, но и не могла быть еще поставлена. Для такого изучения, раскрывшего, в частности, изобразительные возможности «аналитического выражения», потребовалась напряженная исследовательская работа на протяжении целого столетия, та работа, отдельные этапы которой отмечены именами Фурье, Коши, Абеля, Дирихле, Вейерштрасса, Георга Кантора, Бореля, Бэра, Лебега и Д. Ф. Егорова.

* * *

§ 5. Было бы ошибкой полагать, что, введя в первом томе «Введения в анализ» узкое понятие функции, Эйлер отказался от того широкого понимания функции, которое было развито им в «Методе нахождения кривых линий». В действительности, во втором томе «Введения в анализ» [27], вышедшем в свет одновременно с первым томом и посвященном в целом основам аналитической (и алгебраической) геометрии, мы встречаемся и со знакомым нам общим пониманием функции, соответствующим произвольной кривой, и, кроме того, с некоторым уточнением понятия функции, введенного в первом томе.

В главе I разъясняется сначала, что каждая функция может быть геометрически представлена некоторой кривой. Далее Эйлер пишет: «Хотя многие кривые линии могут быть описаны механическим непрерывным движением точки, в силу чего вся кривая линия сразу представляется глазам, все же здесь кривые линии будут рассматриваться как

[10] Речь здесь идет о работах Д. Бернулли [26, стр. 147—195].

порожденные функциями... Поэтому везде функция от x будет давать какую-либо линию, либо прямую, либо кривую; в свою очередь по кривым линиям можно восстанавливать функцию» [27, стр. 6].

Очевидно, что этим соглашением Эйлер уже расширяет понятие функции, введенное в первом томе. Поэтому проводимая им ниже классификация кривых является также и классификацией функций. Кривые линии Эйлер делит здесь на непрерывные и разрывные или смешанные. «Линия, то есть кривая, является непрерывной постольку, поскольку ее природа выражается одной определенной функцией от x. Когда же кривая линия такова, что различные ее части BM, MD, DM и т. д. выражаются различными функциями от x так; что после того, как часть BM определена из одной функции, часть MD будет определяться из другой функции, то такие кривые линии называются *разрывными* или *смешанными* и *неправильными*: по той причине, что они не образованы соответственно единому постоянному закону, но составлены из частей различных кривых» [27].

Если, таким образом, непрерывные в смысле Эйлера кривые можно сопоставлять, в соответствии с ранее сказанным, с кривыми аналитическими, то в понятие разрывных кривых во «Введении в анализ» вкладывается лишь немногим более общее содержание: их можно сопоставлять с кусочно-аналитическими кривыми. Отсюда идет и термин — «смешанные кривые». Что касается термина «разрывные кривые», то им выражается лишь наличие разрывов между законами непрерывности, управляющими отдельными участками такой кривой.

В более поздней статье «Об употреблении разрывных функций в анализе» [28, стр. 3—27][11] Эйлер несколько развивает введенные им понятия. Напоминая о том, что в высшей геометрии рассматриваются кривые линии, природа которых выражается определенным уравнением, которому, как закону, подчиняются все ее точки, Эйлер пишет: «Поскольку закон признается содержащим в себе начало непрерывности, так как он теснейшим образом соединяет между собой все части кривой, не допуская никакого изменения в них без нарушения связи непрерывности, то такие кривые называются непрерывными» [28, стр. 4]. Приведя это высказывание, И. Ю. Тимченко замечает, что понятие эйлеровской непрерывности есть понятие моногенности в смысле Вейерштрасса — Бореля [29].

В соответствии с тем, что уже было сказано нами о праве понимать эйлеровские функции — аналитические выражения — как функции аналитические, мы предпочитаем рассматривать свойство моногенности

[11] Работа эта была выполнена Эйлером, по-видимому, еще в 1762 г. [10, стр. 75].

(лучше сказать — свойство квазианалитичности) не как эквивалент понятия эйлеровской непрерывности, но как одно из важных свойств функций, непрерывных в эйлеровском смысле слова.

«Как только критерий непрерывности установлен,— пишет Эйлер несколько ниже [28, стр. 5],— становится ясным, что такая функция разрывная, или лишенная закона непрерывности: в самом деле, все кривые линии, не заданные никаким определенным уравнением, каковые обычно изображаются свободным влечением руки, доставляют такие разрывные функции, так как значения их аппликат не выражаются через абсциссы посредством какого-либо определенного закона. Поскольку такие кривые противостоят указанному выше ряду кривых, определяемых законом непрерывности, они обычно именуются механическими, а лучше разрывными, или лишенными закона непрерывности: не потому, что их части не соединены между собой, но потому что они не задаются никаким определенным уравнением». Основная цель статьи — показать, что «разрывные» функции естественно появляются в качестве «произвольных функций» при интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными, подобно тому как «произвольные постоянные» появляются при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений.

Те же мысли, в кратком виде, излагаются Эйлером и в третьем томе «Интегрального исчисления» [30, стр. 31—33][12]. Произвольную функцию переменного y Эйлер предлагает обозначать так: $f : y$, «где надлежит остерегаться, чтобы не принять f за количество». Аналогично, $f : (x + y)$ обозначает произвольную функцию от $(x + y)$; вместо f можно пользоваться буквами Φ, Ψ, Θ и т. д. [30, стр. 33][13].

Прибегая к современным терминам, можно так резюмировать эйлеровскую классификацию функций в ее окончательном виде: непрерывные (аналитические, смешанные), кусочно-аналитические разрывные, или

---

[12] Мы пользовались третьим изданием (Petropoli, 1827).

[13] Подобными обозначениями Эйлер пользовался еще в статье «О колебании струн» [11, стр. 78 и сл.]. Заметим, что обозначения Даламбера в его первой статье о струне [37] более близки к современным, так как он не употребляет двоеточия. Так, Даламбер пишет, например, ψt, Γs, $\psi(t+s)$, $\varphi(t+s)$ и т. п. Однако Даламбер подразумевает под ними только функции непрерывные в смысле Эйлера. Впоследствии Даламбер утверждал [31, стр. 38], что разрывные в смысле Эйлера функции не могут быть объектом изучения математического анализа при современном его состоянии «Mais, dira sans doute M. Euler, quelle doit donc être en général la loi du mouvement de la corde, lorsqu'elle aura au commencement une figure quelconque? Je réponds, comme je l'ai déjà fait ailleurs, que dans plusieurs cas le Problème ne pourra être résolu et surpassera les forces de l'analyse connue».

неправильные, произвольные (непрерывные) функции, не аналитические ни в каком промежутке.

Терминология Эйлера была принята его современниками и, за отдельными исключениями, сохранялась в течение нескольких десятилетий после его смерти. Однако в дальнейшем развитии математики она не удержалась. Термин «непрерывная функция» был вытеснен термином «аналитическая функция», поставленным Лагранжем на титульном листе его курса математического анализа, вышедшем в последние годы XVIII в. Заметим, что Лагранж не считал нужным давать какое-либо новое определение по сравнению с определением первого тома эйлеровского «Введения в анализ». Функция — это аналитическое выражение (expression de calcul), — говорит Лагранж. Он только полагал, что ему удалось доказать из самых общих соображений (отнюдь не из формулы Тейлора с остаточным членом), что каждое аналитическое выражение изображается степенным рядом.

Хорошо известно также, что терминами «непрерывный» и «разрывный» завладел Коши, вложив в них смысл, сохранившийся и по сей день.

Любопытно отметить, что вследствие той роли, которую Эйлер предоставлял в анализе разрывным функциям, его разрывные функции почти всегда являлись непрерывными в смысле Коши. Напротив, среди его непрерывных функций, естественно, встречаются разрывные в смысле Коши (например, $y=\frac{1}{x}$). Во втором томе «Введения в анализ» рассматривается график такой непрерывной в смысле Эйлера функции, как $y = (-1)^x$ или, более обще: $y = (-a)^x$ [27]. Эйлер отмечает, что точки этого графика всюду плотно ложатся на пару прямых $y=\pm 1$, однако так, что между ними всегда остаются точки, не принадлежащие этому графику. Нельзя не признать, что эта «непрерывная» в смысле Эйлера функция является не менее скверной и парадоксальной, чем известная функция Дирихле. Та, по крайней мере, определена для всех точек некоторого отрезка, тогда как функция Эйлера определена лишь на множестве рациональных чисел, представимых в виде дроби с нечетным знаменателем.

Постоянный оппонент Эйлера — Даламбер — не мог примириться с функцией столь сложной природы. В одной из своих полемических статей «О логарифмах отрицательных чисел» он утверждает, что рассмотренные Эйлером точки составляют только часть графика функции и что подобно тому, как для полного задания параболы нельзя брать одну только функцию $y=+\sqrt{x}$ или $y=-\sqrt{x}$, так и для полного задания графика показательной функции следует брать $y = (\pm a)^x$ [31, стр. 193].

Итак, терминология Эйлера, относящаяся к разделению функций, не привилась. Но суть дела ведь не в терминах. В интересах развития анализа и его приложений необходимо было расширить понятие функции до пределов, способных охватить зависимости, представляемые кривыми, «начерченными свободным движением руки». С другой стороны, также необходимо было выделить, как самостоятельный объект изучения, класс аналитических функций, т. е. класс функций, обладающих наиболее простыми и важными свойствами, и среди них — свойством представимости степенными рядами и производным от него свойством единственности (квазианалитичности). И то и другое было выполнено Эйлером!

* * *

§ 6. Заговорив об эйлеровской классификации функции, мы отступили от хронологической последовательности. Теперь необходимо остановиться на знаменитой работе Эйлера «О колебании струн», содержание которой было доложено в Берлинской академии в мае 1748 г., т. е. в год выхода из печати «Введения в анализ» [32] [14]. Именно с этой работой, напечатанной двумя годами позже в Histoire de l'Académie de Berlin, а не с рассмотренным нами выше более ранним «Методом нахождения кривых линий», принято связывать первое введение «разрывных» функций в анализ.

Эту заслугу Эйлера отметил еще Лагранж в работе, опубликованной в 1761 г. [34] [15]. Сообщив о намерении доказать, что для отыскания колебаний частиц воздуха, происходящих в действительности, необходимо пользоваться кривой линией, течение которой в некоторой точке внезапно сменяется на прямолинейное, что абсолютно несовместимо с законом непрерывности, Лагранж продолжает: «Отсюда видна необходимость допустить в исчисление другие кривые помимо рассматривавшихся до сих пор геометрами и употреблять новый род переменных функций, независимых от закона непрерывности, которые вполне уместно называть функциями неправильными и разрывными. Но это не единственный повод для применения подобных функций; они необходимы для большого числа

[14] Как отмечает в своем указателе сочинений Эйлера Энештрём [10, стр. 33], эта статья является почти дословным французским переводом латинской статьи Эйлера «De vibratione chordarum exercitatio» опубликованной в «Nova acta eruditorum», 1749, стр. 512—527. Соответствующий доклад на латинском языке был прочитан в Берлинской академии 16.V 1748 г. [33].

[15] См. [19, стр. 158].

важных вопросов динамики и гидродинамики... г-н Эйлер является, как я полагаю, первым, кто ввел в анализ этот новый род функций в своем решении проблемы о колеблющихся струнах, принадлежащей к классу тех, о которых у нас будет идти речь...». Вполне согласно со знаменитым младшим современником Эйлера высказывается впоследствии и Риман, рассматривая историю проблемы о колебании струны: «Если, наконец, сопоставить их (Даламбера, Эйлера и Лагранжа — *А. М.*) точки зрения на произвольные функции и на представимость таких функций тригонометрическим рядом, развитые по поводу этой проблемы, то Эйлер первый ввел эти функции в Анализ и, опираясь на геометрическую наглядность, приложил к ним исчисление бесконечно малых» [35, стр. 217] [16].

Эйлер начинает свою статью с замечания, что результаты его предшественников (Тейлора, И. Бернулли и др.), относящиеся к колебаниям струн, имеют ограниченную значимость для определения действительного движения вибрирующей струны, так как эти результаты основываются на двух гипотезах: 1) колебания предполагаются как бы бесконечно малыми 2) они предполагаются правильными, что приводит к синуссидальной форме струны. Указав, что от первой гипотезы, при современном состоянии механики и анализа, нельзя отказаться, Эйлер дает путь решения проблемы, не налагающий никаких ограничений на начальную форму струны. При этом он вновь получает формулу $y = f(x + t\sqrt{b}) + \varphi(x - t\sqrt{b})$, опубликованную Даламбером годом раньше в том же журнале [37]. Однако Эйлер, руководимый безошибочным чутьем естествоиспытателя, истолковывает эту формулу гораздо шире и глубже, чем это делал Даламбер. Именно из того, что «начальное колебание зависит от нашего произвола, поскольку возможно, прежде чем отпустить струну, придать ей любую форму» [11, стр. 70], и из краевых условий задачи ($y = 0$ при $x = 0$ и $x = a$), Эйлер заключает, что функция $f(x)$ в формуле Даламбера может быть задана в отрезке $0 \leqslant x \leqslant a$, как ордината произвольный кривой, соединяющей точки (0, 0) и (0, a), «либо правильной, заключающейся в некотором уравнении, либо неправильной или механической» [17]; дальше функция продолжается, как нечетная с периодом $2a$.

Мы считаем необходимым особо подчеркнуть различие в позициях Даламбера и Эйлера в проблеме колебания струны. Даламбер утверждал,

---

[16] Современный обзор истории проблемы о колебании струны (в связи с трудами Эйлера) в сжатом виде можно найти в статье [36].

[17] «Ayant donc décrit une semblable courbe anguiforme, soit regulière, contenue dans une certaine équation, soit irrégulière, ou méchanique, son appliquée PM fournira les solutions, dont nous avons besoin pour la solution du Problême» [11, стр. 80].

что математический анализ приложим только к «непрерывным» функциям и, следовательно, задача о колебаниях струны остается неразрешимой, например в случае, когда начальная фигура струны есть дуга параболы (так как соответствующая ей функция, допускающая единственное продолжение, не является ни нечетной, ни периодической) (ср., например, [31, стр. 38]). Напротив, Эйлер рассматривал подобные ограничения, как не относящиеся к существу вопроса, и давал решение задачи как в этом, так и во всех подобных случаях.

* * *

§ 7. В «Дифференциальном исчислении», писавшемся Эйлером с 1744 по 1748 г. и изданном в Берлине в 1755 г. на средства Петербургской академии [10, стр. 52], Эйлер формулирует, наконец, в явном виде то самое общее определение функции, которым он уже владел и которое применял и в вариационном исчислении и в задаче о колебании струны: «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых». К этому Эйлер добавляет: «Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество определяется с помощью других» [1, стр. 38]. С этими словами нельзя не согласиться. Впрочем, в самом «дифференциальном исчислении» Эйлер ограничивается рассмотрением одних только непрерывных в его смысле функций (из этого не составляют исключения и знаменитые «невыразимые» функции, такие, как x'). Такое ограничение дает возможность строить «дифференциальное исчисление» без теории пределов — на основе «исчисления нулей». Не останавливаясь здесь на этом вопросе, послужившем в последнее время предметом специальной работы А. П. Юшкевича, доложенной на юбилейной сессии Берлинской академии наук памяти Эйлера [38], отметим только, что если функция $f(x)$ аналитическая, то ее приращение $k = f(x+h) - f(x)$ может быть представлено в виде $k = ah + bh^2 + ch^3 + \ldots$, откуда $\frac{k}{h} = a + bh + ch^2 + \ldots$ и, следовательно, производную $f'(x) = a$ можно получить, не прибегая формально к предельному переходу, а просто полагая приращение или дифференциал $dx = h$ *равным нулю*. Эйлер не дает формально это изложение, но суть дела такова, и путь, избранный впоследствии Лагранжем для построения дифференциального исчисления, нельзя считать принципиально отличным от эйлеровского пути (на котором, впрочем, Эйлер также имел предшественника в лице Ньютона).

Вернемся к определению функции Эйлером в «Дифференциальном исчислении». По-видимому, именно это определение было положено Лакруа в основу того более пространного определения, которое он привел в своем, появившемся в конце XVIII в., большом курсе дифференциального и интегрального исчисления, долженствовавшем подвести итоги развития математического анализа за истекшее столетие. Лакруа пишет: «Наконец, новые идеи, достигнутые прогрессом анализа, приводят к следующему определению функций. Всякое количество, значение которого зависит от одного или многих других количеств, называется функцией этих последних, независимо от того, известно или нет, какие операции нужно применить, чтобы перейти от них к первому» [39, стр. 1] [18].

Мы считаем, что и известное определение Лобачевского является развитием эйлеровского определения из «Дифференциального исчисления» (может быть, с использованием формулировки Лакруа). Напомним это определение: «Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной ... Обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе» [41, стр. 43—44].

* * *

§ 8. В связи с двумя концепциями функции у Эйлера — широкой и узкой — мы усматриваем у него и две концепции переменного, которые в наши дни отражаются в наименованиях, принадлежащих, правда, не XVIII, а XIX в.: функции действительного переменного и функции комплексного переменного.

[18] Это определение сопровождается примером корня уравнения пятой степени, который является функцией коэффициентов уравнения, так как его значение зависит от них, хотя «при современном состоянии алгебры нельзя указать его выражения». На основании этого единственного примера можно было бы думать, что более общая форма определения функции понадобилась Лакруа лишь для того, чтобы охватить в одном понятии функции «явные» и «неявные» (но, вообще говоря, аналитические). Однако изложение вопроса об интегрировании уравнений с частными производными во втором томе курса Лакруа показывает, что автор вслед за Эйлером включал в это понятие и функции «разрывные» т. е. аналитически непредставимые (по Эйлеру) [40].

Любопытно отметить, что каждый из двух томов «Введения в анализ» начинается с определения переменной, причем в первом из них, содержащем, так сказать, аналитическую часть введения, где функция рассматривается только как аналитическое выражение, определяется, по сути дела, комплексное переменное, тогда как во втором томе, содержащем геометрическую часть и расширяющем понятие функции в связи с рассмотрением кривых линий, определяется, по сути дела, действительное переменное. Так, на стр. 4 первого тома (цитирую по первому латинскому изданию 1748 г.) дается следующее определение:

«Переменное количество есть неопределенное или универсальное количество, содержащее в себе всевозможные определенные значения.» И далее: «Даже нуль и мнимые числа не исключаются из значений переменного количества.» После определения понятия функции отмечается, что и функция переменной величины сама есть величина переменная и снова подчеркивается, что из значений z (аргумента) и значений самой функции не исключаются и мнимые значения. Таким образом, переменная первого тома эйлеровского «Введения в анализ» есть комплексная переменная.

В самом начале второго тома «Введения в анализ» [27, стр. 34] понятие о переменной величине сразу суживается до объема действительной переменной, вследствие того, что автор придает этому понятию геометрическое истолкование.

«Так как переменное количество есть величина, рассматриваемая в общем смысле, содержащая в себе все определенные количества, то в геометрии какое-либо переменное количество целесообразнее всего представлять бесконечной прямой линией RS.» И далее (после того, как на прямой было введено начало отсчета A): «Если, таким образом, x переменное количество, представленное бесконечной прямой RS, то очевидно, что всякое определенное значение этого x, являющееся действительным, может быть представлено частью, отсеченной от RS.»

Итак, во втором томе «Введения в анализ» вводится и геометрически истолковывается действительное переменное. Необходимо отметить, что аналогичное ему конкретное представление о множестве всех значений комплексного переменного отсутствовало у Эйлера во время написания «Введения в анализ», как оно отсутствовало и у всех других математиков той эпохи. Мы здесь имеем в виду не простой недостаток геометрических представлений, а недостаток более глубокий и коренной, который удалось отчасти преодолеть благодаря трудам Даламбера и Эйлера лишь к концу сороковых годов. Речь идет о недостаточной определенности и расплывчатости понятия «мнимого» (воображаемого) числа и невыясненности его отношения к понятию комплексного числа $a + bi$, казавшегося долгое время лишь частным случаем «мнимого».

Обратимся сначала к статье Даламбера «Recherches sur le calcul intégral», написанной в 1746 г. [42, стр. 182—224], первая часть которой посвящена попытке доказать теорему о разложимости любого многочлена с действительными коэффициентами на множители первой и второй степеней («основная теорема высшей алгебры») и некоторым применениям этой теоремы к интегральному исчислению. Попытка Даламбера весьма характерна для того времени. Основная теорема, к которой он приходит, звучит почти по современному:

«Теорема II. Пусть $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + fx + g$ — какой-либо полином (Даламбер пользуется термином «multinome»— *А. М.*), такой, что не существует никакого действительного количества, которое, будучи подставлено на место x, приводило бы его к исчезновению; я утверждаю, что всегда найдется количество $p + q\sqrt{-1}$, подставляемое на место x, которое превратит многочлен в нуль» [42, стр. 189]. Однако ознакомление с рассуждениями Даламбера сразу показывает, насколько его понимание вопроса далеко от нашего. Коротко можно сказать, что, рассматривая какую-либо кривую $P(x,y) = 0$ (алгебраическую), проходящую через начало координат, Даламбер считает уже известным, что в окрестности точки $z_0 = 0$ y изображается «весьма сходящимся рядом: $y = az^{m/n} + bz^{r/s} + cz^{t/u}$ и т. д., в котором показатели следует представить себе возрастающими» [42, стр. 183],— факт, для установления которого при всех условиях необходимо уже опираться на приведенную выше теорему. Однако аналогичные упреки можно было делать и другим математикам того времени. Объяснение такого положения сводится к тому, что алгорифм разложения в ряд любой алгебраической функции был хорошо известен математикам со времени Ньютона, тогда как загадка выражения корней алгебраического уравнения через коэффициенты этого уравнения оставалась неразгаданной. А между тем вся проблема, относящаяся к основной теореме высшей алгебры, понималась Даламбером следующим образом: как, не зная выражения корней алгебраического уравнения через коэффициенты и не строя относительно них каких-либо гипотез, доказать, что эти корни могут быть представлены в виде $p + qi$, где p и q — действительные числа. Это обстоятельство он считает нужным особо подчеркнуть: «Заметим, что в предыдущих доказательствах совсем не предполагалось, что мнимый корень многочлена имеет или может иметь мнимое выражение, перед тем как привести его к виду $p + q\sqrt{-1}$» [42, стр. 191].

Но вернемся к анализу рассуждений Даламбера. Чтобы доказать, что каждое значение алгебраической функции $y = f(z)$, определенной из уравнения алгебраической кривой в окрестности точки $z = 0$, может быть представлено в виде $p + q\sqrt{-1}$, где p и q — действительные (а таково именно содержание его теоремы I), он ссылается на результат, попутно установленный им в недавней его работе, представленной на премию Берлинской академии [43], а именно: для мнимого выражения $(a + b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$ всегда можно найти количество $A + B\sqrt{-1}$ (где A и B — действительные числа), которому это выражение будет равно. Установив, с помощью последнего предложения, что y имеет вид $p + q\sqrt{-1}$ вблизи начала координат, Даламбер далее намечает схему процесса аналитического продолжения, с помощью которого можно перейти шаг за шагом от разложения алгебраической функции в окрестности начала координат к разложению той же функции в окрестности любой другой точки с действительной абсциссой и вообще мнимой ординатой, и заключает отсюда, что любое значение алгебраической функции, соответствующее какому угодно (действительному) значению аргумента, может быть представлено в виде $p + q\sqrt{-1}$.[19]

Оценивая подобный ход мыслей, необходимо снова и снова напоминать о необходимости сохранения исторической перспективы. Ведь для математиков нашего времени определение функции предполагает уже определение двух множеств, из одного из которых черпаются значения аргумента, а из другого — значения функции. Для математиков XVIII в. узкое определение функции (непрерывной в смысле Эйлера) предполагало задание некоторого аналитического выражения, в которое следовало подставлять всевозможные значения аргумента, понимая, что иногда соответствующее значение функции может и не быть действительным числом. Последний случай, собственно, и выражался в утверждении, что это значение мнимое, но тогда возникал основной вопрос: можно ли это мнимое, т. е. не действительное значение, представить в виде $p + q\sqrt{-1}$, где p и q — действительные числа? Самые трудности, которые приходилось преодолевать при этом, как, например, в случае выражения $(a + b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$, убеждали в том, что вопрос этот не является ни праздным, ни легким.

---

[19] Ср. все сказанное с работой И. И. Тимченко [29, стр. 646—655]. Тимченко, однако, не имея статьи Даламбера, пользовался изложением ее содержания в трактате об интегральном исчислении Бугенвиля. См. также [25, стр. 10—15].

Присоединим к сказанному еще несколько деталей. В Histoire de l'Académie de Berlin за 1749 г. Эйлер публикует две работы о функциях комплексного переменного: «О споре между г-дами Лейбницем и Бернулли относительно логарифмов отрицательных и мнимых чисел» и «Исследования о мнимых корнях уравнений» [44].

Не останавливаясь на первой из этих работ, содержание которой хорошо известно, отметим только, что здесь впервые в истории математики строится последовательная и полная теория логарифмов комплексных чисел, не воспринятая, однако, такими, например, математиками, как Даламбер [25, стр. 22—27]. Что касается второй статьи, то в ней развивается новая глубокая идея доказательства основной теоремы высшей алгебры, теоремы, кстати сказать, впервые высказанной Эйлером без доказательства в его научной переписке начала сороковых годов [25, стр. 12]. Идея эта была впоследствии использована Гауссом в его втором доказательстве основной теоремы высшей алгебры (напечатано в 1816 г.). Дух времени сказывается в статье Эйлера в следующем весьма колоритном определении мнимых чисел: «Мнимым количеством называют такое, которое ни больше нуля, ни меньше нуля, ни равно нулю; это, следовательно, нечто невозможное, как, например, $\sqrt{-1}$ или, вообще, $a+b\sqrt{-1}$; поскольку такое количество ни положительно, ни отрицательно, ни нуль» [44, стр. 223][20]. В этом определении существенна, во-первых, его первая часть, заявляющая, в сущности, что «мнимые количества» это «количества», не являющиеся действительными, и вторая часть, где комплексные числа $a+b\sqrt{-1}$ приводятся лишь в качестве примеров мнимых чисел. В соответствии с этим основная теорема высшей алгебры формулируется Эйлером следующим образом:

«Теорема XIV. Какова бы ни была степень алгебраического уравнения, все мнимые корни, которые оно может иметь, содержатся в такой общей форме: $M+N\sqrt{-1}$, где M и N—действительные количества» [44, стр. 263].

Этот результат Эйлер рассматривает лишь как частный случай следующего общего предложения: «Всякое мнимое количество всегда образовано двумя членами, один из которых есть действительное количество, обозначаемое через M, а другой — произведение также действительного количества N, умноженного на $\sqrt{-1}$; таким образом $\sqrt{-1}$ есть единственный источник всех мнимых выражений» [44, стр. 265].

---

[20] Ср. подразделение дифференциальных уравнений на действительные и мнимые или нелепые в «Дифференциальном исчислении» Эйлера [1, стр. 200].

Чтобы убедиться в справедливости этого предложения, Эйлер рассматривает важнейшие сначала алгебраические, а затем трансцендентные операции в применении к комплексным числам и фактически проверяет, что результат каждый раз также выражается комплексным числом. Подводя итоги, Эйлер в конце статьи повторяет: «Поскольку, следовательно, все мнимые количества, образованные трансцендентными операциями, также заключаются в общей форме $M+N\sqrt{-1}$, мы сможем не колеблясь утверждать (nous pourrons soutenir sans balancer), что вообще все мнимые количества, какими бы сложными они ни являлись, всегда приводимы к виду $M+N\sqrt{-1}$» [44, стр. 288].

Подводя итоги, можно сказать, что лишь к концу сороковых годов XVIII в., благодаря трудам Даламбера и Эйлера, посвященным основной теореме высшей алгебры и имевшим, конечно, огромное самостоятельное значение для дальнейшего развития науки, удалось подойти к пониманию того простого факта, что «мнимые числа»— это комплексные числа $a+bi$ и ни что другое. Отмечаемый осознанием этого факта этап в развитии математики, при всей тривиальности его формулировки, представляется нам не менее значительным, чем этап, связанный с геометрическим истолкованием «мнимых чисел».

Во всяком случае второй этап немыслим без первого! И вот почему поиски геометрической интерпретации мнимых чисел в первой половине XVIII в. были обречены на неудачу.

* * *

§ 9. Определение значения функции — аналитического выражения для мнимого значения аргумента — сводится к подстановке последнего в соответствующую формулу и вычислению действительной и мнимой частей результата. Мы уже указывали в § 8, что вычисления эти проводились не без труда даже такими выдающимися математиками, как Эйлер и Даламбер. Однако все трудности исчезали, когда функцию удавалось представить степенным рядом.

Еще в пятидесятых годах XVIII в., в первых работах Даламбера и Эйлера, посвященных, как мы можем сказать теперь, применению комплексного потенциала к вопросам обтекания тел потоком жидкости, соответствующий потенциал разлагается в степенной ряд, куда подставляется значение комплексного аргумента, выраженное в полярных координатах (тригонометрическая форма комплексного числа) и затем с помощью формулы Моавра—Котеса отделяются действительная и мнимые части функции. Аналогичный прием употребляется Эйлером и в исследовании ортогональных траекторий и конформного отображения частей сферы на плоскость. Существенно отметить, что уже во всех этих работах мы фактически сталкиваемся с конкретными истолкованиями комплексных чисел — геометрическим или физическим. Именно, при решении соответствующих проблем координаты точки на плоскости или проекции на координатные оси скорости находящейся в этой точке частицы жидкости, рассматриваются как действительные и мнимые части комплексных чисел. Над ними производятся выкладки, с тем, чтобы в окончательном результате отделить действительную часть от мнимой и, таким образом, вновь прийти к величинам, имеющим непосредственный физический или геометрический смысл [25, стр. 29—34]. Но если после установления тождества понятий «мнимых» и комплексных чисел трактовка аргумента функции как комплексного переменного не встречалась уже с принципиальными затруднениями, пока дело ограничивалось аналитическими функциями, то переход к более общему понятию произвольной функции, осуществленный Эйлером, как мы видели, около 1748 г., должен был вызвать к жизни новые вопросы.

В самом деле, если функция задана графически и ее график построен «свободным влечением руки», то как тогда можно говорить о значении этой именно функции при каком-либо мнимом значении аргумента? Подобные вопросы фактически возникли перед Эйлером, и он находил на них ответы, которые с нашей точки зрения обнаруживают не только понимание сути дела, настолько глубокое, насколько это вообще было возможным в XVIII в., но и какое-то удивительное чутье, глаз мастера, позволяющие давать правильные оценки явлений, еще не раскрытых тогда наукой.

Материал для этих суждений можно почерпнуть в третьем томе «Интегрального исчисления», во-первых, из главы III второго раздела первой части тома, в начале которой дается общее решение уравнения колебания струны, а затем полученный результат применяется к решению уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ и, во-вторых, из главы III третьего раздела первой части тома, где рассматривается общий вопрос об интегрировании линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами любого порядка. Высказывания в последней из глав отчасти повторяют то, что говорилось в более ранней. Но так как они являются в некоторых отношениях более определенными, мы на них и остановимся. Эйлер начинает с рассмотрения уравнения вида

$$A\frac{d^2z}{dx^2}+B\frac{d^2z}{dxdy}+C\frac{d^2z}{dy^2}=0,$$

где A, B и C — постоянные, и находит выражение общего решения уравнения через две произвольные функции $z = \Gamma : (y - \alpha x) + \Delta : (y - \beta x)$; здесь через α и β обозначены корни квадратного уравнения

$$Au^2 + Bu + C = 0$$

(мы выписали решение только для случая $\alpha \neq \beta$.

Выражение интеграла не доставляет никаких затруднений, пока уравнение

$$Au^2 + Bu + C = 0$$

имеет два действительных корня, либо неравных, либо равных; если же корни мнимые, так что

$$\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1} \text{ и } \beta = \mu - \nu\sqrt{-1},$$

то произвольные функции вообще становятся непригодными (tum functiones algebraicae omni fere usu destituuntur).

В самом деле, хотя функции Γ и Δ представлены некоторыми начерченными кривыми, так что $\Gamma : u$ и $\Delta : u$ обозначают их аппликаты, соответствующие абсциссе u, (все же) совсем не ясно, какие значения следует придавать Γ $(p + q\sqrt{-1}$ и Δ $(p - q\sqrt{-1})$, когда переменное становится мнимым. Огромное различие между непрерывными и разрывными функциями в том и обнаруживается, что выражения, всегда представляющиеся действительными:

$$\Gamma : (p + q\sqrt{-1}) + \Gamma : (p - q\sqrt{-1})$$

и

$$\frac{\Delta : (p + q\sqrt{-1}) - \Delta : (p - q\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},$$

ничему не служат в случае, когда Γ и Δ обозначают разрывные функции. Отсюда видно, что найденное здесь общее решение в этом случае должно ограничиваться одними непрерывными функциями, поскольку разрывные не пригодны к использованию (quandoquidem discontinuae applicationi et executioni adversantur)» [30, п. 420, стр. 314—315].

Рассмотрев далее линейное однородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами, Эйлер находит его общее решение в виде суммы трех произвольных функций

$$z = \Gamma : (y + \alpha x) + \Delta : (y + \beta x) + \Sigma : (y + \gamma x),$$

где α, β и γ — корни соответствующего кубического уравнения

$$Au^3 + Bu^2 + Cu + D = 0.$$

В случае двух мнимых корней этого уравнения, когда произвольные функции не находят никакого употребления, Эйлер допускает только непрерывные в его смысле функции и записывает их сумму следующим образом:

$$\Gamma : v(\cos\Phi + \sqrt{-1}\ \sin\Phi) + \Delta : v(\cos\ \Phi - \sqrt{-1}\sin\Phi).$$

Если эти функции суть степени, то выражение приводится к виду $Av^n \cos n\Phi + Bv^n \sin n\,\Phi$ или $Av^n \cos(n\Phi + \alpha)$; если они суть логарифмы, то сумма представляется в виде $Alnv + B\Phi$; если показательные функции, то $Ae^{v\cos\Phi}\cos(v\sin\Phi + \alpha)$.

Наконец, метод распространяется на случай линейного однородного уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами.

Из всего, что было сказано в этом параграфе об использовании Эйлером произвольных функций, ясно, что он видел существенное различие между непрерывными и разрывными функциями, рассматривая первые как функции комплексного переменного (аналитические), а вторые — только как функции действительного переменного. Замечательно, что в применении к уравнениям гиперболического типа (простейший случай — уравнение колебания струны), он допускал построение решений из функций любой природы, тогда как для уравнений эллиптического типа (и, в частности, уравнения вида $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$), решение строится им только из непрерывных (в конечном счете аналитических) функций. Таким глубоким было проникновение Эйлера в природу функций и дифференциальных уравнений.

Отметим, что Ф. И. Франкль, говоря о решении Эйлером простейшего указанного выше уравнения эллиптического типа, предъявляет к Эйлеру несправедливые, с нашей точки зрения, претензии. Вот что пишет Ф. И. Франкль [36, стр. 606]: «... будучи убежденным в том, что и в этом случае общее решение должно быть представлено при помощи произвольных, и вообще говоря, «разрывных» функций, Эйлер не допускает мысли, что функции f и F в данном случае по сути дела должны быть аналитическими, хотя на самом деле они именно таковы». Мы готовы согласиться, что п. 301 третьего тома «Интегрального исчисления» Эйлера, на который ссылается здесь Ф. И. Франкль, сформулирован менее определенно, чем п. 420 той же книги, переведенный нами выше целиком. Но ведь в последнем Эйлер явно говорит о том, что в данном случае (уравнения эллиптического типа) разрывные функции непригодны в общем решении, и что следует ограничиваться функциями непрерывными (в конечном счете, аналитическими). А это прямо противоположно тому, в чем Ф. И. Франкль упрекает Эйлера. Вот почему мы не можем признать справедливости следующего вывода Ф. И. Франкля: «Таким образом, Эйлер достиг ясности в отношении качественного характера общего решения уравнений гиперболического, но не эллиптического типа» [36, стр. 607]. Из сказанного следует, что ясность была достигнута Эйлером по отношению и к тому, и к другому типу.

Литература

1. Леонард Эйлер, Дифференциальное исчисление. Перевод с латинск., вступит. статья и примеч. М. Я. Выгодского, М.—Л., ГТТИ, 1949
2. К. А. Рыбников, О так называемых творческих и критических периодах в истории математического анализа. Историко-математические исследования, под ред. Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича (в дальнейшем сокращенно: Ист.-мат. иссл.), вып. VII, ГТТИ, 1954, стр. 643—665
3. В. Н. Молодший, Основы учения о числе в XVIII веке, Учпедгиз, 1953, гл. I «О математической строгости в XVIII в.»
4. С. А. Яновская, Мишель Ролль как критик анализа бесконечно-малых. Тр. Инст. ист. естеств., под ред. С. И. Вавилова и др. т. I, Изд-во АН СССР, 1947, стр. 327—346
5. Р. Курант, Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. Перевод с англ. Б. В. Шабата, ИЛ, М., 1953, введение (стр. 7 и сл.)
6. A. Cauchy, Oeuvres complètes, II Série, t. III, Paris
7. B. Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege (Ostwald's Klassiker, № 153). См. русский перевод в приложении к книге Э. Кольман, Бернард Больцано. М., Изд-во АН СССР, 1955
8. Г. Харди, Расходящиеся ряды, перевод с англ. Д. А. Райкова, с предисл. и обзорной статьей С. Б. Стечкина, ИЛ, М., 1951 (особенно гл. I, II и предисл. редактора)
9. И. Гальперин, Введение в теорию обобщенных функций, перевод с англ. М. С. Аграновича, под ред. Г. Е. Шилова, ИЛ, М., 1954

10. G. Eneström, Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. Erste Lieferung, 1910; zweite Lieferung, Leipzig, 1913.
11. Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres, année 1748, Berlin, 1750
12. И. Г. Башмакова и А. П. Юшкевич, Леонард Эйлер, Ист.-мат. иссл., вып. VII, стр. 474—475
13. Н. И. Симонов, О научном наследии Леонарда Эйлера в области дифференциальных уравнений, там же, стр. 513—519 и сл.
14. Б. Г. Кузнецов, Физика Эйлера и учение Лейбница о монадах. Тр. Инст. ист. естеств., т. II, 1948, стр. 226—238
15. L. Euler, Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie, S. Petersbourg, т. I—III, 1768—1772 (особенно т. II, 1768)
16. L. Euler, De motu projectorum in medio non resistente, per methodum maximorum ac minimorum determinando
17. С. Я. Лурье, Неопубликованная научная переписка Леонарда Эйлера. Юбил. сб. «Леонард Эйлер, 1707—1783», М.—Л., Изд-во АН СССР, 1935, стр. 125
18. Л. С. Полак, В. Р. Гамильтон и принцип стационарного действия, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1936, стр. 12
19. Lagrange, Oeuvres, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1867 (Miscellanea Taurinensia, II, 1760—1761)
20. Bézout, Sur le degré des équations resultantes de l'évanouissement des inconnues, Hist. de l'Acad. royale des sciences, année 1764, Paris, 1767, стр. 288—338
21. G. Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, 1750
22. К. А. Рыбников, Первые этапы развития вариационного исчисления. Ист.-мат. иссл., вып. II, М.— Л., ГТТИ, 1949, стр. 355—498
23. Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, т. I. Перевод с латинск. Е. Л. Пацановского, ред., вступит. статья и примеч. проф. С. Я. Лурье, М.— Л., ОНТИ, 1936
24. А. И. Маркушевич, Элементы теории аналитических функций, М., Учпедгиз, 1944
25. А. И. Маркушевич, Очерки по истории теории аналитических функций, М.— Л., ГТТИ, 1951, Очерк первый. Накопление основных фактов в XVIII столетии, стр. 5—48
26. Histoire de l'Académie de Berlin, année 1753, t. IX
27. L. Euler, Introductio in analysin infinitorum, tomus secundus, Lausannae, 1748
28. L. Euler, De usu functionum discontinuarum in analysi, Novi commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, t. XI, pro anno MDCCLXV, Petropoli, MDCCLXVII
29. И. Ю. Тимченко, Основания теории аналитических функций. Записки математического отд-ния Новороссийского об-ва естествоиспытателей, Одесса, 1892—1899, стр. 482
30. L. Euler, Institutionum calculi integralis, volumen tertium, Petropoli, 1770
31. D'Alembert, Opuscules mathématiques, tome premier, Paris, 1761
32. L. Euler, Sur la vibration des cordes, стр. 69—85
33. E. Winter, Die Register der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1746—1766; Akademie-Verlag, Berlin, 1957, стр. 126

34. L a g r a n g e, Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son (Miscellanea Taurinensia, т. II, 1760—1761)
35. B. R i e m a n n, Werke, Leipzig, 1876, XII, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch trigonometrische Reihe (См. русское изд.: Б е р н г а р д Р и м а н, Сочинения, перевод с нем. под ред., с предисл., обзорной статьей и примеч. проф. В. Л. Гончарова, М.— Л., ГТТИ, 1948)
36. Ф. И. Ф р а н к л ь, Об исследованиях Л. Эйлера в области теории уравнений с частными производными, Ист.-мат. иссл., вып. VII, стр. 596—624.
37. D'A l e m b e r t, Recherches sur la courbe que forme une corde «tendue», mise en vibration. Suite des mêmes recherches, Hist. de l'Acad. de Berlin, année 1747, Berlin, 1749, стр. 214—249
38. A. P. J u s c h k e w i t s h, Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis. (Печатается в томе настоящего сборника, издаваемом Германской академией наук в Берлине).
39. S. F. L a c r o i x, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, tome premier, Paris, 1797
40. S. F. L a c r o i x, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, tome second, Paris, 1798
41. Н. И. Л о б а ч е в с к и й, Полное собрание сочинений. Том пятый. Сочинения по математическому анализу, теории вероятностей, механике и астрономии, М.— Л., ГТТИ, 1951
42. Histoire de l'Académie de Berlin, annee 1746, Berlin, 1748
43. D'A l e m b e r t, Refléxions sur la cause générale des vents, 1749
44. Histoire de l'Académie de Berlin, année 1749, Berlin, 1751. De la controverse entre mrs Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires (p. 139—179); Recherches sur les racines imaginaires des équations (p. 222—288)

9 Зак. № 988

A. I. MARKUSCHEWITSCH

DIE GRUNDBEGRIFFE DER ANALYSIS UND DER FUNKTIONENTHEORIE IN DEN WERKEN EULERS

(Zusammenfassung)

Es wird die Entwicklung des Begriffs der Funktion in den Werken Eulers verfolgt. Bereits im «Methodus inveniendi lineas curvas...» (1744) benutzt Euler, ohne eine explizite Definition anzugeben, einen Funktionsbegriff von so allgemeinem Charakter, daß in ihn sowohl der Begriff der Funktion eines Punktes als auch der der Funktion einer Linie (d. h. also der Begriff des Funktionals) als Spezialfälle eingehen.

Im ersten Band der «Introductio in analysin infinitorum» (1748) wird ein enger Begriff der Funktion als eines analytischen Ausdrucks eingeführt. Dabei werden die Potenzreihen als ein universaler analytischer Ausdruck betrachtet, der für die Darstellung jeder Funktion taugt. Daher stimmt der Begriff der Funktion als eines analytischen Ausdrucks faktisch mit dem späteren Begriff der analytischen Funktion überein. Im zweiten Band desselben Werkes eignet Euler dieser Funktionenklasse den Namen der «stetigen» Funktionen zu und spricht auch von «gemischten» Funktionen, die man als stückweis-analytische Funktionen charakterisieren kann.

Im Artikel «Sur la vibration des cordes», dessen Hauptinhalt der Berliner Akademie im Erscheinungsjahr der «Introductio» vorgetragen wurde, behauptet Euler, daß die ursprüngliche Form einer Saite durch eine Funktion vorgegeben sein kann, die durch keinerlei Gleichung bestimmt wird. Lagrange und später Riemann wiesen darauf hin, daß gerade hier zum erstenmal in der Geschichte der Analysis die «willkürlichen Funktionen», «die vom Stetigkeitsgesetz unabhängig sind», eingeführt wurden (Lagrange). Es wäre jedoch zu bemerken, daß Euler bereits im «Methodus inveniendi» unter weitgehender Anwendung der Variation in einem Punkt als Untersuchungsmittel für Variationsaufgaben eben damit über die Grenzen der Klasse der «stetigen» Funktionen hinausging, da innerhalb solch einer Klasse, wie er späterhin wiederholt selbst betonte, solche Variationen (infolge des «Stetigkeitsgesetzes», also in moderner Terminologie der quasianalytischen Eigenschaft) unmöglich sind.

In den «Institutiones calculi differentialis» (1755) befindet sich eine explizit formulierte Definition des Funktionsbegriffs, dessen außerordentlich weitreichender Charakter von Euler selbst unterstrichen wird: «wenn einige Quantitäten von anderen in solch einer Weise abhängen, daß sie bei Veränderung letzterer selbst eine Veränderung erleiden, so nennt man die ersteren Funktionen der letzteren».

Anscheinend ist es gerade diese Formulierung, die Lacroix der ausgedehnten Definition zugrundegelegt hat, mit der sein großes Lehrbuch (1797) beginnt, und die später die Form der bekannten Definitionen von Lobatschewski und Dirichlet annahm. Es sei bemerkt, daß Euler im zweiten Band der «Introductio» das Beispiel der Funktion $y = (-1)^x$ untersucht, indem er vermerkt, daß die Punkte ihres Graphen überall dicht auf dem Geradenpaar $y = \pm 1$ liegen, jedoch so, daß zwischen ihnen stets Punkte verbleiben, die diesem Graphen nicht angehören. Vom historischen Standpunkt ist dieses Beispiel der Funktion nicht minder paradoxal als das spätere Beispiel der Dirichletschen Funktion.

Euler präzisierte und entwickelte seine Klassifikation der Funktionen im Artikel «De usu functionarum discontinuarum in analysi» (1767) und im dritten Band der «Institutionum calculi integralis» (1770). Diese Klassifikation sieht in ihrer endgültigen Form folgendermaßen aus: «stetige» (analytische), «gemischte» (stückweis analytische), «unstetige», «unregelmässige», oder «mechanische» (willkürliche) Funktionen (die überhaupt in keinerlei Intervall analytisch sind). Es wäre interessant zu bemerken, daß die «unstetigen» Funktionen bei der Rolle, die Euler ihnen in der Analysis überließ (variierte Extremalfunktionen, «willkürliche» Funktionen, die bei der Integration partieller Differentialgleichungen auftreten), fast immer stetig im Sinne Cauchys sind. Umgekehrt kommen unter seinen «stetigen» Funktionen naturgemäß Funktionen vor, die in einzelnen Punkten unstetig (z. B. $y = \frac{1}{x}$) und sogar überall unstetig ($y = (-1)^x$) sind. Es kommt hier jedoch nicht auf die Terminologie an. Wesentlich ist, daß Euler den Funktionsbegriff bis zu einer Grenze erweiterte, die die durch freihändig gezeichnete Kurven darstellbaren Beziehungen umfaßt, und gleichzeitig eine Klasse von Funktionen als Gegenstand eines speziellen Studiums hervorhob, die die Eigenschaft der Darstellbarkeit durch Potenzreihen und der (von dieser abgeleiteten) Quasianalytizität besitzen, d. h. die Klasse der analytischen Funktionen.

Beim Abgrenzen der Begriffe der «stetigen» und der «unstetigen» Funktionen betrachtete Euler konsequent die ersteren als Funktionen einer komplexen, die letzteren als Funktionen einer reellen Veränderlichen. In diesem Zusammenhang wird im Artikel das wichtige historische Verdienst Eulers um die Entwicklung der Theorie der komplexen Zahlen unterstrichen, das darin besteht, daß er (und D'Alembert) geklärt hat, daß die ursprünglich rein negativ definierten «imaginären Zahlen» nichts anderes als komplexe Zahlen, d. h. Zahlen der Form $a + bi$ sind. Es wird auch bemerkt, daß Euler sich darüber im Klaren war, da die «willkürlichen» Funktionen, die in den Lösungen einer Gleichung elliptischen Typus (speziell der Laplaceschen Gleichung) vorkommen, «stetige» Funktionen sind, die sich in natürlicher Weise in das komplexe Gebiet fortsetzen, während die «willkürlichen» Funktionen in den Lösungen einer Gleichung hyperbolischen Typus (speziell der Gleichung der Saitenschwingung) solch eine Fortsetzung, allgemein gesagt, nicht besitzen.

Б. Н. ДЕЛОНЕ

ЭЙЛЕР КАК ГЕОМЕТР[1]

Самые многочисленные работы Эйлера в области математики относятся к анализу и его приложениям, однако всеобъемлющий математический гений Эйлера не оставил в стороне почти ни одной области математики, развивавшейся в его время, и дал, как и в анализе, первоклассные достижения в геометрии, теории чисел и алгебре. Настоящая статья дает краткий обзор основных работ Эйлера в геометрии.

Швейцарское общество естествоиспытателей начало издавать грандиозное полное собрание сочинений Эйлера «Leonhardi Euleri opera omnia», рассчитанное более чем на 70 томов, еще в 1911 г. Это собрание сочинений издавалось с большими перерывами, вызванными двумя мировыми войнами. До сих пор вышло 29 томов первой серии, посвященной математическим работам Эйлера. Среди этих томов четыре последних тома 26, 27, 28 и 29, общим объемом 1590 страниц, вышедшие в 1953, 1954, 1955 и 1956 гг. и озаглавленные «Leonhardi Euleri commentationes geometricae», содержат 75 оригинальных работ Эйлера, относящихся к геометрии. Кроме того, вторая часть «Введения в анализ» («Introductio in analysin infinitorum»), в «Opera omnia» являющаяся 9 томом первой серии, также целиком посвящена геометрии и содержит первое последовательное изложение аналитической геометрии на плоскости и приложение, заключающее в себе первое краткое изложение аналитической геометрии в пространстве.

Нам кажется целесообразным дать самые краткие аннотации этих 75 геометрических работ Эйлера, а также совсем кратко описать содержание отдельных глав второй части «Введения в анализ» и приложения к нему, чтобы можно было иметь представление о том, над какими геометрическими вопросами работал Эйлер.

---

[1] Доклад, прочитанный на Юбилейной научной сессии Отделения физико-математических наук и Отделения технических наук АН СССР в Ленинграде 17 апреля 1957 г.

Начнем с работ, помещенных в 26 томе.

№ 1. «Решение геометрической задачи о луночках, образованных кругами» (1737)[2], 14 стр.

Если у двух перекрывающихся кругов выбросить общую часть, от каждого круга останется по так называемой «луночке». Первую теорему о площадях таких луночек дал еще древнегреческий математик Гиппократ Хиосский. Эйлер дает дальнейшие теоремы.

№ 2. «Различные геометрические доказательства» (1748), 18 стр.

Начиная с вывода одного свойства того числа, которое сейчас называют двойным отношением четырех точек на прямой, Эйлер в конце доказывает теорему: сумма квадратов сторон четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей плюс учетверенный квадрат расстояния между серединами его диагоналей.

№ 3. «Об одном кажущемся противоречии в теории кривых линий» (1748), 13 стр.

Содержит разъяснение известного «парадокса» Крамера, состоящего в том, что, с одной стороны, две линии третьего порядка пересекаются в 9 точках, а, с другой стороны, условия того, чтобы линия третьего порядка проходила через 9 заданных точек, однозначно (с точностью до общего множителя) определяют коэффициенты уравнения линии третьего порядка.

№ 4. «Разъяснения о числе точек, в которых могут пересекаться две линии каких-либо порядков» (1748), 14 стр.

Содержит исследование об исключении переменной из двух уравнений любых порядков с двумя неизвестными.

№ 5. «Решение геометрической задачи» (1750), 11 стр.

Даются четыре разных решения задачи: найти оси симметрии эллипса по их длине и положению, если заданы по длине и положению какие-либо два его сопряженных диаметра.

№ 6. «Элементы учения о телах» (1752), 23 стр. и

№ 7. «Доказательство некоторых замечательных свойств, которым подчинены тела, ограниченные плоскими гранями» (1752), 15 стр.

Эти две работы содержат доказательство самой первой по времени теоремы топологии, знаменитой теоремы Эйлера о многогранниках: число вершин минус число ребер плюс число граней многогранника равно двум.

№ 8. «Свойства треугольника, углы которого находятся в данном отношении» (1765), 30 стр.

---

[2] В скобках указан год, которым помечен соответствующий том того или иного журнала.

Решается задача: пусть в треугольнике один из углов в n раз больше другого, где n — целое число; найти соотношения, которые это налагает на его стороны.

№ 9. «Легкое решение задачи геометрии, казавшейся очень трудной» (1765), 19 стр.

Эйлер отмечает, как легко при разумном выборе координатной системы вычисляются координаты точки E пересечения высот треугольника, его центра тяжести F, центра G вписанного круга и центра H описанного круга, причем сразу получается, что E, F и H лежат на одной прямой.

№ 10. «Решение некоторых геометрических задач, поставленных Альбрехтом Эйлером»[3] (1768), 31 стр.

О разрезании площадок, ограниченных отрезками прямых и дугами окружностей и парабол, несколькими параллельными прямыми на равновеликие части.

№ 11. «О вычислении правильных тел при помощи сферической тригонометрии, где также дается способ обклеивания картой глобусов как небесных, так и земных» (1778), 15 стр.

Вычисляются правильные многогранники и делается замечание, что из правильных многогранников, вписанных в сферу, наиболее к ней прилегает правильный додекаэдр. Работа сопровождается вычислениями с семью знаками.

№ 12. «Об измерении телесных углов» (1778), 20 стр.

Доказывается теорема Альберта Жирара о выражении площади сферического треугольника через его избыток, затем та же площадь вычисляется через стороны, наконец, вычисляются величины телесных углов правильных многогранников.

№ 13. «Краткий и ясный вывод сферической тригонометрии из основных ее принципов» (1779), 14 стр.

Этой работой Эйлер впервые вводит то изящество вывода формул сферической тригонометрии, к которому мы привыкли теперь.

№ 14. «Построение одной задачи Паппа Александрийского» (1780), 6 стр.

№ 15. «О двойном образовании как эпициклоиды, так и гипоциклоиды» (1781), 9 стр.

№ 16. «О свойстве четырех точек на плоскости» (1782), 22 стр.

Свойство это связано с тем, что объем тетраэдра, построенного на этих точках, равен нулю, но Эйлер, по-видимому, этого обстоятельства не замечает.

[3] Сыном Л. Эйлера.

№ 17. «Решение легкой задачи об отыскании круга, касающегося трех заданных кругов» (1788), 6 стр.

№ 18. «О центре подобия» (1791), 10 стр.

Ищется неподвижная точка преобразования подобия плоскости в себя.

№ 19. «Разъяснение геометрической задачи о делении треугольника на четыре части, рассматривавшейся ранее Яковом Бернулли» (1803), 18 стр.

№ 20. «Полное решение задачи о разделении треугольника на четыре части при помощи двух взаимно-перпендикулярных прямых» (1803), 30 стр.

В этих двух работах решается задача о том, как надо провести две взаимно-перпендикулярные прямые, чтобы они разрезали треугольник на четыре равновеликие части.

№ 21. «Решение легкой задачи об отыскании сферы, касающейся четырех заданных сфер» (1807), 10 стр.

№ 22. «Кое-что геометрическое и сферическое» (1812), 15 стр.[4]

В треугольнике ABC дана точка O. Прямые AO, BO, CO пересекают стороны в точках a, b, c. Находится связь между длинами отрезков AO, BO, CO и aO, bO, cO. Сначала задача решается сложно, потом проще и, наконец, совсем просто. Затем то же самое решается для сферы.

Таковы 22 работы 26-го тома. Они в большой своей части относятся к синтетической геометрии.

Перейдём теперь к работам, помещенным в 27-м томе.

№ 23. «Метод нахождения алгебраических взаимных траекторий» (1727), 6 стр.

№ 24. «Решение задачи о взаимных траекториях» (1727), 18 стр.

№ 25. «О спрямляемых алгебраических кривых и взаимных траекториях» (1730), 5 стр.

Эти три первые работы тома относятся к задаче о так называемых взаимных траекториях, поставленной в 1720 г. Николаем II Бернулли, сыном Якова Бернулли, скончавшимся в возрасте 31 года в Петербурге. Задача эта состоит в том, чтобы найти такое семейство параллельных кривых $y = f(x) + C$, чтобы кривые симметричного ему по отношению к оси Y семейства $y = f(-x) + c$ явились его изогональными траекториями. Цель Эйлера — отыскать такие простейшие алгебраические кривые.

---

[4] Заметим, что геометрией Эйлер называл планиметрию и потому «геометрическое» = «планиметрическое».

№ 26. «Решение задачи, предложенной в Nov. Act. Eruditorum в ноябре 1743» (1744), 21 стр.

Ищется такая замкнутая кривая, относительно которой имелись бы две такие точки C и D, чтобы площадь сектора, описываемого отрезком CM, где M — точка, обегающая эту кривую, была пропорциональна углу, который описывается при этом отрезком DM.

№ 27. «Геометрическая задача, публично предложенная анонимным геометром» (1743), 1 стр.

№ 28. «О некоторых свойствах конических сечений, которые имеются также у бесконечно многих других кривых» (1745), 23 стр.

Рассматриваются алгебраические кривые не второго порядка, у которых середины параллельных хорд лежат прямолинейно. Из существования двух таких диаметров следует существование третьего, и т. д. Эйлер ищет те случаи, когда этот процесс после конечного числа шагов снова приводит к первому диаметру.

№ 29. «Решение катоптрической задачи, предложенной в этих Актах в сентябре 1745 на стр. 523» (1746), 4 стр.

№ 30. «Решение катоптрической задачи, предложенной в Nov. Act. Eruditorum Lipsiensibus в ноябре 1745» (1748), 52 стр.

Эти две работы содержат решение задачи: найти такую кривую, чтобы любой луч света, исходящий из точки O, после двукратного отражения в этой кривой возвращался в точку O.

№ 31. «Разыскание кривых, которые образуют эволюты, им подобные» (1740), 49 стр.

Пусть дана эвольвента и последовательные ее эволюты; какова должна быть эвольвента, чтобы одна из последовательных ее эволют была ей подобна? Решение этой частной задачи привело Эйлера к построению теории линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

№ 32. «О площади поверхности равнобочных конусов и других конических тел» (1747), 9 стр.

Речь идет о задаче, предложенной Якобом Германом, как сводить различные интегралы, например дающие площади поверхностей, к интегралам, дающим длины линий, что казалось важным потому, что длину кривой можно просто измерить ниткой.

№ 33. «О сведении кривых линий к дугам окружностей» (1749), 36 стр.

Длина дуги кривой без точек перегиба лежит между длиной ломаной, составленной касательными, проведенными в концах дуги, и длиной ее хорды. Разбив дугу кривой на $2h$ частей одинаковых «амплитуд», т. е.

с одинаковыми углами между нормалями в их последовательных концах, Эйлер получает приближенную формулу для спрямления кривой.

№ 34. «О точке возврата второго рода маркиза де Лопиталя» (1749), 17 стр.

№ 35. «Новый метод разыскания алгебраических взаимных траекторий» (1751), 24 стр.

№ 36. «Принципы сферической тригонометрии, выведенные из метода наибольших и наименьших величин» (1753), 32 стр.

№ 37. «Элементы сфероидальной тригонометрии, выведенные из метода наибольших и наименьших величин» (1753), 31 стр.

Работы № 36 и 37 содержат новое изложение сферической тригонометрии, основанное на соображениях минимума, и такое же изложение геометрии сфероида, т. е. сжатого эллипсоида вращения, возможное потому, что рассматриваются треугольники, стороны которых суть кратчайшие (геодезические) линии.

№ 38. «Соображения об одной геометрической задаче, рассматривавшейся некоторыми геометрами и которая все же невозможна» (1754), 14 стр.

Рассматривается один вопрос о кривой, такой, что всякая прямая, проходящая через заданную точку C, пересекает ее в двух точках, в которых касательные к ней образуют постоянный угол.

№ 39. «Об одном значительном продвижении метода, обратного методу касательных» (1764), 19 стр.

Ищется кривая, обладающая следующим свойством: длина n нормали к кривой до ее пересечения с осью X равна ординате кривой, основанием которой является точка пересечения нормали с осью X. Если уравнение кривой $y = f(x)$, то должно быть $f(x+s) = n$, где s — длина поднормали, т. е. длина проекции нормали на ось X. Эйлер сводит задачу к функциональному уравнению $f(x + f(x)) = f(x)$, т. е. к отысканию такой функции, периодом которой является сама эта функция, и эту задачу функционального анализа решает.

№ 40. «Доказательство теоремы Бернулли о том, что если последовательно развертывать «прямоугольные» кривые, то в пределе получится циклоида» (1764), 16 стр.

Рассматривается криволинейная дуга BA, такая, что «амплитуда» ее равна 90°. В точке B к ней прикрепляется нить, которая на нее навертывается до точки A, а затем с нее развертывается. Тогда точка A описывает некоторую развертку AB'. Теперь то же делается с дугой AB', начиная с точки A. Получается ее развертка $B'A'$ и т. д. Используя то, что сейчас называют разложением в ряд Фурье, Эйлер показывает, что эти последовательные развертки все меньше отличаются от дуги циклоиды.

Эти 18 работ входят в 27-й том. Как мы видим, в основном они относятся к теории кривых.

Перейдем теперь к работам 28-го тома, который содержит в некотором смысле самое важное из того, что Эйлер сделал в геометрии. Приведем перевод нескольких строк из введения к этому тому редактора полного собрания сочинений Эйлера швейцарского математика А. Шпейзера, так как ему удалось очень удачно охарактеризовать содержание этого тома.

«Центральная для всей математики теория поверхностей была основана Эйлером и чрезвычайно далеко им продвинута. Определение кривизны, значение линейного элемента, развертывающиеся поверхности, употребление изотермических параметров, общее конформное отображение — вот те открытия, оригинальные документы о которых содержатся в этом томе. Кажется видишь, как изо дня в день продвигается работа. Успех сменяется неудачей, пока вдруг не наступает ясность и все не соединяется в огромное целое.»

Надо отдельно отметить работу, помещенную в самом конце тома, в которой Эйлер положил начало общепринятому ныне изложению общей теории пространственных кривых.

№ 41. «Исследования о кривизне поверхностей» (1760), 22 стр.

Ставится классическая задача: найти кривизну всех плоских сечений поверхности в данной ее точке. Общая формула, решающая вопрос, получается весьма быстро и затем преобразуется, упрощается и доводится до простого и удобного результата.

№ 42. «О двух кривых и их сравнении» (1766), 18 стр.

Работа близка работе № 39 (из 27-го тома).

№ 43. «О гипергеометрической кривой, выражаемой уравнением $y = 1.2.3\ldots x$» (1768), 58 стр.

Работа эта более аналитического, чем геометрического содержания и связана с теорией Г-функции.

№ 44. «Соображения об ортогональных траекториях» (1769), 21 стр.

Эйлер дает способ по одной паре ортогональных семейств кривых найти сколько угодно других таких пар. Собственно говоря, соображения Эйлера, развиваемые в этой работе и основанные на применении функций комплексной переменной, дают гораздо больше — они полагают начало: 1) способу отыскания изотермических сеток координат; 2) теории общих конформных отображений; 3) теории дробно-линейных комплексных преобразований. Однако у самого Эйлера эти три обстоятельства не отмечаются.

№ 45. «Исследование замечательного парадокса о равенстве поверхностей» (1769), 22 стр.

Если две линии над любым отрезком оси X имеют одинаковые длины, то одна получается из другой параллельным переносом, перпендикулярным к оси X. Но аналогичная теорема уже не верна для двух поверхностей над плоскостью XY, и это представлялось парадоксом. Эйлер выясняет, в чем здесь дело.

№ 46. «О спрямляемых линиях на сфере» (1770).

Эйлер ищет алгебраические линии на сфере, длины которых тоже алгебраические. Такие задачи относятся к диофантову анализу.

№ 47. «О телах, поверхность которых может быть развернута в плоскость» (1771), 26 стр.

Это, по-видимому, первая в истории математики работа, в которой рассматривается линейный элемент поверхности и таким образом изучается внутренняя геометрия рассматриваемой поверхности. Доказывается известная теорема о том, что любая поверхность, которую можно развернуть в плоскость при помощи только ее изгибания, либо образована касательными к некоторой пространственной кривой, либо есть цилиндрическая, либо коническая поверхность.

№ 48. «Своеобразное развитие одной геометрической задачи» (1771), 18 стр.

Ищется такая кривая, что биссектриса угла, составленного осью X и любой касательной к кривой, пересекает эту кривую под прямым углом. Метод сводится к рассмотрению некоторого функционального уравнения.

№ 49. «Циклометрические соображения» (1771), 10 стр.

Эйлер снова рассматривает круговые луночки. В конце работы он ищет те случаи, когда построение квадрата, равновеликого луночке, выполнимо циркулем и линейкой, что приводит его к исследованию разрешимости в квадратных радикалах некоторых алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами.

№ 50. «Исследования об ортогональных и изогональных траекториях» (1772), 33 стр.

Работа является как бы продолжением работы № 44. В работе ищутся решения общей задачи в квадратурах; не раз рассматриваются огибающие.

№ 51. «Об изображении сферической поверхности на плоскости» (1777), 28 стр.

№ 52. «О географической проекции сферической поверхности» (1777), 12 стр.

№ 53. «О географической проекции Делиля, принятой для общей карты Российской империи» (1777), 10 стр.

В этих трех работах Эйлер рассматривает теорию картографических проекций.

После того, как в работе № 47 о развертывающихся поверхностях Эйлер обнаружил основное значение линейного элемента, а в работе № 44 об ортогональных траекториях начал рассматривать геометрию отображений функциями комплексной переменной, он мог приступить к общей теории отображений. В работе № 51 Эйлер, используя только линейный элемент, впервые доказывает невозможность конгруэнтно отобразить кусок сферы на плоскость, в § 13—23 он рассматривает такие отображения, при которых меридианы и параллели переходят во взаимно-перпендикулярные прямые, в § 24—51 — конформные отображения, а в § 52—60 — эквивалентные отображения (т. е. сохраняющие площади).

В работе № 52 Эйлер рассматривает стереографическую проекцию сферы на плоскость, а затем при помощи функции комплексной переменной конформно ее деформирует в плоскости, причем показывает, что, если функция, дающая это отображение, дробно-линейная, то меридианы и параллели переходят в окружности (или прямые), и так Эйлер получает так называемые косые стереографические проекции.

Наконец, в работе № 53 Эйлер подробно разбирает практический вопрос о принятой в то время при вычерчивании карт Российской империи проекции Делиля.

№ 54. «О треугольных кривых» (1781), 24 стр.

Эйлер рассматривает кривые, которые сейчас называются кривыми постоянной ширины.

№ 55. «О наименьшем эллипсе, описанном вокруг прямоугольника» (1784), 14 стр.

Ищется эллипс наименьшей длины, описанный вокруг данного прямоугольника.

№ 56. «О спрямляемых кривых, которые можно провести на прямоугольном конусе» (1781), 12 стр. Речь идет об алгебраических кривых, длины которых тоже алгебраические.

№ 57. «Легкий метод исследовать все свойства кривой, не лежащей в одной плоскости» (1782), 33 стр.

В этой работе Эйлер кладет начало классическому сейчас способу изложения теории пространственных кривых; однако из формул Френе он находит только первую.

В 29 томе помещены гораздо менее важные работы.

№ 58. «О взаимных траекториях, прямоугольных и косоугольных» (1786), 30 стр.

№ 59. «Соображения об ортогональных и косоугольных траекториях» (1783), 44 стр.

№ 60. «Исследование кривых, подобных своей эволюте, либо первой, либо второй, либо третьей, либо даже какого угодно порядка» (1783), 40 стр.

№ 61. «О спрямляемых линиях, геометрически проводимых на поверхности сфероида» (1785), 14 стр.

№ 62. «О двух или нескольких алгебраических кривых, у которых, если брать одинаковые дуги от некоторых точек, амплитуды этих дуг будут в постоянных отношениях» (1788), 13 стр.

№ 63. «О перенесении на тела метода, обратного методу касательных» (1788), 17 стр.

Рассматриваются поверхности (трубчатые), у которых длины нормалей до плоскости xy постоянны.

№ 64. «Легкий метод нахождения радиуса кривизны из принципа максимума и минимума» (1789), 5 стр.

№ 65. «Развитие. задачи, аналитическое решение которой трудно, а синтетическое очевидно» (1790), 15 стр.

Об уравнении $f\ (x,\ y,\ y')=0$.

№ 66. «Замечательная кое чем «геометрическая задача» (1790), 28 стр.

Ищется такая кривая, что радиус-вектор, проведенный к ней из фиксированной точки, описывает сектор, площадь которого пропорциональна квадрату описанной дуги.

№ 67. «О гиперболических кривых, заключающих вместе с своими асимптотами конечную площадь» (1790), 22 стр.

№ 68. «Геометрическая задача, в которой среди всех эллипсов, проходящих через четыре заданные точки, имеется тот, который имеет наименьшую площадь» (1791), 13 стр.

№ 69. «Решение в высшей степени любопытной задачи, в которой среди всех эллипсов, проходящих через три заданные точки, ищется тот, который имеет наименьшую площадь» (1791), 18 стр.

№ 70. «Разыскание поверхности, длины нормалей которой до данной плоскости все одинаковы» (1792), 6 стр.

Продолжение работы № 63.

№ 71. «Различные соображения о площадях сферических треугольников» (1792), 14 стр.

Доказывается теорема: геометрическое место вершин сферических треугольников с данным основанием и данной площадью есть малый круг (окружность) сферы.

№ 72. «Об изогнутых цилиндрических телах» (1794), 9 стр.

Обобщается теорема Гульдина на случай трубчатых поверхностей с произвольным поперечным сечением.

№ 73. «Об обобщении задачи об ортогональных траекториях на поверхности» (1815—1816), 33 стр.

Ищется семейство поверхностей, ортогональных к данному однопараметрическому семейству поверхностей.

№ 74. «О кривых, радиусы кривизны которых вдвое больше, чем расстояние от их основания до фиксированной точки, и о замечательных свойствах этих кривых» (1819—1820), 11 стр.

№ 75. «Решение задачи из теории максимумов и минимумов» (1862), 7 стр.

Решается задача: даны основание AB треугольника в плоскости P и точка V в пространстве; найти в плоскости P вершину O треугольника, такую, чтобы сумма площадей треугольников AVO и BVO была наименьшей.

Перейдем теперь к разбору геометрического материала знаменитого «Введения в анализ» (1748) Эйлера.

Первая часть «Введения в анализ» содержит множество первостепенных аналитических открытий, из которых особенно надо отметить введение и подробное исследование элементарных функций от комплексной переменной, в частности, вывод формул Эйлера, связывающих тригонометрические функции с показательной, и т. д. Вторая часть целиком посвящена геометрии и содержит первое полное изложение аналитической геометрии на плоскости, близкое к тому, которое до последних десятилетий давалось в университетских учебниках аналитической геометрии.

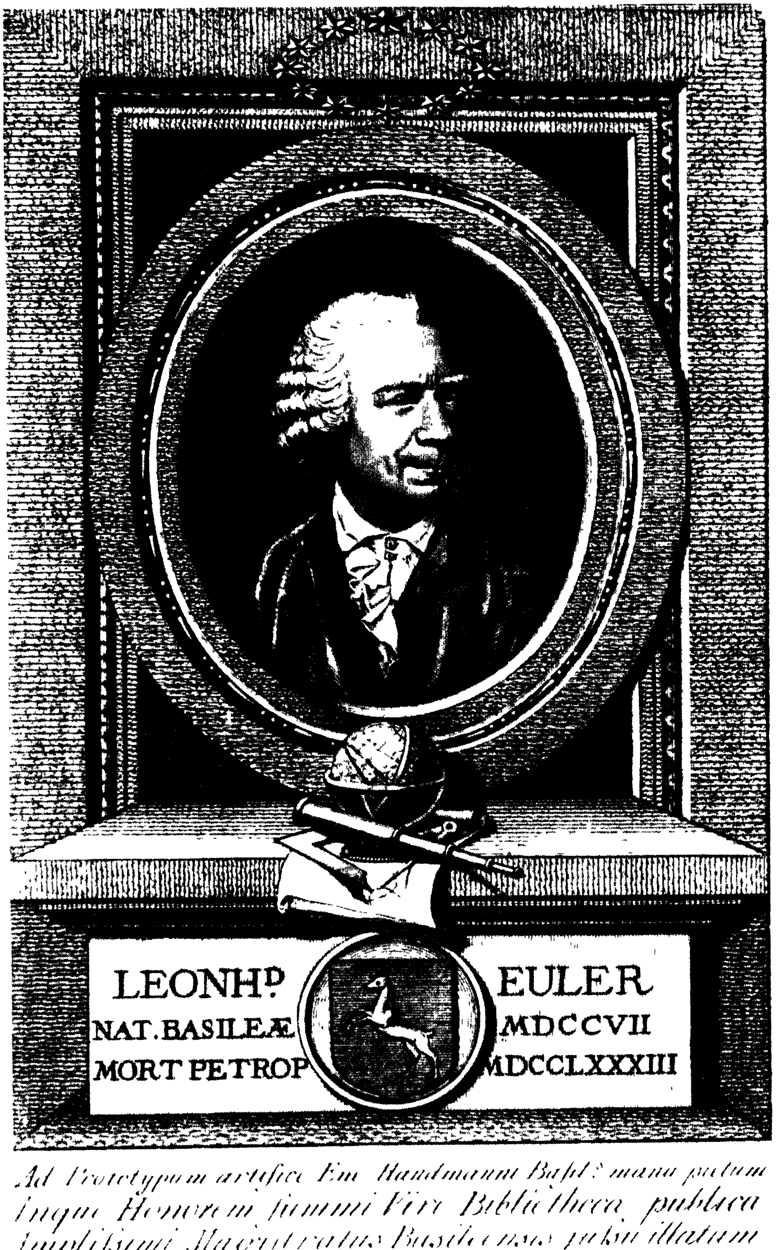
Заметим, что наши учебники аналитической геометрии самого последнего времени (такие, как книги Делоне и Райкова или Мусхелишвили) все же и в разделе двухмерной аналитической геометрии отличаются от изложенного у Эйлера. В них: 1) применяется теория определителей и матриц; 2) наряду с координатным используется векторное изложение;

3) излагается полная теория инвариантов линий 2-го порядка, а также рассматриваются 4) общая теория аффинных преобразований плоскости; 5) аффинная классификация линий 2-го порядка; 6) понятие о проективной плоскости; 7) проективная и аффиннопроективная классификация линий 2-го порядка. Всего этого у Эйлера, конечно, еще не было.

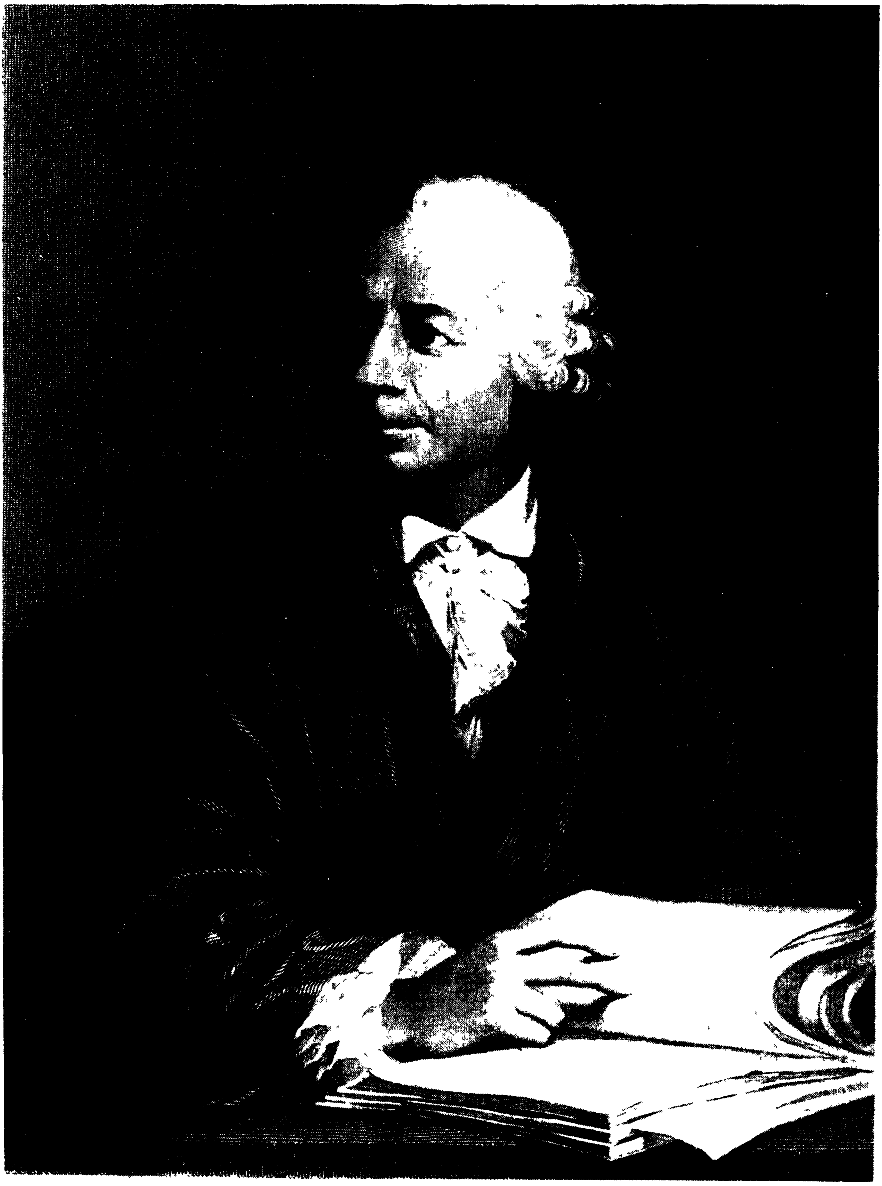
В конце второй части «Введения в анализ» Эйлера имеется обширное (около 80 стр.) «Приложение о поверхностях», в котором впервые последовательно излагается аналитическая геометрия в пространстве и, в частности, теория поверхностей 2-го порядка. Между прочим, у Эйлера, кажется, впервые отмечается существование гиперболического параболоида, тогда как все предыдущие авторы в основном рассматривают только такие поверхности 2-го порядка, которые получаются сжатиями из поверхностей, образуемых вращением линий 2-го порядка вокруг их осей симметрии. Обе части «Введения в анализ» Эйлера сыграли большую роль в развитии математики.

Перейдем к аннотации отдельных глав второй части «Введения в анализ».

В главе 1 рассматривается идея задания линии уравнением между координатами, причем рассматриваются как прямоугольные, так и косоугольные координаты. Линии делятся на алгебраические и трансцендентные и т. д. В главе 2 рассматривается преобразование координат, в главе 3 — разбиение по порядкам. В главе 4 разобраны общие свойства линии n-го порядка, как число точек пересечения с прямой, число точек, определяющих линию, подробно говорится об определении линии 2-го порядка по пяти точкам, причем координатная система выбирается так, что координаты этих точек суть $(0, 0)$, $(0, b)$, $(a, 0)$, (c, d), (e, f); исключительный случай еще не исследуется—он исследован в работе № 3. Глава 5—о линиях 2-го порядка; глава 6 — о разделении линий 2-го порядка на роды (genera); глава 7 — исследование о бесконечных ветвях линий; глава 8 — об асимптотах; глава 9 — о разделении линий 3-го порядка на виды (species); глава 10 — об основных свойствах линий 4-го порядка; глава 11 — о линиях 4-го порядка; глава 12 — об исследовании формы кривых; главы 13 и 14 содержат исследование линии в окрестности точки — построение касательной при помощи подкасательной, кривизна и т. д.; глава 15 — весьма замечательное и своеобразное исследование алгебраических линий, имеющих несколько осей симметрии, причем при помощи неявного использования теории комплексной переменной дается общий вид уравнения таких замкнутых кривых. В главе 16 Эйлер рассматривает сначала кривые $y^2 - Py + Q = 0$, где P и Q — любые рациональные



Гравюра Х. Мехеля 1783 г. с портрета работы Э. Хандмана



Гравюра Ф. Вебера 1851 г. с портрета работы Э. Хандмана функции от x, а затем кривые $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ и т. д.; в главе 17 рассмотрен аналогичный вопрос в полярных координатах; в главе 18 речь идет о подобии и аффинитете кривых, т. е. преобразованиях вида $x = m \cdot u$, $y = m \cdot v$ и $x = m \cdot u$, $y = n \cdot v$; в главе 19 — о теории исключения, в главе 20 — о способах решения уравнения с одной неизвестной при помощи пересечения кривых; в главах 21 и 22 рассмотрены разные трансцендентные кривые.

В главе 1 «Приложения о поверхностях» рассмотрены 8 октантов, образованных плоскостями координат, и группа отражений в этих плоскостях; в главе 2 — уравнения общих цилиндрических и конических поверхностей; в главе 3 — теория плоских сечений кругового цилиндра и конуса; в главе 4 — общее ортогональное преобразование пространства при помощи знаменитых «углов Эйлера»; в главе 5 исследуется общее уравнение 2-го порядка с тремя переменными и выводятся условия того, что оно представляет ту или иную поверхность 2-го порядка. Выписывается определитель тройничной квадратичной формы и его три главных минора. В главе 6 рассматриваются пространственные кривые при помощи их проектирования на две координатные плоскости и иначе.

Этим мы заканчиваем аннотацию 75 оригинальных работ Эйлера по геометрии и отдельных глав второй части «Введения в анализ» и приложения к нему.

* * *

Чтобы лучше дать почувствовать стиль геометрических работ Эйлера, мы подробнее разберем некоторые из аннотированных работ, выбрав наиболее важные и интересные из них и расположив их в хронологическом порядке.

Мы рассмотрим работы: о парадоксе Крамера; о многогранниках; о кривизне поверхностей; об ортогональных траекториях; о развертывающихся поверхностях; работы по картографии.

I. **«Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes»** [Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin, 4 (1748), 1750, p. 219—233)], («Об одном кажущемся противоречии в теории кривых линий»).

Работа содержит выяснение знаменитого в то время парадокса Крамера.

Парадокс этот, как известно, заключался в следующем — с одной стороны, 9 точек, казалось бы, вполне определяют (с точностью до общего множителя) коэффициенты уравнения проходящей через них линии

3-го порядка, так как таких коэффициентов 10, а каждое условие того, что линия проходит через данную точку, накладывает на эти коэффициенты одно линейное однородное соотношение; с другой стороны, две различные линии 3-го порядка пересекаются, как известно, в 9 точках, поэтому эти 9 точек, в которых пересекаются две такие линии, очевидно, не определяют, с точностью до общего множителя, коэффициентов линии 3-го порядка.

Парадокс этот впервые, кажется, отметил Мак-Лорен в «Geometria organica» (1720). Он говорит: «Таким образом, 9 точек не вполне еще определяют линию 3-го порядка и 5 линию 2-го порядка, однако 10 для определения линии 3-го порядка уже слишком много». Крамер в письме к Эйлеру от 30 сентября 1744 г. пишет: «Две линии 3-го порядка могут пересекаться в 9-ти точках. Таким образом, линия 3-го порядка недостаточно определена, если потребовать, чтобы она проходила через 9 точек, то же самое имеет место для линий высших порядков. Не дадите ли Вы, который умеете так хорошо углубляться в вопросы, какое-либо хорошее объяснение этой трудности». Ответ Эйлера на это письмо не найден. Но уже 11-го ноября Крамер снова пишет Эйлеру: «Ваше замечание может мне казаться только очень правильным, так как оно вполне совпадает с тем, что я сам думал об этом вопросе».

Затем следуют в письме Крамера разные выкладки, не приводящие его, однако, к желаемой цели, и далее следующее: «Что же оказывается. Как только через заданные 9 точек могут проходить две различные линии 3-го порядка, через эти 9 точек можно провести бесконечное число таких линий. Это очень удивительно. Но жалко, что в этом можно убедиться только при помощи больших вычислений».

В рассматриваемой работе Эйлер разбирает этот вопрос с обычной для него обстоятельностью. Эйлер считает, что имеют место два предложения:

Предложение 1: какие бы 9 точек не были даны, всегда можно вычислить коэффициенты уравнения кривой 3-го порядка, проходящей через эти 9 точек (с точностью до общего множителя).

Предложение 2: две линии 3-го порядка пересекаются в 9-ти точках.

«Сопоставление этих двух предложений, как считается,— говорит Эйлер,— и ведет к указанному парадоксу. Еще бо́льшая трудность является при исследовании линий 4-го и высших порядков, так как для определения коэффициентов линии 4-го порядка достаточно 14-ти точек, а две линии 4-го порядка пересекаются в 16-ти точках, а для определения коэффициентов линии 5-го порядка достаточно 20-ти точек, а две линии 5-го порядка пересекаются в 25-ти точках и т. д.».

Далее Эйлер говорит: «Эти противоречия совершенно очевидны, поэтому абсолютно необходимо, чтобы или одно из двух указанных предложений было неверно, или чтобы следствия, которые из них выводят, были неправильны». Эйлер отмечает, что второе предложение, равно как следствие о том, что, например, могут существовать такие 16 точек, через которые проходят две различные линии 4-го порядка, безусловно верно. «Поэтому,— говорит Эйлер,— мы принуждены заключить, что надо искать некоторый паралогизм в первом предложении или в способе выводить из него следствия...»

Уравнения для определения коэффициентов уравнения линии n-го порядка из того условия, чтобы она проходила через данные точки,— линейные и число их равно числу заданных точек. Но даже, если число уравнений 1-го порядка больше, чем число неизвестных, говорит Эйлер, они, может быть, имеют не одно, а бесчисленно много решений. Например, для случая трех уравнений 1-й степени с тремя неизвестными, это может быть, если одно из уравнений есть следствие одного из двух других:

$$
\begin{aligned}
4x - 6y + 10z &= 16,\\
3x - 5y + 7z &= 9,\\
2x - 3y + 5z &= 8.
\end{aligned}
$$

Тут первое уравнение есть следствие третьего. Но может быть и так, что одно из уравнений содержится в двух других, совместно взятых, например,

$$
\begin{aligned}
4x - 6y + 10z &= 16,\\
3x - 5y + 7z &= 9,\\
x - y + 3z &= 7,
\end{aligned}
$$

где первое уравнение есть сумма второго и третьего уравнений. Далее Эйлер приводит аналогичный пример четырех уравнений с четырьмя неизвестными и говорит, что могут остаться неопределенными и не одна, а две или больше неизвестных, если в системе есть два или больше уравнений, которые суть следствие остальных.

После этих замечаний, говорит Эйлер, ясно, что для однозначного определения линии некоторого порядка числа точек, о котором говорится во втором предложении, может в некоторых случаях (т. е. при некотором выборе этих точек) и не хватать.

Для определения этих случаев Эйлер сначала берет уравнение линии 1-го порядка, т. е. прямой, и показывает, что две точки всегда достаточны для определения его коэффициентов с точностью до общего им всем множителя.

Затем Эйлер берет уравнение линии 2-го порядка

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$$

и предлагает выбрать координатную систему так, чтобы ось X проходила через две из заданных точек, а ось Y — через одну из них и некоторую третью из заданных точек. Тогде координаты заданных точек будут:

	I	II	III	IV	V
$x =$	0	a	0	c	e
$y =$	0	0	b	d	f

и для определения коэффициентов α, β, γ, δ, ε, ζ линии мы будем иметь уравнения

$$\zeta = 0, \tag{1}$$

$$\alpha a^2 + \delta a + \zeta = 0, \tag{2}$$

$$\gamma b^2 + \varepsilon b + \zeta = 0, \tag{3}$$

$$\alpha a^2 + \beta cd + \gamma d^2 + \delta c + \varepsilon d + \zeta = 0, \tag{4}$$

$$\alpha e^2 + \beta ef + \gamma f^2 + \delta e + \varepsilon f + \zeta = 0. \tag{5}$$

Из трех первых получаем $\zeta = 0$, $\delta = -\alpha a$, $\varepsilon = \gamma b$. Подставив это в два последних, получаем

$$\alpha c^2 + \beta cd + \gamma d^2 - \alpha ac - \gamma bd = 0,$$

$$\alpha e^2 + \beta ef + \gamma f^2 - \alpha ae - \gamma bf = 0.$$

Из этих двух уравнений окончательно и определятся с точностью до множителя три остальных коэффициента α, β, γ уравнения рассматриваемой кривой, если только эти уравнения не будут эквивалентны друг другу. А это будет иметь место только, если значения β, получаемые из этих уравнений (при любых α и γ), будут одинаковы между собой

$$\beta = \frac{\alpha \cdot c\,(a - c) + \gamma \cdot d\,(e - d)}{cd} = \frac{\alpha \cdot e\,(a - e) + \gamma \cdot f\,(b - f)}{ef},$$

т. е., если имеют место равенства

$$\frac{a-c}{d}=\frac{a-e}{f} \qquad \text{и} \qquad \frac{e-d}{c}=\frac{b-f}{e}.$$

Если учесть эти равенства, геометрически получается, что для того, чтобы линия 2-го порядка, проходящая через 5 заданных точек, не определялась однозначно, необходимо, чтобы 4 из этих точек лежали на одной прямой. Но этого, очевидно, и достаточно, так как среди линий 2-го порядка есть и пары прямых и тогда, если за одну взять прямую, на которой лежат 4 данные точки, а за другую — любую прямую, проходящую через пятую точку, то и будет как раз получена такая линия 2-го порядка. Если же все 5 точек лежат на одной прямой, то за вторую прямую можно даже взять совершенно произвольную прямую.

Далее Эйлер начинает совершенно аналогично разбирать случай линий 3-го порядка, однако говорит, что тут: «Весьма трудно определить эти случаи (т. е., когда 9 точек не однозначно определяют проходящую через них линию 3-го порядка.— *Б. Д.*) в общем виде, как это было сделано для линий 2-го порядка, так как вычисления в силу большого числа точек и коэффициентов были бы очень сложными. Однако нетрудно указать несколько частных случаев, в которых такой недостаток в определении линии имеет место».

Эйлер приводит несколько примеров, среди которых замечателен следующий. Пусть 9 заданных точек расположены на плоскости по квадратной схеме

$$\begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{matrix}$$

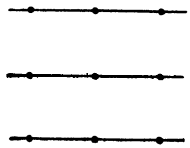
Приняв среднюю точку за начало и направив оси параллельно сторонам квадратов, мы будем иметь, что координаты этих точек суть

$$\begin{matrix} (-a, a) & (0, a) & (a, a) \\ (-a, 0) & (0, 0) & (a, 0) \\ (-a, -a) & (0, -a) & (a, -a) \end{matrix}$$

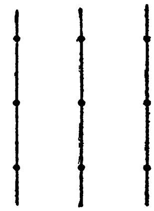
Тогда, как это легко проверить непосредственно подстановкой, при любой величине отношения $m:n$ уравнение

$$m\cdot y\,(y^2-a^2)=n\cdot x\,(x^2-a^2)$$

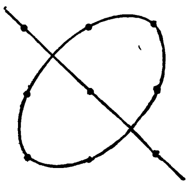
выражает линию 3-го порядка, проходящую через эти 9 точек. Если $n=0$, получаются три прямые (фиг. 1); если $m=0$, получаются три



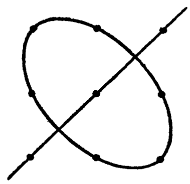
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

прямые (фиг. 2); если $m = n$, получаются прямая и эллипс (фиг. 3); если $m = -n$, получаются прямая и эллипс (фиг. 4). Во всех остальных случаях получится нераспадающаяся линия 3-го порядка, проходящая через эти 9 точек, так что будет континуум таких линий.

Рассмотренная работа является образчиком стиля Эйлера. Вопрос решается естественно и удобопонятно, все иллюстрируется примерами, иногда (как последний) очень остроумными, хотя и простыми.

II. «Elementa doctrinae solidorum»,

[Novi commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae, 4 (1752/3) 1758, p. 104—140] и

«Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita».

[Novi commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae, 4 (1752/3), 1758, p. 140—160] («Элементы учения о телах» и «Доказательство некоторых замечательных свойств, которым подчинены тела, ограниченные плоскими гранями»).

Эти работы замечательны тем, что в них рассматривается и доказывается первая важная теорема топологии, а именно знаменитая теорема Эйлера: число S вершин многогранника минус число A его ребер плюс число H его граней равно двум ($S - A + H = 2$). Эта теорема верна, как это теперь известно, для любого гомеоморфного сфере многогранника, хотя бы и невыпуклого и самопересекающегося. [Телесный угол по-латински — angulus solidus, ребро — acies, грань — hedra, поэтому Эйлер выбирает для обозначения числа вершин, ребер и граней буквы S, A и H. В русских работах иногда употребляют буквы *в*, *р*, *г*, а в немецких — *e*, *k*, *f* — Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen].

В первой из рассматриваемых работ Эйлер отмечает, что тогда как многоугольники на плоскости могут быть классифицированы просто по числу их сторон (причем всегда число вершин равно числу сторон), аналогичный вопрос (т. е. вопрос о классификации) для многогранников в пространстве гораздо сложнее. Однако дело упрощается, если знать, что между числами вершин и граней многогранника и числом его ребер всегда существует соотношение $S + H = A + 2$. Эйлер проверяет это соотношение для любой пирамиды, для некоторых других простейших многогранников, для общего призматоида, для тела, составленного из двух различных призматоидов, сложенных вместе общим основанием, и для правильных многогранников и говорит: «Итак, поскольку верность [высказанного] предположения во всех [этих] случаях оправдывается, нет никакого сомнения, что оно имеет место для любых тел, так что это предложение представляется достаточно обоснованным».

В этом первом мемуаре Эйлер не дает доказательства найденного им соотношения, но зато выводит из него несколько всем сейчас известных следствий.

1. Нет многогранника, в котором число ребер, увеличенное на шесть, было бы больше, чем утроенное число вершин или граней, т. е. всегда

$$A + 6 \leqq 3S \quad \text{и} \quad \leqq 3H.$$

2. Нет многогранника, в котором число граней, увеличенное на четыре, было бы больше, чем удвоенное число вершин или число вершин, увеличенное на четыре, было бы больше удвоенного числа граней, т. е. всегда

$$H + 4 \leqq 2S \quad \text{и} \quad S + 4 \leqq 2H.$$

3. Всякий многогранник имеет хотя бы одну треугольную, четырехугольную или пятиугольную грань и хоть один треугольный, четырехугольный или пятиугольный телесный угол.

4. Сумма всех плоских углов всех граней многогранника равна $S \cdot 4d + 8d$, где S — число вершин.

Используя следствия 1 и 2, Эйлер кладет начало морфологии многогранников, а именно вычисляет таблицы, дающие верхние и нижние границы возможного числа вершин или ребер, если дано число граней, и такие же таблицы границ для числа граней и вершин, если дано число ребер. Например, если число граней равно 23, то число вершин заключено между 42 и $13^1/_2$, а число ребер между $34^1/_2$ и 63. Или, если число ребер равно 56, то число вершин (а также число граней) заключено между $37^1/_3$ и $20^2/_3$. В заключение Эйлер, используя такие неравенства, дает таблицу, указывающую, каково может быть число граней и число ребер многогранника, если задано число S его вершин, для $S = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

При этом каждый из этих $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 = 37$ многогранников снабжается своим названием. Например, многогранник ($S = 9$, $H = 11$, $A = 18$) называется «enneagonum hendekaedrum», т. е. «девятиугольник одиннадцатигранный», и т. д.

S	H	A
7	6	11
	7	12
	8	13
	9	14
	10	15

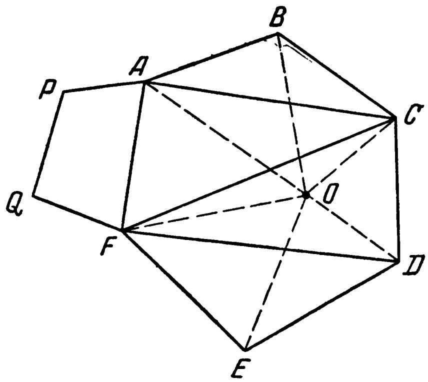
Во второй работе Эйлер предлагает доказательство теоремы о многогранниках.

Доказательство Эйлер проводит, рассматривая следующие пять предложений.

Предложение 1. Задача: «В произвольном заданном теле, ограниченном плоскими гранями, так отсечь заданный его телесный угол, чтобы в получившемся после этого теле было на один телесный угол меньше», т. е. чтобы этот телесный угол был отрезан, а никакой новый телесный угол при этом не появился. Эйлер дает чертеж, приведенный на фиг. 5.

Если O — вершина рассматриваемого телесного угла, а OA, OB, OC, OD, OE, OF — исходящие из нее ребра тела (пунктирные на его чертеже), то Эйлер предлагает сделать сначала плоский разрез ABC, а затем плоский разрез AOC и выбросить отрезанную при этом треугольную пирамиду $OABC$. Затем в оставшемся теле сделать разрезы ACF и COF и выбросить отрезанную ими пирамиду $OACF$. Далее сделать разрезы CFD и DOF и выбросить пирамиду $OCFD$ и, наконец, сделать разрез DFE и выбросить пирамиду $ODFE$. Так будет вовсе отрезан телесный угол тела с вершиной O и не образуется никакого нового телесного угла, и поэтому в оставшемся теле число телесных углов будет на один меньше, чем в исходном.

Предложение 2. Задача: «Пусть в заданном теле указанным образом отрезан телесный угол, так что число телесных углов тела уменьшилось на один; определить, каково в оставшемся теле число его граней и число его ребер, а также какова сумма всех его плоских углов». Пусть S, A и H числа вершин (равные телесным углам), ребер и граней исходного тела. Число вершин нового тела, получившегося из исходного указанным отрезанием одной из вершин, равно $S-1$ и, как легко подсчитать, число его граней равно $H-2-\mu+\nu$, а число его ребер равно $A-3-\mu+\nu$, где μ — число тех соседних пар образовавшихся новых треугольных граней (таких как ABC, ACF, CDF, DEF), в которых (парах) грани эти лежат в одной плоскости, а ν — число тех граней исходного тела, сходящихся в вершине O, которые не треугольные (как грань $OAPQF$ на фиг. 5). Так же легко подсчитывается, что если сумма всех плоских углов всех граней исходного тела равна R прямых углов, то эта же сумма для полученного нового тела равна $R-4$ прямых углов.



Фиг. 5.

Предложение 3. Теорема: «У любого тела, ограниченного плоскими гранями, сумма всех плоских углов, которые есть у всех его граней, равна числу прямых углов, равному четырежды взятому числу его телесных углов, уменьшенному на восемь; т. е., если число телесных углов рассматриваемого тела равно S, то сумма всех его плоских углов равна $4S-8$ прямых углов».

Действительно, из результата предложения 2 следует, что, если у данного тела число вершин S и сумма его плоских углов равна R прямых углов, то после указанного отрезания n вершин число вершин будет $S-n$, а сумма плоских углов $R-4n$. Когда останется только 4 вершины, т. е. будет $S-n=4$, т. е. при $n=S-4$, получится треугольная пирамида, у которой сумма плоских углов равна всегда 8 прямым. Поэтому $R-4(S-4)=8$; откуда получается, что $R=4S-8$.

Предложение 4. Теорема: «У любого тела, ограниченного плоскими гранями, число граней плюс число телесных углов (число вершин) на два больше, чем число ребер».

Действительно, из результата предложения 2 следует, что избыток числа ребер над числом граней один раз обрезанного тела равен

$$A-3-\mu+\nu-(H-2-\mu+\nu)=A-H-1$$

и, следовательно, у n раз обрезанного тела он равен $A-H-n$, а число вершин n раз обрезанного тела равно $S-n$. Взяв опять $n=S-4$, так, чтобы получилась треугольная пирамида, у которой избыток числа ребер над числом граней равен 2, мы получаем $A—H—(S—4) = 2$ или $H + S = A + 2$.

Эйлер отмечает, что последовательное отрезание вершин может кончиться не тем, что получится треугольная пирамида, а тем, что получится то, что сейчас называют «диэдр» (двугранник). Да и всегда можно указанным последовательным отрезанием вершин перейти к диэдру. Например, если тело есть пирамида $OABC$ и отрезать указанным образом телесный угол с вершиной O, т. е. сделать разрез ABC, то «ничего не останется». Но, говорит Эйлер, в этом случае дело можно рассматривать и так, что останется только одно основание ABC, которое есть плоская фигура, не имеющая никакой толщины. «Однако,— продолжает Эйлер,— можно ее рассматривать как тело с тремя определенными углами, у которого можно считать, что есть три ребра и две грани». «Остается как бы треугольная призма исчезающе малой высоты, у которой боковые ребра исчезают и верхнее основание со своими углами совмещается с нижним основанием».

Случай, когда рассмотренные последовательные отрезания приводят к такому диэдру, ведет, как легко видеть, во всем к тем же результатам, что и выше.

В своем комментарии к этой работе Эйлера Шпейзер говорит: «Доказательство [данное Эйлером] не может считаться удовлетворительным, так как очевидно, что многогранник предполагается выпуклым, ибо только в таком случае можно быть уверенным, что можно от него отрезать кусок. Но уже после первого обрезания фигура перестает быть выпуклой.»

Я согласен со Шпейзером, что Эйлер, по-видимому, считал многогранник выпуклым, более того, он рассматривал его, как выпуклое тело, а не поверхность. Однако заметил ли Шпейзер, что обрезание вершины, предлагаемое Эйлером, всегда может быть выполнено так, чтобы всякий раз оставшийся многогранник опять был выпуклым, и тогда доказательство, предлагаемое Эйлером, становится вполне корректным? Правда, сам Эйлер об этом обстоятельстве ни словом не упоминает, а лишь отмечает, что многоугольник $ABCDEF$ его чертежа может быть разбит на треугольники весьма многими различными способами. Интересно, что Эйлер в аннотации к работе Сегнера специально рассматривает вопрос о том, сколькими способами можно разбить попарно непересекающимися диагоналями плоский выпуклый n-угольник. Он указывает, что число это равно $\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdots 4n-10}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n-1}$ и дает таблицу для всех $n \leqq 25$. Например, для $n = 7$ это число равно 42, для $n = 11$ — равно 4862, а для $n = 25$ — равно 343059613650. Вывод этой формулы дал С. Котельников в 1768 г.

Если многоугольник $ABCDEF$ плоский, то, очевидно, что любой из этих способов разбиения при отрезании вершины O, предложенном Эйлером, сводится просто к отрезанию пирамиды $OABCDEF$ плоскостью ее основания $ABCDEF$, т. е. дает выпуклый многоугольник. Если же многоугольник $ABCDEF$ не плоский, то, вообще говоря, только при одном вполне определенном способе такого разрезания многоугольника $ABCDEF$ на треугольники останется после эйлеровского отрезания вершины O выпуклый многогранник. Трудно сказать, заметил ли это Эйлер. Во всяком случае, он ничего об этом не говорит.

Поясним, о чем идет речь.

Всякий выпуклый многогранник M, рассматриваемый как тело, что как раз и делает Эйлер, является, как легко показать, выпуклой оболочкой своих вершин, т. е. наименьшим выпуклым множеством точек, содержащим те S точек, которые являются его вершинами. Выбросим вершину O, которую Эйлер хочет отрезать, и рассмотрим выпуклую оболочку M^* оставшихся $S-1$ вершин. Покажем, что это будет как раз тот многогранник, который остается у Эйлера при указанном им обрезании вершины для некоторого одного (и, вообще говоря, только одного) вполне определенного разбиения многоугольника $ABCDEF$ на треугольники. А именно, покажем: 1) все грани исходного многогранника M, отличные от тех, которые сходятся в вершине O, останутся гранями многогранника M^*; 2) остающиеся при обрезании части нетреугольных граней M, сходящихся в вершине O, такие как $APQF$, также остаются гранями многогранника M^*; 3) на не плоский многогранник $ABCDEF$ чертежа Эйлера в многограннике M^* натянуты вполне определенным образом грани, которые будут треугольниками (или комплексами таких треугольников, если некоторые смежные из этих треугольников лежат в одной плоскости). На эти треугольники разбивается многоугольник $ABCDEF$ своими диагоналями, такими, что в проекции (которая есть некоторый плоский выпуклый многоугольник $A'B'C'D'E'F'$) многоугольника $ABCDEF$ из точки O на плоскость P, пересекающую телесный угол $OABCDEF$ по замкнутому многоугольнику, проекции этих диагоналей попарно не пересекаются. А о таких как раз разбиениях, вообще говоря, не плоского многоугольника $ABCDEF$ и говорит Эйлер.

Положения 1 и 2 следуют просто из того, что поскольку M^* есть часть M, то очевидно всякая точка границы M, которая есть и точка M^*, есть тоже точка границы M^*, и из того, что грани M, не прилежащие к вершине O и такие, как $APQF$, суть выпуклые оболочки своих вершин, а вершины эти принадлежат как M, так и M^*. Все эти грани видны из точки O как задние грани, т. е. через тело многогранника M^*, а такие грани, как $APQF$, видны как лежащие на границе проекции M^* из точки O. Вершинами всех остальных граней многогранника M^*, т. е. тех, которые видны из точки O не через M^* и не на границе проекции M^* из точки O, могут быть, очевидно, только вершины M^*, которые сами видны из точки O, так что отрезки к ним, идущие из точки O, не имеют внутри себя точек M^*, т. е. названными вершинами могут быть только вершины многоугольника $ABCDEF$. Грани эти в проекции из точки O на плоскость P не проектируются друг на друга и, следовательно, дают разбиение многоугольника $A'B'C'D'E'F'$ на части его попарно не пересекающимися диагоналями.

Таким образом, для этого вполне определенного разбиения многоугольника $ABCDEF$ на треугольники грани выпуклого многогранника M^* совпадают с гранями многогранника, получаемого из многогранника M отрезанием его вершины O способом Эйлера, а следовательно, и сам этот многогранник совпадает с многогранником M^*, т. е. он выпуклый.

Итак, если многогранник выпуклый, то редукция вершины способом Эйлера может быть на каждом шаге производима так, чтобы все последовательные получаемые многогранники были также выпуклыми. А тогда на каждом таком шаге подсчет Эйлера будет правилен. В конце концов он сводится к диэдру, и доказательство Эйлера оказывается корректным.

Для каких еще многогранников, кроме выпуклых, возможен способ редукции вершин по Эйлеру?

Рассмотрим так называемые K-многогранники (по Штейнитцу). Определим, что это такое. Начнем с определения понятия грани. Гранью называется образ, гомеоморфный кругу, границей которого является цикл A_1A_2, $A_2A_3, \dots A_{k-1}A_k$, A_kA_1 образов, гомеоморфных отрезкам, причем $k \geqq 3$. Точки A_1, $A_2 \dots A_k$, по которым смежны эти последовательные отрезки, называются вершинами, а сами эти отрезки — сторонами грани. Замкнутым ориентируемым многогранником называется совокупность конечного числа граней, такая, что: 1) по каждой стороне к каждой грани смежна одна и только одна грань, так что эта сторона является их общей стороной; 2) совокупность эта связана в том смысле, что от любой одной ее грани можно через эти последовательные смежности ее граней по сторонам дойти до любой другой ее грани; 3) совокупность эта в целом гомеоморфна замкнутой ориентируемой поверхности, т. е., в частности, грани, сходящиеся в одной вершине, образуют один цикл, так называемый многогранный угол, причем мы будем предполагать, что наименование его $\geqq 3$. Кроме того, будем предполагать, что 4) любые две грани либо вовсе не имеют общих точек, либо имеют только одну общую вершину, либо имеют только одну общую сторону. Если такой многогранник гомеоморфен сфере, он называется K-многогранником.

Всякий выпуклый многогранник есть, очевидно, K-многогранник. Но имеет место и обратная замечательная теорема Штейнитца: «*Всякий K-многогранник может быть реализован как выпуклый многогранник*».

Из вышедоказанного относительно выпуклых многогранников и этой теоремы Штейнитца, очевидно, следует, что для любого K-многогранника можно так вести редукцию Эйлера, чтобы многогранник все время оставался K-многогранником и, наконец, свелся бы к диэдру.

Было бы желательным дать прямое, чисто топологическое доказательство (минуя теорему Штейнитца) теоремы: всегда возможна такая (т. е. с таким разбиением многоугольника $ABCDEF$ на треугольники) редукция по Эйлеру любой вершины K-многогранника, чтобы образовался снова K-многогранник. Ведь факт этот не метрический, а чисто топологический. Такое доказательство, кажется, до сих пор никем не проведено.

Если многогранник не K-многогранник (т. е. у него есть либо двухугольные, либо одноугольные грани, либо двугранные многогранные углы, либо такие две грани, которые смежны иначе, чем лишь к одной вершине, либо лишь по одной стороне), то даже если он гомеоморфен сфере, как это легко видеть на частных примерах, редукция вершины, предложенная Эйлером, вообще говоря, не всегда возможна, и поэтому доказательство теоремы Эйлера непосредственно способом Эйлера без существенных дополнений не всегда проходит.

Если же многогранник даже удовлетворяет всем остающимся условиям K-многогранника, но не гомеоморфен сфере, то даже если бы редукция Эйлера на всех шагах была бы возможна, она заведомо не приведет к диэдру, так как характеристика Эйлера такого многогранника (т. е. число $S - A + H$ для него), как легко показать, равна не 2, а $2 - 2p$, где p — род многогранника.

Отметим, что хотя при своем доказательстве Эйлер считал, по-видимому, многогранник телом и притом выпуклым, однако в самом тексте доказательства он вел все доказательство по существу топологически, но, так сказать, его не завершил. Прямым его завершением было бы доказательство указанной выше теоремы.

Надо, наконец, еще отметить, что во втором томе книги Foucher de Careil «Oeuvres inédites de Descartes», изданной в 1860 г., приводятся заметки Лейбница, из которых видно, что уже Декарт знал теорему $S + H = A + 2$, но ни ее доказательства, ни даже самой теоремы не опубликовал.

III. «Recherches sur la courbure des surfaces»

[Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin, 16 (1760) 1767, p. 119—143] («Исследования о кривизне поверхностей»).

Работа содержит вывод знаменитой формулы Эйлера, дающей радиусы кривизны различных плоских сечений поверхности, проведенных через исследуемую точку.

Во введении к работе Эйлер говорит, что тогда как определение кривизны линии в ее точке задача сравнительно простая, так как эта кривизна характеризуется одним числом, а именно радиусом той окружности, которая имеет такую же кривизну (напомним, что задачу о кривизне линии решил еще Ньютон), вопрос о кривизне поверхности в данной ее точке вовсе не так прост. Только для сферы он так же прост. Но другие поверхности нельзя сравнивать в отношении кривизны со сферой, так как в точке поверхности может быть бесконечно много разных кривизн. Может даже быть, что в одном направлении кривизна выпуклая, а в другом вогнутая, как это всегда будет, если поверхность седлообразная.

Таким образом, вопрос о кривизне поверхности в точке не имеет такого простого ответа, как вопрос о кривизне линии в данной ее точке: на поверхности через данную ее точку не только проходит бесконечно много направлений, но и сечение, секущее поверхность через данную ее точку в данном направлении, может еще иметь тот или иной наклон к поверхности.

Эйлер начинает с того, что выводит формулу для радиуса кривизны для самого общего (вообще говоря, не нормального) сечения поверхности плоскостью

$$z = \alpha y - \beta x + \gamma,$$

проходящей через исследуемую точку поверхности $z = f(x, y)$

$$r = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha q + 2\beta p + (\alpha p + \beta q)^2 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}{\left((\alpha - q)^2 \dfrac{\partial p}{\partial x} + (\beta + p)^2 \dfrac{\partial q}{\partial y} + 2(\alpha - q)(\beta + p)\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}};$$

здесь $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Затем Эйлер специализирует вопрос, рассматривая только нормальные сечения. Он получает, что радиус кривизны нормального сечения в точке (x, y) имеет вид

$$r = \frac{-(1+q^2+2spq+s^2(1+p^2))\sqrt{1+p^2+q^2}}{\frac{\partial q}{\partial y}+2s\frac{\partial p}{\partial y}+s^2\frac{\partial p}{\partial x}},$$

где величина s определяет наклон выбранного нормального сечения. Если считать основным то сечение, которое одновременно перпендикулярно к плоскости xy, и если исследуемое нормальное сечение образует с ним угол φ, то

$$s = \frac{p\cos\varphi - q\sin\varphi\sqrt{1+p^2+q^2}}{q\cos\varphi + p\sin\varphi\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Затем Эйлер применяет эту формулу радиуса кривизны нормальных сечений к ряду подробно разобранных частных примеров: лежачему (т. е. с образующими, параллельными оси Ox) круглому цилиндру $z=\sqrt{a^2-y^2}$, лежачему не круглому цилиндру, круглому конусу $z=\sqrt{n^2x^2-y^2}$, эллипсоиду $z^2=a^2-mx^2-ny^2$.

Эйлер еще дальше преобразует свою формулу и приходит к тому, что радиусы кривизны нормальных сечений поверхности, проходящих через данную ее точку, выражаются формулой

$$r = \frac{1}{L+M\cos 2\varphi+N\sin 2\varphi},$$

в которой φ — тот угол, который делает нормальное сечение с некоторым данным, выбранным за исходное.

«Таким образом, это формула,— говорит Эйлер,— которая содержит в себе свойство кривизны поверхностей в каждой из их точек».

Эйлер замечает, что если знать радиусы кривизны a, b, c трех сечений, соответствующих углам $\varphi=\alpha$, β, γ, то из системы линейных уравнений

$$\frac{1}{a} = L+M\cos 2\alpha+N\sin 2\alpha,$$

$$\frac{1}{b} = L+M\cos 2\beta+N\sin 2\beta,$$

$$\frac{1}{c} = L+M\cos 2\gamma+N\sin 2\gamma$$

можно найти числа L, M и N рассматриваемой поверхности в рассматриваемой точке и поэтому можно найти радиусы кривизны всех нормальных сечений в этой точке.

Наконец, определяя наибольший и наименьший радиусы сечения в данной точке, Эйлер приходит к уравнению

$$-2M\sin 2\varphi + 2N\cos 2\varphi = 0,$$

откуда получает, что экстремальные сечения взаимно перпендикулярны.

Выбрав за исходное сечение одно из экстремальных, Эйлер приходит к совсем простой формуле для радиуса кривизны нормальных сечений

$$r = \frac{1}{L + M\cos 2\varphi},$$

откуда получает следствие, что достаточно знать наибольший и наименьший радиусы, чтобы уже знать все. Если эти радиусы, суть f и g, то полагая $\varphi = 0$, получаем $L + M = \frac{1}{f}$, а полагая $\varphi = 90°$, получаем $L - M = \frac{1}{g}$, откуда

$$L = \frac{f+g}{2fg}, \quad M = -\frac{f-g}{2fg}$$

и

$$r = \frac{2fg}{f + g - (f - g)\cos 2\varphi}.$$

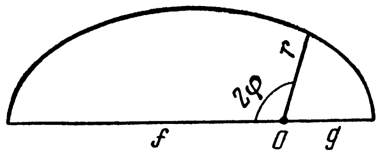
Отсюда Эйлер получает следующее построение радиуса кривизны r для сечения данного направления. Построим (фиг. 6) отрезок $f + g$ и на нем, как на большой оси, полуэллипс с фокусом в точке O, тогда, если угол $fOr = 2\varphi$, то r есть искомый радиус.

В заключение работы Эйлер говорит: «Итак, вопрос о кривизне поверхностей, каким бы сложным он ни казался, сначала сводится для каждого их элемента к знанию двух радиусов кривизны, из которых один наибольший у этого элемента, а другой — наименьший; эти две величины вполне определяют характер кривизны и обнаруживают кривизны любых сечений, перпендикулярных к рассматриваемому элементу».

Этой работой Эйлер положил начало дифференциальной геометрии поверхностей. Следующим этапом в исследовании кривизны поверхностей в точке был мемуар Менье (Meusnier, 1754—1793), напечатанный только в 1785 г., но доложенный Монжем Парижской академии в 1776 г. Дальше идет работа Дюпена (Dupin, 1784—1873), давшего (1813) более элегантную, чем у Эйлера, формулу

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{f} + \frac{\sin^2\varphi}{g},$$

а также введшего всем известную индикатрису.



Фиг. 6.

Разобранная работа характерна для Эйлера. Сначала Эйлер решает задачу в самом общем виде. Получающаяся формула очень сложна. Затем он постепенно разумно специализирует вопрос и, наконец, приходит к простому, изящному и вполне удобному решению задачи. В результате оказывается завоеванной для практики большая новая и важная область математики. Впоследствии ученые внесли лишь небольшие улучшения либо в метод вывода результата, либо в саму формулировку результата.

Отметим еще, что малая доступность до последнего времени подлинных сочинений Эйлера, а часто и слабое знание латинского языка, на котором написана бо́льшая часть его работ, сделали то, что многие истинные перлы, найденные в них, остались мало замеченными. К таковым надо отнести и построение радиуса кривизны сечения при помощи эллипса, данное Эйлером в рассматриваемой работе.

IV. Considerationes de trajectoriis orthogonalibus

[Novi commentarii Academiae scientarum Petropolitanae, 14 (1769) 1770, p. 46—71], («Соображения об ортогональных траекториях»).

Работа содержит блестящие соображения о получении из дифференциальных уравнений взаимноортогональных семейств с помощью функций комплексной переменной бесконечного числа других взаимноортогональных семейств (и даже собственно изотермических семейств, хотя и не ясно, понял ли тогда Эйлер, что эти семейства изотермические). Кроме того, в работе выведена теорема о том, что дробно-линейная функция комплексной переменной преобразует прямые в окружности.

Существенная часть работы Эйлера состоит в следующем.

Пусть

$$Pdx + Qdy = 0,$$

где P и Q — заданные функции от x и y, есть дифференциальное уравнение некоторого семейства линий. Тогда

$$Qdx - Pdy = 0$$

есть дифференциальное уравнение ему ортогонального семейства. Пусть M и N — интегрирующие множители левых частей этих дифференциальных уравнений, так что

$$M \cdot (Pdx + Qdy) = dp \quad \text{и} \quad N \cdot (Qdx - Pdy) = dq,$$

где p и q — некоторые функции от x и y. Разрешив эти уравнения относительно dx и dy, получим

$$dx = PRdp + QSdq,$$
$$dy = QRdp - PSdq,$$

где

$$R = \frac{1}{M \cdot \begin{vmatrix} PQ \\ Q-P \end{vmatrix}}, \quad S = -\frac{1}{N \cdot \begin{vmatrix} PQ \\ Q-P \end{vmatrix}},$$

и, следовательно, мы будем иметь

$$\frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p} \cdot \frac{\partial y}{\partial q} = 0.$$

Линии $p(x, y) = \text{const}$ и $q(x, y) = \text{const}$ как раз и есть искомые ортогональные траектории.

Однако Эйлер утверждает, что прямое решение, указанное выше, затруднительно, поэтому он предлагает следующий особый способ.

Соединив dx и dy в комплексное число, получим

$$dx + dy\sqrt{-1} = (R + S\sqrt{-1})(Pdp - Qdq\sqrt{-1}),$$
$$dx - dy\sqrt{-1} = (R - S\sqrt{-1})(Pdp + Qdq\sqrt{-1})$$

и, какие бы ни были P и Q функции от p и q, всегда можно найти (комплексный) интегрирующий множитель M выражения $Pdp - Qdq\sqrt{-1}$.

Пусть

$$\int M \cdot (Pdp \pm Qdq\sqrt{-1}) = T \pm V\sqrt{-1},$$

тогда $\frac{R \pm S\sqrt{-1}}{M}$ есть некоторая (аналитическая) функция от $T + V\sqrt{-1}$ (вещественная на вещественной оси). Интегрируя, мы будем иметь

$$x + y\sqrt{-1} = \Gamma(T + V\sqrt{-1}), \quad x - y\sqrt{-1} = \Gamma(T - V\sqrt{-1}),$$

где Γ — некоторая (аналитическая) функция от $T + V\sqrt{-1}$ (тоже вещественная на вещественной оси), и получаем

$$x = \frac{1}{2}\Gamma(T + V\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\Gamma(T - V\sqrt{-1}),$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma(T + V\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma(T - V\sqrt{-1}).$$

Эти формулы, говорит Эйлер, тем более приспособлены к практике, что при их помощи можно получить бесконечно много решений. Дело в том, что, если брать разные функции Г и получать для x по этим формулам выражения T, T', T'', T''' ..., а для y выражения V, V', V'', V''' ..., то решениями также будут

$$x = \alpha T + \beta T' + \gamma T'' + \delta T''' + \ldots,$$

$$y = \alpha V + \beta V' + \gamma V'' + \delta V''' + \ldots,$$

где α, β, γ, δ ... — какие угодно постоянные коэффициенты. И далее Эйлер берет за разные Г степени с целыми положительными и отрицательными показателями и показывает для них непосредственно, что получаются ортогональные семейства, т. е. что для них удовлетворяется уравнение $\frac{\partial t}{\partial p} \cdot \frac{\partial t}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial p} \cdot \frac{\partial u}{\partial q} = 0.$

Шпейзер в своих комментариях к этой работе Эйлера правильно отмечает, что описанное сейчас соображение Эйлера находить комплексный интегрирующий множитель выражения $Pdp + Qdq\sqrt{-1}$ было началом также и для известного способа находить на поверхности изотермическую систему координат. Действительно, если гауссова метрическая квадратичная форма в любых криволинейных координатах u, v на поверхности есть

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

и ее разложить на линейные множители

$$\left[\sqrt{E}du + (F + i\sqrt{D})\frac{dv}{\sqrt{E}}\right] \cdot \left[\sqrt{E}du + (F - i\sqrt{D})\frac{dv}{\sqrt{E}}\right]$$

и $\mu + i\nu$ есть интегрирующий множитель первого из них, а $\mu - i\nu$ — для второго, то

$$(\mu + i\nu)\,[1\text{-ый}] = d\varphi + id\psi,$$

а

$$(\mu - i\nu)\,[2\text{-ой}] = d\varphi - id\psi.$$

Перемножая, мы получим

$$(\mu^2 + \nu^2)\,ds^2 = d\varphi^2 + d\psi^2$$

или

$$ds^2 = \frac{d\varphi^2 + d\psi^2}{\mu^2 + \nu^2},$$

т. е. семейства $\varphi(u, v) = \text{const}$ и $\psi(u, v) = \text{const}$ представляют собой изотермическую систему координат на поверхности.

Однако сам Эйлер ничего этого в рассматриваемой работе не отмечает.

В конце работы Эйлер принимает за функцию Г дробно-линейную функцию комплексной переменной $\frac{f+g(t+u\sqrt{-1})}{h+k(t+u\sqrt{-1})}$ и показывает, что прямые $t=p$ и $u=g$ переходят при этом в окружности, например, прямая $u=g$ в окружность

$$x^2+y^2=\frac{(gh-fk)y+2gkqx-g^2q}{k^2q}.$$

V. «De solidis quorum superficiem in planum explicare licet»

[Novi commentarii Academiae scientiarum Petropalitanae, 16 (1771) 1772, p. 3—34], («О телах, поверхность которых может быть развернута в плоскость»).

Это первая работа в истории математики, в которой рассматривается линейный элемент поверхности. Эйлер доказывает здесь знаменитую теорему о том, что поверхность, образованная касательными к пространственной кривой, есть развертывающаяся, и обратно — всякая развертывающаяся поверхность образована касательными к некоторой пространственной кривой, если только она не цилиндрическая или коническая.

Приведу, прежде всего, перевод двух страниц предисловия Эйлера к этой работе.

«Известно из элементов геометрии, что цилиндры и конусы имеют то свойство, что их поверхность можно развернуть в плоскость, причем это свойство верно для всех цилиндров и конусов, каково бы ни было их основание; однако в случае шара дело обстоит иначе, так как можно показать, что его поверхность никаким способом нельзя развернуть в плоскость или обвернуть ее плоскостью; таким образом рождается следующий вопрос, достойный большого интереса, какого характера должны быть те тела, которых поверхность можно развернуть в плоскость; три решения этого вопроса даны в предлагаемой работе. Исходным соображением первого решения, выведенного только из самых основ анализа, является то, что какой-либо элемент поверхности такого тела должен быть конгруэнтен соответствующему элементу плоскости.

Таким образом, поставленная геометрическая задача сводится к решению следующей чисто аналитической задачи: найти 6 таких функций l, m, n, λ, μ, ν от двух переменных t и u, чтобы выражения

$$ldt+\lambda du,\quad mdt+\mu du,\quad ndt+\nu du$$

были полными дифференциалами и чтобы, кроме того, было

$$l^2+m^2+n^2=1,\ \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1,\ l\lambda+m\mu+n\nu=0.$$

Эта задача с первого взгляда кажется столь трудной, что если бы не помогали геометрические соображения, казалось бы, что ее решить невозможно. Второе решение, выведенное из геометрических соображений, прежде всего связано с тем, что, оказывается, тела, поверхность которых может быть развернута в плоскость, должны быть так устроены, что из любой точки этой поверхности может быть проведена прямая, которая вся лежит в этой поверхности, и так, что две такие прямые, близкие друг к другу, лежат в одной плоскости, т. е., если они не параллельны, то они пересекаются в некоторой точке. Точки пересечения этих прямых образуют, очевидно, линию двоякой кривизны, такую, что все ее касательные образуют поверхность рассматриваемого тела. А так как есть бесконечно много различных кривых двоякой кривизны, то уже нет никакого сомнения, что, кроме цилиндрических и конических тел, существует бесконечно много различных других тел, поверхности которых могут быть развернуты в плоскость. После того, как автор нашел это решение поставленного вопроса, он постарался объяснить, как это решение ведет к решению той аналитической задачи, о которой мы говорили выше. Формулы, которые дают выражения l, m, n, λ, μ, ν, а также значения интегралов

$$\int(ldt+\lambda du),\quad \int(mdt+\mu du),\quad \int(ndt+\nu du)$$

отличаются такой краткостью и элегантностью, что геометры не могут за них не быть благодарны автору.»

Самую работу Эйлер начинает так.

«Пусть Z — точка на рассматриваемой поверхности и x, y, z — ее пространственные прямоугольные координаты. Требуется найти все уравнения, связывающие x, y, z, которые дают развертывающиеся поверхности. Представим себе для этого, что наша поверхность уже развернута в плоскость, на которой выбраны некоторые прямоугольные координаты T и U, и пусть точка Z при этом будет лежать в ее точке V. Пространственные координаты x, y, z точки Z поверхности можно рассматривать как функции плоских координат T и U точки V. Перейдем в плоскости от точки V с координатами (T, U) к точке с координатами $(T+dT, U+dU)$, тогда точка Z поверхности с координатами (x, y, z) перейдет в некоторую ее точку с координатами $(x+dx, y+dy, z+dz)$, причем, если обозначить частные производные от x, y, z по T и U через l, λ; m, μ; n, ν, то

$$dx=ldT+\lambda dU,\ dy=mdT+\mu dU;\ dz=ndT+\nu dU,$$

где l, m, n, λ, μ, ν суть некоторые функции от T и U, причем

$$\frac{\partial l}{\partial U}=\frac{d\lambda}{\partial T}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial m}{\partial U}=\frac{\partial \mu}{\partial T}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial n}{\partial U}=\frac{\partial \nu}{\partial T}. \tag{3}$$

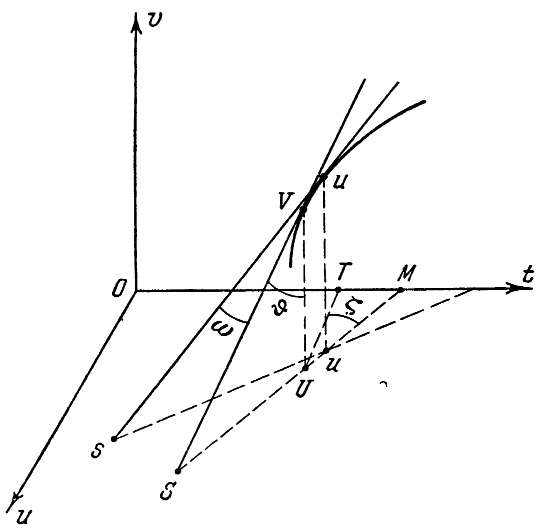
Так как элементарные треугольники Vvv' и Zzz' (где v и v' — точки плоскости с координатами $(T+dT,\ U)$ и $(T,\ U+dU)$, а z и z' — соответствующие им точки поверхности) равны, мы будем еще иметь равенства

$$l^2+m^2+n^2=1, \tag{4}$$

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1, \tag{5}$$

$$l\lambda+m\mu+n\nu=0. \tag{6}$$

«Таким образом вся задача,— говорит Эйлер,— сводится к разысканию шести функций l, m, n, λ, μ, ν от T и U, удовлетворяющих условиям (1)—(6).»



Фиг. 7

Для решения этой задачи Эйлер прибегает непосредственно к геометрии. Он рассматривает связь между развертывающимися поверхностями и пространственными кривыми двоякой кривизны. Пусть (фиг. 7) даны две близкие точки V и v пространственной кривой, а VS и vs — касательные к этой кривой в этих точках, причем S и s — точки пересечения этих касательных с плоскостью t, u. Кроме того, Эйлер рассматривает углы $MUT = \zeta$, $UVS = \vartheta$ и $Svs = \omega$. Эйлер предлагает, если кривая двоякой кривизны задана [например, уравнениями $u = f(t)$, $v = \varphi(t)$], задавать касательную к ней при помощи координаты t ее точки касания V, а произвольную точку Z на этой касательной — при помощи ее расстояния s от точки V. Тогда t и s будут некоторыми координатами произвольной точки геометрического места точек всех касательных к рассматриваемой пространственной кривой. Углы ζ и ϑ будут для данной пространственной кривой определенными функциями от t. Наоборот, если принять какие-либо две функции от t за ζ и ϑ, то они зададут пространственную кривую (с точностью до ее параллельного переноса). Эйлер показывает, кроме того, что

$$d\omega^2 = d\vartheta^2 + d\zeta^2 \cdot \sin^2\vartheta.$$

Основной результат Эйлера состоит в том, что, если взять произвольные функции от t, $\zeta(t)$ и $\vartheta(t)$ и положить

$$d\omega^2 = d\vartheta^2 + d\zeta^2 \cdot \sin^2\vartheta,$$

то 6 функций

$$l = \sin\zeta \cdot \sin\vartheta \sin\omega + \frac{\cos\omega}{d\omega} \cdot d(\sin\zeta \sin\vartheta),$$

$$\lambda = \sin\zeta \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\omega - \frac{\sin\omega}{d\omega} \cdot d(\sin\zeta \sin\vartheta),$$

$$m = \cos\zeta \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\omega + \frac{\cos\omega}{d\omega} \cdot d(\cos\zeta \sin\vartheta),$$

$$\mu = \cos\zeta \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\omega - \frac{\sin\omega}{d\omega} \cdot d(\cos\zeta \sin\vartheta),$$

$$n = \cos\vartheta \sin\omega + \frac{\cos\omega}{d\omega} \cdot d\cos\vartheta,$$

$$\nu = \cos\vartheta \cdot \cos\omega - \frac{\sin\omega}{d\omega} \cdot d\cos\vartheta$$

как раз удовлетворяют полученным выше условиям (1) — (6), если положить

$$T = \int \frac{dt \sin\omega}{\sin\zeta \sin\vartheta} - s \cdot \sin\omega,$$

$$U = \int \frac{dt \cos\omega}{\sin\zeta \sin\vartheta} - s \cdot \cos\omega.$$

Далее Эйлер показывает, что, наоборот, если взять такие l, m, n, λ, μ, ν, то поверхность x, y, z, где

$$dx = \int (ldT + \lambda dU); \quad dy = \int (mdT + \mu dU); \quad dz = \int (ndT + \nu dU),$$

вся состоит из прямых линий. Доказывает это Эйлер так. Сначала он показывает, что для таких l, m, n, λ, μ, ν имеет место пропорциональность

$$d\lambda = -\operatorname{tg}\omega dl, \quad d\mu = -\operatorname{tg}\omega\, dm, \quad d\nu = -\operatorname{tg}\omega\, dn,$$

откуда, поскольку $\operatorname{tg}\omega\, dl$, например, есть полный дифференциал $d\lambda$, получается, что $\operatorname{tg}\omega$ есть функция от l, а следовательно, и обратно, есть функция от ω, и, аналогично, m, n, λ, μ, ν суть функции от ω. Но, интегрируя по частям, получим

$$x = lT + \lambda U - \int (Tdl + Ud\lambda); \ y = \ldots; \ z = \ldots,$$

принимая во внимание вышеполученные равенства, получим:

$$x = lT + \lambda U - \int dl\,(T - Ud\omega),$$

$$y = mT + \mu U - \int dm\,(T - Ud\omega),$$

$$z = nT + \nu U - \int dn\,(T - Ud\omega).$$

Под $\int$ тут стоит полный дифференциал, поэтому $T - U\operatorname{tg}\omega$ есть функция от l, а следовательно, и функция от ω. Обозначив эту функцию через Ω и введя вместо независимых переменных T и U новые независимые переменные U и ω, получим

$$x = l\Omega + lU\operatorname{tg}\omega + \lambda U - \int \Omega\, dl, \ y = \ldots, z = \ldots$$

или

$$x = U(l\operatorname{tg}\omega + \lambda) + \int ld\Omega,$$

$$y = U(m\operatorname{tg}w + \mu) + \int md\Omega,$$

$$z = U(n\operatorname{tg}\omega + \nu) + \int nd\Omega.$$

При постоянном ω справа все постоянно кроме U, и получается, что x, y, z при постоянном ω суть линейные функции от параметра U, т. е. дают прямую, лежащую на рассматриваемой поверхности.

Что поражает в этой работе Эйлера? Во-первых, получение первокласснейших и совершенно новых для того времени геометрических фактов. Во-вторых, употребление впервые в истории математики рассуждения о линейном элементе поверхности. В-третьих, совершенно окончательное решение вопроса, так как Эйлер находит следующие явные выражения для пространственных координат (x, y, z) точек поверхности через функции $\zeta(t)$ и $\vartheta(t)$, зависящие от двух произвольных параметров t и s, которые являются естественными координатами точек на рассматриваемой поверхности

$$x = t - s\,\sin\vartheta\sin\zeta,$$
$$y = \int\frac{dt}{\operatorname{tg}\zeta} - s\,\sin\vartheta\cos\zeta,$$
$$z = \int\frac{dt}{\sin\zeta\operatorname{tg}\vartheta} - s\,\cos\vartheta.$$

VI. Работы Эйлера по картографии

В 1772, 1777 и 1779 гг. последовательно появились работы по картографии Ламберта, Эйлера и Лагранжа, положившие начало общей теории картографических проекций.

Иоганн Генрих Ламберт (1728—1777)— выдающийся немецкий математик, физик и астроном, француз по происхождению, с 1765 г. член Берлинской академии. В математике ему принадлежат доказательство иррациональности числа π, работы по теории параллельных, по перспективе, сферической тригонометрии, приложениям гиперболических функций и по картографии; в физике Ламберт опубликовал фундаментальную работу по фотометрии, занимался рефракцией света и т. д.; в астрономии занимался исследованием кометных орбит и космогонией.

Ламберт опубликовал книгу «Прибавления к употреблению математики и ее приложениям» (4 тома, 1765—1772), в третьей части которой одна из работ озаглавлена «Замечания и прибавления к вопросу о черчении земных и небесных карт». Значение этой работы Ламберта в том, что в ней он первый поставил вопрос о картографических проекциях в общем виде, причем отмечает, что самые важные требования, которые можно предъявить к проекции — это либо, чтобы при ней сохранялись углы, т. е. подобие малых частей (конформность), либо, чтобы сохранялись отношения площадей (эквивалентность). Ламбертом предложены некоторые специальные проекции, которые оказались практически удобными и используются до сих пор.

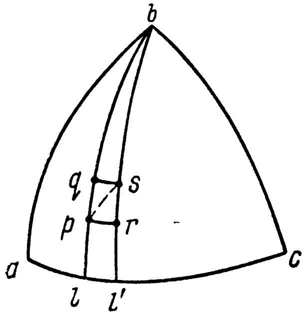
Эйлер опубликовал о картографических проекциях три работы: «De representatione superficiei sphaericae super plano» («Об изображении сферической поверхности на плоскости»), Acta Academiae scientiarum Petropolitanae (1777; I) 1778, p. 107—132; «De projectione geographica superficiei sphaericae» («О географической проекции сферической поверхности»), ibid., p. 133—142; «De projectione geographica Delisliana in mappa generali Imperii Russici usitata» («О географической проекции Делиля, принятой для общей карты Российской империи»), ibid., p. 143—153.

Эти работы Эйлера представляют значительное развитие работы Ламберта. Хотя оба автора понимают понятие «отображения» уже в более общем смысле, чем делалось ранее, однако Ламберт начинает со специальных отображений и лишь постепенно переходит к обобщениям. Эйлер же сразу исходит из общего понятия, и поэтому у него подход к задаче с самого начала гораздо более общий. Эйлер впервые дает доказательство того, что никакой кусок сферы невозможно конгруэнтно отобразить на плоскость. Затем, так же, как и Ламберт, Эйлер отдельно останавливается на отображениях с сохранением площадей и на конформных. Но Ламберт из установленных им общих условий конформности ничего не выводит и употребляет при исследовании каждого специального такого отображения специальные методы, Эйлер же дает способ находить произвольные конформные отображения — замечательный способ, основанный на употреблении общей функции комплексной переменной, начало чему он уже положил в рассмотренной выше работе об ортогональных траекториях. Кроме того, Эйлер во второй части второй работы указывает, что дробно-линейной функцией комплексной переменной осуществляется конформное отображение плоскости, при котором все ее окружности переходят в окружности, и показывает, при какой именной функции получается общая стереографическая проекция географической сетки, т. е. такая, когда центр проекции не совпадает ни с одним из полюсов и не лежит на экваторе.

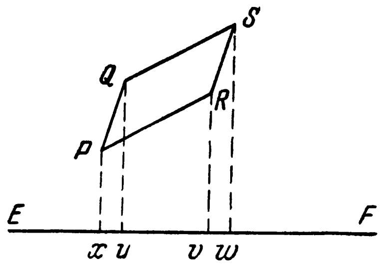
Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) — великий французский математик и механик, один из самых крупных математиков XVIII в., родился в Турине в Италии; с 1759 г. был членом Берлинской академии, а с 1772 г.—Парижской академии.

Исходя из работ Эйлера, Лагранж развил вариационное исчисление, создал аналитическую механику, положив в основу статики принцип возможных перемещений, а в основу динамики — сочетание этого принципа с принципом Даламбера; используя обобщенные координаты, он дал общие дифференциальные уравнения движения, называемые его именем.

В теории чисел Лагранж, применив непрерывные дроби, решил неопределенные уравнения второй степени, показал, что всякое натуральное число есть сумма квадратов, в алгебре дал глубокую теорию алгебраического уравнения, позже законченную Галуа, а в анализе — формулу конечных приращений, остаточный член ряда Тейлора, теорию условных экстремумов, интерполяционную формулу, теорию особых решений дифференциальных уравнений, метод вариации постоянных, в геометрии — теорию взаимной системы координат и т. д.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

В работе «Sur la construction des cartes géographiques» («О построении географических карт»), Nouveaux Mém. de l'Acad. Royale des Sciences de Berlin, 1779, Berlin, 1781, Лагранж начинает с того, что рассматривает общую теорию конформных проекций любой поверхности вращения на плоскость, затем особенно подробно рассматривает тот случай, когда поверхность вращения есть сфера и когда все окружности сферы переходят опять в окружности на плоскости, и применяет эту теорию к разным частным случаям. Работа Лагранжа написана после работ Эйлера и он на них ссылается. Общий вопрос о проекциях сферы на плоскость, сохраняющих площади и таких, что все меридианы и параллели сферы переходят в окружности (или прямые) на плоскости, Лагранж не решил до конца; это сделал гораздо позже русский математик Д. А. Граве (1863—1939) в работе «Об основных задачах математической теории построения географических карт», СПб., 1896.

Перейдем теперь к рассмотрению указанных выше работ Эйлера о картографических проекциях. Первая работа Эйлера по картографии «Об изображении сферической поверхности на плоскости» начинается с анализа двух чертежей. На первом из них (фиг. 8) изображена часть сферы, b — полюс, ac — часть экватора, ab — первый меридиан, p —

некоторая точка поверхности сферы. Положение точки p на сфере задается ее долготой $al = t$ и ее широтой $lp = u$ (радиус сферы принимается за единицу). Отрезок ps есть линейный элемент сферы. Точка s — точка с координатами $(t + dt,\ u + du)$. В таком случае $pq = du$; $pr = \cos u dt$. В силу малости dt и du можно считать $pqrs$ прямоугольником.

На втором чертеже Эйлера (фиг. 9) изображена плоскость; E — начало декартовых прямоугольных координат x, y на плоскости, EF — ось абсцисс. Отображение точки сферы на плоскость осуществляется при помощи того, что координаты xy точки плоскости, которая есть образ точки сферы, задаются как функции от координат t и u этой точки сферы. Разыскание того, каковы должны быть эти функции для того, чтобы отображение обладало теми или иными свойствами, и является основной задачей. Точки P, Q, R, S плоскости суть образы точек p, q, r, s сферы. Так как при переходе от точки p к точке q на сфере увеличивается только ее координата u на du, а при переходе к точке r увеличивается только ее координата t на dt, приращения координат x, y при переходе от точки P плоскости к ее точке Q можно принимать равными $\frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial u} du$, а при переходе к точке R равными $\frac{\partial x}{\partial t} dt,\ \frac{\partial y}{\partial t} dt$. Эйлер вводит обозначения $\frac{\partial x}{\partial u} = p,\ \frac{\partial x}{\partial t} = q,\ \frac{\partial y}{\partial u} = r,\ \frac{\partial y}{\partial t} = s$ (не путать с обозначениями точек на сфере), тогда векторы PQ и PR имеют координаты $(pdu,\ rdu)$ и $(qdt,\ sdt)$, а вектор PS, поскольку при малых du и dv можно считать $PQRS$ параллелограммом, имеет координаты

$$dx = pdu + qdt, \quad dy = rdu + sdt.$$

После этих вступительных замечаний Эйлер начинает с доказательства невозможности отобразить какой-либо кусок сферы на плоскость конгруэнтно. Он проводит это доказательство так.

Предположим, что отображение было бы конгруэнтным, тогда прямоугольник $pqrs$ сферы отобразился бы в равный ему прямоугольник $PQRS$ плоскости (мы тут сокращаем изложение Эйлера) и тогда, если бы угол, который делает PQ с осью EF, был φ, то, как это легко видеть из фиг. 10, было бы

$$dx = du \cos\varphi - dt \sin\varphi \cos u,$$
$$dy = du \sin\varphi + dt \cos\varphi \cos u,$$

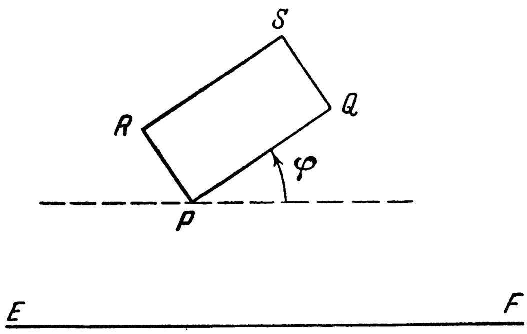
где φ — некоторая функция от t и u. Выражения эти должны быть полными дифференциалами, поэтому

$$\frac{\partial(\cos\varphi)}{\partial t}=\frac{\partial(-\sin\varphi\cos u)}{\partial u},\quad -\frac{\partial\varphi}{\partial t}\sin\varphi=\sin u\cdot\sin\varphi-\cos u\cdot\cos\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

или

$$\frac{\partial(\sin\varphi)}{\partial t}=\frac{\partial(\cos\varphi\cos u)}{\partial u},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos\varphi=-\sin u\cdot\cos\varphi-\cos u\cdot\sin\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Помножив первое из этих равенств на $\cos\varphi$, а второе на $\sin\varphi$ и сложив, получим $\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\cos u=0$, т. е. $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0$, а помножив первое на $-\sin\varphi$, а второе



Фиг. 10.

на $\cos\varphi$ и сложив, получим $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\sin u$. Но первое из полученных равенств показывает, что φ есть функция только от t, что противоречит второму, из которого выходит, что $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ изменяется с изменением u.

«Итак,—говорит Эйлер,—совсем точное [т. е. конгруэнтное.—*Б. Д.*] отображение [хотя бы куска сферы на плоскость.—*Б. Д.*] совершенно исключено и мы принуждены поневоле обратиться к исследованию отображений, которые не подобны [даже для куска сферы.—*Б. Д.*] и при которых фигуры в плоскости как-либо отличаются от фигур на сфере.» Эйлер замечает, однако, что он будет «все время предполагать, что углы, которые образуют между собою [отображенные на плоскость.—*Б. Д.*] меридианы и параллели, везде будут прямыми. Ибо, если бы допустить и не прямые углы, отображение было бы совсем не практичным».

Для перпендикулярности векторов PQ и PR необходимо, чтобы было

$$p\cdot du\cdot qdt+rdu\cdot sdt=0$$

или $\frac{r}{p} = -\frac{q}{s}$. Обозначая опять тот угол, который делает PQ с осью x, через φ, Эйлер получает $p = m\cos\varphi$, $q = n\sin\varphi$, $r = m\sin\varphi$, $s = -n\cos\varphi$, и поэтому

$$dx = m\cos\varphi\cdot du + n\sin\varphi\cdot dt,$$
$$dy = m\sin\varphi\cdot du - n\cos\varphi\cdot dt.$$

«Таким образом,—говорит Эйлер,—вся задача сводится к вопросу: каковы должны быть функции m и n [и φ.— *Б. Д.*] от t и u для того, чтобы оба вышенаписанные выражения были полными дифференциалами? При этом еще надо принять во внимание те условия, выполнения которых можно в силу вышесказанного в каждом случае потребовать.»

Эйлер рассматривает три различных случая таких условий, называя их предположениями.

Предположение первое. «Образы всех меридианов суть прямые, перпендикулярные к оси EF, а образы параллелей — прямые ей параллельные».

Другими словами, угол φ должен быть постоянно прямым, и поэтому написанные выше дифференциальные уравнения в этом случае имеют вид

$$dx = n\cdot dt, \quad dy = m\cdot du.$$

Для того,чтобы это были полные дифференциалы, надо, чтобы m было функцией только от u, а n — функцией только от t. Эйлер предполагает еще, что все отображения градусов долготы одинаковы: «так как ведь нет никакой причины принимать их неравенства», говорит Эйлер, а тогда можно просто положить $n = 1$, т. е. $x = t$, и останется так или иначе выбирать m как функцию от u. Эйлер подробно рассматривает два частных предположения относительно выбора m, одно, дающее известную конформную карту Меркатора, а другое — карту с сохранением площадей.

Предположение второе. «Малейшие части поверхности Земли представляются на карте подобными им фигурами», т. е. требуется конформность отображения.

При таком требовании прямоугольник $pqrs$ должен переходить в подобный ему прямоугольник $PQRS$ и, так как в малом отображение аффинно, то оно линейно и есть преобразование подобия, т. е. имеет вид

$$\begin{aligned} dx &= pdu + r\cos u\, dt, \\ dy &= rdu - p\cos u\, dt, \end{aligned} \qquad (*)$$

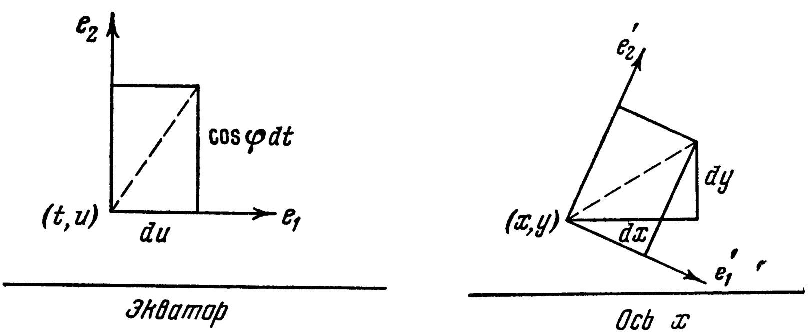
так как тогда, если репер e_1e_2 прямоугольный, то векторы $e_1' = pe_1 + re_2$, $e_2' = re_1 - pe_2$ взаимно перпендикулярны и одинаковой длины $\sqrt{p^2 + r^2}$ (фиг. 11). Мы здесь сокращаем вывод Эйлера. Речь идет, таким образом, о нахождении таких функций p и r от t и u, чтобы выражения

$$pdu + r\cos udt,$$

и

$$zdu - p\cos udt$$

были полными дифференциалами. Каждая пара таких функций будет давать некоторое конформное отображение сферы на плоскость и обратно.



Фиг. 11.

Для нахождения таких функций Эйлер предлагает два метода.

Первый метод, дающий частные решения дифференциальных уравнений (*).

Положим $p = U \cdot T$, $r = V \cdot Q$, где U и V — функции только от u, а T и Q — только от t. Тогда рассматриваемые выражения, которые должны быть полными дифференциалами, примут вид

$$dx = U \cdot Tdu + V \cdot Q\cos udt,$$
$$du = V \cdot Qdu - U \cdot T\cos udt.$$

Можно двояко представить x и y в виде интегралов. А именно, если считать постоянным t, то исчезнет второй член и мы будем иметь

$$x = T \cdot \int Udu, \ y = Q \cdot \int Vdu,$$

а если считать постоянным u, аналогично будем иметь

$$x = V\cos u \cdot \int Qdt, \ y = -U\cos u \cdot \int Tdt,$$

причем оба выражения для x должны быть одинаковы и оба выражения для y одинаковы. Получаются уравнения

$$\frac{\int U du}{U\cos u}=\frac{\int Q dt}{T}; \qquad \frac{\int V dt}{U\cos u}=-\frac{\int T dt}{Q},$$

из которых надо найти U, V, T, Q, и, так как левая часть каждого из этих уравнений есть функция только от u, а правая — только от t, то в каждом из них обе части суть одинаковые постоянные, например α и β. Тогда будет

$$\int U du=\alpha V\cos u; \quad \int Q dt=\alpha T; \quad \int V du=\beta U\cos u; \quad \int T dt=-\beta Q \qquad (**)$$

и поэтому x и y могут быть выражены через U, V, T, Q уже без интегралов

$$x=\alpha\cdot T\cdot V\cdot\cos u, \quad y=\beta\cdot Q\cdot U\cdot\cos u.$$

Полагая $U\cos u=P$; $V\cos u=Q$ и дифференцируя уравнения (**), подставляя и снова дифференцируя, Эйлер приходит для разыскания T и Q к уравнениям

$$T=\alpha\beta\frac{d^2T}{dt^2}; \qquad Q=\alpha\beta\cos^2 u\frac{d^2Q}{du^2}-\alpha\beta\sin u\cos u\frac{dQ}{du}$$

и говорит: «Мы пришли таким образом к двум [линейным.— *Б. Д.*] дифференциальным уравнениям 2-го порядка и от их интегрирования зависит решение нашей задачи.»

Далее Эйлер разыскивает частные решения, составляет из них линейные комбинации и говорит: «Это решение, по-видимому, столь общее, что в нем заключаются все возможные решения.»

Второй метод, служащий для разыскания общего решения дифференциальных уравнений (*).

Эта часть разбираемой работы Эйлера наиболее значительная. В ней Эйлер для решения общей задачи о конформных отображениях сферы на плоскость применяет теорию функций комплексной переменной. Эта замечательная идея Эйлера, как известно, получила впоследствии в руках Коши, Римана, Жуковского, Колосова и многих других важное значение для применения математики ко многим вопросам практики. Разбираемая сейчас работа — первая, в которой эта идея была до конца высказана и применена для решения вопроса практики.

Эйлер приступает к делу так. Он говорит: «Мы попробуем найти такую [линейную.— *Б. Д.*] комбинацию обоих предыдущих уравнений, которая допускает разложение правой части на два множителя. Для этой цели мы помножим первое уравнение на α, а второе — на β и сложим их».

Получается

$$\alpha dx + \beta dy = \alpha p \left(du - \frac{\beta}{\alpha}\cos u dt\right) + \beta r \left(du + \frac{\alpha}{\beta}\cos u dt\right)$$

и, если положить $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha}$, т. е. $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ или $\beta = \alpha\sqrt{-1}$, то

$$dx + dy\sqrt{-1} = \cos u\cdot(p + r\sqrt{-1})\left(\frac{du}{\cos u} - dt\sqrt{-1}\right).$$

Положим теперь $\frac{du}{\cos u} - dt\sqrt{-1} = dz$, т. е. $z = \log \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}u\right) - t\sqrt{-1}$, тогда

$$dx + dy\sqrt{-1} = \cos u\cdot(p + r\sqrt{-1})\cdot dz$$

и правая часть будет полным дифференциалом только в том случае, если $\cos u(p + r\sqrt{-1})$ есть (аналитическая) функция от z; наоборот, какую бы здесь (аналитическую) функцию от z ни взять, правая часть будет полным дифференциалом. Но тогда и интеграл $x + y\sqrt{-1}$ также будет некоторой (аналитической) функцией от z. Положив $\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}u\right) = s$, мы будем поэтому иметь

$$x + y\sqrt{-1} = 2\cdot\Gamma(\log s - t\sqrt{-1},$$

где Γ — знак произвольной (аналитической) функции от того аргумента, который стоит в скобках. Но так как $\sqrt{-1}$ по самой своей природе имеет два знака, то мы будем также иметь

$$x - y\sqrt{-1} = 2\cdot\Gamma(\log s + t\sqrt{-1}),$$

поэтому

$$x = \Gamma(\log s - t\sqrt{-1}) + \Gamma(\log s + t\sqrt{-1}),$$

$$y\sqrt{-1} = \Gamma(\log s - t\sqrt{-1}) - \Gamma(\log s + t\sqrt{-1}),$$

откуда (если Γ — функция действительная для действительных аргументов) x и y получаются тоже действительные.

Суть этого замечательного места работы Эйлера состоит в том, что отображение точки сферы с координатами t и u на плоскость в точку с координатами $x = \log \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}u\right)$, $y = t$, есть конформное отображение Меркатора, что, как Эйлер это и отметил дальше, получается, если принять за $\Gamma(z)$ само z. Дальнейшее же отображение точки при помощи некоторой (аналитической) функции 2Γ комплексной переменной дает любое конформное отображение сферы на плоскость.

Рассматриваемая работа Эйлера была представлена Петербургской академии наук в 1777 г. В том же году была представлена Эйлером работа о применении комплексного переменного к вычислению интегралов от действительных функций, в которой Эйлер приводит такое рассуждение. Пусть Z есть функция от z, такая, что, если положить $z = x + y\sqrt{-1}$, то

$$Z = M(x, y) + N(x, y)\sqrt{-1}.$$

Если $\int Zdz = V$ и положить $V = P + Q\sqrt{-1}$, то

$$P + Q\sqrt{-1} = \int (M + N\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1}),$$

поэтому, сделав подстановку $z = x - iy$, получим

$$P - Q\sqrt{-1} = \int (M - N\sqrt{-1})(dx - dy\sqrt{-1}),$$

откуда

$$P = \int Mdx - Ndy, \qquad Q = \int Ndx + Mdy$$

и, следовательно, выражения $Mdx - Ndy$ и $Ndx - Ndy$ суть полные дифференциалы функций P и Q, т. е. выполняются условия

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

«Посредством такой подстановки,— говорит Эйлер,— таким образом, всегда получаются две функции M и N от x, y, обладающие тем замечательным свойством, что $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}$ и $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$».

Таким образом, в этом году, по-видимому, Эйлеру была уже вполне ясна идея связи конформных отображений с функциями комплексной переменной. Но, как это, например, видно из работы об ортогональных траекториях, под функцией от комплексной переменной Эйлер понимал, по-видимому, в основном многочлен с целыми положительными, отрицательными и может быть дробными показателями и степенной ряд.

В самой же рассматриваемой работе о картографических проекциях Эйлер подробно не мотивирует конформность получаемого отображения, а только утверждает, что его формулы дают общее решение задачи.

Предположение третье. Области Земли должны быть представлены на плоскости в их настоящих размерах, т. е. требуется эквивалентность проекции. Выводятся общие дифференциальные уравнения задачи и затем говорится: «Так как до сих пор неизвестно никакого способа, при помощи которого можно достигнуть общего решения этих уравнений, то мы будем искать частные решения». После этого исследуются несколько частных случаев.

Вторая работа Эйлера по картографии «О географической проекции сферической поверхности» содержит продолжение исследования общих конформных отображений. Эйлер показывает, как, пользуясь дробно-линейными функциями комплексной переменной, получить так называемые общие или косые стереографические проекции, т. е. такие, когда за точку, из которой проектируют стереографически, берут не полюс и не точку экватора. В этом случае, хотя меридианы и параллели земного шара будут проектироваться тоже в виде дуг окружностей, но построение проекций меридианов и параллелей более сложно, чем в первых двух случаях.

В предисловии к работе Эйлер говорит: «В предыдущей работе я вывел все возможные такие отображения поверхности шара на плоскость, при которых малейшие части изображаются подобными им фигурами. Из этого сейчас же получилось построение Меркаторовых морских карт, равно как и карт северного и южного полушарий. Как же получаются из моих формул обычные в настоящее время построения полушарий, которые выглядят, как верхнее или нижнее из любого данного места [поверхности земли.— *Б. Д.*], было не совсем ясно, хотя эти последние и обладают тоже указанным свойством [конформностью.— *Б. Д.*]. Это заставило меня подробно исследовать, как это последнее отображение связано с выведенными там общими формулами и как оно может быть наилучшим образом из них получено».

Третья работа Эйлера по картографии «О географической проекции Делиля, принятой для общей карты Российской империи» содержит подробное исследование проекции Делиля, принадлежащей к числу так называемых конических проекций. (Эта проекция была использована и до Делиля еще Меркатором в 1585 г.) Эйлер разбирает выгоды и недостатки этой проекции при картографировании Российской империи, причем проделывает различные вычисления с семью знаками.

Вообще, эти три работы Эйлера по картографии еще раз подтверждают сказанное по поводу его статей о кривизне поверхностей. В первой работе все вопросы решаются в самом общем виде, хотя каждое решение и снабжается разбором важных его частных случаев, используемых на практике. Во второй более частная теория дробно-линейных преобразований прилагается к вычислению косой стереографической сетки, важной на практике. Третья работа целиком посвящена практическому вопросу, связанному с тогдашним картографированием Российской империи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эйлера надо считать одним из главных зачинателей исследований нового времени по геометрии в пространстве вообще. Он первый дал связное изложение аналитической геометрии в пространстве и, в частности, ввел так называемые углы Эйлера, первый дал доказательство важной теоремы топологии многогранников, первый поставил и решил следующие ставшие классическими основные задачи дифференциальной геометрии в пространстве: о кривизне поверхностей, о связи развертывающихся поверхностей с кривыми двоякой кривизны, о конформном отображении, дал ныне считающийся классическим метод рассмотрения линий двоякой кривизны. Правильно говорит В. Коммерель: «Слава и заслуги Гаусса не пострадают, если мы укажем на то, что ряд мыслей и методов, которые Гаусс так блестяще использовал в «Disquisitiones generales» (правда, частично лишь в специальной форме или лишь неполно формулированные), имеются уже у Эйлера, например, сферическое отображение [в работе Эйлера о пространственных кривых (1782).— *Б. Д.*], задание поверхности в параметрической форме [в работе о развертывающихся поверхностях (1771).— *Б. Д.*], совпадение линейных элементов, как условие наложимости [там же.— *Б. Д.*], исследование геодезических линий при помощи рассмотрения угла, который они образуют с кривыми некоторого семейства линий на поверхности [в работе Эйлера о кратчайших линиях на поверхности (1779).— *Б. Д.*]» (см. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte des Mathematik, B. IV, Leipzig, 1908, S. 540).

Можно себе представить, каким откровением для математиков эпохи Эйлера явились хотя бы работы Эйлера о кривизне поверхностей, о развертывающихся поверхностях, не говоря уже о том, что работы его, в которых он рассматривает при помощи функций комплексной переменной общую теорию конформных отображений, несомненно должны были тогда казаться прямо-таки трансцендентной глубины, работы о многогранниках начинали совсем новую часть геометрии и по своей принципиальности и глубине стояли в ряду с открытиями Эвклида.

В заключение обратимся к трем крупнейшим путям геометрии — внутренней геометрии поверхностей, теории конформных отображений и топологии.

Первый путь: первое сознательное употребление криволинейных координат на поверхности и ее линейного элемента у Эйлера (1771), общая теория метрической квадратичной формы поверхности и понятие о гауссовой кривизне у Гаусса (1828), освобождение от требования осуществимости метрически заданного двухмерного многообразия как поверхности в трехмерном эвклидовом пространстве и обобщение на случай n измерений у Римана (1854), использование этих идей для построения общей теории поля тяготения у Эйнштейна (1916), доказательство того, что любые римановы многообразия могут быть рассмотрены как гиперповерхности в эвклидовых пространствах достаточного числа измерений у Нэша (1956).

Второй путь: первое применение функций комплексных переменных к решению общей задачи конформных отображений у Эйлера (1777), более общая теория у Гаусса (начало XIX в.), обоснование теории интегралов от функций комплексной переменной у Коши (1825), применение функций комплексной переменной к задачам математической физики и римановы поверхности у Римана (1851), теория автоморфных функций у Клейна и Пуанкаре (1882), применение функций комплексной переменной к аэродинамике у Жуковского (1907), к плоской задаче теории упругости у Колосова (1926) и т. д.

Что касается третьего пути — топологии, то работы Эйлера о многогранниках несомненно были самым первым обнародованным достижением на всем этом важном направлении математики. И при современном изложении топологии теорема эта, конечно, уже в ее обобщенной форме для любого клеточного комплекса и с употреблением знакопеременной суммы чисел Бетти, остается одной из центральных.

Мы видим, что на всех этих трех крупнейших путях развития геометрии зачинателем был творческий гений Эйлера.

B. N. DELAUNAY

EULER ALS GEOMETER

(Zusammenfassung)

Der Anfang des Artikels bringt ganz kurze Anmerkungen zu 75 Originalarbeiten Eulers über Geometrie und eine kurze Beschreibung des geometrischen Materials seiner «Introductio in analysin infinitorum». Ferner werden einige der wichtigsten und interessantesten dieser Arbeiten eingehend untersucht, um ein Muster für den Stil der Arbeiten Eulers über Geometrie zu geben. Folgende Arbeiten werden eingehend untersucht: I. Über das Kramersche Paradoxon, II. Über die Polyeder, III. Über die Flächenkrümmung, IV. Über orthogonale Trajektorien, V. Über die abwickelbaren Flächen, VI. Über Kartographie.

Bei der Untersuchung der Arbeit über die Polyeder kann der Verfasser nicht sein volles Einverständnis mit der Behauptung Speisers im Kommentar zu dieser Arbeit erklären. Speiser sagt, daß der von Euler vorgeschlagene Beweis nicht als befriedigend gelten kann, da das Polyeder von Euler offenbar als konvex vorausgesetzt wird, dieses aber schon nach seiner ersten Beschneidung aufhört konvex zu sein. Indessen läßt sich, wie man zeigen kann, unter allen verschiedenen Beschneidungen einer beliebigen vorgegebenen Ecke, die Euler vorzunehmen vorschlägt, stets eine solche wählen (es wird im allgemeinen nur eine solche geben), daß sich das nach dem Eulerschen Verfahren beschnittene Polyeder wieder als konvex erweist. Diese Beschneidung der Ecke ergibt sich, wenn man die betrachtete Ecke einfach fortläßt und die konvexe Hülle aller verbleibenden Ecken des Polyeders betrachtet. Demnach behauptet sich das Beweisverfahren Eulers für das konvexe Polyeder nach einer geringen Ergänzung. Der Verfasser vermerkt, daß auf Grund des bekannten Satzes von Steinitz das Eulersche Beweisverfahren auch für jedes K-Polyeder besteht, d. h. für ein (als Fläche betrachtet) der Sphäre homöomorphes Polyeder, bei dem 1) an jede Fläche längs jeder ihrer Seiten eine und nur eine Fläche mit ihrer Seite angrenzt, 2) die Eckenzahl der Fläche mindestens drei ist, d. h. keine Zweiecke und erst recht keine Einecke vorkommen, 3) zwei beliebige Flächen entweder gar keine gemeinsamen Punkte, oder nur eine gemeinsame Ecke, oder nur eine gemeinsame Seite haben.

Nach eingehender Untersuchung der sechs genannten wichtigsten Arbeiten Eulers über Geometrie gibt der Verfasser des Artikels eine allgemeine Charakterisierung des Eulerschen Schaffens in der Geometrie. Euler muß als einer der Inauguratoren der modernen Forschungen über die Geometrie im Raum gelten. Überhaupt hat Euler die erste zusammenhängende Darlegung der analytischen Geometrie des Raumes gegeben, als erster den Beweis des wichtigen Satzes der Topologie der Polyeder erbracht; er ist der erste, der die folgenden klassisch gewordenen fundamentalen Aufgaben der räumlichen Differentialgeometrie stellte und löste: über die Flächenkrümmung, über den Zusammenhang der abwickelbaren Flächen mit den Kurven doppelter Krümmung, über die konforme Abbildung, und der die klassische Untersuchungsmethode für Linien doppelter Krümmung angegeben hat. Der Verfasser stimmt mit Kommerell überein, daß man Gauß' Ruhm und Verdienst durch den Hinweis keinen Abbruch tut, daß viele Gedanken und Methoden, die Gauß' so glänzend ausgenutzt hat, bereits bei Euler vorhanden sind.

Wendet man sich den folgenden drei bedeutendsten Ideenrichtungen der Geometrie zu — der inneren Geometrie der Flächen, der Theorie der konformen Abbildungen und der Topologie, so war in ihnen allen das schöpferische Genie Eulers der Urheber. Er hat die ersten Arbeiten auf diesen Gebieten geleistet, mit denen ihre weitere Entwicklung einsetzte.

Б. В. ГНЕДЕНКО

О РАБОТАХ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ТЕОРИИ ОБРАБОТКИ НАБЛЮДЕНИЙ, ДЕМОГРАФИИ И СТРАХОВАНИЮ

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Леонард Эйлер, оставивший фундаментальные труды во всех областях математического анализа, механики, теории чисел и явившийся родоначальником многих новых направлений исследований, в теории вероятностей интересовался только узким классом задач. В этой науке он не стремился к созданию общих теорий и выработке собственного взгляда на ее центральные задачи и основные понятия. Решенные им задачи по теории вероятностей носят совершенно конкретный характер и посвящены исключительно вопросам, связанным с азартными играми. Быть может, именно этим обстоятельством следует объяснить то, что редакция собрания сочинений Эйлера поместила в VII томе, наряду с работами, рассматриваемыми в настоящей статье, только заметки под общим заголовком «Математические развлечения».

Работы Эйлера по теории обработки наблюдений и по демографии представляют собой весьма интересные соображения и замечания к исследованиям Д. Бернулли, Лагранжа и Зюссмильха. Работы по расчету рент и вдовьих касс, несомненно, представляли практический интерес, а потому были снабжены Эйлером тщательно вычисленными таблицами.

При жизни Эйлера были опубликованы далеко не все его работы по теории вероятностей, страхованию и теории ошибок наблюдений. Часть его заметок на эти темы увидела свет только в 1923 г., после выхода VII тома собрания его сочинений [1].

Прежде чем перейти к характеристике интересующих нас мемуаров Эйлера, мы приведем их полный перечень. Впоследствии при ссылках на эти мемуары мы будем придерживаться нумерации, присвоенной им в этом перечне. Сначала мы указываем оригинальное наименование мемуара, затем русский его перевод, место и год первоначального издания, (в круглых скобках указан год поступления рукописи), соответствующие страницы в VII томе собрания сочинений и, наконец, в квадратных скобках номер по известному списку сочинений Эйлера, изданному Г. Энестрёмом.

Работы по теории вероятностей

№ 1. «Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre» (Вычисление вероятности в игре «встреча»), Mém. Acad. Sci., Berlin, 7 (1751), 1753, 255—270; VII, 11—25; [№ 201].

№ 2. «Sur l'avantage de banquier au jeu de Pharaon» (О преимуществах банкомета в игре «фараон»), Mém. Acad. Sci., Berlin, 20 (1764), 1766, 144—164; VII, 57—78; [№ 313].

№ 3. «Sur la probabilité des séquences dans la lotterie Génoise» (О вероятности последовательностей в генуэзской лотерее), Mém. Acad. Sci., Berlin, 21 (1765), 1767, 191—230; VII, 113—152; [№ 338].

№ 4. «Solution d'une question très difficile dans le calcul des probabilités» (Решение одного очень трудного вопроса теории вероятностей); Mém. Acad. Sci., Berlin, 25 (1769), 1771, 285—312; VII, 162—179; [№ 412].

№ 5. «Solutio quarundam quaestionum difficiliorum in calculo probabilium» (Решение некоторых более трудных вопросов теории вероятностей); Opuscula analytica 2, 1785, 331—346; VII, 408—424; [№ 600].

№ 6. «Vera aestimatio sortis in ludis» (Правильная оценка шансов в играх); Opera postuma, I, 315—318; 1862; VII, 458—465; [№ 811].

№ 7. «Réflexions sur une espèce singulière de lotterie nommée Génoise», (Размышления об особом виде лотереи, называемой генуэзской); Opera postuma, 1, 1862, 319—335; VII, 466—494; [№ 812].

№ 8. «Analyse d'un problème du calcul des probabilités» (Анализ одной задачи теории вероятностей); Opera postuma, 1, 1862, 336—341; VII, 495—506; [№ 813].

№ 9. «Problema de sorte in ludis» (Задача о шансах в играх); Adversaria mathematica, H. 4, pp. 186—187 (рукопись); VII, 539—542.

Работы по теории ошибок наблюдений

№ 10. «Observationes in praecedentum dissertationem illustris Bernoulli» (Замечания к предыдущей статье прославленного Бернулли), Acta Acad. scient. Petropolitanae (1771, 1), 1778, 24—33; VII, 280—290; [№ 488].

№ 11. «Eclaircissement sur le mémoire de Mr. de La Grange inséré dans le V volume des Mélanges de Turin, concernant la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations etc.» (Разъяснения к статье г. Лагранжа, помещенной в V томе «Туринских записок», посвященной методу составления среднего из результатов многих измерений и пр.); Nova acta Academiae Petropolitanae, 3, (1785) 1788, 289—297; VII, 425—434; [№ 628].

Работы по демографии

№ 12. «Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain» (Общие исследования о смертности и умножении человеческого рода); Mém. Acad. Sci., Berlin, 16 (1760), 1767, 144—164; VII, 79—100; [№ 334].

№ 13. «Sur multiplication du genre humain» (Об умножении человеческого рода); Adversaria mathematica, H. 6, 1750—1755, 328—331, (рукопись); VII, 545—552.

Работы по страхованию

№ 14. «Sur les rentes viagères» (О пожизненных рентах); Mém. Acad. Sci., Berlin., 16 (1760), 1767, 165—175; VII, 101—112; [№ 335].

№ 15. «Des Herrn Leonhard Eulers nöthige Berechnung zur Einrichtung einer Witwencasse» (Расчеты г. Леонарда Эйлера об организации вдовьей кассы); Neues Hamburgisches Magazin, Leipzig, 1770, 3—13; VII, 153—161; [№ 403].

№ 16. «Éclaircissements sur les établissements publics en faveur tant des veuves que des morts, avec la description d'une nouvelle espèce de Tontine aussi favorable au Public qu'utile à l'Etat. Calculés sous la direction de Monsieur Léonard Euler par Mr. Nicolas Fuss» (Разъяснения о публичных учреждениях в пользу вдов и умерших, с описанием нового вида тонтины, столь же благоприятной для публики, как и полезной для государства. Вычисления выполнены г. Николаем Фусом под руководством г. Леонарда Эйлера); St. Pétersbourg, 1776; VII, 181—245; [№ 473].

№ 17. «Solutio quaestionis ad calculum probabilitatis pertinentis: Quantum duo persolvere debeant, ut suis haeredibus post utrusque mortem certa argenti summa persolvatur» (Решение вопроса теории вероятностей:

сколько должны выплатить двое, чтобы после смерти обоих их наследникам была выплачена определенная сумма денег); Opuscula analytica, 2, 1785, 315—330; VII, 393—407; [№ 599].

№ 18. «Sur le calcul des rentes tontinières» (О вычислении тонтинных рент), (рукопись), VII, 553—577.

Кроме того, мы использовали два письма Эйлера королю Фридриху II, а также «Введение в анализ бесконечно малых», в котором рассмотрены несколько примеров демографического характера и вопросы разложения целых чисел на сумму меньших. Таким образом, в список работ Эйлера по интересующим нас вопросам мы включаем еще два следующие наименования:

№ 19. «Duae letterae ad Friedericum 2, Regem Borrussorum» (Два письма Фридриху II, королю прусскому); Opera postuma, 1, St. Pétersbourg, 1862, 550—552, 553—554.

№ 20. «Introductio in analysin infinitorum», Lausannae, 1748; Opera omnia, Series I, v. VIII, 1922; русское издание: «Введение в анализ бесконечно малых», пер. Е. Л. Пацановского, под ред. С. Я. Лурье, М.—Л., 1936.

Обзор всех рассматриваемых нами работ Эйлера был выполнен Луи де Паскье — редактором VII тома полного собрания сочинений Л. Эйлера (стр. VIII—X, XXIII—LIII вступления к тому). Интересный обзор демографических исследований был выполнен В. В. Паевским в статье «Демографические работы Леонарда Эйлера» (Сборник «Леонард Эйлер», Труды Института истории науки и техники, серия 2, вып. 1, 1935, стр. 103—110). К сожалению, я не имел возможности познакомиться со следующими двумя статьями Луи де Паскье: «L. Eulers Verdienste um das Versicherungswesen», Vierteljahresschrift d. Naturf. Ges. in Zürich, 54, 1909, 217—243; «Eine deutsche Abhandlung L. Eulers über Witwenkassen», Vierteljahresschrift d. Naturf. Ges. in Zürich, 55, 1910, 14—22.

Все сделанное Эйлером в области теории вероятностей и теории ошибок наблюдений, пожалуй, больше всего стало достоянием истории. Его работы в области анализа, механики, вариационного исчисления и геометрии вошли почти в неизмененном виде в современную учебную литературу, но работы по теории вероятности сейчас могут служить лишь источником учебных упражнений. Несколько большее значение имеют демографические работы Эйлера, так как они в значительной мере послужили выработке ряда основных понятий современной науки.

Б. В. ГНЕДЕНКО

2. ОБЗОР РАБОТ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Интерес к теории вероятностей, вернее к теории азартных игр и лотерей, возник у Эйлера в связи с запросом короля Фридриха II. Постоянно нуждаясь в средствах, Фридрих стремился любыми путями добыть необходимые ему деньги. Пополнение казны посредством устройства лотерей широко практиковалось в ту пору различными правительствами. Генуэзская лотерея, возникшая еще в начале XVII в. в Генуе, состояла в том, что из 90 номеров наудачу вынимали 5. Каждый игрок перед этим процессом вносил в кассу ту ставку, какую хотел, и записывал по своему желанию один, два, три, четыре или пять номеров. Если номера, записанные игроком, оказывались среди вынутых, то он получал из кассы свою ставку, увеличенную

в 15	раз,	если	был записан		1	номер,
» 270	»	»	были	записаны	2	номера,
» 5500	»	»	»	»	3	»
» 7500	»	»	»	»	4	»
и 1100000	»	»	»	»	5	номеров.

Согласно сохранившимся сведениям, изобретение генуэзской лотереи приписывается советнику Генуэзской республики Бенедетто Джентиле, который в 1620 г. предложил ее для улучшения финансового положения казны. Было решено, что лотерея начнет свою деятельность в период религиозных торжеств. Однако даже в то время этот прием не принес лотерее успеха. Распространилась легенда, что сам сатана остался доволен ее организацией и нанес в знак благодарности личный визит ее изобретателю.

Однако вскоре многочисленные города Италии начали систематически устраивать подобные лотереи. После этого лотерея совершила буквально триумфальный марш по Западной Европе: в 1751 г. она была впервые проведена в Вене, в 1757 г. — в Париже, в 1763 г. — в Берлине, в 1771 г. ее устраивали уже 26 немецких городов. В Германии она была запрещена только в 1861 г., в других же странах она организовывалась еще в XX в.[1] С предложением организовать в Пруссии генуэзскую лотерею обратился к Фридриху II в 1749 г. итальянец Рокколини. Тогда же

[1] Известно, что в 1891 г. она принесла Австрии 14,4 миллиона марок дохода, а в Италии — 26 миллионов марок. Подробнее с историей вопроса можно познакомиться по статье К. Р. Бирмана [2].

Фридрих письмом от 15 сентября 1749 г. запросил у Эйлера консультацию по поводу устройства лотереи. Второй раз Фридрих обратился за подобной же консультацией к Эйлеру 17 августа 1763 г., когда аналогичный проект ему был предложен голландцем Гритхаузом. Оба эти письма воспроизведены в первом томе «Opera postuma», 1862 г., стр. 550 и 553. Во втором письме говорится о необходимости организации лотереи для помощи населению, испытывающему бедствия от последствий последней войны.

В ответных письмах Эйлера приведены очень подробные расчеты стоимости билетов при условии, что лотерея устраивается беспроигрышной. Согласно плану, каждый игрок имел право указать выигрыш, на который он претендует, если указанный им номер (или несколько номеров) окажется среди пяти извлеченных билетов. В этих условиях Эйлер на числовых примерах приводил необходимые расчеты. Содержание обоих этих писем Эйлера полностью перекрывается соответствующими мемуарами, о которых сейчас пойдет речь.

В дальнейшем изложении мы не будем придерживаться хронологического порядка и обратимся сейчас к работе, помещенной в нашем списке под № 3, поскольку эта работа, а также работа № 7 имеют непосредственное отношение к задаче, рассмотренной Эйлером в только что изученных письмах. На появление мемуара № 3 оказало влияние, как об этом сказал в первой же фразе сам Эйлер, учреждение в Берлине лотереи. Так как вычисление вероятностей извлечения среди пяти вынутых номеров нужного числа, заранее указанных по словам Эйлера, в то время было достаточно хорошо известно, то останавливаться на этом вопросе ему уже не было нужды. В то же время вопрос о появлении последовательности совершенно не выяснен и «настолько сложен, что при получении его решения встречаются огромные препятствия» (т. VII, стр. 113). При этом под последовательностью понимается тот случай, когда среди пяти извлеченных чисел встречаются два или более, идущих в натуральном порядке: «например, два таких — 7 и 8, это последовательность двух; если же имеются три такие—25, 26, 27, то это будет последовательность трех и подобным же образом для большего числа» (т. VII, стр. 113).

Следуя системе изложения, которую Эйлер применял обычно в своих работах, он сначала рассмотрел и здесь ряд частных случаев, а затем перешел к общей задаче. В общей сложности в этом мемуаре Эйлер рассмотрел пять частных задач и только затем сформулировал общую постановку задачи и дал ее решение. После каждой частной задачи он приводил частные следствия, которые зачастую сводятся к несколько видоизмененной формулировке только что найденного результата.

Первая задача состоит в том, чтобы определить вероятность появления последовательности при вынимании двух билетов из n, на которых написаны последовательные числа от 1 до n. Искомая вероятность легко находится и оказывается равной $2/n$. Получив эту вероятность, Эйлер считает необходимым добавить, что вероятность не получить последовательность равна

$$1-\frac{2}{n}=\frac{n-2}{n}.$$

В первом следствии Эйлер указывает, что число различных случаев, которые могут встретиться при извлечении двух номеров из n, равно $\frac{(n-1)\,n}{1\cdot 2}$, число же случаев, составляющих последовательность, равно $(n-1)$, а число случаев, не составляющих последовательности, равно $\frac{(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2}$.

Во втором следствии Эйлер вновь формулирует, чему равны в данной задаче вероятности извлечь последовательность и извлечь непоследовательность.

Третье следствие посвящено рассмотрению примера $n=90$. Вероятность извлечения последовательности при вынимании двух чисел в этом примере равна $^1/_{45}$. «Таким образом, можно держать пари 1 против 44, что последовательность не появится» (т. VII, стр. 116).

После следствий идет замечание относительно того, что число случаев, в которых не будет последовательности, можно подсчитать непосредственным подсчетом, а не путем вычитания из числа всех возможных число случаев, при которых получается последовательность.

Во *второй задаче* извлекается три билета и разыскиваются вероятности получения последовательности двух и последовательности трех. Эти вероятности соответственно равны $\frac{2\cdot 3\,(n-3)}{n\,(n-1)}$ и $\frac{2\cdot 3}{n\,(n-1)}$. Далее рассматриваются следствия и замечание.

В *третьей и четвертой* задачах рассматриваются последовательно извлечения четырех, пяти билетов и изучаются всевозможные случаи последовательностей. После этого и указания следствий приводится специальный раздел «Приложение к генуэзской лотерее» (т. VII, стр. 135). Здесь положено $n=90$, число извлекаемых номеров 5. Вероятности появления последовательностей длины, которая указана в скобках, сведены Эйлером в следующую таблицу:

Род	Вероятность
I (5)	$\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\frac{1}{511038}$,
II (4), (1)	$\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot85}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\frac{85}{511038}$,
III (3), (2)	$\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot85}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\frac{85}{511038}$,
IV (3), (1), (1)	$\frac{3\cdot4\cdot5\cdot85\cdot84}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\frac{3570}{511038}$,
V (2), (2), (1)	$\frac{3\cdot4\cdot5\cdot85\cdot84}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\frac{3570}{511038}$,
VI (2),(1),(1),(1),	$\frac{4\cdot5\cdot85\cdot84\cdot83}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\frac{98770}{511038}$,
VII (1), (1),(1),(1).	$\frac{85\cdot84\cdot83\cdot82}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\frac{404957}{511038}$

Из этой таблицы Эйлер вывел ряд элементарных заключений: как велика вероятность того, что появится хотя бы одна последовательность двух, по меньшей мере две последовательности двух и т. д. и сделал некоторые «практические» заключения.

Лишь после этого случая, представлявшего реальный «прикладной» интерес, Эйлер перешел к частной задаче извлечения шести чисел, а затем к общей задаче получения последовательности при извлечении m чисел из n последовательных чисел. Мы не будем приводить здесь формулы, полученные в работе, а ограничимся одним замечанием. Пусть α означает число последовательностей из a чисел, β — число последовательностей из b чисел, и т. д. Тогда очевидно, что имеет место равенство

$$\alpha a+\beta b+\cdots=m.$$

Эйлер обозначает через k сумму $\alpha+\beta+\ldots$; очевидно, что k представляет собой число разнообразных способов, которым число m может быть разложено на слагаемые. Эта задача, относящаяся уже к теории чисел, постоянно привлекала внимание Эйлера. Недаром он возвращался к ней несколько раз [3]. Во «Введении в анализ бесконечно малых» этой задаче посвящена глава 16 (стр. 261—281).

Первоначальный мемуар, посвященный устройству генуэзской лотереи и значащийся в нашем списке под № 7, был написан Эйлером в

1763 г. и зачитан в Берлинской академии 10 марта того же года. Однако опубликован он был лишь через 99 лет. Несомненно, что этот мемуар был написан Эйлером в связи с серьезными обсуждениями, которые касались организации государственной лотереи для поправки финансов, пошатнувшихся в результате ьойн. Мемуар начинается с упоминания некоего итальянца, который уже предлагал план проведения лотереи. Несомненно, что Эйлер подразумевал при этом Рокколини. Далее Эйлер упомянул, что предложенный Рокколини план несколько отличался от общеупотребительного и скорее напоминал игру «фараон». Содержание статьи состоит в определении вероятностей того, что при вынимании m билетов из n удастся вытянуть то или иное число ранее названных (в числе, не большем m). Далее обсуждается вопрос о цене билета. Изложение проводится тем путем, который был описан при изложении содержания предыдущей статьи: рассмотрение частных задач, вывод из полученных частных результатов следствий, подход к постановке общей задачи и числовые примеры. В качестве примеров рассмотрены планы лотерей, содержащих 90 и 100 билетов.

Работа, помещенная в нашем списке под № 1, была опубликована первой из всех статей, написанных Эйлером по теории вероятностей и демографии. Однако, как мы уже знаем, самые первые его работы этого направления были посвящены генуэзской лотерее и выполнены по требованию короля Фридриха. По-видимому, и статья, которую мы сейчас рассмотрим, как, впрочем, и все статьи Эйлера по теории вероятностей, была вызвана повышенным интересом некоторых кругов общества к азартным играм.

«Игра «встреча» есть азартная игра, в которой два партнера имеют по полной колоде карт и извлекают одновременно одну карту за другой до тех пор, пока не произойдет извлечения одинаковых карт; в этом случае один из игроков выигрывает.» Таким определением игры начинается мемуар Эйлера. Начав решение этой задачи с рассмотрения частных случаев, Эйлер, наконец, формулирует асимптотический результат: вероятность встречи при $n \to \infty$ стремится к $1 - {}^1/_e$. Мемуар заканчивается таким замечанием практического характера: при $n \geqslant 20$ это предельное значение почти совпадает с точным. В игре обычно используются колоды карт, содержащие 52 листа, поэтому к этому случаю предельный результат применим с очень большой точностью.

В математической записной книжке H_5 за 1748—1750 гг. имеется иная редакция заметки на ту же тему. Эти заметки сделаны на латинском языке. В них помимо решения задачи о вероятности встречи, приведены также интересные разложения в непрерывные дроби

$$e-1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cdots}}}}}}}}$$

и

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cdots}}}}},$$

найденные, впрочем, Эйлером еще в 1737 г. [4].

Второе разложение приведено Эйлером в § 381 его «Введения в анализ бесконечно малых».

Статья № 2 «О преимуществах банкомета в игре «фараон»» была представлена в Берлинскую академию наук 27 февраля 1755 г.; другой мемуар под тем же названием Эйлер представил в Берлинскую академию 20 июля 1758 г. Неизвестно, были ли различны или одинаковы эти две работы. В напечатанной работе построена теория игры «фараон», рассчитана таблица правил, которыми могли пользоваться игроки. Интересно заметить, что в заключение посредством интегралов было просуммировано выражение

$$\frac{\nu}{2^\nu}\sum_{k=0}\frac{1}{n-2k-1}=C_{\nu-1}^{2k+1}=\frac{\nu}{2^{\nu+1}}\left(\int z^{n-\nu}(1+z)^{\nu-1}\,dz-\int z^{n-\nu}(z-1)^{\nu-1}\,dz\right),$$

при $z=1$

29 ноября 1770 г. в Берлинскую академию Эйлер представил мемуар № 4 «Решение одного очень трудного вопроса теории вероятностей», являвшийся результатом экспертизы, которую он произвел по поручению Фридриха II относительно лотереи, предложенной Гритхаузом. План лотереи состоял в следующем: выпускается пять серий по 10 000 билетов в каждой серии, причем в каждой серии имеется по 1000 выигрышей. Каждый билет проходит через все пять серий розыгрышей (участвует в розыгрышах во всех пяти сериях) и в некоторых из них выигрывает, а в некоторых нет. Требуется определить вероятности всех случаев, которые могут при этом представиться, в том числе и тот, когда

билет проходит через все серии без выигрыша. Эйлер рассматривает также экономическую сторону организации такого рода лотереи.

В работе № 5 Эйлер еще раз вернулся к генуэзской лотерее и рассмотрел следующий вопрос: после каждого тиража извлеченные пять номеров возвращаются в урну. Спрашивается, чему равна вероятность того, что после s тиражей появятся все номера, по меньшей мере 89 номеров, по меньшей мере 88 номеров и т. д. В этой работе для обозначения биномиальных коэффициентов использованы квадратные скобки

$$\frac{b(b-1)\ldots(b-n+1)}{1.2.3\ldots n}=\left[\frac{b}{n}\right].$$

На необходимость введения специального символа для биномиальных коэффициентов Эйлер указывал в ряде мемуаров и в письмах к маркизу Кондорсе [5].

Мемуар № 8 был опубликован впервые только в 1862 г. и время его написания неизвестно. Задача, которая рассматривается здесь, состоит в определении вероятности того, что при извлечении из урны, содержащей n билетов, по p билетов с последующим возвращением, в результате q таких тиражей определенный билет или группа билетов не появится ни разу, появится только один раз и т. д.

Мемуар № 6 посвящен так называемой петербургской задаче. Эта задача была поставлена Николаем Бернулли в письме к Монмору от 9 сентября 1713 г. и послужила источником многочисленных исследований на протяжении XVIII, XIX и XX вв. Сравнительно недавно в печати появились работы А. Я. Хинчина и В. Феллера, трактующие парадокс петербургской игры. Известно, что в 1730 г. Д. Бернулли предложил решение, основывающееся на различном психологическом отношении к ставкам лиц разного материального достатка. Введенное им понятие морального ожидания на самом деле парадокса не разрешало. Эйлер основывался на других психологических соображениях. Он считал, что петербургская игра не безобидна для лиц, обладающих конечным капиталом. Очень интересны соображения Эйлера о том, что такое капитал. Он в это понятие включает не только материальные ценности, но и знания и идеи, которыми обладает человек.

Ряд заметок, касающихся теории игр, содержится в записных книжках Эйлера. Одна из этих заметок напечатана в его Собрании сочинений и помещена в нашем списке под № 9. В ней Эйлер изучает классическую задачу о разорении игрока. В заметке изложено решение задачи, когда число партий для разорения одного из партнеров не ограничено. Постановка этой задачи восходит к Гюйгенсу и позднее привлекала внимание многих математиков — Бернулли, Муавра, Монмора, Лагранжа, Лапласа. Эта задача в наше время получила многочисленные и важные приложения в физике и технике.

В записных книжках Эйлера сохранились многие другие заметки его по вопросам теории вероятностей, однако они не воспроизведены в собрании его сочинений. Я не имел возможности познакомиться с рукописями Эйлера, поэтому указания об этих заметках заимствую из вводной статьи к VII тому, составленной де Паскье.

В записной книжке H_3 рассмотрена задача разыскания вероятности извлечения того или иного числа обозначенных карт (n карт) из общего числа m карт при извлечении k карт. Книжка содержит 537 страниц; записи относятся к 1736—1739 гг.

В записной книжке H_4 содержится запись об игре трех лиц A, B, C, для которых вероятности выигрыша каждой партии относятся как $a : b : c$ и которые играют по следующему правилу: в каждой партии играют двое; при каждой партии проигравший заменяется третьим игроком; тот, кто выиграет две партии подряд, выигрывает игру. Определяется математическое ожидание выигрыша каждого из игроков; задача распространяется на n игроков; каждый раз играют m из n игроков. Книжка содержит 520 страниц и велась в период с 1740 по 1748 г.

В книжке H_5 рассматривается приложение генуэзской лотереи к игре «таро», где имеются 78 карт. К этой игре Эйлер возвратился в книжке H_6. Книга H_5 велась в период 1748—1750 гг. и содержит 353 страницы.

В записной книжке H_6 содержатся записи периода 1750—1755 гг., она состоит из 516 страниц. Среди них имеется почти законченный трактат об игре «ломбер». Кроме того, имеются заметки об игре «марьяж», требующей 32 карты.

В тетради H_9 без доказательств приведены некоторые формулы, касающиеся вероятностей извлечений билетов из урн.

Все эти результаты не воспроизведены в собрании сочинений Эйлера по той причине, что они были получены также другими математиками XVIII и XIX вв. и прежде всего Муавром и Лапласом, сочинения которых уже были изданы.

Наш краткий обзор работ Эйлера по теории вероятностей естественно заключить следующим соображением. Мы видели, что все его исследования в области теории вероятностей так или иначе связаны с теорией игр и лотерей, и ни в одной из них не ставится вопросов естественнонаучного характера. Для такого знатока астрономии, физики, а также многих областей техники, каким был Эйлер, было бы естественно привлечение методов теории вероятностей для решения проблем этих дисциплин. Однако этого не случилось. Причины такой ситуации достаточно ясны: каждый ученый, как бы гениален он ни был, формируется в определенной общественной среде, которая в значительной степени определяет направление его идей. Общественные запросы того времени к теории вероятностей еще не выходили за пределы расчетов, связанных с устройством лотерей или же разработкой теорий различных игр.

Недаром в ту пору только подходили к постановке задач теории ошибок наблюдений, построение же этой теории завершилось лишь в начале XIX в. Точно так же начало привлечения методов теории вероятностей к исследсванию физических явлений относится к середине XIX в. Ни предшественники Эйлера, ни его современники еще не видели за пределами игр, лотерей, задач страхования возможностей глубоких применений теории вероятностей. За эти пределы Эйлера не вывел даже его разносторонний гений, сила которого поражает нас и теперь, спустя 250 лет со дня рождения великого ученого.

3. ОБЗОР РАБОТ ПО ТЕОРИИ ОШИБОК НАБЛЮДЕНИЯ

Развитие астрономии, а также других опытных наук неизбежно должно было привести к постановке вопросов обработки результатов наблюдений. Уже давно было замечено, что как бы тщательно ни были произведены измерения, как бы ни стремились к тождественности условий, в которых наблюдается явление, в ряду произведенных измерений всегда наблюдается разброс. В связи с этим возникла задача определения по многим результатам измерений некоторого среднего значения, которое было бы целесообразно принять за оптимальное значение измеряемой величины. Так, еще Тихо де Браге считал необходимым устранять не только систематические ошибки наблюдений, связанные с принятой системой наблюдений и измерений, а также с используемым прибором, но и случайные ошибки наблюдений. Восемнадцатое столетие принесло много исследований, посвященных этому вопросу. На их базе в начале XIX в. возникла та теория обработки результатов наблюдения, которая в почти неизменном виде используется и теперь. В 1722 г. было напечатано сочинение Р. Котса [6], в котором он обосновывал правило среднего взвешенного, до него употреблявшееся астрономами. Пожалуй, впервые на ошибки наблюдений, как на случайные величины, взглянул Т. Симпсон [7].

В разделе An Attempt to Show the Advantage Arising by Taking the

Mean of a Number of Observation in Practical Astronomy он изложил достаточно подробно свои взгляды на этот вопрос.

Две статьи Эйлера, посвященные вопросам теории обработки наблюдений (№ 10, 11), были вызваны работами Даниила Бернулли и Лагранжа. Работа первого из них [8] была представлена Петербургской академии наук еще в 1776 г.

Бернулли в этой работе дал развернутую критику правила среднего арифметического, согласно которому за наиболее вероятное значение измеряемой величины принимают среднее арифметическое из результатов, которые получены экспериментально. Точка зрения, которая им была высказана, состоит в следующем: при определении среднего арифметического все наблюдения входят в рассмотрение на одних и тех же правах, тогда как на самом деле малые уклонения вероятнее, чем большие. В связи с этим необходимо учитывать закон распределения ошибок наблюдения. В качестве плотности распределения Бернулли предложил полуокружность, радиус которой определяется каждый раз в результате наблюдений. В качестве наиболее вероятного значения измеряемой величины, согласно Бернулли, следует выбрать такое x, при котором выражение

$$\sqrt{r^2 - x^2} \prod_{k=1}^{n} \sqrt{r^2 - (x - a_k)^2}$$

($a_1, a_2, \ldots$ — результаты измерений) достигает максимума. Определение по этому правилу значения измеряемой величины приводит в случае n наблюдений к решению уравнения степени $2n - 1$. Среднее арифметическое получается только при $n = 2$.

В работе № 10 Эйлер, приняв гипотезу Бернулли о плотности распределения, предложил иной процесс разыскания наиболее вероятного значения измеряемой величины. Согласно этому процессу, ее определение приводило к необходимости решать уравнение третьей степени. Во многих случаях задачу можно свести даже к уравнению второй степени. Далее Эйлер указал процесс определения искомого значения посредством применения непрерывных дробей.

В своих рассуждениях Д. Бернулли исходил из пяти предположений, состоящих в следующем:

1) уклонения от истинного значения в ту и другую сторону одинаково возможны и плотность распределения вероятностей симметрична относительно среднего;

2) максимум плотности вероятности достигается в истинном значе-

нии измеряемой величины и касательная в этой точке параллельна оси абсцисс;

3) чаще и, следовательно, вероятнее встречаются малые уклонения;

4) плотность распределения отлична от нуля только в конечном интервале;

5) плотность распределения столь стремительно приближается к нулю, что в граничных точках отрезка, где она отлична от нуля, касательные к ней перпендикулярны оси абсцисс.

Эйлер принимает эти положения Бернулли, но он резко возражает против принципа, согласно которому истинное значение оценивается из условия

$$\sqrt{r^2-x^2}\prod_{(k)}\sqrt{r^2-(x-a_k)^2}=\min.$$

По словам Эйлера, этот принцип ничем не подтвержден, и все рассуждения, связанные с ним, представляют собой «некоторую метафизику», а к тому же приводят к столь сложным уравнениям, что их невозможно использовать на практике. Вместо этого принципа следует использовать иной, согласно которому истинное значение измеряемой величины оценивается посредством равенства

$$x=\frac{a\alpha+b\beta+\cdots}{a+b+\cdots},$$

в котором величины α, β,... представляют собой уклонения от истинно наблюденных значений, а a, b,...— веса этих уклонений.

Это равенство может быть переписано в такой форме

$$a(x-\alpha)+b(x-\beta)+\cdots=0.$$

В качестве весов предлагается взять величины

$$a=r^2-(x-\alpha)^2,\ b=r^2-(x-\beta)^2\ldots$$

Легко видеть, что уравнение для разыскания неизвестного в наших условиях приводится к следующему

$$nr^2x-nx^3-Ar^2+3Ax^2-3Bx+C=0,$$

где обозначено

$$A=a+b+\ldots,\ B=a^2+b^2+\ldots,\ C=a^3+b^3+\ldots$$

В § 10 Эйлер делает замечание такого рода: пусть нам известно среди наблюденных значений такое, которое следует отбросить, так как его вес должен считаться равным нулю. В этом случае можно полученное уравнение свести к квадратному. Действительно, пусть u есть это значение, тогда должно быть выполнено равенство

$$r^2-(x-u)^2=0$$

и, следовательно, уравнение может быть приведено к виду

$$2nux^2-nu^2x+3Bx+C=0,$$

или, что то же самое, к виду

$$x(nu^2-3B-2nux)+C=0.$$

Отсюда

$$x=\frac{-C}{nu^2-3B-2nux}$$

и, значит,

$$x=\cfrac{-C}{nu^2-3B+\cfrac{2nuC}{nu^2-3B+\cfrac{2nuC}{nu^2-3B+\ldots}}}$$

Работа № 11, как это следует из ее заголовка, была написана в связи с появившимся в печати большим мемуаром Лагранжа «Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités, et où l'on résout différents problèmes relatifs à cette matière» [9]. Статья Эйлера представлена Петербургской академии 27 ноября 1777 г., но была опубликована лишь через 11 лет.

Эйлер исходит из следующего предположения: при измерении некоторой величины могут быть совершены ошибки, принимающие значения 0, 1 и —1. Вероятность ошибки первого рода равна $\frac{a}{N}$, второго $\frac{b}{N}$ и третьего $\frac{c}{N}\left(\frac{a}{N}+\frac{b}{N}+\frac{c}{N}=1\right)$. Спрашивается, какие значения и с какими вероятностями может принимать среднее арифметическое результатов n независимых наблюдений. Нахождение соответствующих формул не представляет затруднений. Для $n=2$, $n=3$ и $n=4$ Эйлер сводит искомые вероятности и соответствующие им значения ошибок в таблицы. В конце мемуара делается замечание о распространении подобного подхода на случай, когда возможные значения ошибок наблюдения составляют арифметическую прогрессию.

Б. В. ГНЕДЕНКО

4. ОБЗОР РАБОТ ПО ДЕМОГРАФИИ

Демографические исследования, в зачаточной форме имевшиеся еще в древних Китае и Риме, начали принимать серьезный научный характер во второй половине XVII в. после известных работ Джона Граунта (1662) и Вильяма Петти (1662, 1672, 1682, 1690). Составленная Граунтом таблица смертности, несмотря на все ее недостатки, вызвала многочисленные подражания. На первом месте здесь следует указать замечательные исследования известного астронома Эдмунда Галлея (1693). Весь XVIII век прошел под знаком повышенного интереса к вопросам движения населения: рождаемости, смертности, средней продолжительности жизни, исчислению срока удвоения населения и пр. Естественно, что Эйлер, проявляя живой интерес ко всему, что волновало ученых его эпохи, не мог пройти мимо проблем демографии. В результате мы имеем две его работы (№ 12 и 13), посвященные указанным задачам. Одна из них была напечатана при жизни автора, другая же увидела свет лишь в 1923 г. при выходе VII тома собрания его сочинений. Считается установленным, что последняя статья, помещенная в нашем списке под № 13, представляет собой развернутую математическую обработку восьмой главы известной книги Зюссмильха [10]. К тому же второе издание книги Зюссмильха было переработано при самом деятельном участии Эйлера. Наконец, в шестой главе известной книги «Введение в анализ бесконечно малых» имеются четыре примера демографического характера (стр. 108—111 русского издания).

Поскольку «Введение в анализ бесконечно малых» является первой по времени публикацией, в которой Эйлер касается демографических задач, мы остановимся на этих задачах в первую очередь, приведя их формулировки.

1. Число жителей некоторой области увеличивается ежегодно на $^1/_{30}$ свою часть; вначале область населяли 100 000 человек; спрашивается: каково будет число жителей через 100 лет?

2. После потопа род человеческий размножился от шести человек; положим, что 200 лет спустя число людей возросло до 1 000 000; требуется узнать, на какую свою часть число людей должно было увеличиваться ежегодно.

3. Пусть к концу каждого века число людей удваивается; требуется найти годовой прирост.

4. Пусть число людей увеличивается ежегодно на $^1/_{100}$ свою часть; спрашивается, через сколько лет число людей удесятерится?

Решение всех этих задач, естественно, осуществлялось с помощью формулы сложных процентов. Тщательные и подробные вычисления, произведенные Эйлером, привели его к таким ответам: 1) 2 654 874; 2) $^1/_{16}$ (второй пример заканчивается примечанием: если бы рост числа людей продолжал идти далее в таком же отношении в течение промежутка в 400 лет, то число людей должно было бы дойти до $1\,000\,000\cdot\frac{1\,000\,000}{6} = 166\,666\,666\,666$; для прокормления такого числа нехватило бы всей земли); 3) $^1/_{144}$; 4) 231.

Конечно, сведения, даваемые этими примерами, носят чисто формальный характер и совершенно не учитывают реальные демографические факторы. Однако эти примеры показывают, что уже к 1748 г. Эйлер интересовался вопросами, относящимися к закономерностям демографического характера.

Мемуар № 12 начинается словами о том, что в последние годы во многих городах публикуются сведения о ежегодных рождениях и смертях и что эти сведения весьма различны для разных местностей. Это последнее обстоятельство принуждает автора ограничиться трактовкой общих вопросов смертности и умножения человеческого рода.

Пусть N обозначает число лиц, родившихся одновременно. Через год остается в живых $(1)\,N$, через два года — $(2)\,N$; вообще через k лет остается в живых $(k)N$. Таким образом,

от 0 лет до 1 года умрет $N - (1)\,N$,
» 1 года » 2 лет » $(1)\,N - (2)\,N$,
» 2 лет » 3 » » $(2)\,N - (3)\,N$ и т. д.

Эта первичная идея Эйлера о выживании и вымирании и в настоящее время играет центральную роль в демографии. В последующих вопросах и ответах излагалось решение существенных моментов теории. Всего таких вопросов имеется шесть. Мы приведем их, чтобы составить лучшее представление о содержании работы.

1. Пользуясь приведенной таблицей, найти число лиц, которые проживут еще n лет из данной группы в M лиц, каждое из которых имеет m лет. После несложных рассуждений найдено, что искомое число равно $\frac{(m+n)}{(m)} = M$.

2. Найти вероятность того, что лицо возраста m лет проживет еще n лет. Ответ: искомая вероятность равна $\frac{(m+n)}{(m)}$; вероятность умереть в течение указанного срока равна $1 - \frac{(m+n)}{(m)}$.

3. Найти вероятность лицу, имеющему возраст m лет, умереть в возрасте от n до $n+1$ лет. Искомая вероятность равна $\frac{(n)-(n+1)}{(m)}$.

4. Для человека возраста m лет найти такое число лет, что вероятность прожить их равна вероятности умереть в течение того же срока. Искомое число z находится из равенства $\frac{(m+z)}{(m)} = 1/2$. Число $(m+z)-(m)$ Эйлер предлагает называть жизненной силой лица возраста m лет.

5. M лиц возраста m лет внесли по сумме a по 5% годовых. Какую сумму нужно выдавать ежегодно каждому до его смерти?

Ответ:

$$x = \frac{(m)\,a}{\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \cdots},$$

где

$$\lambda = \frac{21}{20}.$$

6. В день рождения ребенка положен капитал a, который должен давать ежегодный доход этому ребенку после достижения им n лет до смерти. Определить сумму, которая должна выплачиваться ребенку после достижения им n лет, если капитал был положен по 5%.

Ответ:

$$x = \frac{a}{\frac{(n)}{\lambda^n} + \frac{(n+1)}{\lambda^{n+1}} + \frac{(n+2)}{\lambda^{n+2}} + \cdots}.$$

Таблица чисел (1), (2), (3)..., заимствованная из работы Вилэма Керсебума [11], доведена до (95). Согласно этой таблице, (1) = 0,804; (2) = 0,768; (30) = 0,507; (40) = 0,400 и т. д.

Вторая часть работы Эйлера посвящена исследованию «умножения человеческого рода». Эта часть работы также построена в форме вопросов и ответов. Нужно сказать, что если в первой части дается достаточно завершенная система повозрастной смертности, то во второй части исходные предпосылки слишком сильно упрощены по сравнению с реальной картиной. Например, Эйлер считает, что коэффициент рождаемости независим от возрастного состава. Конечно, это обусловлено тем, что в ту пору еще не было систематических переписей, которые позволили бы Эйлеру правильно оценить влияние возраста на плодовитость.

Мемуар № 13 частично написан по-французски, частично по-латински. В нем рассматривается в основном вопрос об удвоении населения, при некоторых гипотезах о смертности и рождаемости. Эти гипотезы значительно упрощают истинную картину, как мы сейчас в этом убедимся, приведя предположения Эйлера.

Исходная схема рассуждений Эйлера такова: все лица доживают до 50 лет, после чего наступает смерть; все браки заключаются в 20 лет и приносят до 6 детей (по три девочки и три мальчика), рождения которых наступают, когда родителям исполняются 22, 24 и 26 лет.

В указанных условиях легко составить таблицу числа рождений через двухлетние промежутки для потомства данной пары, начиная с момента, когда этой паре исполняется по 22 года. Вот последовательно выписанные эти числа:

2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 4, 6, 4, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 6, 12, 14, 12, 6, 2, 0, 0, 0, 0, 2, 8, 20, 32, 38, 32, 20, 8, 2, 0, 0, 2, 10, 30, 60, 90, 102, 90, 60, 30, 10, 2, 2, 12, 42, 100, 180, 252, 282, 252, 180, 100, 42, 14,...

Эйлер заметил, что члены этой последовательности являются коэффициентами разложения по степеням аргумента x некоторой производящей функции. Для указанного примера производящая функция Эйлером не была указана и была найдена спустя почти 160 лет после того, как Эйлер сделал указанные наброски, немецким математиком Е. Гумбелем [12].

Эта производящая функция равна

$$\frac{2}{1-x^{11}-x^{12}-x^{13}}\cdot$$

Доказано, что приведенная нами выше последовательность приближается к геометрической прогрессии, знаменатель которой есть наибольший по модулю положительный корень уравнения

$$1-x^{11}-x^{12}-x^{13}=0,$$

равный по величине 1,0961.

Аналогичные расчеты для других предположений о рождаемости были проделаны самим Эйлером.

Нам остается сказать о демографических работах Эйлера лишь несколько слов, в которых мы постараемся оценить его как демографа. По тем кратким замечаниям, которые были нами сделаны, можно заключить, что Эйлер ограничился только рассмотрением нескольких формальных расчетов, далеких от действительности, а также сделал существенные замечания, касающиеся смертности. Однако такое представление будет на самом деле неправильным, так как Эйлер формальным схемам придавал лишь ограниченное значение наводящих примеров. Он считал своей обязанностью предупредить, что многочисленные таблицы смертности не носят универсального характера, а применимы лишь к тем областям, для которых они составлены. Он обращал внимание на то, что эти таблицы перестают отражать истинное положение дел в случае голода, эпидемий, войн. Он говорил, что таблица смертности, составленная Керсебумом, не отражает истинного положения дел, так как смертность для мужчин и для женщин различна и поэтому пользование общей таблицей смертности может привести к значительным ошибкам.

Существенно отметить, что Эйлер превосходно разбирался в особенностях детской смертности и в его работах имеются очень глубокие замечания, которые полезно учитывать и современным ученым. Для примера он отмечает, что таблица смертности, построенная по наблюдениям над лицами, получающими ренту, не отражает истинной картины смертности. Это особенно важно принимать во внимание при изучении детской смертности, чтобы не работать над цифрами для специально отобранных групп детей и тем самым не вносить искажений в вопросы изучения всего детского населения. Эти существенные общие демографические замечания рассыпаны по всей работе № 12, а также в других его работах, в том числе и в тех из них, которые посвящены страхованию.

5. ОБЗОР РАБОТ ПО ТЕОРИИ СТРАХОВАНИЯ

Известно, что прусский король Фридрих II неоднократно обращался к Эйлеру с просьбами произвести экспертизы по устройству пенсионных касс и по обеспечению лиц, уходящих в отставку [13]. В результате этих экспертиз Эйлер пришел к определенным точкам зрения и к постановке ряда задач относительно пожизненных рент и вдовьих касс. С двумя такими задачами мы познакомились в предыдущем разделе при реферировании работы № 12 нашего списка. В том же 1760 г. была сдана в Берлинскую академию и напечатана вслед за работой № 12 статья, помещенная нами под № 14.

Расчет пожизненных рент, по мнению Эйлера, должен базироваться на таблицах смертности и на способе использования средств, полученных от рантье. При этом необходимо учитывать, что коэффициент смертности для рантье может быть иным, чем для страны в целом.

В работе № 14 приведено подробное решение задач 5 и 6 статьи № 12 и эти решения снабжены подробными таблицами. Эти таблицы позволяют рассчитать, сколько нужно заплатить за ренту на дожитие, если желательно после определенного возраста получать ежегодно заданную сумму.

Работа № 15 считается одной из самых выдающихся исследований Эйлера по теории страхования. Задача ставится так: мужу n лет, жене m лет, когда они вносят в кассу сумму a; затем, пока они живы оба, они вносят ежегодно сумму b. Спрашивается, какую пенсию может получать супруга после смерти мужа?

Обозначим через p искомую пенсию, а через λ — величину, введенную в предыдущем разделе. Пусть

$$N = \frac{1}{(n)}\left(\frac{(n+1)}{\lambda} + \frac{(n+2)}{\lambda^2} + \frac{(n+3)}{\lambda^3} + \cdots\right)$$

и

$$M = \frac{1}{(n)\,(m)}\left(\frac{(n+1)(m+1)}{\lambda} + \frac{(n+2)\,(m+2)}{\lambda^2} + \cdots\right),$$

тогда числа a, b и p связаны уравнением

$$a + M\,(p + b) - Np = 0.$$

Очевидно, что это уравнение дает возможность решать разнообразные вопросы, связанные с определением ренты по данным выплатам или размеров выплат по данной ренте.

Большой мемуар № 16, опубликованный Петербургской академией отдельным изданием, был снабжен таблицами, вычисленными Николаем Фусом под руководством Эйлера, а также таблицей Керсебума, воспроизведенной ранее в работе № 14. Шесть лет спустя эта книга была переведена на немецкий в Гёттингене Криттером—крупным специалистом в области теории и практики страхования. Интересующий нас сейчас мемуар состоит из трех частей, внутренне между собой не связанных. Единственное, что объединяет все части книги — это то, что они посвящены вопросам страхования и помещены в одной книге.

Первая часть под наименованием «Общественное учреждение для выплаты пенсий вдовам, основанное на наиболее солидных принципах теории вероятностей» в основных чертах посвящена изложению результатов только что изложенной работы № 15. В других обозначениях выведено основное уравнение мемуара № 15. Все изложение снабжено хорошо составленными таблицами, весьма удобными и простыми при пользовании. Во вступительной статье к VII тому собрания сочинений Эйлера редактор тома Паскье упомянул, что еще в двадцатых годах страховые компании

Берна использовали в своей практической работе первые две части этого самого большого труда Эйлера по теории страхования.

Во второй части работы «Об учреждении касс на случай смерти» говорится об организации особого братства, состоящего из 550 членов, каждый из которых вносит 2 рубля в случае смерти одного из сочленов, чтобы 1000 рублей выдать семье покойного, а остальные использовать на организацию похорон. Умерший сочлен заменяется новым. Эйлер приводит некоторые элементарные соображения и подсчеты, связанные с такого рода организацией. Кроме того, он дает решение следующей задачи: в кассу вступает некое лицо возраста a и желает, чтобы после его смерти родные получили определенную сумму p. Требуется определить, каков должен быть взнос (единовременный или ежегодный) вступающего, чтобы не были ущемлены ничьи интересы. Процент, который можно получить на капитал, отдаваемый в рост, известен. В конце главы приведена таблица, в которой для каждого возраста определен размер взноса (единовременного и ежегодного) на предмет получения права оставить родным сумму в сто рублей. Возраст в таблице указан через каждые 5 лет, от 0 до 90.

Третья часть озаглавлена «План нового вида тонтины»[2]. В ней Эйлер предлагает новый вид тонтины, в которой предусмотрен приток новых членов. Идея этой тонтины развита в общих рассуждениях и снабжена двумя обширными таблицами, в которых дан расчет взноса каждого, кто желает принять участие в тонтине, в зависимости от его возраста. К мысли о подобной тонтине Эйлер возвращался неоднократно. В частности, она изложена в работе № 18, впервые увидевшей свет только при появлении VII тома его сочинений. Отдельные замечания, не приведенные в окончательную систему, были написаны Эйлером на разрозненных листках. Эти листки хранились у известного историка математики Д. Е. Смита, проживавшего в Нью-Йорке.

Мемуар, помещенный нами в нашем списке под № 17, посвящен решению следующей задачи: сколько должны внести в кассу супруги, чтобы после их смерти наследники имели право на получение определенной суммы. Этот мемуар представлен Петербургской академии 10 июня 1776 г., но был напечатан только через 9 лет. Задача ставится так: мужу a лет, жене b лет. Требуется определить безобидную цену за право оставить

[2] Сущность тонтины, получившей широкое развитие в XVII в. и первой половине XVIII в., состоит в следующем: группа лиц вносила определенную сумму государству, которое обязывалось выплачивать проценты и основной капитал, пока живы члены товарищества. Со смертью каждого члена остальные получали повышенную ренту. После смерти всех участников государство освобождалось от обязательств.

детям после смерти 1000 рублей, если средний процент, по которому можно поместить деньги, равен 5. Величины λ, (a) и (b) сохраняют ранее приданное им значение. Обозначим

$$P = \frac{(a+1)}{\lambda} + \frac{(a+2)}{\lambda^2} + \cdots\cdots + \frac{(95)}{\lambda^{95-a}},$$

$$Q = \frac{(b+1)}{\lambda} + \frac{(b+2)}{\lambda^2} + \cdots\cdots + \frac{(95)}{\lambda^{95-b}},$$

$$R = \frac{(a+1)(b+1)}{\lambda} + \frac{(a+2)(b+2)}{\lambda^2} + \cdots$$

Эйлер предполагает, что люди живут не более 95 лет и поэтому ограничивает суммы слагаемыми $\frac{95}{\lambda^{95-a}}$ и $\frac{95}{\lambda^{95-b}}$. Предполагается, что имеется много таких пар и каждая из них выплачивает единовременно x рублей и ежегодно z рублей. Названные величины связаны между собой уравнением

$$x + z\left(\frac{P}{(a)} + \frac{Q}{(b)} - \frac{R}{(a)(b)}\right) = 1000\left(1 + \frac{(1-\lambda)P}{(a)} + \frac{(1-\lambda)Q}{(b)} + \frac{(\lambda-1)R}{(a)(b)}\right).$$

Отсюда при $z = 0$

$$x = 1000 - 50\left(\frac{P}{(a)} + \frac{Q}{(b)} - \frac{R}{(a)(b)}\right);$$

при $x = z$

$$z = \frac{1000 - 50\left(\frac{P}{(a)} + \frac{Q}{(b)} - \frac{R}{(a)(b)}\right)}{1 + \frac{P}{(a)} + \frac{Q}{(b)} - \frac{R}{(a)(b)}},$$

Исследования Эйлера по страхованию составили важный этап в развитии научных методов этой области знания. Основные идеи его сохранили в значительной мере свое значение и до сих пор. В этих исследованиях Эйлер вновь продемонстрировал свое исключительное умение анализировать и проникать в существо вещей.

К оценке творчества Эйлера в рассмотренных нами направлениях мы должны подходить не только с позиций нашего времени, но в первую очередь с позиций его эпохи. Такой подход сразу покажет, что Эйлер брался за решение жизненно важных задач и доводил их решение до непосредственного практического применения. Его рассуждения столь просты, что не требуют специальных математических знаний; составленные им таблицы настолько удачны, что могут быть использованы любым грамотным человеком. В то же время все его работы содержат глубокое проникновение в существо рассматриваемых задач и простой, естественный подход к их решению.

Литература

1. Leonhardi Euleri Opera omnia, series prima, v. VII. Commentationes algebraicae ad theoriam combinationum et probabilitatum, Lipsiae et Berolini, 1923
2. К. Р. Бирман, Задачи генуэзского лото в работах классиков теории вероятностей, Ист.-мат. иссл., т. X, 1957, 649—670
3. Observationes analyticae variae de combinationibus, Comment. Acad. sc. Petropol. 13. (1741/3), 1751, p. 64; De partitione numerorum, Novi comment. Acad. sc. Petrop. 3 (1750/1) 1753, стр. 125; De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas, Novi comment. Acad. sc. Petrop. 14 (1769); 1, 1770, стр. 168. Leonhardi Euleri Opera omnia, series 1, vol. 2, стр. 163, 254; vol. 3, стр. 131
4. De fractionibus continuis, Comment. Acad. sc. Petrop. 9, 1744, 98—137; Leonhardi Euleri Opera omnia, vol. 15
5. Extraits de différentes lettres de M. Euler à M. Condorcet, Mém. de l'Acad. sc. de Paris (1778), 1781, 603—614
6. R. Cotes, Aestimatio errorum in mixta mathesi, Cambridge, 1722
7. Th. Simpson, On some Curious and Very Interesting Subjects in Mechanics, Physical Astronomy and Speculative Mathematics, London, 1757
8. D. Bernoulli, Diludicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda, Acta Ac. sc. Petrop. (1777: 1), 1778, 3—23
9. Mélanges de philosophie et de mathématiques de la soc. royale de Turin 5, 1770—1773. 167—232; Oeuvres de Lagrange, t. 2, 171—234, Paris, 1868
10. Jog. Pet. Süßmilch, Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen, Berlin, 1761—1762
11. Willem Kersseboom, Eerste verhandeling tot een proeve om te weeten de probable meenigte des volks in de provintien van Hollandt en West-Vrieslandt etc., 1738; Tweede verhandeling, bevestigende de proeve om te weeten de probable meenigte des volks, etc. 1742; Derde verhandeling over de probable meenigte des volks, etc., 1742
12. E. I. Gumbel, Eine Darstellung statistischer Reihen durch Euler, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 25, H. 7—9, Leipzig, 1916, стр. 251—264
13. G. Valentin, Leonhard Euler in Berlin. Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers, herausgegeben vom Vorstande der Berliner mathem. Gesellschaft; Leipzig und Berlin, 1907, стр. 15

B. W. GNEDENKO

ÜBER DIE ARBEITEN L. EULERS ZUR WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE, ZUR THEORIE DER AUSWERTUNG VON BEOBACHTUNGEN, ZUR DEMOGRAPHIE UND ZUM VERSICHERUNGSWESEN

(Zusammenfassung)

Das überaus reiche wissenschaftliche Erbe L. Eulers, das er buchstäblich auf allen Gebieten der Mathematik und Mechanik hinterlassen hat, berührt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur spezielle Aufgaben, die sich vorzugsweise auf die Berechnung von Lotterien und Glücksspielen beziehen Ein bedeutender Teil seiner Forschungen in dieser Richtung wurde durch die Bedürfnisse des preußischen Königs Friedrichs II. wachgerufen.

Zwei den Fragen der Auswertung von Beobachtungsergebnissen gewidmete Arbeiten sind durch die von Euler vorgeschlagene geistreiche Rechenidee sehr interessant, aber dennoch weit entfernt von der entwickelten Theorie, die Legendre und Gauß 30 Jahre darauf vorgeschlagen haben.

Man staunt über die Tiefe und Genauigkeit der Analyse Eulerscher Arbeiten zur Demographie. Die von ihm eingeführten Begriffe und Verfahren der Analysis haben ihre Bedeutung auch für die moderne Wissenschaft in bedeutendem Maß erhalten. Einige seiner kritischen Bemerkungen zu den damals zusammengestellten Sterblichkeitstafeln haben einen bedeutenden Einfluß auf die Entwicklung der Demographie ausgeübt.

Eulers demographische Arbeiten haben naturgemäß in seinen Untersuchungen über die Versicherungstheorie, Witwenrenten u. a. m. einen weiten Anwendungsbereich gefunden. Man muß anerkennen, daß alle diese Untersuchungen lange Zeit als Muster für weitere Forschungen dienten und bis zu einem gewissen Maß ihre Bedeutung bis jetzt beibehalten haben.

Die Übersicht ist zusammengestellt auf Grund der Arbeiten, die im VII Band der gesammelten Werke L. Eulers veröffentlicht sind, der Beschreibungen des Inhalts von Eulers Notizbüchern, die in der Übersicht De Pasquiers gegeben wurden (diese befindet sich im selben VII Band), des bekannten Buches «Introductio in analysin infinitorum» und einer Reihe von Arbeiten von Verfassern des 19. und 20. Jh.

14 Зак. № 988

Л. Н. СРЕТЕНСКИЙ

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА В РАБОТАХ ЭЙЛЕРА[1]

Вопросами динамики твердого тела Эйлер начал заниматься в самом начале своей научной деятельности, но основные результаты в этой области механики, которые резюмируются знаменитыми «уравнениями Эйлера движения твердого тела вокруг неподвижной точки», были им получены лишь в берлинский период его жизни. Эти результаты изложены Эйлером в ряде статей, опубликованных им в Mémoires de l'Académie de Berlin в период с 1749 по 1760 г. В этих статьях изложены вопросы кинематики твердого тела, дана полная теория моментов инерции, составлены общие уравнения движения твердого тела, дан разбор случая полной интегрируемости этих уравнений и развиты приложения полученных результатов динамики твердого тела к знаменитой задаче Астрономии о предварении равноденствий.

В настоящей статье я имею в виду кратко изложить содержание эйлеровской теории движения твердого тела, как она представлена в упомянутых статьях, появившихся в записках Берлинской академии наук:

1. «Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre» (1749, t. V, 289—325).

2. «Découverte d'un nouveau principe de Mécanique» (1750, t. VI, 185—217).

3. «Recherches sur la connaissance mécanique des corps» (1758, t. XIV, 131—153).

4. «Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable» (Ibid., 154—193).

5. «Remarques générales sur le mouvement diurne des planètes» (Ibid., 194—218).

6. «Recherches sur le mouvement de rotation des corps célestes» (1759, t. XV, 265—309).

---

[1] Доклад, прочитанный на Юбилейной научной сессии Отделения физико-математических наук и Отделения технических наук АН СССР в Ленинграде 18 апреля 1957 г.

7. «Du mouvement d'un corps solide quelconque, lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile» (1760, t. XVI, 176—227).

* * *

§ 1. Для построения динамики твердого тела Эйлер должен был обратиться к исследованию ряда вспомогательных вопросов, которые в настоящее время в развитом виде составляют содержание кинематики твердого тела. Все основные положения этой главы механики, с выводом главных формул, содержатся уже в рассматриваемых нами трудах Эйлера.

В основе кинематики твердого тела лежат известные формулы, определяющие компоненты скоростей точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки,

$$V_x = qz - ry, \qquad V_y = rx - pz, \qquad V_z = py - qx. \tag{1}$$

Эти формулы были установлены в 1750 г. Эйлером в мемуаре «Découverte d'un nouveau principe de Mécanique».

Прием, которым Эйлер находит свои формулы (1), редко излагается в настоящее время в курсах механики, но он весьма примечателен, так как основан на первоначальном определении твердого тела, как неизменного образования своих частиц и, кроме того, в идее этого приема лежит понятие об интегральном инварианте. Эйлер задается вопросом: какие функции $L(x, y, z, t)\,dt$, $M(x, y, z, t)\,dt$, $N(x, y, z, t)\,dt$ могут определять бесконечно малые приращения координат точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки? Иными словами, надо найти такие дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = L(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = M(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = N(x, y, z, t),$$

которые обладали бы интегральным инвариантом

$$\int \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}.$$

Это требование приводит к следующему дифференциальному соотношению:

$$\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2} = \\ = \sqrt{(\delta x + L dt)^2 + (\delta y + M dt)^2 + (\delta z + N dt)^2},$$

которое должно удовлетворяться тождественно при всех δx, δy, δz. Из этого требования вытекает, что искомые функции L, M, N необходимо должны иметь вид

$$L = qz - ry, \qquad M = rx - pz, \qquad N = py - qx,$$

где p, q, r могут быть любыми функциями времени. Но так как, очевидно, L, M, N суть не что иное, как компоненты скорости точки (x, y, z) твердого тела при его вращении вокруг неподвижного начала, то мы и получаем известные формулы кинематики твердого тела (1).

Найдя эти формулы, Эйлер указывает, что при всяком вращении твердого тела вокруг неподвижной точки существует такая прямая, проходящая через эту точку, скорости всех точек которой равны нулю в данный момент времени; это есть ось мгновенного вращения твердого тела; она характеризуется угловыми коэффициентами p, q, r и угловой скоростью $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ обращения тела вокруг нее.

Формулы (1) определяют компоненты скорости точек вращающегося тела в данный момент времени, и поэтому мы можем считать, что эти компоненты по желанию берутся либо на неподвижные оси координат, либо на оси, движущиеся вместе с телом. В настоящее время в громадном большинстве случаев скорости точек твердого тела относят к движущимся осям; но в первоначальных работах Эйлера по динамике твердого тела еще не было идеи рассматривать движение твердого тела путем систематического применения осей, неизменно связанных с твердым телом.

Будем считать, что формулы (1) относятся к неподвижным осям. В силу этого мы можем написать следующие уравнения, определяющие компоненты скорости точек твердого тела через координаты этих точек и через угловые скорости тела относительно осей координат:

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry, \quad \frac{dy}{dt} = rx - pz, \quad \frac{dz}{dt} = py - qx. \tag{2}$$

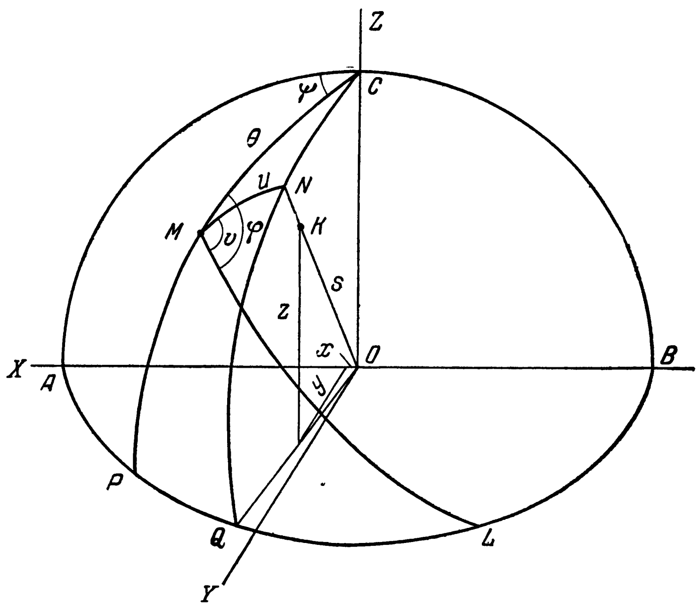
Пользуясь этими формулами, Эйлер в целях дальнейшего построения динамики твердого тела находит выражения для компонент ускорения точки твердого тела и для моментов этих ускорений. Дифференцируя формулы (2), имеем

$$\begin{gathered} y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = (y^2 + z^2)\frac{dp}{dt} - xy\,\frac{dq}{dt} - xz\,\frac{dr}{dt} + prxy - pqxz + \\ + rqy^2 - rqz^2 + (r^2 - q^2)\,yz, \qquad (3) \\ z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = \cdots; \quad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2y}{dt^2} = \cdots \end{gathered}$$

§ 2. Для определения положения твердого тела в пространстве Эйлер применял два способа: с одной стороны, он пользовался тремя углами (углы Эйлера), определяющими положение трехгранника, связанного с твердым телом, по отношению к некоторым неподвижным геометрическим объектам; с другой стороны, он пользовался также и более симметричным способом, задавая углы, которые оси неподвижного трехгранника образуют с некоторой неподвижной прямой пространства.

Войдем здесь в некоторые подробности.

Во всех своих исследованиях по динамике твердого тела Эйлер широко пользовался методами и соотношениями сферической тригонометрии, сводя изучаемую задачу о соотношениях между различными углами пространственной фигуры к решению сферических треугольников, образуемых на сфере единичного радиуса пересечениями плоскостей и различных прямых с этой сферой. Как говорит сам Эйлер, таким путем устраняется необходимость изучения сложных пространственных чертежей.



Фиг. 1

Возьмем твердое тело, вращающееся вокруг неподвижного начала O системы координат XYZ (фиг. 1). Выразим координаты какой-нибудь точки x, y, z этого тела через ее расстояние s до точки O и через некоторые угловые координаты, которые мы введем следующим образом. Проведем сферу единичного радиуса с центром в точке O и рассмотрим два больших круга ACB и AQB, получающихся в сечении этой сферы соответственно с плоскостями координат $y = 0$ и $z = 0$. Рассмотрим далее точку пересечения M сферы с некоторой прямой линией OM, неизменно связанной с вращающимся телом. Положение этой точки на сфере, а следовательно, и прямой OM в пространстве, может быть определено углом $\psi = ACM$ и дугой $\theta = CM$. Чтобы определить полностью и положение тела в пространстве, надо еще задать угол $\varphi = CML$, который образуется на сфере между дугой CM и дугой большого круга ML, по которому сфера пересекается какой-нибудь заранее выбранной плоскостью, проходящей через линию OM и неизменно связанной с телом. Так как плоскость OML неизменно связана с телом, то положение произвольной точки K тела может быть определено углом $v = NML$, дугой $u = MN$ и расстоянием $s = OK$.

Поставленная задача об определении координат x, y, z через величины ψ, θ, φ; u, v, s может быть решена с помощью формул сферической тригонометрии. Из фиг. 1 мы видим, что

$$\begin{aligned} x &= s \cdot \sin CN \cdot \cos(\psi + MCN), \\ y &= s \cdot \sin CN \cdot \sin(\psi + MCN), \\ z &= s \cdot \cos CN. \end{aligned} \tag{4}$$

Применяя теорему синусов к сферическому треугольнику CMN, получаем

$$\sin CN \cdot \sin MCN = \sin u \cdot \sin(\varphi - v);$$

пользуясь теоремой косинусов

$$\cos CN = \cos u \cos\theta + \sin u \sin\theta \cos(\varphi - v),$$

имеем далее

$$\sin CN \cdot \cos MCN = \cos u \sin\psi - \sin u \cos\psi \cos(\varphi - v). \tag{5}$$

Эти формулы приводят нас на основании соотношений (4) к следующим выражениям координат точки K:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{s} &= \cos u \sin\theta \cos\psi - \sin u \cos\psi \cos\theta \cos(\varphi - v) - \sin u \sin\psi \sin(\varphi - v), \\ \frac{y}{s} &= \cos u \sin\theta \sin\psi - \sin u \sin\psi \cos\theta \cos(\varphi - v) + \sin u \cos\psi \sin(\varphi - v), \\ \frac{z}{s} &= \cos u \cos\theta + \sin u \sin\theta \cos(\varphi - v). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Эти формулы положены Эйлером в основу построения динамики твердого тела и решения разнообразных вопросов, связанных с теорией движения Земли.

В формулах (6) u, v, s суть величины, не изменяющиеся со временем, но для каждой точки твердого тела — свои; что же касается ψ, θ, φ, то эти величины меняются с течением времени по закону, характеризующему движение твердого тела. Углы ψ, θ, φ в динамике твердого тела называются углами Эйлера: ψ — угол прецессии, θ — угол нутации, φ — угол собственного вращения твердого тела.

Пользуясь формулами (6), Эйлер прежде всего получает уравнения мгновенной оси вращения твердого тела. Соображения, с помощью которых он устанавливает эти уравнения, весьма характерны для всех рассмотрений Эйлера, связанных с динамикой твердого тела; поэтому приведем их.

Эйлер, прежде всего, делает такое замечание; если линия ON есть ось мгновенного вращения, то дифференциал дуги CN, а равно и дифференциал угла ACN должны быть равны нулю

$$dCN = 0, \quad d(\psi + MCN) = 0.$$

Дифференцируя обе части формулы косинусов

$$\cos CN = \cos u \cos\theta + \sin u \sin\theta \cos(\varphi - v), \tag{7}$$

имеем

$$[\cos u \sin\theta - \sin u \cos\theta \cos(\varphi - v)]\, d\theta = -\sin u \sin\theta \sin(\varphi - v)\, d\varphi. \tag{8}$$

Дифференцируя же обе части формулы

$$\sin CN \cdot \sin MCN = \sin(\varphi - v) \sin u, \tag{9}$$

находим

$$[\cos u \sin\theta - \sin u \cos\theta \cos(\varphi - v)]\, d\psi = -\sin u \cos(\varphi - v)\, d\varphi. \tag{10}$$

Из равенств (8) и (10) получаем

$$\frac{\sin\theta \sin(\varphi - v)}{d\theta} = \frac{\cos(\varphi - v)}{d\psi}.$$

Отсюда имеем

$$\sin(\varphi - v) = \frac{d\theta}{\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2}}; \quad \cos(\varphi - v = \frac{\sin\theta d\psi}{\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2}}.$$

Подставляя эти значения $\sin(\varphi - v)$ и $\cos(\varphi - v)$ в формулу (10), находим

$$\operatorname{tg} u = \frac{\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2}}{\cos\theta d\psi - d\varphi},$$

откуда

$$\sin u = \frac{\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2}}{\sqrt{d\psi^2 + d\theta^2 + d\varphi^2 - 2\cos\theta d\psi d\varphi}}; \quad \cos u = \frac{\cos\theta d\psi - d\varphi}{\sqrt{d\psi^2 + d\theta^2 + d\varphi^2 - 2\cos\theta d\psi d\varphi}}.$$

Теперь формула (7) дает следующий результат:

$$\cos CN = \frac{d\varphi - \cos\theta d\psi}{\sqrt{d\psi^2 + d\theta^2 + d\varphi^2 - 2\cos\theta d\psi d\varphi}},$$

$$\sin CN = \frac{\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2}}{\sqrt{d\psi^2 + d\theta^2 + d\varphi^2 - 2\cos\theta d\psi d\varphi}}.$$

Пользуясь формулами (5) и (9), можно затем найти $\sin ACN$ и $\cos ACN$.

Применяя найденные формулы, можно написать теперь уравнение мгновенной оси вращения в виде

$$\frac{x}{s} = -\frac{\sin\psi(d\theta + \cos\theta d\varphi)}{\sqrt{d\psi^2 + d\theta^2 + d\varphi^2 - 2\cos\theta d\psi d\varphi}},$$

$$\frac{y}{s} = \frac{\cos\psi d\theta - \sin\psi \sin\theta d\varphi}{\sqrt{d\psi^2 + d\theta^2 + d\varphi^2 - 2\cos\theta d\psi d\varphi}},$$

$$\frac{z}{s} = \frac{d\psi - \cos\theta d\varphi}{\sqrt{d\psi^2 + d\theta^2 + d\varphi^2 - 2\cos\theta d\psi d\varphi}}.$$

Из совокупности полученных формул можно вывести различные следствия. Прежде всего, можно найти угловую скорость ω вращения твердого тела; заметим для этого, что за промежуток времени dt точка M, связанная с твердым телом и отстоящая от оси мгновенного вращения на расстояние $\sin u$, описывает дугу сферической кривой длины $\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2}$; отсюда имеем

$$\omega = \frac{\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2}}{\sin u dt} = \sqrt{\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - 2\cos\theta \frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}}.$$

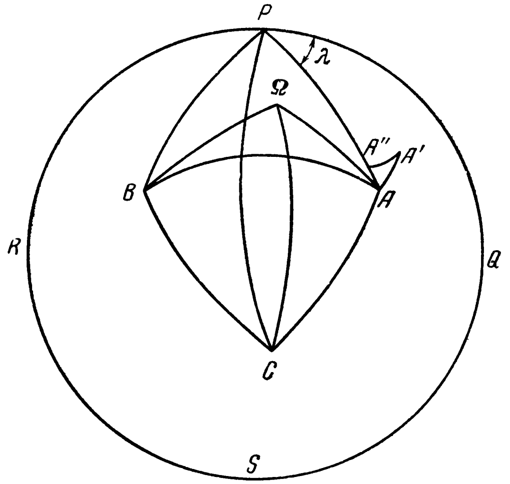
Затем, если через p, q, r мы обозначим проекции мгновенной угловой скорости на оси координат (неподвижные), то будем иметь

$$\begin{aligned} p &= -\sin\psi\left(\frac{d\theta}{dt} + \cos\theta\frac{d\varphi}{dt}\right), \\ q &= \cos\psi\frac{d\theta}{dt} - \sin\psi\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}, \\ r &= \frac{d\psi}{dt} - \cos\theta\frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \tag{11}$$

Если в каждый момент времени будут известны p, q, r, то, интегрируя эти уравнения, получим значения углов ψ, θ, φ и, тем самым, определим положение тела в пространстве.

§ 3. При решении задач динамики твердого тела Эйлер пользуется и другим способом определения положения твердого тела в пространстве.

Проведем через неподвижную точку O некоторую вертикальную плоскость и рассмотрим пересечение этой плоскости со сферой единичного радиуса; тогда мы получим на сфере большой круг $PQSR$ (фиг. 2). Оси прямоугольного трехгранника, связанного с движущимся телом, будут пересекать сферу в точках A, B, C; назовем угловые расстояния точек A, B, C от точки P соответственно через l, m, n и обозначим углы, которые в точке P дуга PQ образует соответственно с дугами PA, PB, PC через λ, μ, ν. Если в каждый момент времени мы будем знать величины l, m, n и один из углов λ, μ, ν, то мы будем знать полностью и положение тела в пространстве[2].



Фиг. 2

Назовем через Ω ту точку, в которой ось мгновенного вращения пересекает сферу, и обозначим через α, β, γ соответственно дуги ΩA, ΩB, ΩC.

По истечении времени dt точка A переместится в точку A', описав дугу AA' длины $\omega \sin\alpha\, dt$. Отметим, что угол $\Omega AA'$ — прямой. При этом перемещении величины l и λ изменяются соответственно на dl и $d\lambda$, причем

$$dl = -AA'' = -\omega \sin\alpha \quad dt \cdot \sin \Omega AP,$$
$$d\lambda = -\frac{A'A''}{\sin l} = -\frac{\sin\alpha}{\sin l}\omega dt \cdot \cos \Omega AP. \tag{12}$$

Отметим, что A'' есть подошва сферического перпендикуляра, опущенного из точки A' на дугу AP.

Таким образом, для определения dl и $d\lambda$ мы должны найти $\sin \Omega AP$ и $\cos \Omega AP$ через введенные нами величины l, m, n; λ, μ, ν; α, β, γ. Но

$$\Omega AP = \Omega AB + BAP; \tag{13}$$

[2] Ибо имеют место формулы

$$\cos(\nu - \lambda) = -\operatorname{ctg} l \operatorname{ctg} n; \ \cos(\mu - \nu) = -\operatorname{ctg} m \operatorname{ctg} n.$$

следовательно, мы должны найти тригонометрические функции углов ΩAB, BAP.

Применяя теорему косинусов последовательно к сферическим треугольникам

$$\triangle BAP,\ \triangle\Omega AB,\ \triangle CAP,\ \triangle CA\Omega,$$

находим формулы:

$$\cos m = \sin l \cos BAP;\ \cos\beta = \sin\alpha\cos\Omega AB,$$
$$\cos n = \sin l \cos CAP = -\sin l\cdot\sin BAP,$$
$$\cos\gamma = \sin\alpha\cos CA\Omega = \sin\alpha\sin\Omega AB.$$

На основе этих формул и формулы (13) можно соотношения (12) переписать в виде

$$\frac{d\cos l}{dt} = r\cos m - q\cos n;$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{q\cos m + r\cos n}{\sin^2 l},$$

где p, q, r — угловые скорости твердого тела относительно осей OA, OB, OC подвижного трехгранника

$$p = \omega\cos\alpha,\qquad q = \omega\cos\beta,\qquad r = \omega\cos\gamma.$$

Применяя круговую замену букв, можно дополнить найденную систему двух уравнений еще четырьмя уравнениями и получить, таким образом, полную систему уравнений для определения положения твердого тела в пространстве, исходя из заданных функций времени p, q, r

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\cos l}{dt} &= r\cos m - q\cos n\\ \frac{d\cos m}{dt} &= p\cos n - r\cos l\\ \frac{d\cos n}{dt} &= q\cos l - p\cos m\end{aligned}\right\}\quad(14)\qquad\qquad \left.\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{q\cos m + r\cos n}{\sin^2 l}\\ \frac{d\mu}{dt} &= -\frac{r\cos n + p\cos l}{\sin^2 m}\\ \frac{d\nu}{dt} &= -\frac{p\cos l + q\cos m}{\sin^2 n}\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Это есть известная в динамике система уравнений; первая из этих систем называется обычно системой Пуассона и выводится в настоящее время в курсах механики из соображений теории относительного движения.

§ 4. Изложенные выше результаты кинематики твердого тела были получены Эйлером в ряде мемуаров как вспомогательные положения, необходимые для построения общей теории движения твердого тела и для изучения вопроса о вращении Земли вокруг ее центра инерции.

Известные в настоящее время в динамике твердого тела «уравнения Эйлера», записанные в следующей совершенной форме:

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr=L,$$
$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp=M,$$
$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq=N,$$

были установлены Эйлером нескоро и явились плодом повторного и всестороннего изучения предмета. Мы хотим указать тот путь, по которому Эйлер после многих попыток пришел к своим знаменитым уравнениям.

Первой, по времени составления, была система уравнений, выведенная из рассмотрения формул (3) для моментов ускорений точек движущегося тела.

Умножим обе части первой из формул (3) на элемент массы dM частицы твердого тела, находящейся у точки (x, y, z), и проинтегрируем произведение по всему телу.

Если мы примем обозначения Эйлера

$$\int dM\,(x^2+y^2)=Mf^2,\qquad \int xy\,dM=Ml^2,$$
$$\int dM\,(x^2+z^2)=Mg^2,\qquad \int xz\,dM=Mm^2,$$
$$\int dM\,(y^2+z^2)=Mh^2,\qquad \int yz\,dM=Mn^2,$$

то после выполнения указанных действий придем от правой части первой из формул (3) к выражению

$$Mh^2\frac{dp}{dt}-Ml^2\frac{dq}{dt}-Mm^2\frac{dr}{dt}+Ml^2pr-Mm^2pq+M(f^2-g^2)\,rq+$$
$$+Mn^2(r^2-q^2).$$

Это выражение должно быть равно моменту силы в направлении оси OX; этот момент Эйлер обозначает как произведение из некоторой силы

P на какую-то длину a. Так Эйлер получает первое уравнение движения твердого тела

$$h^2\frac{dp}{dt}-l^2\frac{dq}{dt}-m^2\frac{dr}{dt}+l^2pr-m^2pq+(f^2-g^2)rq+n^2(r^2-q^2)=\frac{Pa}{M}. \tag{16}$$

Таким же путем могут быть получены и еще два уравнения:

$$\begin{aligned} g^2\frac{dq}{dt}-n^2\frac{dr}{dt}-l^2\frac{dp}{dt}+qpn^2-qrl^2+pr(h^2-f^2)+&\\ +m^2(p^2-r^2)=\frac{Qa}{M},&\\ f^2\frac{dr}{dt}-m^2\frac{dp}{dt}-n^2\frac{dq}{dt}+rqm^2-rpn^2+qp(g^2-h^2)+&\\ +(q^2-p^2)l^2=\frac{Ra}{M}.& \end{aligned} \tag{17}$$

Большое неудобство этой системы уравнений заключается в том, что величины $f, \ldots, n$ зависят от времени, и эта зависимость включает ряд неизвестных величин, характеризующих положение тела во время движения. Это обстоятельство заставило Эйлера искать уравнения движения в более совершенной форме.

Однако несмотря на сложность и несовершенство уравнений (16) и (17), Эйлер вывел из них ряд следствий, которые оказались весьма ценными при первоначальном исследовании вопроса о предварении равноденствий.

Допустим, что оси координат OX, OY, OZ выбраны так, что ось OX совпадает с осью мгновенного вращения тела в момент времени t, а оси OY и OZ взяты так, что момент Ra равен нулю.

Поставим задачу — определить угловую скорость вращения тела в момент времени $t+dt$ и найти, насколько мгновенная ось вращения момента времени $t+dt$ наклонится к оси OX.

Обозначим для этого через $d\zeta$, $90°+d\eta$, $90°+d\theta$ углы мгновенной оси вращения момента времени $t+dt$ с осями координат OX, OY, OZ; пусть далее ω будет, как и всегда, угловая скорость твердого тела в момент времени t.

Из системы уравнений (16) и (17) можно с помощью весьма простых формул найти $d\omega$, $d\zeta$, $d\eta$, $d\theta$, при $l=m=n=0$; мы получаем

$$\begin{gathered} d\omega=\frac{Pa}{Mh^2}\,dt,\ \ \omega d\eta=-\frac{Qa}{Mg^2}dt,\ \ d\theta=0,\\ d\zeta=\sqrt{d\eta^2+d\theta^2}=\frac{Qa}{Mg^2}\frac{dt}{\omega}. \end{gathered} \tag{18}$$

Таким образом, мгновенная ось вращения приближается в плоскости XOY к прямой, перпендикулярной к оси мгновенного вращения момента времени t.

Этот результат Эйлера является основным в динамике твердого тела, он позволяет проследить за движением вращающегося тела при действии на него внешних моментов. На этих именно формулах (18) и была основана первая теория прецессии Земли, предложенная Эйлером.

§ 5. Исследуя вопросы динамики твердого тела, Эйлер, естественно, пришел к необходимости разработать полную теорию моментов инерции. В специальной большой статье, относящейся к 1758 г., Эйлер дал исчерпывающее исследование моментов инерции тела относительно всевозможных плоскостей и прямых в пространстве и, установив теорему, известную в настоящее время под именем теоремы Штейнера, привел изучение моментов инерции тела, взятых относительно любых прямых, к исследованию моментов инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести тела. Рассматривая изменение момента инерции тела в зависимости от направляющих косинусов прямой, Эйлер доказал существование трех взаимно ортогональных прямых, названных им главными осями инерции и обладающих экстремальными значениями моментов инерции.

Существование у каждого тела трех главных осей инерции и свойство твердого тела равномерно вращаться без участия сил вокруг любой из этих осей Эйлер много раз отмечает в своих исследованиях и считает это свойство удивительным явлением механики.

В работах Эйлера теория моментов инерции была, как мы указали, разработана исключительно полно, но завершающее слово в этой теории им, однако, сказано не было; понятие об эллипсоиде инерции было введено в науку позже в работах Пуансо.

§ 6. Вернемся к вопросу о составлении уравнений движения твердого тела с одной неподвижной точкой.

Найденные им уравнения (16), (17) Эйлер не считал окончательными ввиду их сложности. Установив в своих исследованиях существование трех главных осей инерции, Эйлер с помощью несколько неожиданных соображений привел уравнения (16) и (17) к их окончательному и простому виду.

Уравнения (16) и (17) были получены из рассмотрения движения отдельных точек твердого тела по отношению к неподвижной системе координат. Рассматривая твердое тело в момент времени t, Эйлер берет в качестве неподвижной системы координат три взаимно ортогональные главные оси инерции твердого тела в его положении в момент времени t и относящиеся к точке опоры. В силу этого $l = m = n = 0$ и уравнения (16) и (17) приобретают следующий, хорошо известный вид:

$$\begin{aligned} h^2 \frac{dp}{dt} + (f^2 - g^2)\, rq &= \frac{Pa}{M}, \\ f^2 \frac{dq}{dt} + (g^2 - h^2)\, pr &= \frac{Qa}{M}, \\ g^2 \frac{dr}{dt} + (h^2 - f^2)\, qp &= \frac{Ra}{M}. \end{aligned} \tag{19}$$

При этом надо заметить, что dp, dq, dr, представляющие собой приращения угловой скорости вращения твердого тела вокруг неподвижных осей (которыми теперь являются главные оси инерции в момент времени t), будут равны вместе с тем и приращениям угловой скорости твердого тела, но по отношению к осям инерции, относящимся в своем расположении к моменту времени $t + dt$. Ввиду этого мы можем в предыдущих уравнениях считать p, q, r мгновенными угловыми скоростями относительно перемещающихся с течением времени главных осей инерции. Отметим, кроме того, что в уравнениях (14) и (15) можно p, q, r понимать в указанном сейчас смысле.

Такими рассуждениями Эйлер пришел к установлению системы уравнений динамики твердого тела в ее простейшем и наиболее совершенном виде.

§ 7. Мы указали выше формулы (6), определяющие декартовские координаты произвольной точки твердого тела через пять угловых координат и расстояние s точки от начала неподвижных осей координат.

Дифференцируя эти формулы два раза по времени (которое входит лишь в ψ, θ, φ), Эйлер находит проекции ускорения на неподвижные оси. Полученные им формулы имели сначала весьма сложный вид, но Эйлер замечает, что из этих формул могут быть получены простые выражения для проекций ускорения на ось OZ, прямую OP пересечения плоскости XY с плоскостью, содержащей ось OZ и ось OM тела, и на прямую OD, перпендикулярную к прямой OP и лежащую в плоскости XY. Затем Эйлер выполняет подсчет ускорений по осям нового трехгранника, который будет теперь уже связан полностью с движущимся твердым телом. Осями этого трехгранника являются прямая OM и две прямые, к ней перпендикулярные, из коих одна содержится в плоскости начального меридиана тела. Установив выражения этих ускорений, Эйлер составляет комбинации моментов ускорений и, проинтегрировав полученные выражения по всему объему тела, получает уравнения движения в весьма сложном виде, содержащем в разнообразных сочетаниях тригонометрические функции углов ψ, θ, φ. Но Эйлеру удается подметить, что эти уравнения исключительно упрощаются, если вместо углов ψ, θ, φ и их производных ввести величины p, q, r, определяемые формулами (11). Окончательная система уравнений записывается тогда в виде

$$
\begin{gathered}
g^2\left(\frac{dr}{dt}+pq\right)+h^2\left(\frac{dr}{dt}-pq\right)-\\
-l^2\left(\frac{dp}{dt}-qr\right)-m^2\left(\frac{dq}{dt}-pr\right)-n^2(p^2-q^2)=\frac{Pa}{M},\\
-f^2\left(\frac{dp}{dt}-qr\right)-h^2\left(\frac{dp}{dt}+qr\right)-\\
-l^2\left(\frac{dr}{dt}+pq\right)+m^2(q^2-r^2)+n^2\left(\frac{dq}{dt}-pr\right)=\frac{Qa}{M},\\
f^2\left(\frac{dq}{dt}+pr\right)+g^2\left(\frac{dq}{dt}-pr\right)+\\
+l^2(p^2-r^2)-m^2\left(\frac{dr}{dt}-pq\right)-n^2\left(\frac{dp}{dt}+qr\right)=\frac{Ra}{M}.
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Если оси подвижной системы координат совпадают с главными осями инерции тела, то эти уравнения принимают вид обычных уравнений динамики твердого тела (19).

Таким образом, задача о составлении уравнений движения твердого тела с одной неподвижной точкой была полностью решена. При решении этой задачи Эйлер ввел в теоретическую механику исключительно ценную идею — рассматривать движение твердого тела с помощью системы координат, связанной с телом и, тем самым, вместе с ним перемещающейся. Эта идея подвижного трехгранника оказала неоценимые услуги теоретической механике, астрономии и впоследствии — дифференциальной геометрии.

§ 8. Интегрирование уравнений движения твердого тела достигнуто в ограниченном числе случаев и первый из этих случаев, отмеченный Эйлером, характеризуется равенством нулю главного момента внешних сил, приложенных к твердому телу. В этом случае уравнения (19) запишутся в обычных обозначениях в виде

$$
\begin{aligned}
&A \frac{dp}{dt} + (C - B)\, qr = 0 \\
&B \frac{dq}{dt} + (A - C)\, rp = 0, \\
&C \frac{dr}{dt} + (B - A)\, pq = 0.
\end{aligned}
\tag{19'}
$$

Придадим этим уравнениям следующий вид:

$$\frac{pdp}{a} = \frac{qdq}{b} = \frac{rdr}{c} = pqrdt,$$

где для краткости письма положено

$$a = \frac{B - C}{A}, \quad b = \frac{C - A}{B}, \quad c = \frac{A - B}{C}.$$

Введем теперь вместо t новое независимое переменное u, полагая [3]

$$du = pqrdt;$$

тогда предыдущая система уравнений запишется в виде

$$pdp = adu, \quad qdq = bdu, \quad rdr = cdu.$$

Интегрируя эту систему, получаем

$$p^2 = 2au + \sigma', \quad q^2 = 2bu + \sigma'', \quad r^2 = 2cu + \sigma''', \tag{21}$$

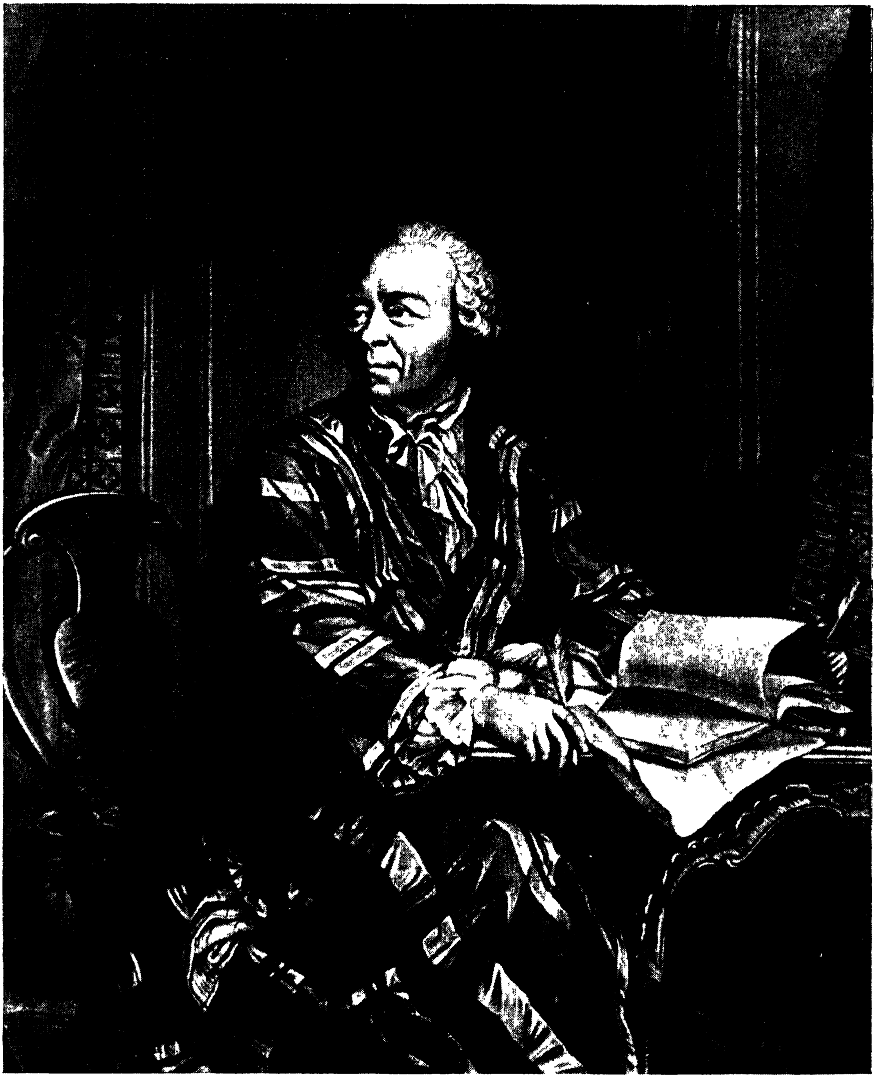
где σ', σ'', σ''' — произвольные постоянные интеграции. Имея эти формулы, мы устанавливаем соотношение между новым аргументом u и временем t посредством квадратуры

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{(2au + \sigma')(2bu + \sigma'')(2cu + \sigma''')}}.$$

Таким образом, величины p, q, r находятся в зависимости от времени через посредство эллиптической квадратуры.

Теперь остается найти по величинам p, q, r расположение тела в пространстве. Успех в решении этой второй части общей задачи о вращении твердого тела без участия внешнего момента объясняется тем, что

[3] Легко видеть, что u пропорционально квадрату угловой скорости ω.



Гравюра И. Штенглина 1768 г. с портрета работы Э. Хандмана

Портрет работы Ж. Дарбеса. 1770-е годы.
(Музей истории и искусства в Женеве)

для объединенной системы уравнений, состоящей из уравнений (19′) и и (14), Эйлеру удалось подметить один интеграл

$$Ap\cos l + Bq\cos m + Cr\cos n = D, \tag{22}$$

где D — произвольная постоянная.

В настоящее время существование этого интеграла у объединенной системы уравнений является обстоятельством само собой понятным, как вытекающим из теоремы о моменте количества движения. Но в эпоху Эйлера эта теорема, видимо, не была хорошо известным фактором, и сам Эйлер говорит, что его долгое время задерживало решение задачи об определении $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ ввиду того, что он не мог быстро усмотреть существование интеграла (22).

Мы имеем равенства

$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1,$$
$$Ap\cos l + Bq\cos m + Cr\cos n = D;$$

присоединим к ним одно соотношение, определяющее проекцию v угловой скорости вращения тела на неподвижную ось OP, с которой оси подвижного трехгранника образуют углы l, m, n:

$$v = p\cos l + q\cos m + r\cos n.$$

Из этих трех уравнений находим $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$

$$\cos l = \frac{Dp\,(cCq^2 - bBr^2) + BCpv\,(br^2 - cq^2) + aAqr\Delta}{a^2A^2q^2r^2 + b^2B^2p^2r^2 + c^2C^2p^2q^2}, \tag{23}$$

$$\cos m = \ldots, \quad \cos n = \ldots,$$

где

$$\Delta^2 = \left\{ \begin{aligned} & a^2A^2q^2r^2 - D^2(p^2 + q^2 + r^2) + \\ & + b^2B^2r^2p^2 + 2Dv\,(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \\ & + c^2Cp^2q^2 \;\; - v^2(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2). \end{aligned} \right\}.$$

Чтобы найти зависимость v от времени, определим dv

$$dv = \cos l\, dp + \cos m\, dq + \cos n\, dr,$$

откуда

$$\frac{dv}{du} = \frac{a}{p}\cos l + \frac{b}{q}\cos m + \frac{c}{r}\cos n.$$

Подставляя сюда вместо p, q, r, $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ их выражения в функции двух вспомогательных переменных u, v, находим следующее дифференциальное уравнение, связывающее эти переменные:

$$\frac{Kdv - abcFDdu - 2abcGudv + abcGvdu}{\sqrt{K - D^2E + 2abc(D^2 - G)u + 2FDv - Gv^2}} =$$

$$= \frac{Hdu - 2abcFudu}{\sqrt{(2au + \sigma')(2bu + \sigma'')(2cu + \sigma''')}},$$

где K, F, G, H — некоторые постоянные, зависящие от постоянных интеграции σ', σ'', σ'''; отметим лишь значение G

$$G = A^2\sigma' + B^2\sigma'' + C^2\sigma'''.$$

Найденное дифференциальное уравнение интегрируется Эйлером путем отыскания интегрирующего множителя μ; Эйлер показывает, что

$$\mu = \frac{1}{K - 2abcGu},$$

и связь между u, v получается тогда в виде

$$\frac{Gv - DF}{\sqrt{(G - D^2)(K - 2abcGu)}} =$$

$$= \sin \int \frac{(H - 2abcFu)\sqrt{G}\, du}{(K - 2abcGu)\sqrt{(2au + \sigma')(2bu + \sigma'')(2cu + \sigma''')}}.$$

Отметим, что введенное выше выражение Δ оказывается равным произведению из

$$\frac{\sqrt{(G - D^2)(K - 2abcGu)}}{\sqrt{G}}$$

на косинус того интеграла, который находится в предыдущей формуле и который мы обозначим через U.

Обращаясь к формулам (23), получаем решение задачи в виде

$$\cos l = \frac{AD}{G}p + \frac{BC(b\sigma' - c\sigma'')\sqrt{G - D^2}}{G\sqrt{K - 2abcGu}}p \sin U + \frac{aA\sqrt{G - D^2}}{\sqrt{G(K - 2abcGu)}}qr \cos U,$$

$$\cos m = \ldots; \qquad \cos h = \ldots.$$

Эта система косинусов не определяет, однако, полностью положение тела в пространстве; надо еще указать, например, угол между плоскостью QP и плоскостью, проходящей через точку P и ось мгновенного вращения.

Обозначая этот угол через χ, Эйлер находит для него выражение

$$\operatorname{tg}(\chi - \chi_0) = \frac{F\sqrt{G - D^2} - D\sin U\cdot\sqrt{K - 2abc\,Gu}}{\cos U\cdot\sqrt{G\,(K - 2abc\,Gu)}},$$

в котором χ_0 — произвольный угол.

Таким образом, поставленная задача о движении твердого тела, закрепленного в одной точке и устраненного от действия внешних моментов, получила полное аналитическое решение. В некоторых статьях по рассматриваемому вопросу Эйлер указывает, что можно было бы придумать такой прибор, который с достаточной отчетливостью представлял бы изученное аналитически движение твердого тела, но разработанного проекта такого прибора Эйлер не дает.

Анализируя формулы полученного решения, Эйлер обнаружил, что они существенно упрощаются, если между постоянными интеграции будет принята зависимость

$$D = G^2. \tag{24}$$

Устанавливая это соотношение, мы выбираем на сфере вполне определенным образом точку P, от которой откладываются дуги l, m, n. Но так как точка P была взята при решении задачи совершенно произвольно, то, ограничивая выбор числовых значений констант D и G соблюдением соотношения (24), мы тем не менее не нарушим общности задачи.

Внутренняя причина существенных упрощений, вызываемых зависимостью (24), заключается в том, что, при соблюдении этой зависимости, точка P будет являться точкой встречи единичной сферы с вектором—моментом количества движения.

При таком выборе точки P мы будем иметь исключительно простые формулы

$$\cos l = \frac{A}{\sqrt{G}}\,p, \quad \cos m = \frac{B}{\sqrt{G}}\,q, \quad \cos n = \frac{C}{\sqrt{G}}\,r$$

и далее

$$d\lambda = \frac{-\sqrt{G}\,(\sigma'' B + \sigma''' C - 2aA)\,du}{(\sigma'' B^2 + \sigma''' C^2 - 2aA^2 u)\sqrt{(2au + \sigma')(2bu + \sigma'')(2cu + \sigma''')}}.$$

Любопытно отметить, что известные интегралы рассматриваемой задачи

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const},$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const}$$

не используются Эйлером в процессе решения задачи.

§ 9. Работы Эйлера о движении твердого тела возникли в связи с решением задачи небесной механики о причинах предварения равноденствий. Эта задача получила свое первое и весьма своеобразное решение в работах Ньютона («Математические начала натуральной философии», кн. III, предл. XXXIX). Затем эта же задача рассматривалась Даламбером, который в «Трактате о предварении равноденствий» (1747) впервые дал строгое ее решение, пользуясь принципом возможных перемещений.

В работах Эйлера задача о предварении равноденствий является частью общего учения о движении твердого тела; развитие этого учения в трудах Эйлера обогатило механику новыми понятиями и новыми фактами первостепенного значения.

Рассматриваемую здесь задачу небесной механики Эйлер изучал в двух мемуарах.

Первый мемуар относится к 1749 г., второй был напечатан в 1759 г., после того, как основные исследования по динамике твердого тела были Эйлером уже обнародованы.

В первом мемуаре Эйлер считает Землю однородным сфероидом, или сфероидом, обладающим однородным сферическим ядром другой плотности, и в этих предположениях находит момент сил ньютоновского притяжения, действующих на частицы Земли со стороны достаточно удаленного светила. Пользуясь правилом сближения осей, доказательство которого было опубликовано позже, Эйлер находит общие формулы для координат полюса Земли на небесной сфере; при этом учитывается как прецессионное воздействие Солнца, так и Луны. На основе этих формул Эйлер составил таблицы среднего наклона эклиптики и величины годовой прецессии для промежутка времени с 1745 по 1784 г.

Во втором мемуаре в основу исследования явления прецессии положены общие уравнения движения твердого тела, находящегося под воздействием внешнего момента.

Если через ζ, η, θ мы обозначим угловые расстояния между прямой, идущей из центра инерции Земли к светилу, и главными осями инерции Земли, то уравнения теории движения Земли могут быть записаны по Эйлеру в виде

$$\frac{dp}{dt} - aqr + \frac{3ak}{s^3}\cos\eta\cos\theta = 0,$$

$$\frac{dq}{dt} - brp + \frac{3bk}{s^3}\cos\zeta\cos\theta = 0,$$

$$\frac{dr}{dt} - cpq + \frac{3ck}{s^3}\cos\zeta\cos\eta = 0,$$

где k — некоторая постоянная величина, пропорциональная массе притягивающего светила, а s — расстояние до светила, считаемое постоянным. К этим уравнениям должны быть добавлены уравнения (14) и (15) и, кроме того, три соотношения, выражающие ζ, η, θ через l, m, n; λ, μ, ν и угловые координаты перемещающегося светила, отнесенные к неподвижным осям.

Полученную систему уравнений Эйлер интегрирует приближенно в предположении, что ось мгновенного вращения Земли весьма мало отходит от главной оси OA эллипсоида инерции; вместе с тем Эйлер считает, что моменты инерции, относящиеся к двум другим осям инерции, равны между собой.

Метод интеграции, использованный здесь Эйлером, есть, по существу, метод разложения в ряды по степеням некоторого малого параметра, пропорционального разности между экваториальным и полярным моментами инерции Земли. В этих разложениях Эйлер берет лишь члены, содержащие только первые степени указанного параметра, и полученные им формулы для координат полюса Земли на небесной сфере дают значения для константы прецессии, превосходно согласующиеся с точными астрономическими наблюдениями того времени.

L. N. SRETENSKI

DIE DYNAMIK DES FESTEN KÖRPERS IN DEN ARBEITEN EULERS

(Zusammenfassung)

Die Fragen der Dynamik des festen Körpers hatten die Aufmerksamkeit Eulers ganz am Anfang seiner wissenschaftlichen Tätigkeit auf sich gelenkt. Aber die fundamentalen Resultate auf diesem Gebiet der Mechanik, die in den berühmten «Eulerschen Gleichungen» der Bewegung eines festen Körpers um einen Fixpunkt zusammengefaßt sind, wurden von ihm erst in der Berliner Periode seines Lebens erhalten. Diese Resultate sind von Euler in einer Reihe von Artikeln dargelegt, die in den «Mémoires de l'Académie de Berlin» von 1749 bis 1760 veröffentlicht wurden. In diesen Artikeln hat Euler die vollständige Kinematik des festen Körpers gegeben, die Theorie der Trägheitsmomente entwickelt, die allgemeinen Gleichungen der Bewegung des festen Körpers um einen Fixpunkt aufgestellt, die Frage der Integration dieser Gleichungen in einem speziellen, bemerkenswerten Fall vollständig durchgeführt und die gewonnenen analytischen Resultate der Dynamik des festen Körpers auf das berühmte astronomische Problem der Präzession der Äquinoktien angewandt.

Im vorliegenden Artikel wird in kurzer Form der Inhalt der Eulerschen Theorie der Bewegung des festen Körpers dargelegt, wie sie in den erwähnten sieben Artikeln in den Berliner Mémoires behandelt ist.

Л. С. ПОЛАК

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

В механике Эйлеру принадлежит первое планомерно проведенное применение аналитических методов и бесчисленные открытия, вошедшие в современную механику под его именем, а во многих случаях и без упоминания автора. Механике Эйлера как в целом, так и отдельным частным ее вопросам посвящено большое число работ.

Цель настоящей статьи — сделать доступными читателю некоторые ранее неопубликованные высказывания Эйлера [1] по основным проблемам механики и осветить роль Эйлера в разработке принципа наименьшего действия.

Эйлеру принадлежит огромное количество статей по различным вопросам теоретической и прикладной механики. Огромен и диапазон рассмотренных им вопросов — от общих проблем механики до конкретных задач технических, строительных и гидравлических. Механике Эйлер посвятил две большие книги, по существу связанные воедино. Первая из них, двухтомная «Mechanica, sive motus scientia analytice exposita» [1, 2] вышла первым изданием в 1736 г. в Петербургской академии наук. Первый том содержал 480 страниц, а второй—500 страниц. Вторая книга «Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus qui in huiusmodi corpora cadere possunt, accomodata» была издана в 1765 г. (Росток и Грейфсвальд) и содержит 520 страниц. Характерно название этой книги в русском переводе: «Теория движения твердых тел, основанная на первоначальных принципах нашего познания и примененная ко всем движениям, которые могут иметь этого рода тела».

Таким образом, в принципиальном отношении Эйлер под влиянием бесчисленных статей, книг и дискуссий между картезианцами, лейбницианцами и ньютонианцами сделал шаг назад по сравнению со своей ранней книгой «Механика, т. е. наука о движении, изложенная аналитическим

[1] Все публикуемые ниже тексты хранятся в Архиве Академии наук СССР.

методом» и попытался вывести механику из «первоначальных принципов нашего познания». Эта натурфилософская концепция, конечно, не была и не могла быть реализована, и все общие рассуждения Эйлера, большей частью псевдологические, без труда отделяются от остальной части его книги, столь богатой замечательными открытиями. Эти рассуждения представляют интерес лишь как попытки выяснения основных понятий механики и для характеристики мировоззрения самого Эйлера.

Свое понимание предмета и задач механики и связи статики с другими отделами этой науки Эйлер изложил в широко известном предисловии к «Механике». Публикуемый ниже отрывок интересен тем, что Эйлер считает, что механике (в нашем современном обозначении — кинематике и динамике) необходимо предпослать статику. Видимо, этот отрывок, как и некоторые другие, хранящиеся под № 155 [3], является подготовительным наброском к общим разделам «Теории движения твердых тел»:

«Лекция первая

Я решил в следующих лекциях изложить науку о движении, о том, как оно производится, о связанных с ним явлениях (accidentibus) — эта наука подразумевается под словом механика. Однако необходимо предпослать механике другую науку, а именно статику, которая имеет своим предметом силы (potentia), их сравнение и равновесие. Ибо без этого мы не можем иметь успеха в объяснении движения тел, поскольку возникновение движения и то, как оно производится, следует выводить из природы сил. Итак, нам предстоит рассмотреть две науки—статику и механику. Первая из них занимается силами, их сравнением и равновесием, как причинами движения, вторая же — производством движения под действием сил и его изменением (alteratione), а также силой, свойственной движущимся телам, под действием которой они могут сообщать движение другим телам и производить другие действия, для которых требуется сила, куда относится передача движения и движение тел в жидкостях. В наше время многие сливают обе эти науки и именуют их одним названием — механика. Более того, Вариньон в своей новой «Механике» изложил только науку о силах (potentia). Однако, как это легко видеть, между ними есть коренное различие, ибо одна изучает движение, другая — равновесие и даже покой» [3, л. 109].

Каковы же основные положения механики Эйлера, представляющие собой аналитическую разработку изложенной геометрически механики Ньютона?

Понятия пространства и времени у Эйлера, по существу говоря, лишь в некоторых деталях отличаются от ньютонова реального абсолютного пространства и времени. Как в «Механике», так и в «Теории движения твердых тел» он подробно обсуждает эти понятия, анализирует различие абсолютного и относительного пространства и времени и т. д. В отличие от Ньютона, который справедливо не усматривал силы в чисто логических доказательствах основных понятий и законов механики, а рассматривал последние как научное обобщение опыта, Эйлер под явным влиянием картезианского рационализма и лейбницевой философии (с которыми, надо заметить, он с позиций стихийного материализма непрерывно воюет по многим основным и весьма существенным проблемам) пытается не только обосновать, пояснить, но и доказать, исходя из принципов логики, основные законы механики. Эти «доказательства» принадлежат к тем частям механики Эйлера, которые, по справедливому замечанию А. Н. Крылова, «разжижили» так четко сформулированные Ньютоном основные принципы и законы классической механики.

Наиболее ценным в этих разделах двух сводных работ Эйлера по механике является критика им позиций идеалистической монадологии Лейбница, имевшей в то время в Германии и России большое влияние, а также критика тех сторон картезианской натурфилософии, которые завели ее в XVIII в. в безысходный тупик.

В одной из записных книжек Эйлера, относимых исследователями [4, стр. 67—94] к периоду 1749—1757 гг., т. е. ко времени между созданием «Механики» и «Теории твердых тел», находится приводимый ниже отрывок:

«О понятии пространства и времени»

I. Те, которые полагают, что в пространстве нет ничего реального, и определяют его из порядка сосуществующих [частей] (coexistentium), не могут изложить принципы механики сколько-нибудь понятным образом. Ведь если покоящемуся телу приписывается сила сохранять свое состояние покоя, покой же, согласно этим философам, есть сохранение того же порядка сосуществующих (частей), то покоящемуся телу следует приписать силу оставаться в том же порядке с сосуществующими (телами); а такое предположение (enuntiatum) не согласуется с действительностью.

II. Далее, если движущееся тело обладает силой продолжать движение в том же направлении и с той же скоростью, то эти философы не могут определить, каково это направление и какова эта скорость. Если же они утверждают, что это направление есть стремление (tendentia) к какому-либо телу, то общее правило этого движения излагают неверно.

III. Итак, как в рассмотрении покоя, так и движения, имеется в виду пространство, а также направления, которые никоим образом не зависят от существующих там тел. Следовательно, если силу инерции относить не к чистым идеям (mera idealia), а рассматривать ее как действительность (in actu suo), то отсюда или законы движения окажутся неверными, или пространство не есть сущность воображаемая (ens imaginationis).

IV. Поэтому, так как мы ясно видим правильность этих законов, нам кажется значительно более соответствующим действительности мнение тех, которые вместе с Ньютоном рассматривают пространство как суть реальную, чем тех, которые вместе с Лейбницем пытаются создать понятие пространства из одной только абстракции.

V. Если же понятие пространства реально и можно представить себе пространство без тел, то таким образом легко убедиться, что и понятие времени включает в себя больше реальности, чем это допускают лейбницианцы. Ведь если отказаться от реальной идеи времени, то едва ли можно было бы описать скорость тела, а тем более сохранение скорости.

VI. Далее, поскольку лейбницианцы не могут иначе определить интервал или расстояние, кроме как через множество монад, существующих между крайними пределами [здесь уже обнаруживается серьезный недостаток из-за отсутствия упоминания о том же самом направлении, а каково ненаправленное положение (situs indirectus) — это не может быть объяснено в данной системе], я спрашиваю, что такое два одинаковых расстояния? Если мне отвечают: это такие, в которых содержится одинаковое множество монад, — то я сильно сомневаюсь, содержится ли в одинаковых расстояниях всегда точно одинаковое множество монад. Между тем, однако, если бы я даже и с этим согласился, то в то время как мы умеем с такой точностью измерить равенство и неравенство расстояний, мы никак не можем также определенно судить о числе монад в каких-либо расстояниях и о том, равны ли они или не равны между собой, ибо мы не можем постичь эти монады своими ощущениями, а тем более нам не дано их сосчитать» [5, л. 20].

Этот отрывок интересен не только как очень ясная сводка возражений, и при том убедительных, Эйлера против отрицания лейбницианцами реальности пространства и времени, но и характером одного из них — именно шестого. Здесь Эйлер выдвигает против своих противников то возражение, что их точка зрения не дает возможности измерить и сравнить два интервала или расстояния с целью установления отношения «равенство—неравенство» между ними. Это отношение, являющееся выражением и итогом процесса физического измерения реального пространства, теряет у лейбницианцев всякий смысл. А для построения физической науки необходимо не только точно выяснить смысл применяемых понятий, но и указать правильный метод их измерения (только в этом случае понятие делается физической величиной). Эйлер подчеркивает это обстоятельство, поскольку он строит конкретную науку — механику, а не отвлеченную «метафизическую» схему.

Различие покоя и движения носит по Эйлеру относительный, а отнюдь не абсолютный характер. В главе I «Теории движения твердых тел» в следствии 3,15 он пишет: «Итак, движение и покой противоположны друг другу лишь по названию, но не по существу дела, так как их можно одновременно приписать одной и той же точке,— в зависимости от того, с каким телом ее сопоставляют. Движение отличается от покоя не в большей мере, чем одно движение от другого». И далее в пояснении 1,17: «Таким образом, совершенно рушится то знаменитое различие между движением и покоем, которое философы обычно приводят как чрезвычайно существенное для тел,— если, конечно, исходить из относительности движения и покоя. Правда, философы возразят, что условия коренным образом изменяются, когда речь идет об абсолютном движении и покое, но что представляют собою абсолютные движения и покой, этого они удовлетворительно определить не могут»[2].

Переходя к основным законам механики в изложении Эйлера, надо прежде всего указать, что у Эйлера настоящие математические доказательства стоят в одном ряду с «доказательствами» кажущимися.

В своей механике Эйлер, по существу, предполагает рассматриваемые им функции не только непрерывными, но, вообще говоря, дифференцируемыми. Это ясно, например, из следующего рассуждения (Механика, гл. I, Предложение 3): «Т е о р е м а. При каком угодно неравномерном движении можно допустить, что самые маленькие элементы пути проходятся равномерным движением. Д о к а з а т е л ь с т в о. Подобно тому как в геометрии элементы кривых рассматриваются как крайне малые отрезки прямой, точно так же и в механике неравномерное движение разлагается на бесконечное число равномерных. В самом деле, эти элементы или проходятся равномерным движением или изменение скорости в этих элементах настолько ничтожно, что ее увеличением или уменьшением можно пренебречь без всякой ошибки. Таким образом, и в том и в другом случае выявляется справедливость предложения. Ч. т. д.».

Первая аксиома Ньютона «доказывается» Эйлером с помощью закона достаточного основания. В то же время он тут же заявляет, что «этот закон заложен в самой природе вещей» [2, стр. 70]. Эйлер вводит понятие о силе инерции, однако это нечто совсем иное, чем «силы инерции» в современном понимании. У Эйлера сила инерции это, так сказать, мера инерции, определяемая массой или определяющая ее. В определении 9, гл. I, «Механики» он говорит: «Сила инерции — это присущая всем телам (вложенная во все тела) способность или пребывать в покое или же равномерно продолжать движение по прямому направлению.»

У Эйлера мы находим довольно частое в XVIII в. сочетание своеобразных атомистических представлений о веществе с отчетливой концепцией непрерывности движения в пространстве и времени: «Всякое тело, которое передвигается в другое место... проходит через все средние места» (Механика, гл. I, Предложение 1, 13). Это, по существу, есть принцип непрерывности движения тел в пространстве и времени. В то же время он говорит (Механика, гл. II, Примечание 1, 13а): «Если мы представим себе, что вся материя мира разделена на подобного рода точки или элементы, то количество материи каждого тела по необходимости надо будет измерять числом точек, из которых оно составлено.»

Для обозначения силы Эйлер применяет два термина: «potentia» и «vis». Хотя строгой границы между ними провести нельзя, однако первое из них обычно выражает научное, а второе — обыденное значение силы. В определении 10, гл. II «Механики» говорится о силе — potentia: «Сила есть то усилие, которое переводит тело из состояния покоя в состояние движения или видоизменяет его движение.»

Основной закон динамики в эйлеровой форме таков: приращение скорости dv пропорционально Fdt, где F — сила, действующая на тело в течение времени dt. Если же исследуются одновременно несколько тел, то надо рассматривать их массы. Таким образом, в формуле Эйлера фигурирует импульс силы, действующий в течение элемента времени и вызывающий приращение скорости движения. Если сопоставить формулу Эйлера с формулой Ньютона, то легко видеть, что хотя оба выражения представляют собой один и тот же закон, но подчеркивают различные его стороны:

$$mdv = F\,dt \quad \text{(по Эйлеру)}; \qquad F = \frac{d}{dt}(mv) \quad \text{(по Ньютону)}.$$

Однако в то время как Ньютон справедливо усматривал обоснование своего закона в совпадении выводов из него с экспериментальными и наблюдаемыми данными и в правильности многочисленных вытекающих из него предвидений, гораздо более натурфилософски настроенный Эйлер ищет еще логического, по существу, вненаучного, обоснования закона. Он заявляет, что этот закон не только истинен, но обладает и необходимой истинностью, т. е. что закон, согласно которому было бы $mdv \sim F^2 dt$ или $mdv \sim F^{-1} dt$, заключает в себе внутреннее противоречие. Это заблуждение характерно для Эйлера. Что же касается основного закона механики и следствий из него, то, конечно, для Эйлера в круге проблем его аналитической механики достаточно исходной математической формулировки этого закона.

Сформулировав этот закон (т. е. второй закон движения Ньютона), Эйлер сразу выводит из него уравнение живых сил, которые он широко применяет в последующих вычислениях. В следствии 3, 157, гл. II, «Механики» он пишет (p — сила, A — точка, n — коэффициент пропорциональности): «Если путь $Mm = ds$, то $dt = \frac{ds}{c}$. Отсюда получается $dc = \frac{npds}{AC}$, или $cdc = \frac{npds}{A}$. Отсюда приращение квадрата скорости пропорционально произведению силы на пройденный отрезок пути, деленному на массу или силу инерции тельца» [2, стр. 31—32].

Таким образом вводится живая сила. Но в середине XVIII в. вопрос о живой и мертвой силах, о мере движения был предметом оживленной дискуссии. Приведенный ниже большой отрывок из черновых записей [3, стр. 101—103][2] посвящен этому вопросу и представляет интерес как для характеристики постановки этих вопросов в то время и взглядов Эйлера, так и в силу удивительной прозрачности рассуждений Эйлера, которые без труда могут быть записаны в современной математической форме:

«Присущая всем телам сила инерции служит причиной того, что тела сопротивляются сообщающему движению (motum imprimenti), и отсюда для сообщения движения требуется сила. То, что способно сообщить телам движение, говорят, обладает силой. И отсюда из двоякого начала, из какого тела получают движение, Лейбниц установил два класса сил: живые и мертвые. Хотя, если глубже проследить этот вопрос, то все силы могут быть отнесены к мертвым. Ведь в столкновении тел сообщение движения происходит от взаимного давления (mutua pressione). Точно так же многие примеры мертвых сил сводятся к столкновению или удару (impetus) мельчайших частиц. Мы наблюдаем, что тела приобретают движение двоя-

[2] Судя по почерку, рукопись относится к ранним.

ким путем, либо от несущей силы (potentia trahente), видимой или невидимой, либо от уже движущегося тела, откуда и существуют два вида силы, способных сообщить телам движение. В первом случае, когда тело получает движение от давления или тяги (tractione), мы говорим, что это движение производится мертвой силой. Итак, мертвая сила есть не что иное, как давление или тяга. Примером может служить зарождение движения в теле, поставленном перед раздвигающейся пружиной, а также движения в железе, лежащем вблизи магнита, и особенно очевидный для всех пример возникновения движения под действием тяжести. Во втором случае, в котором тело приобретает движение от другого сообщающего тела, то есть движение производится движением, мы говорим, что оно возникает от живой силы. Итак, живая сила есть способность (potentia), присущая движущемуся телу, благодаря которой оно в состоянии сообщить движение другим телам. Многочисленные примеры этого можно наблюдать при столкновении тел. Вопрос в этом случае, однако, состоит в том, каким образом можно эти силы, особенно живые, измерить или сравнить. Об этом вопросе я и намереваюсь вести речь в данном исследовании (discursu) и, насколько это возможно, исходя из первых начал (ex primis...principiis), вывести способ измерения тех и других сил. Но поскольку наблюдается два рода сил, нужно говорить о каждом роде отдельно, ибо они едва ли имеют что-нибудь общее. Значительное же различие между живыми и мертвыми силами состоит в том, что для приобретения движения от мертвой силы необходимо, чтобы тело более или менее длительно подвергалось ее действию, то есть для сообщения движения мертвой силой требуется время. Живая же сила, наоборот, порождает движение моментально, и при этом не требует времени. Отсюда вытекает, что для измерения мертвых сил нужно принимать в расчет время, при измерении же живых не следует даже и упоминать о времени. Никто не станет сомневаться, что измерение живых сил должно производиться из полного действия (ex effectu pleno), а именно, из порожденного движения. Но каким образом измерить порожденное движение? Нужно ли считать силу (potentiam), вызывающую в данном теле двойную скорость, двойной или четверной? Все это мы не можем утверждать, чтобы не попасть в заколдованный круг (haec omnia ne in circulum labemus nondum constaret). Но одно может быть принято за установление, это — что сила (potentia), вызывающая в двойном теле ту же скорость, является двойной. Это то же самое, как если бы эта скорость была сообщена двум телам, то есть достигается двойное действие. Следовательно, количество сил должно оцениваться из такого рода действий.

Об измерении мертвых сил

Поскольку для измерения мертвых сил нужно принимать во внимание время, для их измерения и сравнения необходимо знать, действуют ли они равномерно или неравномерно, ибо наибольшая сила, если она убывает, и наименьшая, если она возрастает, с течением времени могут, в конце концов, производить одинаковое действие. Поэтому для правильной оценки нужно, чтобы действие рассматривалось в как можно меньший промежуток времени, в момент, для которого действие силы может быть принято за равномерное. Поэтому я принимаю за равные такие две силы (potentias), которые в равные, но бесконечно малые, промежутки времени производят равное действие. Таким же образом измеряются неравные силы из действия, порожденного в данный бесконечно малый промежуток времени. Однако этот вопрос о возникновении движения от действия этих сил таков, что до сих пор не удалось вывести его из непоколебимых и совершенно очевидных начал. Отсюда Лейбниц дошел до того, что объявил законы движения лишь допустимыми (ut leges motus contingentes pronuntiaret). Ибо они никоим образом не могут быть выведены из рассмотрения протяженности (extensionis). А может быть, если мы ближе познаем природу тел, наши философские рассуждения будут более точны (accuratius philosophari liceret). Ведь сила инерции еще никем, насколько мне известно, не была объяснена (exposita) и не была с достаточным основанием выведена из до сих пор познанных начал. Однако я считаю ее существенным свойством тела. Ее познание, несомненно, послужило бы для объяснения многих явлений. Законы, по которым мертвые силы сообщают телам движение, следующие:

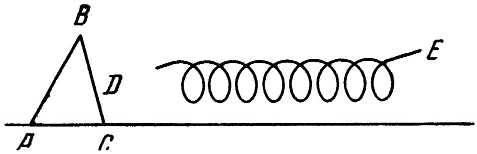
1. Одна и та же сила сообщает телу, движущемуся или покоящемуся, в одинаковый отрезок времени, одинаковые скорости.

2. Скорости, сообщенные одной и той же силой одному и тому же телу, относятся друг к другу как времена, за которые они возникают, при условии, что эта сила либо равномерна, либо отрезки времени минимальны.

3. Скорости, сообщенные различным телам в одинаковое время и одной и той же силой, обратно пропорциональны массе тел.

4. Скорости, сообщенные одинаковым телам различными силами в одинаковое время, прямо пропорциональны этим силам.

Отсюда выводится общий закон (canon), что порожденные скорости прямо пропорциональны силам и времени и обратно пропорциональны массе.



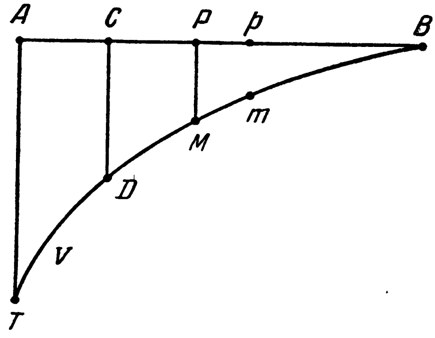
Фиг. 1

Из этих четырех законов одни, возможно, зависят от других, но общее их начало кажется лишь допустимым (contingens). Выше указывается способ измерения сил из действия, но этот способ согласуется с тем способом, при котором силы (potentia) сравниваются исходя из равновесия, без учета порожденного движения; в этом случае мы называем силу двойной по отношению к другой силе, если она находится в равновесии с двумя другими равными и прямо противоположными. Связь между этими двумя способами измерения легко может быть выведена из данных законов. Действительно, способ измерения сил может быть выведен из общего закона следующим образом. Силы прямо пропорциональны массам и порожденной скорости и обратно пропорциональны времени. Если силы равномерны, количество времени не имеет значения, если же они неравномерны, время принимается минимальное. Итак, действие, произведенное одной и той же силой в одинаковое время, равно произведению массы тел на скорость.

Поскольку пройденное расстояние равно скорости, помноженной на время, вместо времени берется соответствующее значение (loco temporis ponatur debitus valor), сила будет прямо пропорциональна массе и квадрату скорости и обратно пропорциональна пройденному расстоянию.

Таким образом, действие, произведенное одной и той же силой на одинаковых расстояниях, прямо пропорционально произведению масс на квадраты скорости.

Относительно сил, действующих неравномерно, судить труднее, и здесь следует только иметь в виду, что для различных положений будет иметь место другая мертвая сила; поэтому она может быть выражена лишь в отдельном месте, если считать время бесконечно малым. Отсюда можно получить уравнение, выражающее отношения сил во всех положениях. Наиболее ясно это можно показать для пружин, в которых упругая сила для различного натяжения (tensione) различна.



Фиг. 2

Я измеряю здесь упругую силу весом, который, приложенный с другой стороны (contrarie applicatum), может сохранять пружину в равновесии. Допустим, пружина находится в некоем естественном положении, к которому стремятся тем более, чем дальше от него отодвигаются (ad quaem tendunt eo magis, quo longius ex eo removentur). Выражу упругую силу любой функцией расстояния, на которое она отстоит от естественного положения. Возьму в качестве пружины проволоку, свитую в виде спирали DE. Она может быть представлена наподобие растягивающейся прямой линии. Пусть будет такого рода упругий стержень (virga) и AB положение, к которому он постоянно стремится. Пусть AP — любое положение натяжения, в котором упругая сила выражается ординатой (applicata) PM кривой BMV. Этой кривой будет выражена скорость тела, толкаемого пружиной, следующим образом.

Пусть AC — начальное положение, в котором тело получило первый толчок (impressionem), будет равно b, $AB = a$. Масса толкаемого тела M. Найти скорость, которую будет иметь тело в B, где кончается действие пружины. Если тело дошло до P, пусть его скорость там будет v, а приращение скорости на отрезке Pp будет dv. Однако из общего закона dv будет

$$dv = \frac{PM(\text{время}\,Pp)}{M} = \frac{PM \cdot Pp}{Mv},$$

откуда $Mvdv = PM.Pp$, следовательно,

$$\frac{Mvv}{2} = PM.\,Pp = DCPM.$$

Пусть скорость тела в B будет c, тогда $Mcc = 2\,DCB$. Итак, различные тела, подвергнутые действию той же пружины, приобретут скорости, обратно пропорциональные квадратному корню масс, полагая расстояние DCB постоянным.

Об измерении живых сил

Живая сила, как это было определено выше, есть свойственная движущемуся телу сила, действие которой в состоянии сообщить движение другим телам. Поэтому ее количество измеряется полным действием, которое она может производить. Полное действие есть сумма всех действий, которые может производить движущееся тело до тех пор, пока не придет в состояние покоя, ибо покоящееся тело не обладает больше силой производить какое-либо действие. Итак, корень вопроса состоит в том, как познать это полное действие и каким образом его измерить. Оба вопроса представляют значительную трудность. Первый, кажется, может быть решен из передачи движения, решение же второго содержит самую нашу тему «Об измерении живых сил», ибо каким же образом мы измерим полное действие из произведенных движений, если нам нужно найти силу самого движущегося тела? Поэтому я подойду к делу следующим образом: найду скорости различных тел, могущие произвести одинаковые действия, и когда они будут найдены, никто не будет сомневаться, что этим телам, движимым с найденными скоростями, присуща одинаковая живая сила. В качестве аксиомы я предпосылаю следующее положение (propositio).

Различные тела, наделенные такими скоростями, что они могут довести пружины до одинаковой степени натяжения, имеют одинаковые живые силы.

Это положение достаточно ясно, ибо мы говорим, что два тела имеют одинаковые силы, если они производят одинаковые действия.

Здесь же за действие принимается растяжение пружины до определенной степени.

Чтобы предпосланная аксиома могла быть применена, я добавляю следующее положение: пружина, натянутая до определенной степени, если ее отпустить, толкает тело и сообщает ему скорость. То же тело, если оно с той же скоростью толкает пружину, заставляет ее вернуться в прежнюю степень натяжения. Из этого положения вытекает, что мертвая сила за одно и то же время сообщает движущемуся с какой-либо скоростью телу одну и ту же степень скорости или увеличивает ее в одинаковой степени. Поэтому, если бы скорость тела была отрицательной, т. е. действовала бы против направления мертвой силы, скорость его уменьшилась бы на столько, на сколько она возросла бы, если бы движение происходило по направлению мертвой силы.

Пусть массы двух тел будут M и N, а их скорости x и y таковы, что они имеют одинаковые живые силы. Они смогут довести одну и ту же пружину до одинаковой степени натяжения, а именно, пружину AB до положения AC. Однако пружина AB, приведенная в положение AC, распрямляясь, сообщает телу M такую скорость, что $Mcc = 2\,DCB$. Итак, для того чтобы тело M, движимое со скоростью x, могло привести пружину AB в положение AC, нужно, чтобы было $Mxx = 2\,DCB$; а чтобы тело N со скоростью y могло сделать то же самое, нужно, чтобы также $Nyy = 2\,DCB$. Следовательно, для того чтобы оба тела произвели одинаковое действие, требуется, чтобы $Mxx = Nyy$, а именно, чтобы оба тела имели одинаковые живые силы. Если их массы обратно пропорциональны квадратам скоростей, то, поскольку силы различных тел, движимых с одной и той же скоростью, пропорциональны массам тел, получается следующее измерение живых сил: живые силы тел находятся в отношении сложном, состоящем из простого — масс и квадратов скоростей (vires vivas corporum esse in ratione composita ex simplici massarum et dupplicata velocitatum).»

Вопросу о передаче движения при столкновении тел и сравнению удара и давления посвящены два следующие отрывка.

В первом из них Эйлер кладет в основу своей аргументации инерцию и непроницаемость как основные свойства, а, может быть, даже одно свойство тел. В самом деле, в «Теории движения твердых тел» Эйлер пишет [2, стр. 358]: «...причиной тех сил, вследствие которых изменяется состояние тел, следует считать не только инерцию, но сочетание последней с непроницаемостью. Но так как непроницаемость может быть присвоена только телам, а тела обязательно должны обладать инерцией, то непроницаемость уже заключает в себе инерцию, и, следовательно, будет правильнее одну непроницаемость признать источником тех сил, которые изменяют состояние тел».

Аналогичные взгляды лежат в основе аргументации Эйлера в приводимом ниже отрывке [5, л. 21]:

«О передаче движения при столкновении тел

I. В механике, при объяснении передачи движения при столкновении тел, многие философы сталкиваются с большими трудностями. Одни из них полагают, что передача движения от одного тела к другому противоречит метафизическим принципам, а некоторым такое взаимодействие (actio mutua) тел кажется даже абсурдным.

II. Что касается первой трудности, никто никогда не говорил, что то движение, которое приобрело тело при столкновении, есть то самое, которое потеряло другое ударяющее тело.

III. Далее, те, которые связывают с движением определенную особую силу, полагают, разумеется, что сила переходит из тела в тело, и они никак не хотят согласиться, что эта сила в одном теле погибает, в другом же заново рождается. Но это последнее положение (argumentum) весьма противоречит общепринятому представлению о живых силах, которые едва ли не причисляются к субстанциям (quas propemodum inter substantias referunt) и даже полностью опрокидывает это представление, с полного моего одобрения.

IV. Тех же, которые, в соответствии с истиной, не приписывают телам никакой другой силы, кроме инерции,— их не затрагивает это положение, ибо при столкновении двух тел, как бы не изменялось их движение, инерция каждого из них не претерпевает какого-либо изменения; также у тела, побужденного к движению, движение сохраняется посредством той же силы, под действием которой это тело прежде оставалось в покое.

V. Что касается другой трудности, то те, которые полностью отрицают взаимное действие двух тел, обычно дают этому совершенно неудовлетворительное объяснение. Они говорят, что всякое тело стремится во все стороны под действием бесчисленных сил, и пока эти силы уравновешивают друг друга, оно остается в покое; но как только равновесие нарушено, оно начинает двигаться. При столкновении же двух тел, во втором, которое до того находилось в покое, нарушается равновесие этих сил, и отсюда возникает движение.

VI. Но я не вижу, каким образом они могут таким доводом защищать свое мнение. Ведь они признают, что тело может двигаться под действием особой силы; тогда, следовательно, при столкновении одна или многие силы разрушаются и притом под действием сил ударяющего тела. А все, что может разрушать какую-либо силу, может сообщать подобное действие (similem effectum ...edere) тому, что должно было быть произведено (приведено в движение) (productare) этой силой. Поэтому, если ударяющее тело в состоянии разрушить силу в другом теле, то тем самым они признают в нем силу двигать это тело. Итак, они сами не опровергают взаимное действие, а скорее утверждают его.

VII. Итак, им не остается ничего более, как утверждать, что в момент столкновения ударяемое тело приводится в движение собственной силой и ударяющее тело не имеет к этому никакого отношения. И ударяемое, со своей стороны, не вызывает в ударяющем никакого изменения, а оба изменения соответствуют единой гармонии (per solam harmoniam conspirare). Но не говоря уже о том, что они нарушают всякую внутреннюю связь между причиной и следствием (causas et effectus), я спрашиваю, что должно получиться, если эта сила у обоих тел перестанет действовать. Ясно, что тем не менее при столкновении должно было бы возникнуть изменение, так как оба тела непроницаемы. И если это изменение такое, какое оно есть на самом деле, то почему мы хотим приписать ему другую причину?»

Отрывок «Сравнение удара с давлением» [6, л. 165, 167—168] приводится нами в наиболее интересной его части:

«Сравнение удара с давлением

§ 1. Всем известно, какие большие дискуссии и разногласия имеются с некоторых пор между математиками по поводу измерения сил, и как разделились ученые зарубежных стран в толковании этого вопроса. Я не ставлю здесь себе целью рассмотреть доводы, приведенные той и другой стороной, и мне будет достаточно отметить, что этот вопрос в таком виде, как он трактовался, не имеет никакого значения для математики, что можно показать очень легко, ибо невозможно представить себе какую-нибудь задачу в механике, для которой обе партии не могли бы найти одно и то же решение. Из этого можно заключить с полным основанием, что значительная часть споров по этому вопросу есть не что иное, как чистые словопрения и крючкотворство; ибо с самого начала вмешалось в эту дискуссию много невежества, и она была страшно запутана метафизическими доводами, к тому же еще плохо примененными, так что в конце концов их точки зрения превратились в полную галиматью. Однако следует отметить, что при этом совершенно некстати смешали два вопроса, один из которых не вызывает сомнения, но другой может быть неверно истолкован обеими сторонами: что при ударе (percussion) упругих тел, и вообще при всех тех изменениях, которые возникают при движении тел, действующих совместно, всегда сохраняется одно и то же произведение масс на квадраты скоростей. Этот принцип настолько обоснован как теоретически, так и экспериментально, что никто не может больше в нем сомневаться. Г-н Бернулли называл его принципом сохранения живых сил, так как Лейбниц назвал живой силой произведение массы тела на квадрат его скорости. И если еще находятся люди, которые возражают против этого великого принципа механики, то, очевидно, только потому, что их шокирует самое название...

§ 5. Чтобы показать более ясно, что этот пример удара не опровергает родства (homogénéité) между живыми и мертвыми силами, следует только рассмотреть вместо каменной стены (muraille) мягкое тело, сделанное, например, из жидкой глины, или гнилого дерева, ибо тогда мы легко узнаем, что слабое давление будет в состоянии забить гвоздь точно так же, как удар молота. В этом случае удар (percussion) и давление не будут разнородны. Но следует также добавить, что, если увеличивать твердость стены, это родство не исчезнет полностью, а лишь появится большее или меньшее различие, родство же будет существовать всегда; точно так же, как сначала мы установили равенство между живой и мертвой силой в одном случае, теперь мы уже не можем отрицать их родство во всех случаях. Предположим, что твердое тело ударило по поверхности мягкой земли, и мы неожиданно узнаем, что такое же действие (impression) может произвести простое давление, да еще за то же самое время. Кроме того, все математики согласны с тем, что сопротивление, испытываемое телом, брошенным в жидкость, можно выразить весом или давлением (par un poid ou par une pression); однако это сопротивление вызвано ударом жидкости по поверхности тела, а это есть живая сила, хотя и говорят, что это лишь бесконечно малые, но бесконечно повторяющиеся живые силы. Ибо бесконечное множество бесконечно малых живых сил должны произвести конечную живую силу. Наконец, все доводы, которые приводятся в обоснование разнородности живых и мертвых сил, не доказывают ничего другого, кроме того, что действия живых сил более значительны, чем действия мертвых сил. Однако ясно, что для того, чтобы можно было говорить о двух вещах, что одна из них больше другой, нужно, чтобы эти две вещи были величинами одного рода.

§ 6. Никакое тело не может подвергнуться какой-то силе, какова бы она ни была, без того, чтобы не испытать ее воздействия (impression) или какого-либо изменения в своей фигуре, которое иногда заметно, как, например, если ударить или сжать мягкое тело, но часто это изменение бывает так мало, что его едва можно обнаружить, как, например, толчок по камню или другому твердому телу с небольшой силой. И это воздействие не может быть абсолютно нулевым, разве если бы тело было абсолютно твердым. Но таких тел в мире не существует. Всякий раз, как какое-либо тело испытывает давление какой-либо силы, оно получает углубление в том месте, где действует давление, и величина этого углубления зависит от трех обстоятельств: во-первых, от твердости или мягкости тела, во-вторых, от величины силы, которой оно было сжато, и, в-третьих, от части (portion) поверхности, которая подвергалась давлению. С этих точек зрения тела бесконечно разнообразны, и большинство твердых тел обычно не испытывают значительного действия или углубления без того, чтобы не сломаться. Поэтому я не буду рассматривать здесь других воздействий, кроме тех, которые могут испытать тела, не разрушаясь, и которые, следовательно, будут тем меньше, чем более твердыми будут тела. Я не говорю здесь об упругости, которая является совершенно особым свойством тел и благодаря которой, испытав какое-либо воздействие, они возвращаются в свое прежнее состояние. Это два совершенно различных вопроса: один — об углублении, которое получается в теле под действием данной силы, и это зависит от твердости или мягкости тела, другой вопрос предполагает, что это действие уже оказано, и касается того, останется ли оно у тела или нет, — а это зависит от того, обладает ли тело, подвергнутое удару, большей или меньшей упругостью, или оно совсем не упруго. Итак, два тела могут быть одинаково твердыми или одинаково мягкими, и в то же время одно из них является упругим, другое же совершенно лишено упругости.»

Публикуемые отрывки из черновых записей и записных книжек Эйлера дают дополнительный материал для характеристики его взглядов на основные вопросы механики. Стихийно материалистическое, хотя и крайне непоследовательное, мировоззрение Эйлера проявляется и в рассмотрении им проблемы реальности пространства и времени, в глубоком понимании им так называемого закона живых сил, в наглядном представлении процесса передачи движения, и т. п.

Эйлер понял важность закона живых сил и широко использовал его при решении различных конкретных задач механики.

Эйлерова механика имеет переходный характер — она сочетает в себе отдельные черты механики физической и аналитической. Именно этим обусловливаются ее характерные черты: аналитический метод решения задач и неустанные попытки выяснить принципиальные основы учения о движении вещества в пространстве и времени.

* * *

В 1696 г. Иоганн Бернулли опубликовал в июньском выпуске «Acta Eruditorum» знаменитую задачу о брахистохроне, или кривой наискорейшего ската. Даны две точки в вертикальной плоскости, не лежащие на одной вертикали, найти вид кривой линии, спускаясь по которой, тяжелое тело прошло бы путь между этими точками в наименьшее время. Решение этой, по словам Лейбница, «столь прекрасной и до сих пор неслыханной задачи» [7] было дано самим И. Бернулли, Лейбницем, Ньютоном, Яковом Бернулли и Лопиталем.

Я. Бернулли не только решил задачу о брахистохроне, но показал также, как могут быть решены аналогичные более трудные задачи. Из подобных задач наибольшую известность получила изопериметрическая задача, в которой требовалось определить вид кривой линии, обладающей каким-либо свойством максимума или минимума, при условии, что длина этой линии остается неизменной.

В ходе решения первой задачи, приведшего к выводу о том, что брахистохрона является циклоидой, Я. Бернулли высказал принцип, который хотя и не имел полной общности, но сыграл значительную роль как на первой стадии развития вариационного исчисления, так и в формулировании Эйлером принципа наименьшего действия. Принцип Я. Бернулли гласит, что если какая-либо кривая обладает свойством максимума или минимума, то каждая ее бесконечно малая часть обладает тем же свойством. Именно это позволило Эйлеру написать вместо конечного пути s, входившего в формулировку принципа наименьшего действия, данную Мопертюи, элемент пути ds и тем самым сделать огромный шаг вперед. Надо отметить, что, рассматривая задачу о брахистохроне в сопротивляющейся среде, Эйлер показал, что длина и форма предшествовавшего пути имеют влияние на скорость в элементе пути. Таким образом, вся кривая могла быть брахистохроной, хотя каждый элемент ее и не обнаруживал этого свойства. Это означало, что принцип Я. Бернулли не может быть универсальным.

В 1697 г. И. Бернулли была поставлена еще одна задача на отыскание минимума: провести кратчайшую линию между двумя заданными точками на произвольной поверхности. Первые исследования этой задачи были выполнены Лейбницем и Я. Бернулли, но наиболее важный результат был найден самим И. Бернулли. Он показал, что в любой точке кратчайшей линии соприкасающаяся плоскость перпендикулярна к касательной плоскости к поверхности, что, как известно, является основным свойством геодезических линий. Понимая всю важность решения задачи о геодезических линиях, И. Бернулли хотя и не опубликовал сразу полученный результат[3], но предложил заняться этой задачей своему ученику Л. Эйлеру. Эйлер, который уже тогда, хотя ему было лишь двадцать один год, «вычислял, как человек дышит» (Араго), напечатал в 1728 г. статью [8], где дал общее решение поставленной И. Бернулли задачи. Четыре года спустя Эйлер опубликовал мемуар [9], в котором изопериметрическая задача была сформулирована в общем виде. Затем во втором томе сочинения «Mechanica, sive motus scientia analytice exposita» («Механика или наука о движении, изложенная аналитически»), вышедшем в 1736 г., Эйлер снова занялся исследованием геодезических линий и решил изопериметрическую задачу о брахистохроне заданной длины. Наконец, в 1744 г. отдельным изданием вышел трактат [10], в котором Эйлер собрал

[3] Он сообщил его в конце 1728 г. упсальскому профессору Клингенштерну; напечатаны его работы о геодезических линиях были лишь в 1742 г.

почти все свои исследования предыдущих лет. В своих первых работах по вариационному исчислению Эйлер ближе к идеям Якова, а не Иоганна Бернулли. Однако метод его работы существенно отличен от метода предшественников; если последние рассматривали отдельные вопросы, то Эйлер, напротив, анализирует общие черты ряда проблем в целом. В силу этого решение вариационных задач, которое до него представляло боковую ветвь анализа, возводится им в ранг самостоятельной математической науки.

В письме от 28 января 1741 г. Даниил Бернулли спрашивал Эйлера, может ли он решить проблему центральных сил методом изопериметров. Эйлер нашел решение этой задачи в марте 1743 г., а в 1744 г. опубликовал его под заглавием «Об определении движения брошенных тел в несопротивляющейся среде методом максимумов и минимумов» в приложении к «Методу нахождения кривых линий»[4].

Как правильно указывает Серре [11], Эйлеру принадлежит первая отчетливая идея математического содержания, которое вкладывается наукой в принцип наименьшего действия. Именно Эйлер в 1744 г. в указанном выше приложении показал, что для траекторий, описываемых под действием центральных сил, интеграл $\int vds$, где v — скорость, всегда равен минимуму или максимуму. Эйлер не дал этому выражению какого-либо специального наименования. Так называемый принцип наименьшего действия впервые появился в науке в том же 1744 г.

В эпоху, непосредственно предшествующую французской революции 1789 г., в литературе и науке ведется ожесточенная борьба. В области теоретической механики классовая борьба отразилась в известной попытке обосновать механику теологией и тем самым подкрепить теологию механикой при помощи «принципа наименьшего количества действия».

15 апреля 1744 г., за несколько месяцев до появления труда Эйлера, Пьер-Луи Моро де Мопертюи (1687—1759), бывший драгунский капитан, выступавший как геометр, геодезист, географ, астроном, биолог, моралист, лингвист и, прежде всего, метафизик, но человек, не лишенный фантазии, представил Парижской академии мемуар «Accord de différentes lois de la Nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles» [12]. («Согласование различных законов природы, которые до сих пор казались несовместимыми»). В нем Мопертюи прежде всего говорит о распространении света. Еще раньше, в 1740 г., Мопертюи заметил, что в простейших слу-

[4] Эйлер написал эту работу фактически во второй половине 1743 г.

чаях равновесия некоторая функция сил имеет максимум или минимум [13]. Этот вопрос был рассмотрен затем в 1751 г. Эйлером, а в 1748 и 1749 гг. французским механиком Куртивроном.

Только в 1746 г. Мопертюи в статье, носящей характерное название «Les lois du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique» [14], объявил в печати об универсальном законе движения и равновесия — принципа наименьшего количества действия. Термин «количество действия» понимался им в смысле «деятельности» и измерялся произведением mvs, где m — масса, v — скорость, s — путь, пробегаемый телом.

Согласно Мопертюи, для движения mvs есть минимум, а в случае равновесия положение тела таково, что при сообщении ему малого движения произведенное этим движением количество действия окажется минимальным.

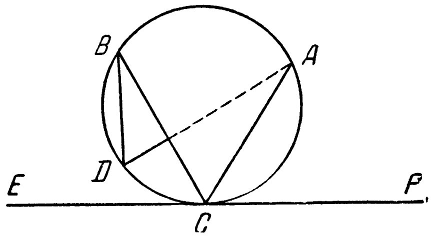
Универсальный характер принципа доказывается Мопертюи при помощи аргументов телеологического и теологического характера: «Наш принцип больше соответствует представлениям, которые мы должны иметь о вещах, оставляет мир в постоянной потребности в могуществе творца и является необходимым следствием из наиболее мудрого употребления этого могущества» [15].

Для доказательства же значения этого принципа в механике Мопертюи вывел из него известные законы рычага и удара упругих и твердых тел.

Работы Мопертюи, в которых давалось теологическое «обоснование» принципа наименьшего действия, вызвали большую дискуссию, в которой переплелись вопросы приоритета (Кёниг оспаривал приоритет Мопертюи), натурфилософские и физические вопросы о мере движения и фундаментальные проблемы мировоззрения и философии. Недаром в ней приняли участие не только математики и механики, но и представители философии и публицистической литературы. Были опубликованы многочисленные статьи самого Мопертюи, Кёнига, Патрика Д'Арси, Куртиврона, Эйлера [16—20], ряд статей Даламбера в «Энциклопедии» (статьи «Сила», «Действие», «Космология» и др.), памфлеты Вольтера, письма прусского короля Фридриха II и др.

Для дополнительной характеристики этой дискуссии приводим интересные выдержки из неопубликованных писем Г.-В. Крафта Эйлеру, весьма любопытных с историко-научной точки зрения (на эти письма, как и на приводимый ниже отрывок из письма Лаланда, мне любезно указала Ю. Х. Копелевич).

В письме от 9 февраля 1753 г. [21, л. 312 и 313] Г.-В. Крафт пишет Эйлеру о том, что в Тюбингенском университете имела место дискуссия



Фиг. 3.

по поводу спора Мопертюи с Кёнигом, в результате которой профессура этого университета приняла точку зрения Крафта, отстаивавшего позицию Мопертюи.

В письме от 4 июня 1753 г. [21, л. 330] Г.-В. Крафт пишет Эйлеру о статье в Тюбингенской ученой газете, где он и Клемм (Clemm) написали похвальную рецензию о работе Эйлера: «Dissertatio de principio minimae actionis, una cum examine objectionum prof. Koenigi contra hoc principium factorum». Крафт отмечает, что он «с удивлением узнал, что Вольтер также ввязался в этот спор, в котором он является совершенно некомпетентным судьей».

Наконец, в письме к Эйлеру от 26 августа 1753 г. [21, л. 338] Г.-В. Крафт пишет: «Я надеюсь, что теперь спор между нашим президентом и его противниками наконец прекратился, после того как публика достаточно повеселилась и посердилась. Однако я хочу, *между нами* (подчеркнуто Крафтом. — *Л. П.*), сообщить Вам некоторую деталь, которая, насколько мне известно, еще не была приведена ни одним из противников Мопертюи.

Если в окружности из A в B луч должен отразиться от касательной, то это, конечно, произойдет так, что $\angle ACF = \angle BCE$.

При этом $AC + CB$ есть путь максимальный, а вовсе не минимальный, ибо легко доказать, что любой путь $AD + DB < AC + CB$, а в случае отражения, согласно минимальности действия, должен быть также минимален и путь.

Некоторые прежние авторы уже отметили, что минимальный путь понятен лишь в том случае и избирается лишь там, где он возможен, и я хочу это принять; однако против этого все же говорит то, что с равенством угла падения и отражения согласуется не только минимум, но и максимум действия, в то время как, если я хочу твердо придерживаться принципа наименьшего действия, то я должен утверждать, что луч не может отражаться из A в B по $AC + CB$, и, таким образом, никакие равные углы не могут быть построены по ту и другую сторону C, но луч должен проходить по прямой линии из A в B, что противоречит геометрии и опыту. Может быть природа и является бережливой матерью (sparsame Mutter), которая обходится наименьшим там, где возможно, но там, где это нельзя, она платит честно и столько, сколько возможно, чтобы не прослыть скрягой».

В этой дискуссии Эйлер выступал на стороне Мопертюи, защищая его приоритет.

Независимо от того, рассматривался ли тем или иным автором вопрос о приоритете или о мере движения, в конечном счете на первый план выступал центральный вопрос о причинной обусловленности явлений материального мира или о телеологической их преднаправленности мудростью творца. Именно поэтому дискуссия приняла столь острый характер, что Даламбер сравнивает этот спор, разгоревшийся вокруг принципа наименьшего действия, с религиозными спорами: «Этот спор о действии, если нам будет позволено сказать, несколько походит на некоторые религиозные споры по горечи, которая была в него вложена, и по количеству людей, принявших в нем участие, ничего в этом не смысля» [22].

Таким образом, идейным источником работы Мопертюи было желание найти теологический или, по меньшей мере, телеологически обоснованный закон, который был бы последним основанием механики и из которого следовали бы все законы природы.

Напротив того, математическое выражение, называемое принципом наименьшего действия, у Эйлера естественно вытекало из его работ по отысканию кривых, обладающих экстремальными свойствами. Однако если геометрическая задача блестяще решалась «методом изопериметров», то в случае механического движения в основном приходилось ограничиваться решением уже решенных задач, поскольку указать на основании общих соображений, какая именно величина в том или ином случае будет иметь максимум или минимум, не удавалось. Это значительно ограничивало сферу применения и эвристическое значение принципа наименьшего действия у Эйлера. Еще одно ограничение универсальности вытекало из того обстоятельства, что у Эйлера этот принцип органически связан с законом живых сил и справедлив только там, где применим последний.

Пусть масса брошенного тела M, а скорость $\sqrt{v}$, тогда скорость, обусловленная высотой при прохождении малого промежутка ds, равна v (celeritas debita altitudini). Количество движения будет $M\sqrt{v}$, а совокупное, по выражению Эйлера, движение тела на промежутке ds будет $M\sqrt{v}\,ds$. Эйлер утверждает, что линия, описываемая телом, будет такова, что

$$M\int\sqrt{v}\,ds = \min. \tag{1}$$

Утверждение, что для действительного движения $\int M\sqrt{v}\,ds = \min$, Эйлер доказывает рассмотрением различных случаев плоского движения точки: в обыкновенном поле тяжести, в случае произвольных центральных сил, и, наконец, для общего случая, когда действующие силы имеют потенциал.

«Если же,— говорит Эйлер,— рассматривать искомую кривую, как будто бы она была дана, то можно из действующих сил определить скорость $\sqrt{v}$ через величины, относящиеся к кривой, и, следовательно, определить самую кривую методом максимумов и минимумов» [10, стр. 574]. Впрочем, найденное выражение (1) можно, по словам Эйлера, «привести к живым силам». В самом деле, поскольку $ds = \sqrt{v}\,dt$, то

$$\int \sqrt{v}\,ds = \int v\,dt, \tag{2}$$

так что для кривой, описываемой брошенным телом, «сумма всех живых сил, находящихся в теле в отдельные моменты времени, будет наименьшей» [10, стр. 575].

Эйлер без труда показывает, что при отсутствии каких-либо действующих на тело сил выражение (1) приводит к движению по прямой «совершенно так, как требуют первые основания механики» [10]. Впрочем, Эйлер отдает себе отчет в том, что это отнюдь не является доказательством его принципа: тот же результат получился бы при любой другой функции вместо $\sqrt{v}$.

Из выражения (2), или в более обычном написании,

$$\int u\,ds = \int u^2 dt \tag{3}$$

следует, как заключает Эйлер на той же странице, откликаясь на тогдашние споры о мере движения, что «...ни те, кто полагает, что силы следует оценивать по самим скоростям, ни те, кто — по квадратам скоростей, не найдут здесь ничего неприемлемого».

Этим замечанием Эйлера в неявной форме формулируется ограничение области применения принципа наименьшего действия кругом проблем, в которых силы имеют потенциал[5].

---

[5] Однако Эйлер нигде не говорит более ясно, что возможный путь должен быть подчинен условию сохранения энергии, хотя он и предполагает везде, что скорость частицы зависит только от ее положения, т. е. рассматривает те случаи, когда силы имеют потенциал.

Интеграл Эйлера может быть записан для консервативной системы ($T+U=h$) в виде $\int \sqrt{(h-U)ds^2} = \min$. Такую форму ровно сто лет спустя (1848—1849 гг.) Якоби

Таким образом, согласно Эйлеру, необходимым условием применимости принципа наименьшего действия является выполнение закона живых сил [6], в то время как Мопертюи именно в том и усматривал универсальность своего принципа наименьшего количества действия, что он имеет более общее значение, чем закон живых сил или другие законы механики. Однако в той форме, которую придал Мопертюи этому принципу, он имеет смысл только для конечных и мгновенных изменений скорости и поэтому из него можно получать только уравнения, связывающие конечные величины. Эйлерова же форма принципа наименьшего действия охватывает непрерывные движения, и из нее получаются дифференциальные уравнения траекторий.

Работа Эйлера делает совершенно незначительной роль Мопертюи, которому, по существу, принадлежит только название принципа, да и то не слишком удачное. Мопертюи сам пишет [23]: «Этот великий геометр (Л. Эйлер.— *Л. П.*) не только обосновал принцип более фундаментально, чем это сделал я, но его взор, более объемлющий и более проникновенный чем мой, привел его к открытию следствий, которых я не извлек».

Формулировка принципа, данная Мопертюи и требующая лишь того, чтобы $mvs = \min$, в сущности не позволяет сделать заключение о законах варьирования, ибо не указаны условия, каторым должны удовлетворять возможные варьированные движения. Даже Эйлер не смог добиться ясной формулировки принципа, для чего в одинаковой степени важно как выяснение величины, которая должна иметь экстремум, так и выяснение условий, которым должны удовлетворять сравниваемые движения.

Несмотря на то, что выражение $\delta \int u ds = 0$, являющееся математически осмысленной формой принципа наименьшего действия, дано Эйлером

придал принципу наименьшего действия. Однако для него ds уже не было обычным элементом траекторий в обыкновенном пространстве, а элементом линии изображающей кривой в фазовом пространстве.

[6] Насколько была ясна важность этого вопроса многим ученым того времени, видно из неопубликованного письма Лаланда от 2 марта 1753 г. [21, л. 315, 316]. Лаланд пишет Эйлеру: «Я прочитал с удовольствием Ваши мемуары в защиту Мопертюи; я хотел бы, чтобы Вами было обращено больше внимания на то, чем принцип наименьшего действия отличается от принципа живых сил, потому что и тот и другой оценивают действие (l'action) квадратом скорости, предполагая время постоянным; в случае, рассмотренном в статье Кёнига, живая сила равна нулю, ее элемент также равен нулю, точно так же, как элемент действия у Мопертюи, так что здесь нет никакой разницы между ними. С другой стороны, кажется, что Кёниг находится в согласии с Вами, когда он говорит (стр. 169), что «если полный элемент живой силы делается равным нулю, то имеет место равновесие»; это означает не что иное, как то, что живая сила есть минимум...».

независимо и одновременно с работами Мопертюи, Эйлер всегда подчеркивал приоритет Мопертюи. Возможно, это объясняется тем, что при склонности к метафизическим спекуляциям, он отдавал предпочтение априорной и кажущейся универсальной метафизической аргументации Мопертюи по сравнению с своими результатами, найденными им, как он сам говорит, a posteriori [7]. Возможно также, что неоднократное подчеркивание Эйлером приоритета Мопертюи обусловлено в какой-то мере и его связями с президентом Берлинской академии.

Гениальный математик, Эйлер ставит задачу прежде всего математически, он ищет выражение, вариация которого, будучи приравнена нулю, дает обычные уравнения механики.

Эйлер показывает, что для нахождения кривой, для которой, говоря по современному, некоторый функционал имеет наибольшее или наименьшее значение по сравнению с другими кривыми, он должен быть «неопределенной интегральной величиной» (quantitas integralis indefinita), которая может быть проинтегрирована только в том случае, когда будет взято заданное соотношение между x и y. Следовательно,

$$W = \int Z dx \tag{4}$$

и величина Z должная быть образована так, чтобы дифференциал Zdx не мог быть проинтегрирован без установления соотношения между x и y.

Если

$$Z = Z\left(x,\, y,\, p = \frac{dy}{dx}\right),$$

то

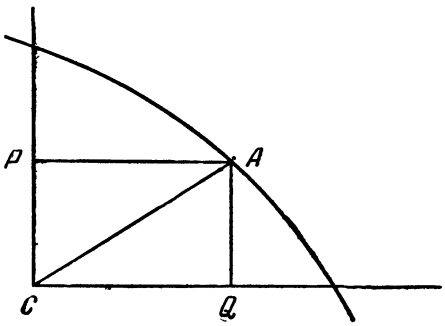
$$dZ = M dx + N dy + P dp. \tag{5}$$

Чтобы найти кривую, для которой $\int Z dx$ будет иметь абсолютный максимум или минимум, надо воспользоваться классическим уравнением Эйлера

$$N - \frac{dP}{dx} = 0; \ N dx = dP, \tag{6}$$

причем (за исключением случаев, когда P не зависит от p) это уравнение будет дифференциальным уравнением второго порядка относительно функ-

[7] Во всяком случае неясные, плохо оформленные, но общие натурфилософские идеи Мопертюи могли быть известным стимулом, который привел к открытию Эйлером принципа наименьшего действия как строгой динамической теоремы.



Фиг. 4.

ции y, и при интегрировании его появятся две произвольные постоянные.

Необходимо, однако, исследовать, «насколько,— как пишет Эйлер,— широкий смысл имеет этот принцип, чтобы не придавать ему большего значения, чем позволяет его сущность» [10, стр. 589]. Для этого рассмотрим общий случай движения брошенных тел, разделив его на два основных вида. В первом случае скорость тела есть функция только его положения [т. е. движение в потенциальном поле, для которого $F = F(r)$, $V = V(r)$]. Во втором случае $v \neq v(r)$; это имеет место, когда либо центры, к которым стремится тело, подвижны, либо движение происходит в сопротивляющейся среде.

Рассмотрим первый случай. Сколько бы ни было неподвижных центров сил, скорость тела в любой точке A будет функцией $CP = x$ и $CQ = y$ (фиг. 4). Итак, пусть v есть некоторая функция x и y, так что

$$dv = Tdx + Vdy. \tag{7}$$

Тело будет поэтому двигаться так, как если бы на него действовали в A две силы: сила T, параллельная x, и сила V, параллельная y. Отсюда тангенциальная сила будет равна

$$\frac{T\,dx + V\,dy}{ds},$$

нормальная

$$\frac{-V\,dx + T\,dy}{ds}$$

и

$$\frac{2v}{r} = \frac{-V\,dx + T\,dy}{ds} = \frac{-V + Tp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Если метод максимумов и минимумов приведет к тому же результату, то «наш принцип непременно будет сообразен с истиной» [10, стр. 591].

Так как

$$v = a + gx,$$

где a — постоянная, то, приняв во внимание, что

$$ds = dx\sqrt{1+p^2},$$

найдем, что минимумом должна быть величина

$$\int dx \sqrt{(a+gx)(1+p^2)} = \int dx \sqrt{v(1+p^2)}.$$

Продифференцировав величину $\sqrt{v(1+p^2)}$ и приняв во внимание (7), получим

$$\frac{Tdx\sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{v}} + \frac{Vdy\sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{v}} + \frac{Pdp\sqrt{v}}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Отсюда для искомой кривой получим уравнение

$$\frac{Vdx\sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{v}} = d\left(\frac{P\sqrt{v}}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{dp\sqrt{v}}{(1+p^2)^{3/2}} + \frac{p(Tdx+Vdy)}{2\sqrt{v(1+p^2)}}$$

или

$$-\frac{dp\sqrt{v}}{(1+p^2)^{3/2}} = \frac{Tpdx - Vdx}{2\sqrt{v(1+p^2)}}.$$

Но радиус соприкасающегося круга r в точке A равен

$$r = \frac{-(1+p^2)\,dx\sqrt{1+p^2}}{dp},$$

следовательно, будем иметь

$$\frac{2v}{r} = \frac{Tp - V}{\sqrt{1+p^2}}$$

в полном согласии с решением, найденным прямым методом.

Итак, если действующие силы можно свести к двум силам T и V, параллельным соответственно координатам x и y и пропорциональным некоторым функциям переменных x и y, то для описываемой кривой движение тела, «собранное по всем элементам, всегда будет наименьшим» [10, стр. 592].

На основании приведенного доказательства Эйлер делает следующий вывод: «Итак, этот принцип имеет столь широкое значение, что подлежащим изъятию представляется только движение, возмущаемое сопротивлением среды; причем легко видеть причину этого изъятия, потому что в этом случае тело, приходя к одному и тому же месту различными путями, приобретает не одну и ту же скорость. Таким образом, если устранить всякое сопротивление движению брошенных тел, то всегда будет иметь место то постоянное свойство, что сумма всех элементарных движений будет наименьшей. И это свойство будет наблюдаться в движении нескольких тел, рассматриваемых вместе; как бы они ни действовали одно на другое, всегда сумма их движений остается наименьшей.»[8]

К этим решениям вполне относятся известные слова Лапласа: «Читайте, читайте Эйлера — это наш общий учитель».

Однако Эйлер не приложил принцип наименьшего действия к задаче взаимного притяжения. Эта задача была позже рассмотрена Лагранжем.

Математическое рассмотрение интересующей нас проблемы не обходится у Эйлера без телеологических и метафизических соображений. Эти соображения не играют никакой роли в разработке метода минимумов и максимумов в целом и в решении конкретных задач статики и динамики.

В процессе развития этих принципов и методов телеологические аргументы и идеи, естественно, постепенно отпадали. Еще Эйлер убедился в том, что каузальное объяснение имеет перед телеологическим то очевидное преимущество, что любая проблема механики может быть решена без помощи принципа наименьшего действия, в то время как последнее требует при рассмотрении конкретных задач предварительного знания их решения.

Мы уже упоминали, что Эйлер поддерживал Мопертюи во время известной дискуссии. Поэтому неудивительно, что для обоснования принципа он сначала пользуется прямо телеологической аргументацией, но в конце концов приходит к выводам, которые по существу лишают этот принцип столь дорогого для Мопертюи божественного ореола.

Вот что говорит Эйлер в приложении 1 «Об упругих кривых» [10, стр. 447—448]: «Действительно, так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума: поэтому нет никакого сомнения, что все явления мира с таким же успехом можно определить из причин конечных при помощи метода максимумов и минимумов, как и из самых причин производящих. Повсюду существуют столь яркие оказания этой истины, что для ее подтверждения нам нет нужды в многочисленных примерах; скорее надо будет направить усилия на то, чтобы в каждой области физических вопросов отыскать ту величину, которая принимает наибольшее или наименьшее значение: исследование, принадлежащее, по-видимому, скорее к философии, чем к мате-

[8] Вариационное условие необходимо, но не достаточно для того, чтобы этот интеграл был минимален; он может быть максимумом, минимумом или ни тем и ни другим. Эйлер иногда говорит о том, что интеграл может быть максимумом или минимумом, но никогда не рассматривает третий случай.

матике. Итак, открыто два пути для познания явлений природы — один через производящие причины, который обычно называют прямым методом, другой — через конечные причины — и математик с равным успехом пользуется обоими. А именно, когда производящие причины слишком глубоко скрыты, а конечные более доступны для нашего познания, то вопрос обыкновенно решается непрямым методом... Но прежде всего надо прилагать усилия, чтобы открыть доступ к решению обоими путями; ибо тогда не только одно решение наилучшим образом подтверждается другим, но от согласия обоих мы получаем высшее наслаждение.»

Указав, что развитый им для исследования движения в поле центральных сил метод может быть применен к задаче нахождения условий равновесия механических систем, Эйлер усматривает обоснование такой возможности в аргументах, доказательная сила которых ему самому представляется недостаточной:

«...Так как тела в силу инерции сопротивляются всякому изменению состояния, то они, если только будут свободны, будут насколько возможно меньше подчиняться действующим силам; отсюда вытекает, что в порожденном движении эффект, произведенный силами, должен быть меньшим, чем если бы тела двигались каким-либо иным способом. Хотя сила этого рассуждения еще недостаточно видна, все же, так как оно согласно с истиной, я не сомневаюсь, что при помощи принципов здравой метафизики оно может быть возведено к большей очевидности; но это я предоставляю другим — тем, кто занимается метафизикой» [10, стр. 593].

Последнее замечание, впрочем, излишне скромно; Эйлер сам немало занимался метафизикой. Для него было характерно стремление дать натурфилософское обоснование механики, не довольствуясь тем, что ее основные законы есть научное обобщение эксперимента и наблюдения. Поэтому Эйлер многократно возвращался к проблемам, находящимся на стыке математики, механики, натурфилософии и философии. Им опубликована, например, любопытная с точки зрения изучения попыток ученых XVIII в. связать воедино философию и механику работа «Enodatio quaestionis: utrum materiae facultas cogitandi tribui possit nec ne ex principiis mechanicis petita» [24], т. е. «Основанное на принципах механики исследование вопроса, можно ли материи приписать способность мышления, или нельзя». В этой работе механика привлекается на помощь философии. Однако у Эйлера есть и такие работы, где метафизика полагается в основание механики: «Essay d'une démonstration métaphysique de principe général de l'équilibre» [25], т. е. «Опыт метафизического доказательства общего принципа равновесия».

Склонность Эйлера к проблемам, относящимся в XVIII в. к метафизике, и присущие ему теологические и телеологические тенденции проявились в его известной популярной книге «Письма о разных физических и философских материях, писанные к некоторой немецкой принцессе» [26].

Эта книга получила отрицательную оценку со стороны Даламбера и Лагранжа. Они восприняли книгу Эйлера как выступление против антитеологических, материалистических взглядов передовых французских ученых.

Лагранж пишет Даламберу (письмо от 2 декабря 1769 г.) [27, стр. 132]: «Труды, которые Эйлер публикует в Петербурге, были написаны давно и оставались в рукописи лишь за отсутствием издателя, который хотел бы ими заняться; среди них имеется одно сочинение, которое он не должен был бы публиковать ради своей чести: это — «Письма к немецкой принцессе». И в другом письме (от 15 июля 1769 г.) [27, стр. 143]: «...Письма Эйлера к немецкой принцессе, которые Вы желаете видеть и которые, может быть, Вас позабавят выходками против вольнодумцев».

Даламбер в письме Лагранжу от 10 июня 1769 г. [27, стр. 135] остроумно сравнивает эту работу Эйлера с комментариями Ньютона к Апокалипсису: «...Судя по тому, что Вы мне о них говорите (речь идет о сочинении Эйлера «Письма к немецкой принцессе».— *Л. П.*), это — его комментарии к Апокалипсису. Наш друг — великий аналитик, но довольно плохой философ».

Прочитав «Письма к немецкой принцессе», Даламбер пишет Лагранжу (письмо от 7 августа 1769 г.) [27, стр. 147—148]: «Вы имели полное основание говорить, что, дорожа своей честью, он не должен был печатать это произведение. Это просто невероятно, как такой великий гений, каким он является в геометрии и анализе, может быть в метафизике ниже самого маленького школяра, чтобы не сказать таким плоским и абсурдным, и вот действительно подходящий случай воскликнуть: не всё богами даровано одному».

В течение 1746—1749 гг. Эйлер подготавливает к печати несколько работ, посвященных поискам выражений, имеющих минимум в различных задачах динамики и статики. Эти работы были напечатаны в 1750—1753 гг.

В статье «Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les actions des forces» [28]. («Исследования о наибольших и наименьших, которые имеют место в действиях сил») Эйлер рассмотрел при помощи методов вариационного исчисления различные задачи равновесия гибкой нити под действием каких-либо сил при различных условиях. Применив для рассмотрения этих задач принцип наименьшего действия, Эйлер расширил сферу его применения, распространив его на упругие силы.

В другом мемуаре [29] Эйлер рассматривает жидкую массу, все частицы которой притягиваются к некоторым неподвижным центрам под действием сил, которые являются какими-либо функциями расстояний от этих центров. Эйлер показывает, что и в данном случае решение, полученное при помощи обычных принципов ньютоновой механики, совпадает с решением, находимым при помощи принципа наименьшего действия. Кроме того, «установив принцип, согласно которому во всех состояниях равновесия сумма всех действий сил на все частицы тел, которые находятся в равновесии, является минимумом, я заметил,— пишет Эйлер,— что тот же принцип имеет место во всех свободных движениях тел, какими бы силами они ни вызывались» [29, стр. 217].

Эйлер устанавливает, что в состоянии равновесия жидкости под действием сил F_x, F_y, F_z будет иметь место

$$\int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz = \min. \tag{8}$$

Величину $F_i dx_i$ Эйлер называет количеством действия соответствующих сил. Таким образом, если умножить каждую силу на элемент линии, по которой эта сила действует, и сложить интегралы от этих произведений, то полученная сумма будет представлять количество действия всех сил в данной точке. Эйлер указывает, что это правило «вытекает непосредственно из принципа Мопертюи» [29, стр. 203]. Поскольку для того, чтобы какая-либо величина имела максимум или минимум, ее дифференциал должен быть равен нулю, а дифференциал (8) равен нулю, то можно сказать, что интеграл $\int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$ имеет минимум. Это, так сказать, обращенное заключение, очевидно, не всегда справедливо. Чтобы обобщить это заключение на систему точек, находящихся в равновесии, Эйлер суммирует (8) по всем элементам массы и пишет

$$\int dM \left(\int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz\right) = \min., \tag{9}$$

что вполне справедливо, ибо жидкое тело в целом находится в равновесии.

Для перехода к движению Эйлер вводит элемент времени dt. Тогда мгновенное количество действий сил будет равно

$$dt \sum_i F_i dx_i,$$

а за конечное время оно будет равно

$$\int dt \sum_i \int F_i dx_i; \tag{10}$$

«...весьма естественно,— замечает Эйлер,— что тела перемещаются по такому пути, для которого эта сумма всех мгновенных действий есть минимум. Вот, следовательно, новый общий принцип для свободного движения тел под действием каких-либо сил...» [29, стр. 217].

Таким образом, Эйлер не считает существенным тот или иной специфический вид величины, носящий название «количество действия». Он говорит как о количестве действия силы Fds (т. е. о работе), так и о количестве действия импульса $mvds$.

Завершив этот новый цикл исследований по применению принципа наименьшего действия к проблемам механики, Эйлер приходит в общем к тем же выводам, что и в 1744 г. Он снова отмечает, что существуют два метода решения проблем механики: «один метод — прямой, основанный на законах равновесия или движения, другой...— находится с помощью метода максимумов и минимумов. Первый находит решение, определяя эффект по действующим силам; другой — берет в рассмотрение конечные причины и выводит действия» [28, стр. 151]. Оба метода, полагает Эйлер, должны находиться в полном согласии и приводить к одному и тому же решению, и именно это согласие убеждает нас в истинности решения, поскольку каждый из рассматриваемых методов основан на несомненных принципах.

«Однако,— замечает Эйлер,— ...часто очень трудно найти формулу, которая должна быть максимумом или минимумом...» [28, стр. 151]. Поиски такой формулы, собственно говоря, принадлежат не к области математики, а «...к метафизике, поскольку необходимо знать цель, которую природа полагает в своих действиях» [28, стр. 152]. Метафизика же отнюдь не достигла такой степени совершенства, чтобы для каждого действия, производимого природой, указать то «количество действия», которое является наименьшим; она еще очень далека от этого и поэтому почти совершенно невозможно отыскать для большого числа различных случаев формулы, которые будут иметь максимум или минимум. Напротив, если известно решение, найденное прямым методом, то не представляет труда угадать формулы, которые приведут к тому же самому решению, если отыскать их максимум или минимум. Таким образом, если нельзя вторым методом a priori находить непосредственно законы явлений, то, зная решение, найденное прямым методом, «...мы знаем a posteriori эти формулы, которые выражают количество действия, и тогда не представляет более труда показать их истинность с помощью принципов, известных в метафизике» [28].

Мы уже отмечали, что, по мнению Мопертюи, принцип наименьшего количества действия является универсальным законом, который позволяет дедуктивным путем вывести в конечном счете все законы природы и, в первую очередь, решать любые частные задачи механики.

В отличие от Мопертюи, Эйлер, начав с высказываний в том же духе, приходит к другим выводам. Исследуя фактическое применение принципа к частным задачам механики, Эйлер увидел, что найти выражение, которое должно быть максимумом или минимумом, для каждой данной частной задачи можно только тогда, когда уже известно решение этой задачи из обычных принципов механики, формулирующих не конечные цели, а причинно-следственные связи явлений. Таким образом, эвристическое значение принципа оказалось ничтожным: он не давал возможности предвидеть, установить законы даже тех механических явлений, которые всесторонне исследуются обычными дифференциальными уравнениями движений Ньютона. Как отмечал Эйлер, универсальность принципа наименьшего действия даже в пределах механики не является установленной, и он не может сколько-нибуь уверенно оценить границы его применимости. Таким образом, этот закон, который должен был выражать на языке математики универсальную целесообразность вселенной, оказывался чем-то вроде бесплодной смоковницы.

Недаром Эйлер после ряда попыток прекратил свои исследования, связанные с принципом наименьшего действия, несмотря на то, что эта область очень интересовала его как приложение разработанных им методов отыскания кривых линий, обладающих свойством максимума или минимума. Все это показывает, что хотя Эйлер не освободился полностью от влияния телеологического финализма Мопертюи, он, однако, стремился, так сказать, математизировать принцип наименьшего действия.

Несмотря на использование терминологии Мопертюи, Эйлер сформулировал идеи, далеко превосходящие ограниченные и односторонние высказывания Мопертюи. Эйлеру принадлежит первая точная и математически плодотворная формулировка принципа наименьшего действия, открывшая новые горизонты для его подлинно научного применения. Именно Эйлер разработал в виде отчетливого и последовательного стройного математического метода те идеи, которые иначе рисковали остаться в глазах поколений блестящей, но не слишком глубокой догадкой. В этом смысле Эйлер является действительным основоположником научно сформулированного принципа наименьшего действия в механике. Он придал ему научную форму и нужен был еще только один шаг для того, чтобы завершить полное освобождение принципа наименьшего действия от метафизических лохмотьев и математически обобщить его. Этот шаг был сделан Лагранжем.

Литература

1. Leonhardi Euleri Opera omnia, series II, vol. 1, Teubner, 1912
2. Л. Эйлер, Основы динамики точки, М.— Л., ОНТИ, 1938
3. Архив АН СССР, ф. 136, оп. 1, № 155
4. Г. К. Михайлов, Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР. Ист.-мат. иссл., вып. X, М., ГТТИ, 1957
5. Архив АН СССР, ф. 136, оп. 1, № 134
6. Архив АН СССР, ф. 136, оп. 1, № 158
7. Leibniz, Mathematische Schriften, Bd. 3, 1856. стр. 288
8. L. Euler, De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente, Comm. Acad. Petrop., t. 3 (1728), 1732, стр. 110—124
9. L. Euler, De linea celerrimi descensus in medio quocunque resistente, Comm. Acad. Petrop., t. VII (1735), 1740, стр. 150—162
10. Л. Эйлер, Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, М.— Л., ОНТИ, 1934. (Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, Lausannae & Genevae, MDCCXLIV)
11. I. A. Serret, Mémoire sur le principe de la moindre action, C. R. Acad. Sci., 12. VI. 1871, стр. 697—698
12. Maupertuis, Mém. de l'Acad. de Paris, 1744, стр. 571
13. Maupertuis, Loi de repos, Mém. de l'Acad. de Paris, 1740, стр. 240
14. Maupertuis, Mém. de l'Acad. de Berlin, 1746, стр. 267
15. Maupertuis, Essai de Cosmologie, Oeuvres, t. 1. Lyon, 1766, стр. 44
16. L. Euler, Dissertatio de principio minimae actionis, una cum examine objectionum Cl. prof. Koenigi contra hoc principium factarum. Berlin, 1753
17. L. Euler, Sur le principe de la moindre action, Mém. de l'Acad. de Berlin, t. 7 (1751), 1753, стр. 219—245
18. L. Euler, Examen de la dissertation de M. le professeur Koenig insérée dans les Actes de Leipzig, pour le mois de mars 1751, Mém de l'Acad. de Berlin, t. 7 (1751), 1753.
19. L. Euler, Exposé concernant l'examen de la lettre de Mr de Leibnitz, alléguée par M. le prof. Koenig, dans le mois de mars, 1751, des Actes de Leipzig a l'occasion du principe de la moindre action, Mém. de l'Acad. de Berlin, t. 6 (1750), 1752, стр. 52—62
20. L. Euler, Lettre de M. Euler à M. Mérian, Mém. de l'Acad. de Berlin, t. 6 (1750), 1752, стр. 520—532
21. Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 3

22. Art. Cosmologie, Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres, t. 4, 1754, стр. 297
23. M a u p e r t u i s, Lettres. Lettre XI: sur ce qui s'est passé à l'occasion du principe de la moindre quantité d'action, «Oeuvres», t. 2, Lyon, 1768, стр. 281
24. L. E u l e r, Opuscula varii argumenti, I, Berlin, 1746, стр. 277—286; рецензия «Nouvelle bibliothèque Germanique», t. 8, 1751, стр. 387—397
25. L. E u l e r, Mém. de l'Acad. de Berlin, t. 7 (1751), 1753, стр. 246—254
26. Л. Э й л е р, Письма о разных физических и философских материях, писанные к некоторой немецкой принцессе, с французского языка на российский переведенные Степаном Румовским, ч. 1, 2, Спб., 1768, 1772
27. L a g r a n g e, Oeuvres, t. 13, Paris. 1888.
28. L. E u l e r, Recherches sur les plus grands et les plus petits qui se trouvent dans les actions des forces, Mém. de l'Acad. de Berlin, t. 4 (1748), 1750
29. L. E u l e r, Réflexions sur quelques lois générales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques, Mém. de l'Acad. de Berlin, t. 4 (1748), 1750

L. S. POLAK

EINIGE FRAGEN DER MECHANIK LEONHARD EULERS

(Zusammenfassung)

Im ersten Teil des Artikels wird neues Material veröffentlicht, das aus einzelnen Noten und Fragmenten aus dem im Archiv der Akademie der Wissenschaften der UdSSR aufbewahrten Archiv L. Eulers besteht. Diese Fragmente zeigen das materialistische Herangehen Eulers an die Grundprobleme der Mechanik, seine Kritik der idealistischen Konzeption des Leibnizianertums. Die angeführten Texte Eulers, die durch Anmerkungen erläutert werden, vermitteln das Verständnis seiner Ansichten über die Probleme des absoluten Raumes und der Zeit, deren Realität und Unabhängigkeit von unserem Bewußtsein er behauptet. Einer genauen Untersuchung unterzogen wird das Problem der lebendigen und der toten Kraft und im besonderen der Streit der Cartesianer mit den Newtonianern. Für Euler spielt das Gesetz der lebendigen Kräfte die wichtigste Rolle in der Mechanik; er zeigt die Einheit und den inneren Zusammenhang des Begriffs der lebendigen Kraft und des Begriffs der Druckkräfte. Euler analysiert auch das Problem der verschiedenen Fälle der Bewegungsübertragung. Eulers Versuche, angeblich logische Beweise der Grundprinzipien und Gesetze der Mechanik, die von Newton formuliert wurden, zu erbringen, schwächten im Grunde genommen die universelle wissenschaftliche Bedeutung dieser Prinzipien, die die tiefgründigsten Verallgemeinerungen der historischen Erfahrung von Erkenntnis und Technik sind. Diese «Beweise» haben ein rein historisches Interesse. Die Konzeption der ersten Variante der zukünftigen analytischen Mechanik, der konsequente Verzicht auf die geometrische Methode als alleinige Lösungsmethode aller konkreten Aufgaben charakterisieren die an unzähligen Ergebnissen und Entdeckungen reiche Mechanik Eulers.

Im zweiten Teil des Artikels wird die Genesis des Prinzips der kleinsten Wirkung und die Rolle Eulers in der Formung seines wahrhaft wissenschaftlichen mathematischen Ausdrucks untersucht. Dieses Prinzip hat als erster Maupertuis verkündet und für endliche Dimensionen mathematisch

formuliert. Er hat jedoch seine Formulierung für stetige Prozesse nicht gefunden. Euler hat nicht nur eine Formulierung angegeben, sondern auch den engen Zusammenhang dieses Prinzips mit dem Gesetz der lebendigen Kräfte gezeigt. Er hat es auf die Lösung einer Reihe konkreter Aufgaben erfolgreich angewandt. Euler meinte jedoch, daß die Lösung von Problemen der Mechanik mit Hilfe des Prinzips der kleinsten Wirkung nur in dem Fall möglich ist, wenn die Lösung bereits nach der auf der kausalen Erklärung der Erscheinungen beruhenden direkten Newtonschen Methode gefunden ist. Demnach gibt nach Euler die Lösung einzelner Aufgaben der Mechanik mittels des Prinzips der kleinsten Wirkung lediglich die Möglichkeit, eine vorher mit Hilfe der Differentialgleichungen der Bewegung gefundene Lösung nach einem unabhängigen Verfahren zu erhalten. Euler hat die Frage nach dem Charakter der Variation beim Prinzip der kleinsten Wirkung nicht erörtert. Indem er bei der Darlegung der mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung zusammenhängenden Fragen eine Reihe teleologischer Formulierungen zuläßt, die ihrem Geist nach den Ansichten von Maupertuis nahe stehen, beschränkt Euler gleichzeitig die von Maupertuis verkündete Universalität dieses Prinzips. Die Eulerschen Formulierungen des Prinzips der kleinsten Wirkung durch die Bewegungsgröße und die lebendige Kraft für die Bewegung des materiellen Punktes

$$\delta \int mvds = \delta \int mv^2dt = 0,$$

die späterhin von Lagrange auf den Fall der Systeme verallgemeinert wurden, stellen mathematische Formulierungen des Prinzips den kleinsten Wirkung dar, die seine Befreiung von allen außerwissenschaftlichen, teleologischen Konzeptionen gestattet haben. In den Werken Eulers und Lagranges hat das Prinzip der kleinsten Wirkung die Gestalt eines wissenschaftlichen mathematisch ausgedrückten Prinzips der analytischen Mechanik angenommen.

М. Ф. СУББОТИН

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА [1]

I. ВВЕДЕНИЕ

Издание полного собрания сочинений Эйлера еще очень далеко от окончания, но план этого издания подробно разработан и опубликован [1]. Сочинениям, напечатанным при жизни Эйлера, или оставшимся после него в подготовленном для опубликования виде, отводится 72 тома, из которых 10 отведены целиком астрономическим работам Эйлера.

Даже не учитывая того, что многие работы Эйлера по механике, теории рефракции и геометрической оптике теснейшим образом связаны с астрономией, можно сказать, что едва ли кто из астрономов превзошел его по количеству работ. В этом отношении с Эйлером можно сопоставить, пожалуй, только Лапласа, полное собрание сочинений которого состоит из 14 томов, причем работы, не относящиеся к астрономии, занимают около трех томов.

Но не только объем работ Эйлера по астрономии вызывает удивление. Не меньше поражает их разнообразие и актуальность. А при более близком знакомстве с его астрономическими мемуарами больше всего приходится удивляться богатству и глубине тех новых идей, которые были внесены им в науку. Некоторые из этих идей настолько опережали науку его времени, что их плодотворность может быть полностью оценена лишь в наше время.

Мы не имеем еще достаточно разработанной истории астрономических теорий в XVIII в., лишь для некоторых разделов такой истории собран необходимый материал [2, 3]. Поэтому попытка дать полную историческую картину деятельности Эйлера в области астрономии была бы преждевременна. Переписка Эйлера, касающаяся его астрономических работ, еще не

[1] Расширенный текст доклада, прочитанного на Юбилейной научной сессии Отделения физико-математических наук и Отделения технических наук АН СССР в Ленинграде 18 апреля 1957 г. Доклад печатается в «Вопросах истории естествознания и техники», вып. 7.

изучалась сколько-нибудь систематически [2]. Между тем хорошо известно, что во времена Эйлера переписка между учеными была весьма существенным фактором в развитии науки. Изучение ее может быть полезно и в других отношениях. Мемуары ученых того времени, по своей форме подражавшие древним образцам, почти не содержат указаний на известную автору литературу. Обычно нет даже ссылок на предыдущие работы самого автора, и содержание их в той или иной мере повторяется. Вот почему переписка дает иногда интересные сведения, дополняющие опубликованные работы.

Астрономические работы Эйлера, опубликованные в мало доступных академических изданиях XVIII в., никогда не переиздававшиеся и не переводившиеся (за двумя небольшими исключениями, которые будут указаны в разделах III и VI), не очень много читались современниками, а потом были в значительной степени забыты. Не удивительно поэтому, что многое из идей и открытий Эйлера не связывается непосредственно с его именем. Огромное большинство астрономов знакомилось с ними в уже трансформированном виде по широко распространенным сочинениям Лапласа и Гаусса, много раз переиздававшимся и переводившимся, которые в течение целого столетия служили основными учебниками. Лишь для немногих были доступны те издания Петербургской и Берлинской академий, в которых напечатаны почти все астрономические работы Эйлера. Поэтому приоритет Эйлера во многих случаях оказался забытым и влияние его идей на дальнейшее развитие науки преуменьшалось.

Иная судьба постигла его математические работы, собранные в монументальные трактаты по дифференциальному и интегральному исчислениям и в течение многих лет служившие учебниками. Впрочем, следует сказать, что в процессе развития науки форма астрономических методов и теорий всегда была гораздо более изменчивой, нежели методов и теорий абстрактной математики, которые несравненно чаще выходили в окончательном виде из рук своих творцов, а потому и сохраняли их имя.

Изучение астрономических работ Эйлера важно и интересно не только с точки зрения истории, в частности ради разрушения неправильных пред-

[2] Насколько неполно эта переписка нам известна, показывает следующее. В книге A. Le Sueur «Maupertuis et ses correspondants», Paris, 1897, опубликовано 14 писем Эйлера к Мопертюи из числа найденных в семейном архиве замка d'Estouilly. Эти письма представляют наибольший биографический и общеисторический интерес. Но, как там указывается (стр. 176), в этом архиве имелась, кроме того, «обширная, еще неопубликованная переписка Эйлера по астрономическим и математическим вопросам».

ставлений (иногда глубоко укоренившихся), но может быть полезно и для современного астронома-теоретика. Многие из его идей заслуживают большего внимания и не всегда исчерпаны переоткрытиями позднейших ученых. К тому же сочинения Эйлера по астрономии отличаются теми достоинствами, какие присущи его математическим работам, и тем же педагогическим мастерством. Он умел доносить до читателя не только свою мысль в предельно ясной, отчеканенной форме, но и весь свой интерес к рассматриваемой задаче, весь тот энтузиазм, который она в нем возбуждала.

Задача, которую мы здесь ставим, заключается прежде всего в том, чтобы дать ясное представление о содержании всех без исключения работ Эйлера по астрономии и по возможности выявить тот интерес, который они могут представить для астронома-теоретика.

Как это ни удивительно, астрономические работы Эйлера до сих пор не подвергались сколько-нибудь систематическому изучению. Даже классификации их, будучи основаны лишь на названиях, не всегда являются удовлетворительными. Лучшей является классификация, принятая в указанном выше плане издания полного собрания сочинений [1], но и она не может служить основой для изучения трудов Эйлера, поскольку заключается в разделении этих трудов на слишком крупные разделы; внутри же каждого такого раздела труды расположены просто в хронологическом порядке.

Разнообразие тематики работ Эйлера поразительно даже в условиях той далекой эпохи, когда астрономия еще не была так дифференцирована, как в наше время. Однако подавляющее большинство его работ посвящено вопросам теоретической астрономии, т. е. тому разделу астрономических наук, в котором изучаются космические следствия закона всемирного тяготения и который называется также, по почину Лапласа, небесной механикой.

Одна из причин этого заключалась, конечно, в том, что основные проблемы теоретической астрономии, связанные с утверждением закона Ньютона, как точнейшего закона природы, в XVIII в. являлись актуальнейшими вопросами естествознания. Эти проблемы, кроме того, имели первостепенное практическое значение, поскольку усовершенствование теории движения Луны было исключительно важно для мореплавания С другой стороны, именно в области теоретической астрономии только что созданный и быстро развивавшийся математический анализ мог собрать наиболее обильную жатву.

Работы Эйлера в области теоретической астрономии наиболее многочисленны и наиболее интересны для современного читателя. Открытые им в этой области новые пути определили более чем на целое столетие вперед ход развития этой науки и ее современные формы. Но некоторые из идей Эйлера слишком опережали свое время и поэтому были основательно забыты. Лишь в самое последнее время, в связи с глубоким преобразованием всей вычислительной техники, наука снова пришла к этим идеям, столь ясно формулированным, как увидим дальше, еще Эйлером.

Таковы те причины, по которым предметом этой статьи являются в основном работы Эйлера в области теоретической астрономии. Но многое в этих работах делается более понятным, если не упускать из вида и другие астрономические занятия Эйлера, как уже было отмечено, весьма разнообразные. Поэтому, раньше чем переходить к подробному рассмотрению работ Эйлера по теоретической астрономии, мы начнем с краткого общего обзора его астрономической деятельности. Здесь, так же как и в каждом разделе, посвященном отдельным вопросам теоретической астрономии, мы будем придерживаться в основном хронологического порядка.

Во всех тех случаях, когда, не удлиняя изложения, можно будет приводить высказывания самого Эйлера, мы будем пользоваться этой возможностью.

II. ОБЩИЙ ОБЗОР АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЭЙЛЕРА

Заниматься астрономическими вопросами Эйлер начал очень рано, еще во время своего первого пребывания в Петербурге (1727—1741). Помимо работ по теории невозмущенного движения и по вычислению притяжения, производимого эллиптическим сфероидом, которые будут указаны дальше, в разделах III и X, в это время им были опубликованы следующие работы:

№ 1. «Решение астрономической задачи о нахождении по трем высотам звезды и соответствующим промежуткам времени высоты полюса и склонения звезды» [4].

№ 2. «Метод вычисления меридианной поправки» [5].

№ 3. «Объяснение явлений, происходящих от распространения света с конечной скоростью» [6].

№ 4. «Метод знаменитейшего мужа Леонгарда Эйлера для нахождения градуса земного меридиана, а также параллели из измерений, выполненных знаменитейшим Мопертюи с его сотрудниками» [7] (напечатано как часть работы Х. Н. Винсгейма).

№ 5. «Исследование физических причин морских приливов и отливов» [8].

Работа № 1, напечатанная в 1735 г. [4], может рассматриваться как начало астрономической деятельности Эйлера. Она посвящена задаче практической астрономии, сильно занимавшей в то время Петербургскую академию. В том же томе «Комментариев» напечатаны еще две статьи (Ф. К. Майера и Г.-В. Крафта), в которых эта работа подробно рассматривается. Решение, даваемое Эйлером, является наиболее прямым с точки зрения сферической тригонометрии, но чисто абстрактным, не учитывающим реальные условия получения исходных величин из наблюдений. Таковы же, впрочем, и решения двух других авторов. Анализ влияния ошибок исходных данных на результаты, а также точности, даваемой теми или иными формулами (при вычислении с фиксированным числом знаков), появляется в науке лишь в начале XIX в. главным образом в работах Гаусса и Бесселя.

Интересно отметить, что 40 лет спустя Эйлер еще раз вернулся к этой задаче [9] и дал новый, весьма изящный способ для решения той системы тригонометрических уравнений, в которой она приводится.

Работа № 2, напечатанная в 1741 г. [5], также посвящена вопросу наблюдательной астрономии — вычислению поправки, которую надо придать к полусумме тех моментов, когда Солнце имело одинаковую высоту (по обе стороны меридиана), для получения момента прохождения Солнца через меридиан. Такая поправка, зависящая от изменения склонения Солнца за промежуток времени, разделяющий моменты его одинаковой высоты, вычислялась раньше лишь приближенно. Эйлер отмечает важность использования анализа бесконечно малых для решения этого вопроса и дает способ точного вычисления искомой поправки. Свой метод он иллюстрирует многочисленными примерами.

С точки зрения истории развития астрономических методов интересно сопоставить решение Эйлера с решением, данным несколько позднее (1747) Даламбером.

На работе № 3, в которой даются основы теории аберрации [6], мы не будем останавливаться, так как в следующем разделе будет рассмотрена более полная работа Эйлера на ту же тему.

Работа № 4, выполненная в 1740 г. и опубликованная в 1750 г. [7], представляет вклад Эйлера в построение основных геодезических таблиц, дающих длину градуса меридиана и параллели под разными широтами. Эти таблицы были предназначены для употребления при начатых тогда в России обширных геодезических работах. Первая часть таблиц, основанная на предположении о строго сферической форме Земли, была составлена Х. Н. Винсгеймом. Вторая часть, составленная Эйлером, дает таблицы для сфероида, выведенного им из измерений Мопертюи в Лапландии и из измерений во Франции, и имеющего сжатие, равное $^1/_{183}$.

Эйлер не останавливается на методах вычисления даваемых им таблиц. Он ограничивается лишь подробной инструкцией для пользования ими.

Работа № 5 о морских приливах [8], получившая премию Парижской академии в 1740 г., явилась весьма существенным этапом в создании такой теории приливов, которая могла бы объяснять и предсказывать наблюдаемые явления. Эйлер не только развил так называемую статическую теорию приливов, намеченную в общих чертах Ньютоном, но и начал разработку гораздо более полной динамической теории, учитывающей инерцию водных масс и изучающей колебания их. Интересно отметить, что на тему, предложенную Парижской академией, наряду с Эйлером представили мемуары (также премированные) такие крупные ученые, как Даниил Бернулли и Маклорен.

Заслуживает быть отмеченной еще одна работа этого периода, хотя и не имеющая непосредственного отношения к астрономии:

№ 6. «Определение степени тепла и холода в различных местах Земли и в различное время» [10].

В этой работе Эйлер развивает с большой полнотой теорию астрономического климата, т. е. климата, обусловленного одной только прямой инсоляцией.

Обратимся теперь к следующему периоду деятельности Эйлера, совпадающему приблизительно с его пребыванием в Берлине (1741—1766). За это время Берлинской академией было опубликовано 127 сочинений Эйлера, Петербургской — 109 и несколько мемуаров, написанных на соискание премии Парижской академии, были опубликованы в ее изданиях. Среди этой исключительной по своей интенсивности и разнообразию деятельности астрономические работы занимают весьма видное место.

В теории невозмущенного движения Эйлер перешел от изучения гелиоцентрического движения к гораздо более трудным задачам нахождения орбиты светила по наблюдениям, произведенным с поверхности Земли, движущейся вокруг Солнца. Данный им метод вычисления кометных орбит был широко применен (прежде всего Лекселем) к изучению движения многих комет. Открытие «уравнения Эйлера», характеризующего параболическое движение, явилось основой всего дальнейшего прогресса в этой области.

Но еще больше работ Эйлер посвятил в эти годы разработке теории возмущенного движения. Казавшееся сначала невозможным объяснение движения лунного перигея и неправильностей в движениях Юпитера и Сатурна делало вопрос о возмущениях, производимых притяжением одного тела в движении другого, исключительно важным. И если первые шаги здесь были сделаны Даламбером и Клеро, то широкая планомерная разработка теории возмущенного движения является заслугой Эйлера. Именно в эти годы Эйлер создал метод вариации элементов, положенный в основу теорий движения планет; он указал далее путь для разложения пертурбационной функции и дал первые примеры такого разложения; он дал, наконец, первые примеры весьма эффективных промежуточных орбит, отличных от кеплерова эллипса.

Одновременно с Даламбером Эйлер стал разрабатывать теорию суточного вращения Земли, возмущаемого притяжением Луны и Солнца. Но он пошел гораздо дальше, опираясь на созданную им механику твердого тела.

Не останавливаясь здесь на всех этих работах, подробно рассматриваемых в дальнейшем, обратимся к работам Эйлера в других областях.

Рассмотрим работы по сферической астрономии и примыкающим к ней вопросам.

Отступая несколько от хронологической последовательности, отметим прежде всего две статьи:

№ 7. «Основы сферической тригономерии, полученные методом наибольших и наименьших» [11].

№ 8. «Основы сфероидической тригонометрии, полученные методом наибольших и наименьших» [12].

Их значение в истории науки весьма велико, несмотря на скромную, на первый взгляд, цель — получить уже известные формулы иным путем. В работе № 7 Эйлер развивает сферическую тригонометрию как геометрию сферы, исходя из экстремальных свойств дуг больших кругов. В работе № 8 тот же метод применяется к созданию геометрии на поверхности сжатого эллипсоида вращения, в которой роль прямых играют геодезические линии, являющиеся кратчайшими расстояниями между двумя точками. Таким путем, совершенно новым и весьма эффективным, получаются формулы, служащие для решения основных задач высшей геодезии. Практическая ценность этих формул иллюстрируется многими примерами.

К рассматриваемому нами периоду относятся также работы Эйлера, посвященные вопросам учета параллакса и аберрации:

№ 9. «Мемуар о влиянии немгновенного распространения света на видимые положения как планет, так и комет» [13].

№ 10. «О параллаксе Луны как в ее высоте, так и в азимуте, в предположении сфероидической формы Земли» [14].

Работа № 9 является дальнейшим развитием метода исправления наблюдений за аберрацию, данного в работе № 3. Эйлер дает точные определения видимого и истинного положения светила. Чтобы получить поправки, которые нужно прибавить к долготе и широте видимого положения для получения координат истинного положения, он выполняет две операции. Во-первых, сложение скорости света со скоростью Земли по правилу параллелограмма дает ему то истинное положение планеты (или кометы), которое она имела бы, будучи неподвижной по отношению к Солнцу. Во-вторых, он вычисляет смещение планеты за время, в течение которого свет доходит до наблюдателя. Но в то время, как в работе № 3 движение Земли и планеты предполагались круговыми, в этом мемуаре Эйлер рассматривает случай эллиптического движения Земли и планеты, а также случай параболического движения кометы. Полученным Эйлером правилам для освобождения наблюдений от влияния аберации Гаусс впоследствии (1809) придал ту несколько измененную форму, в которой они применяются и сейчас.

Рассматриваемый мемуар № 10 содержит решение другой актуальной в то время задачи сферической астрономии. По словам Эйлера, Мопертюи первый стал рассматривать вопрос об изменении, вносимом в величину параллакса Луны несферичностью Земли, но он рассматривал лишь параллакс по высоте и притом только в том случае, когда Луна находится в меридиане. Эйлер дает полную теорию вопроса, позволяющую находить параллакс как высоты, так и азимута для всех положений Луны. Помимо точных формул, вычисление по которым приходится вести последовательными приближениями, он дает решение и в форме разложений в ряды.

Таким образом, как учение об аберрации, так и учение о параллаксе были, по существу, закончены в этих мемуарах.

Несколько раньше рассмотренных работ № 9 и 10 Эйлером была выполнена работа, имеющая еще более тесную связь с наблюдательной астрономией. Она была написана на тему, предложенную Парижской академией на соискание премии 1745 г. Но так как в этом году ни одна из представленных работ не была премирована, то та же самая тема была объявлена и на 1747 г. с удвоенной премией. В этом году премия была разделена между Даниилом Бернулли и Эйлером. Эта работа, стоящая в творчестве Эйлера несколько особняком, носит длинное название:

№ 11. «Размышления о вопросе, предложенном знаменитейшей Парижской академией наук на 1747 год с удвоенной премией, как при помощи наблюдений, произведенных на море либо днем, либо ночью, либо в сумерки, наиболее удобно и надежно находить время» [15][3].

Чтобы обеспечить возможность измерения высот светил ночью, и вообще в тех случаях, когда горизонт не виден, Эйлер предлагает свободно подвешенный квадрант дополнить маятником, дающим на квадранте отсчет зенита. Этот маятник снабжен особым уровнем, позволяющим, по мысли Эйлера, учитывать изменения, вносимые качкой корабля. В работе подробно рассматриваются задачи сферической астрономии, связанные с вычислением часового угла по высотам светил.

Рассмотрим, наконец, работу

№ 12. «О рефракции света при прохождении через атмосферу, с учетом изменения как температуры, так и упругости воздуха» [16].

Обозначив через $\alpha = 3324/3325$ показатель преломления, испытываемого лучом света, входящим из пустоты в массу воздуха, имеющую некоторую стандартную плотность c, Эйлер получает дифференциальное уравнение светового луча в земной атмосфере в виде

$$d\varphi = \frac{a\alpha^{\frac{q-k}{c}} \sin\zeta\, dx}{x\left(x^2 - a^2\alpha^{\frac{2q-2k}{c}} \sin^2\zeta\right)^{1/2}}\,.$$

Здесь a — радиус Земли; x — расстояние рассматриваемой точки луча от центра Земли; через ζ и φ обозначены зенитные расстояния касательной к лучу, а через q и k — плотности атмосферы в точках, находящихся на расстояниях a и x от центра Земли.

Отметив, что было бы напрасно пытаться вывести из этого дифференциального уравнения общее выражение рефракции, одинаково пригодное для всех случаев, Эйлер переходит к изучению геометрических свойств светового луча; он находит, в частности, его первый и второй радиусы кривизны.

Делая различные гипотезы относительно строения атмосферы, Эйлер дает соответствующие выражения рефракции. Таким образом он выясняет зависимость рефракции от давления и температуры воздуха в месте наблюдения. Он показывает, что для зенитных расстояний, не превосходящих 70°, вычисление рефракции вполне надежно, даже при недостаточном знании строения атмосферы.

[3] Работа напечатана здесь с указанием девиза, но без имени автора — «который себя еще не назвал» (p. IV). Относительно принадлежности ее Эйлеру см.: Leonhardi Euleri, Opera Minora Collecta, т. I, Petropoli, 1849, p. XXV.

Вопросы физической природы небесных тел немало занимали Эйлера, хотя многие из них находились тогда еще вне досягаемости научных методов.

В 1745—1746 гг. им были опубликованы две работы:

№ 13. «О причине Зодиакального света» [17].

№ 14. «Физические изыскания о причине хвостов комет, полярных сияний и Зодиакального света» [18].

После критического разбора существовавших в его время гипотез Эйлер приходит к заключению, что хвосты комет, полярные сияния и зодиакальный свет вызываются одной и той же причиной — давлением световых лучей на атмосферы небесных тел. Он дает подробно развитую теорию образования кометных хвостов, объясняющую их искривленную форму, наличие нескольких хвостов и другие явления. Полярные сияния, производимые, по мнению Эйлера, частицами земной атмосферы, отброшенными солнечными лучами на высоту около 180 *км* (высоту атмосферы тогда оценивали в 6—8 *км*), он уподобляет кометным хвостам: «В самом деле, хвост кометы должен производить для наблюдателя, помещенного на ее поверхности на полусфере, противоположной Солнцу, явления, очень похожие на полярные сияния». Наконец, вытянутая в плоскости солнечного экватора форма зодиакального света объясняется тем, что очень сильное световое давление существенно уменьшает притяжение, производимое Солнцем на частицы атмосферы, вследствие чего в плоскости экватора особенно проявляется действие центробежной силы.

Отметим, далее, работу

№ 15. «Об атмосфере Луны, доказанной последним кольцеобразным затмением Солнца» [19][4].

Тщательный анализ наблюдений кольцеобразного затмения привел Эйлера к заключению, что преломление света в лунной атмосфере ощутимо увеличивает диаметр солнечного диска во время кольцеобразной фазы затмения, хотя, как он признает, точно измерить это увеличение еще не удалось. Эйлер оценивает увеличение солнечного диаметра в 20″ и заключает отсюда, что горизонтальная рефракция на Луне несколько превосходит 10″. Он отмечает далее, что существовавшие в то время методы микрометрических измерений не достаточно точны, чтобы обнаружить такую рефракцию при наблюдении покрытий звезд. Между тем «самые здравые

[4] Была опубликована также оставшаяся после Эйлера рукопись этой статьи на латинском языке: «De atmosphera lunae ex eclipsi solis annulari evicta». Leonhardi Euleri Opera Postuma, т. II, Petropoli, 1862, pp. 391—401.

принципы физики ставят существование лунной атмосферы вне всякого сомнения».

Укажем, наконец, весьма обстоятельную работу Эйлера по теоретической фотометрии:

№ 16. «Размышления о различных степенях светимости Солнца и других небесных тел» [20].

В работе № 16 даются прежде всего точные формулы, выражающие освещенность поверхности, производимую однородной светящейся сферой. Решается частная задача об освещении светящейся сферой несветящейся сферической поверхности. Полученные результаты применяются к вычислению сравнительной яркости Солнца, Луны и планет.

Опираясь на наблюдения Бугера, Эйлер находит, что, приняв силу света Солнца равной 10^{12}, для полной Луны будем иметь 2 675 000, а сила света Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера и Сатурна во время их наибольшей яркости выразится соответственно числами 303, 860, 88, 58 и 3.

Второй петербургский период жизни Эйлера (1766—1783) был отмечен также весьма интенсивной астрономической деятельностью, тем более удивительной, что уже в начале этого периода Эйлер почти полностью потерял зрение (на один глаз он ослеп примерно в 1735 г.).

В теории невозмущенного движения Эйлер продолжал заниматься улучшением способов нахождения кометных орбит. При содействии Лекселя, бывшего в то время адъюнктом Петербургской академии, он выполнил обширную работу по вычислению эллиптической орбиты кометы 1769 г.

Обширные многолетние работы по теории движения Луны были до известной степени завершены опубликованием фундаментального трактата и новых таблиц движения Луны. Эйлером были начаты также исследования по применению основных идей, положенных им в основу теории движения Луны, к изучению движения планет. Такая возможность была заново открыта и успешно использована в середине XX в.

Не останавливаясь пока подробно на этих работах, обратимся к тем, о которых нам не придется говорить впоследствии.

Отметим, прежде всего, участие Эйлера в обработке организованных Петербургской академией наблюдений прохождения Венеры по диску Солнца, имевшего место 3 июня 1769 г. Наблюдение этого редкого явления имело в то время исключительно большое значение для уточнения величины солнечного параллакса — одной из важнейших астрономических постоянных. Так как для вывода солнечного параллакса важно иметь наблюдения, произведенные в точках земной поверхности, по возможности удаленных друг от друга, то Академией были направлены экспедиции в такие далекие и труднодоступные места, как Кольский полуостров, Якутск, Оренбург, Орск и Гурьев. Наблюдения прохождения Венеры, а также происходившего в тот же день затмения Солнца были удачны. Затмение Солнца обеспечивало решение такой исключительно тогда трудной задачи, как нахождение точных долгот тех мест, в которых наблюдалось прохождение Венеры. Руководство обработкой астрономических наблюдений было поручено Эйлеру.

Результаты обработки, опубликованные в виде обширного специального тома «Новых Комментариев Петербургской академии наук», содержат две статьи Эйлера:

№ 17. «Метод получения параллакса Солнца из наблюдений прохождения Венеры по диску Солнца» [21].

№ 18. «Метод получения из наблюдений солнечного затмения, произведенных в нескольких местах, элементов движения Луны и точных долгот этих мест» [22].

Следует заметить, что полная теория предвычисления прохождения Венеры и использования такого прохождения для нахождения параллакса Солнца была незадолго до этого опубликована Лагранжем [23]. Но теория Лагранжа носит общий характер, а данный им способ вычисления параллакса по наблюдениям, сделанным в трех точках земной поверхности, имеет только теоретический интерес. Эйлер же подходит к вопросу с чисто практической стороны и указывает наиболее удобный путь для вычисления коэффициентов условных уравнений, дающих поправки параллакса и элементов орбит Земли и Венеры.

Укажем, далее, небольшую работу

№ 19. «О быстрейшем прохождении звезды между двумя заданными альмукантаратами, при любой высоте полюса» [24].

Здесь решается следующая чисто геометрическая задача: каково должно быть склонение звезды, чтобы отрезок ее суточной параллели, заключенный между двумя заданными альмукантаратами, был наименьший. Эйлер показывает, что искомое склонение δ дается формулой

$$\sin\delta = \sin\varphi\,\frac{\cos\frac{1}{2}(z_2+z_1)}{\cos\frac{1}{2}(z_2-z_1)},$$

где φ — широта места, а z_1 и z_2 — зенитные расстояния альмукантаратов.

О том, в связи с какими астрономическими вопросами была поставлена эта задача, не говорится.

Следующими по времени опубликования являются статьи

№ 20. «О видимой фигуре кольца Сатурна при любом его положении относительно Земли» [25].

№ 21. «О появлении и исчезновении кольца Сатурна» [26].

Предполагая, что движение Сатурна происходит в плоскости эклиптики (это не может внести заметных изменений в видимую нами форму кольца), Эйлер находит положение и размеры того эллипса, который является видимой фигурой кольца. Простота окончательных формул дает ему повод сделать следующее замечание: «Решение этой задачи весьма замечательно тем, что путем очень сложных выкладок мы пришли в конце концов к весьма простым формулам; нет поэтому никакого сомнения, что существует другой, гораздо более простой путь для получения решения, как это легко можно было предвидеть; не стыдно, однако, было изложить и только что данное решение, поскольку в нем применяются достойные внимания приемы, могущие принести огромную пользу в других изысканиях». После этого Эйлер излагает на четырех страницах гораздо более простое решение, полнее использующее специфические особенности задачи.

В работе № 21 очень подробно рассматриваются условия, при выполнении которых Земля оказывается в плоскости кольца.

Обратимся теперь к следующей статье, показывающей, насколько Эйлер до конца жизни сохранял интерес к чисто практическим вопросам:

№ 22. «О влиянии рефракции на наблюдения земных объектов» [27].

В вводной части этой статьи выводится дифференциальное уравнение светового луча, распространяющегося в земной атмосфере. Атмосфера предполагается состоящей из концентрических сферических слоев постоянной плотности. Дифференциальное уравнение светового луча позволяет легко найти его кривизну. Оказывается, что для тех расстояний, с которыми приходится иметь дело на практике, эту кривизну можно считать постоянной, т. е. луч света можно принимать за дугу круга, «а это дает нам очень простой способ для решения всех вопросов, возникающих при наблюдениях такого рода».

В следующем разделе дается применение этой теории к исправлению результатов нивелирования, т. е. к тому случаю, когда зенитное расстояние наблюдаемого объекта равно 90°. Здесь дается таблица поправок для расстояний от 100 до 4000 туазов.

В третьей части постоянство кривизны светового луча используется для исправления угловых высот земных объектов. Последняя часть работы посвящена вопросу о более точном интегрировании уравнения светового луча и о тех изменениях, которые могли бы понадобиться в только что изложенных упрощенных методах вычисления рефракционной поправки для очень больших расстояний.

Вскоре после этих работ Эйлер еще раз вернулся к теории суточного параллакса, развитой им в 1750 г. в работе № 10, и посвятил ей обстоятельную статью:

№ 23. «Теория параллакса с учетом сфероидической формы Земли» [28].

Следующая небольшая работа имеет также чисто практическую направленность:

№ 24. «О нахождении долготы места из наблюденного расстояния Луны от известной звезды» [29].

Статья начинается решением основной задачи: «Зная где-либо наблюденное расстояние Луны от какой-нибудь неподвижной звезды, а также высоту Луны и высоту звезды, найти истинное геоцентрическое расстояние, т. е. такое, какое видел бы наблюдатель, помещенный в центре Земли». После этого на примере показывается, как, сравнивая найденное геоцентрическое расстояние с вычисленными для двух моментов по времени основного меридиана, можно найти время основного меридиана для момента наблюдения; а следовательно, и долготу места наблюдения.

В конце своей жизни Эйлер еще раз вернулся к теории приливов, которой была посвящена одна из его ранних работ (№ 5). Располагая теперь удобной формой уравнения гидростатики и методом разложения пертурбационной функции по полиномам, получившим впоследствии название полиномов Лежандра, Эйлер дал более простое и более полное решение основной задачи статической теории приливов в мемуаре:

№ 25. «О равновесии моря под действием сил Солнца и Луны» [30].

Нам остается указать еще мемуар, посвященный Эйлером теории затмений:

№ 26. «О предвычислении солнечных затмений при помощи проектирования» [31].

Изложенный здесь метод является, по-видимому, первым чисто аналитическим методом, правда еще не вполне разработанным во всех технических подробностях.

III. НЕВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ОРБИТ

Законы невозмущенного движения планет, т. е. того движения, которое имела бы каждая планета, если бы других планет не было, были установлены Кеплером (1609) и Ньютоном (1687). К тому времени, когда началась научная деятельность Эйлера, свойства невозмущенного движения, вытекающие из этих законов, были выяснены с достаточной для практических целей полнотою, но это было сделано синтетическими методами, в духе древних геометров. Между тем для подготовки успешной разработки неизмеримо более сложной проблемы изучения возмущенного движения было необходимо развить свойства невозмущенного движения аналитическими методами, воспользовавшись только что созданным и еще оформлявшимся исчислением бесконечно малых. Полное решение этой задачи было дано Эйлером несколько позднее — в работах, посвященных теории возмущений планет и Луны. В его первых работах № 27—29 по теоретической астрономии, представленных Петербургской академии в 1734—1735 гг., методы анализа бесконечно малых используются лишь для решения некоторых частных вопросов: например, для вывода уравнений Кеплера из закона площадей.

№ 27. «О движении планет и нахождении орбит» [32].

№ 28. «Нахождение орбиты Солнца» [33].

№ 29. «Решение некоторых астрономических задач» [34].

Работа № 27 начинается выводом основных соотношений между истинной, эксцентрической и средней аномалиями эллиптического движения. Придерживаясь еще древнего обычая, восходящего к Птолемею, Эйлер ведет здесь счет аномалий не от перигелия (как это стали делать во второй половине XVIII в.), а от афелия.

Для решения уравнения Кеплера

$$x = V + v \sin V,$$

где x — средняя аномалия; V — эксцентрическая; v — эксцентриситет, Эйлер считат наиболее удобным применение формулы

$$V = x - v \sin (x - v \sin (x - v \sin (x - \text{etc}.$$

т. е. способ итерации. Для вычисления истинной аномалии z, наряду с обычными формулами

$$\cos z = \frac{\cos V + v}{1 + v \cos V}; \quad \sin z = \frac{(1 - v^2)^{1/2} \sin V}{1 + v \cos V},$$

им широко применяется ряд

$$z = V - \frac{v}{1.1} \sin V + \frac{v^2}{2.2} \sin 2V - \frac{v^3}{3.4} (\sin 3V + 3 \sin V) +$$
$$+ \frac{v^4}{4.8} (\sin 4V + 4 \sin 2V) - \frac{v^5}{5.16} (\sin 5V + 5 \sin 3V + 10 \sin V) + \ldots$$

В первой части работы рассматривается и иллюстрируется примерами употребление этих формул для решения прямой задачи, т. е. для нахождения координат планеты по заданным элементам орбиты. Во второй части решается обратная задача: зная углы между тремя радиусами-векторами планеты и соответствующие интервалы времени, найти эксцентриситет и положение линии апсид. Эйлер указывает путь для составления точных уравнений, решающих эту задачу. Но ввиду сложности этих уравнений он предпочитает пользоваться приближенным решением, основанным на употреблении только что указанного ряда. В работе № 28 этот метод применяется для получения элементов орбиты Солнца.

В небольшой заметке (№ 29) даются приближенные формулы, связывающие эксцентриситет орбиты с наибольшим значением уравнения центра, а также позволяющие вычислить среднюю аномалию, соответствующую этому наибольшему значению.

В 1746 г. среди статей, в которых давался обзор научных достижений, Берлинская академия опубликовала заметку:

№ 30. «О новых астрономических таблицах для вычисления положения Солнца» [35].

В ней говорится о том, как еще много оставляют желать существующие таблицы Солнца, между тем они исключительно важны, поскольку являются основой изучения движения всех небесных тел. Отмечается далее, что все методы, которыми пользовались для составления таких таблиц, являются только приближенными, но что «г-н Эйлер нашел метод, не требующий никаких приближений и при помощи которого можно с геометрической строгостью найти положение и форму эллипса, по которому Земля или любая другая планета движется вокруг Солнца. Он подробно изложен в VII томе «Комментариев» Петербургской академии».

Далее довольно подробно описываются таблицы, составленные Эйлером для невозмущенного движения центра инерции системы, состоящей из Земли и Луны, вокруг Солнца и для поправок, позволяющих учитывать положение Земли относительно этого центра инерции.

Среди рукописей, оставшихся после Эйлера и опубликованных лишь в 1862 г., мы находим статью, являющуюся введением к таким таблицам:

№ 31. «Новые астрономические таблицы для вычисления положения Солнца» [36].

После обстоятельного исторического обзора Эйлер дает в этой работе изложение вычислений, произведенных им для нахождения элементов орбиты Земли, но построенные с этими элементами таблицы здесь не приводятся. Они были опубликованы отдельно [37].

К рассматриваемому циклу работ относится еще

№ 32. «Мемуар о наибольшем уравнении центра планет» [38].

В нем выводятся формулы, позволяющие находить наибольшее уравнение центра и связанных с ним величин. В теперешних обозначениях эти формулы таковы: для положения планеты, в котором уравнение центра, т. е. разность $v - M$ между истинной и средней аномалиями, имеет наибольшую величину, имеем

$$e \cos E = 1 - (1 - e^2)^{1/4}; \qquad e \cos v = -1 + (1 - e^2)^{3/4},$$

где e — эксцентриситет, E — эксцентрическая аномалия.

Отсюда Эйлер получает разложения

$$A = (v - M)_{\max} = 2e + \frac{11}{48} e^3 + \frac{599}{5120} e^5 + \ldots,$$
$$e = \frac{1}{2} A - \frac{11}{768} A^3 - \frac{587}{2^{16}.15} A^5 - \ldots,$$

которые в XVIII в. широко применялись для нахождения эксцентриситетов планетных орбит.

Мемуар заканчивается таблицей, дающей величину A и соответствующие значения E, v и r для $e = 0{,}00\ (0{,}01)1{,}00$.

Во всех указанных работах речь идет о невозмущенном движении по эллиптической орбите. Невозмущенное движение по параболической орбите Эйлер рассматривает в статье

№ 33. «О движении комет по параболическим орбитам, имеющим в фокусе Солнце» [39].

Эта статья была опубликована после его смерти (дата не указана). Общий характер изложения и применяемые в ней обозначения показывают, что она относится к значительно более позднему периоду деятельности Эйлера, нежели только что рассмотренные работы.

Содержание статьи понятно из перечисления решаемых в ней задач:

1. Зная параболическую орбиту кометы, найти для заданного момента ее гелиоцентрическое положение.

2. По трем заданным гелиоцентрическим положениям кометы найти ее орбиту.

3. Зная орбиту кометы, а также время прохождения через перигелий, найти ее гелиоцентрическую долготу и широту для любого момента.

4. По двум данным гелиоцентрическим положениям кометы найти наклон ее орбиты и долготы узлов.

5. Зная для времени, предшествующего или следующего за моментом прохождения кометы через перигелий на k суток, ее угловое расстояние (видимое из Солнца) от перигелия, равное v, найти такое же угловое рас-

стояние для момента, отстоящего от момента прохождения через перигелий на $k + \varkappa$ суток.

Пользуясь основным свойством параболического движения

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = Nk,$$

где

$$N = 0\ 012\,163\,763\,303\, q^{-3/2},$$

причем q — расстояние перигелия от Солнца (числовой коэффициент теперь принимается равным 0,012 163 720 747), Эйлер находит искомое угловое расстояние кометы от перигелия

$$v + 2N\varkappa \cos^4 \frac{v}{2} - 4N^2\varkappa^2 \cos^7 \frac{v}{2} \sin \frac{v}{2} + \\ + \frac{4}{3} N^3\varkappa^3 \cos^{10} \frac{v}{2} \left(7 - 8 \cos^2 \frac{v}{2}\right) + \ldots$$

Он отмечает удобство этой формулы во всех случаях, когда комета значительно удалена от перигелия.

6. По долготам и широтам, данным для трех положений кометы, найти ее орбиту.

Решение, даваемое Эйлером, основано на применении только что указанного ряда.

Обратимся, наконец, к замечательной работе, опубликованной (без указания даты) после смерти Эйлера и носящей название

№ 34. «Механическая астрономия» [40].

Здесь собрано в систематизированном, улучшенном и дополненном виде многое из сделанного Эйлером в области теоретической астрономии.

Главы II и III этой работы посвящены решению задачи двух тел и весьма обстоятельному изучению невозмущенного движения как в случаях эллиптического и параболического движений, так и в случае гиперболического движения. В главе II рассматривается движение в плоскости орбиты; в главе III — движение в пространстве, отнесенное к произвольной инерциальной системе с началом в центре одного из двух тел.

Перейдем теперь к работам Эйлера, посвященным одной из астрономических задач, особенно занимавших ученых XVIII в.— задаче вычисления кометных орбит.

Как известно, уже Ньютон дал приближенное решение этой задачи для случая параболического движения. Но его решение, в основном графическое, не удовлетворяло астрономов, хотя практическая пригодность этого решения была установлена еще Галлеем, нашедшим методом Ньютона орбиты 26 комет. Открытие комет, движущихся по эллиптическим орбитам, заставило к тому же поставить более общую задачу о нахождении орбиты кометы без делаемого заранее предположения, что орбита параболическая. В создании эффективных методов решения этой общей и по тому времени весьма трудной задачи заслуги Эйлера весьма велики. Идеи, составляющие основу общеупотребительного теперь решения, восходят к Эйлеру. Эти идеи, развитые Ламбертом и, особенно глубоко, Лагранжем, дали Гауссу возможность создать метод вычисления орбит, который более столетия удовлетворял всем потребностям астрономов, и лишь в последние десятилетия подвергся некоторым изменениям.

Разработку проблемы нахождения орбит небесных тел из наблюдений Эйлер начал обширным мемуаром

№ 35. «Исправление астрономических таблиц при помощи геоцентрических положений планет» [41].

Здесь рассматривается задача исправления орбит больших планет при помощи выведенных из наблюдений геоцентрических положений планет. Такая задача не представляет принципиальных затруднений и требует лишь вычисления коэффициентов условных уравнений, т. е. частных производных геоцентрических координат по исправляемым элементам. Но здесь возникают трудности технического характера, связанные со сложностью дифференцируемых функций. Эйлер подробно рассматривает вычисление этих частных производных и иллюстрирует применение полученных формул многочисленными примерами.

Чтобы понять, какое значение имела эта работа для развития такого основного астрономического вопроса, как улучшение таблиц движения планет, нужно вспомнить, как поступали до Эйлера. Применявшиеся тогда способы сводились к подбору таких наблюдений, которые точно соответствовали бы моменту оппозиции и давали, поэтому, гелиоцентрическую долготу планеты; или таких, которые давали бы долготу в момент обращения в нуль широты планеты,— из них получалась долгота узла. Наконец, наблюдения, соответствующие моментам, разделенным промежутками времени, равными в точности сидерическому обращению планеты, давали возможность находить гелиоцентрические координаты планеты, поскольку положения Земли для этих моментов были известны.

Вместо таких примитивных методов, позволявших использовать лишь очень небольшую часть наблюдений, Эйлер ввел в практику общий метод, дающий возможность извлечь из наблюдательного материала все, что он может дать.

Вскоре после представления этого мемуара Эйлер опубликовал книгу № 36. «Теория движения планет и комет, содержащая удобный метод для нахождения из немногих наблюдений как планетных, так и кометных орбит. С приложением вычислений, дающих истинный путь кометы, наблюдавшейся в 1680 и 1681 годах, а также той, которая была видна недавно» [42].

Книга разделена на четыре части: 1) О движении планет и комет, обращающихся вокруг Солнца; 2) Исследование движения кометы, наблюдавшейся в 1680—81 годах; 3) Исследование орбиты кометы, которая появилась в 1744 году; 4) Прибавление.

Первая часть, как и огромное большинство астрономических сочинений Эйлера, состоит из решения отдельных задач; причем решение каждой задачи (problema) сопровождается несколькими следствиями (corollarium) и одним или двумя добавлениями (scholium). Перечислим решаемые здесь задачи.

1) Дана площадь, описанная радиусом-вектором планеты или кометы за данный промежуток времени; найти параметр орбиты.

2) В коническом сечении известны параметр и расстояние вершины, ближайшей к фокусу, от этого фокуса; найти уравнение этого конического сечения в полярных координатах.

3) Даны два радиуса-вектора планеты или кометы, угол между ними заключенный и параметр орбиты; найти орбиту.

4) Дана орбита планеты или кометы; найти время, в течение которого истинная аномалия меняется от 0 до заданной величины.

Здесь одинаково подробно рассматриваются эллиптические, параболические и гиперболические орбиты.

Отметим, что в случае гиперболического движения Эйлер рекомендует пользоваться мореходными таблицами, дающими $\ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\,\omega\right)$ по аргументу ω.

5) По двум данным радиусам-векторам, углу между ними и промежутку времени, в течение которого планета или комета этот угол описывает, найти параметр орбиты и, тем самым, всю орбиту. Угол предполагается небольшой.

Для решения этой весьма важной задачи Эйлер вывел приближенную формулу, которая в наших обозначениях имеет вид

$$\sqrt{p} = \left(\frac{r_1 r_2}{\tau} + \frac{\tau}{6\sqrt{r_1 r_2}}\right) \sin 2f,$$

где r_1, r_2 и $2f$ — радиусы-векторы и угол между ними; $\tau = k(t_2 - t_1)$ —

соответствующий промежуток времени, умноженный на корень квадратный из постоянной тяготения k^2. Через p обозначен параметр орбиты.

Точное решение этой задачи было, как известно, дано Гауссом (1809) и является одним из его самых важных достижений.

6) Найти промежуток времени, которому соответствует данная истинная аномалия, если орбита кометы мало отличается от параболы.

7) Когда орбита кометы мало отличается от параболы, по промежутку времени, отделяющему рассматриваемый момент от момента прохождения через перигелий, найти истинную аномалию и радиус-вектор.

Две последние задачи решаются при помощи рядов, расположенных по степеням величины

$$\frac{q-p}{p}=\frac{q-q(1+e)}{q(1+e)}=\frac{-e}{1+e}.$$

8) В случае движения по эллипсу найти радиус-вектор и истинную аномалию для данного момента времени.

Задача решается обычным образом при помощи введения эксцентрической аномалии.

9) Та же самая задача в случае гиперболического движения.

10) Даны два близких положения планеты или кометы и соответствующий промежуток времени; требуется найти промежуточное положение для заданного момента времени.

Данное здесь решение этой задачи явилось отправным пунктом работ Ламберта, Лагранжа и Ольберса по теории вычисления орбит.

11) Даны сферические геоцентрические координаты трех положений планеты или кометы и геоцентрическое расстояние ее для момента среднего наблюдения; найти орбиту, по которой эта планета обращается вокруг Солнца.

Решение этой задачи Эйлер рассматривает весьма подробно, основывая его на приближенном решении задач 5 и 10. Точное решение задачи было впервые дано Гауссом.

12) По немногим наблюдениям кометы найти ее истинную орбиту.

Для решения этой завершающей задачи Эйлер предлагает следующий путь. Надо выбрать три близкие, по возможности равноотстоящие наблюдения и, взяв для среднего из них любое значение геоцентрического расстояния, найти орбиту, решая задачу 11. Если эта орбита хорошо представляет четвертое наблюдение (Эйлер рекомендует взять его возможно дальше от трех первых), то принятое значение геоцентрического расстояния соответствует действительности и задача решена. Если же имеются расхождения, то величину геоцентрического расстояния надо варьировать до тех пор, пока расхождения не исчезнут.

Данное Эйлером решение вполне эффективно, и приходится только удивляться, что оно не было использовано для вычисления орбиты Цереры, для которой, как известно, сначала безуспешно пытались найти круговую орбиту. Впрочем, примененный Гауссом метод был, пожалуй, ближе к методу Эйлера, чем к тому, который был потом опубликован в «Theoria motus».

Недостатком метода Эйлера является, во-первых, то, что он основан на употреблении четырех наблюдений, тогда как для решения задачи достаточно иметь только три; во-вторых, в этом методе приближенно находятся такие величины, для которых по тем же данным можно было бы найти точные значения. Это второе обстоятельство особенно существенно, так как неизбежные ошибки наблюдений и без того делают вычисление орбиты задачей очень деликатной даже теперь, а в XVIII в. ошибки наблюдений были во много раз больше.

Во второй и третьей частях рассматриваемого сочинения Эйлер применяет свой метод к вычислению орбит комет, наблюдавшихся в 1680 и в 1744 гг. Отметим, что для вычисления орбиты последней кометы он прибегает в конце концов к интерполяционному методу исправления всех шести элементов.

Четвертая часть книги «Прибавление» содержит решение трех задач:

1) В случае, когда известно положение линии узлов и наклон орбиты кометы, вычислить по наблюденным геоцентрическим долготе и широте кометы ее гелиоцентрические долготу и широту, а также расстояние кометы от Солнца.

2) По трем данным гелиоцентрическим положениям кометы найти ее орбиту, т. е. положение перигелия, расстояние его от Солнца и параметр орбиты.

Как уже было указано, для нахождения перечисленных элементов достаточно иметь только два положения кометы. Считая заданными три положения, Эйлер получает возможность решить задачу при помощи элементарных соображений.

3) Уже зная приближенно положения линии узлов и наклон орбиты кометы, найти ее истинную орбиту при помощи трех наблюдений.

Задача решается линейным интерполированием: долгота узла и наклон варьируются до тех пор, пока орбита (полученная приближенно при помощи двух предыдущих задач) не будет удовлетворять трем заданным наблюдениям.

«Прибавление» заканчивается применением только что изложенного метода к нахождению орбиты кометы 1744 г. Исходные значения для Ω и i взяты близкими к тому, что дал первый метод.

Во время сильно затянувшегося печатания только что рассмотренной книги Эйлером была опубликована еще одна работа по теории вычисления орбит, имевшая большое значение для дальнейшего развития науки и носящая скромное название

№ 37. «Определение орбиты кометы, которая наблюдалась главным образом в марте этого 1742 года» [43].

Мемуар начинается подробным изложением теории параболического движения. Среди многочисленных выводимых здесь формул мы находим и знаменитое уравнение Эйлера

$$6k(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} - (r_1 + r_2 - s)^{3/2}, \qquad (1)$$

где через r_1 и r_2 обозначены радиусы-векторы кометы в моменты t_1 и t_2, а через s — хорда, соединяющая их концы; k^2 — постоянная тяготения.

Это уравнение, выражающее интервал времени через сумму радиусов-векторов и хорду (и не заключающее элементов орбиты), является и по настоящее время основой вычисления параболических орбит. Оно открывает наиболее удобный путь для нахождения геоцентрических расстояний кометы в моменты наблюдений. Сам Эйлер не пошел этим путем; такая идея была выдвинута несколько позднее Ламбертом (1761); Ольберс придал ей практически удобную форму (1797), несколько улучшенную затем Гауссом (1813). Ламберту принадлежит также обобщение уравнения Эйлера на эллиптические и гиперболические орбиты. Орбита кометы 1742 г. находится рядом попыток, напоминающих методы, изложенные в книге № 36. Окончательная орбита (эллиптическая) получается из трех наблюдений способом интерполирования по всем шести элементам.

К рассматриваемому периоду, когда Эйлер особенно много занимался движением комет, относится издание им брошюры, предназначенной для широкого круга читателей:

№ 38. «Ответ на различные вопросы относительно строения, движения и действия комет.— Продолжение этого ответа» [44].

После возвращения в Петербург Эйлер опубликовал еще одну большую работу по вычислению кометных орбит:

№ 39. «Исследования и вычисления истинной эллиптической орбиты кометы 1769 года и ее периода обращения» [45][5].

---

[5] В своих ссылках на эту работу А. Лексель называет ее работой Эйлера.

Эйлер начинает с того, что путем интерполирования между результатами наблюдений получает три фиктивных наблюдения, разделенные интервалами, равными в точности одним суткам. При помощи этих трех фиктивных наблюдений он пробует вычислить параболическую орбиту. Для этого сначала вычисляется прямолинейная орбита, затем Эйлер пытается сместить среднее гелиоцентрическое положение кометы так, чтобы получить параболическую орбиту, удовлетворяющую всем трем наблюдениям. Но эти попытки терпят неудачу, и он бросает этот путь. Затем он обращается к способу, не менее странному с нашей точки зрения. Взяв два другие, также близкие между собою наблюдения, Эйлер из числа бесконечного множества параболических орбит, которыми можно удовлетворить этим двум наблюдениям, находит три орбиты, подчиненные некоторому дополнительному условию. После этого он пытается получить, при помощи интерполирования между этими тремя орбитами, такую орбиту, которая удовлетворяла бы третьему наблюдению. Но эти попытки оказываются, несмотря на различный выбор третьего наблюдения, мало удачными. Отсюда делается вывод, что орбита кометы не параболическая.

Во второй части, носящей название «Об истинном движении кометы», Эйлер идет аналогичным путем. Он находит сначала три конические сечения, точно удовлетворяющие двум взятым им наблюдениям и дающие для одного из этих наблюдений гелиоцентрическую долготу кометы, полученную в первой части при помощи параболической орбиты. Интерполируя между этими орбитами, он ищет такую орбиту, которая удовлетворяла бы третьему наблюдению. Отдавая себе отчет, насколько мало надежна полученная орбита, Эйлер находит для нее только два элемента: долготу узла Ω и наклон i.

В третьей части, озаглавленной «Более надежный и более общий метод для точного нахождения орбиты кометы», излагается метод вариации Ω и i, данный раньше в «Прибавлении» к книге № 36. И здесь этот метод применяется только к трем наблюдениям, хотя в нем можно использовать любое число наблюдений и тем повысить точность результатов.

Остается указать еще одну работу, опубликованную Эйлером незадолго до смерти:

№ 40. «Простой способ нахождения орбиты кометы, для которой можно дважды наблюдать прохождение через эклиптику» [46].

Мы только что видели, каким сложным делом было в XVIII в. вычисление кометной орбиты. Эйлер считает поэтому полезным разобрать случай, хотя и редко встречающийся в действительности, но замечательный тем, что параболическая орбита может быть получена в нем сразу, без тягостных проб.

Пусть α_1 и α_2—элонгации кометы от Солнца в те моменты, когда комета пересекает плоскость эклиптики, а r_1 и r_2— ее радиусы-векторы в эти моменты.

Легко видеть, что

$$r_1 = \frac{R_1 \sin \alpha_1}{\sin (\varphi + \alpha_1)}, \qquad r_2 = \frac{R_2 \sin \alpha_2}{\sin (\varphi + \theta - \alpha_2)}, \tag{2}$$

где R_1 и R_2 — соответствующие радиусы-векторы Земли; $\theta = L_2 - L_1$ — разность долгот Земли, а φ — неизвестный нам угол между радиусом-вектором Земли R_1 и линией узлов кометы.

С другой стороны, поскольку в рассматриваемом случае $s = r_1 + r_2$, уравнение Эйлера (1) принимает вид

$$6\tau = (2r_1 + 2r_2)^{3/2},$$
$$\tau = k(t_2 - t_1).$$

Подставив сюда выражения (2), получим уравнение

$$\frac{R_1 \sin \alpha_1}{\sin (\varphi + \alpha_1)} + \frac{R_2 \sin \alpha_2}{\sin (\varphi + \theta - \alpha_2)} = \sqrt[3]{\frac{9}{2} \tau^2}, \tag{3}$$

позволяющее найти φ. Этим задача нахождения параболической орбиты полностью решается.

Решение уравнения (3) Эйлер приводит при помощи подстановки

$$x = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega, \quad \omega = \varphi + \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2 + \theta)$$

к решению уравнения четвертой степени относительно x. Чтобы выделить соответствующий задаче корень этого уравнения, а также для нахождения наклона орбиты, нужно воспользоваться третьим наблюдением.

В связи с соотношением (1) обычно отмечается, что оно было открыто Эйлером, но никак им не использовано. Рассмотренная нами сейчас статья показывает, что это общепринятое мнение не соответствует действительности, хотя Эйлер и не извлек из этого соотношения все, что оно могло дать для столь занимавшей его задачи вычисления кометных орбит.

IV. ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛАНЕТ

Свои исследования по теории возмущенного движения — одной из важнейших научных проблем XVIII в., от решения которой зависело все дальнейшее развитие астрономических теорий,— Эйлер начал не с создания общих теорий, а с решения нескольких конкретных, особо актуальных задач. Из его работ, посвященных изучению отдельных случаев возмущенного движения небесных тел, мы рассмотрим сначала работы по теории движения планет.

Первыми среди таких работ были две работы, написанные на тему, которой Парижская академия придавала такое значение, что два раза подряд предлагала ее на соискание премии. Эти работы, премированные в 1748 и 1752 гг., носят названия:

№ 41. «Исследования по вопросу о неравенствах в движении Сатурна и Юпитера» [47].

№ 42. «Исследования неравенств Юпитера и Сатурна» [48].

Обратимся сразу к работе № 42, результаты которой далеко перекрывают то, что было сделано Эйлером в работе № 41. Чтобы были ясны задачи, стоявшие перед ним, воспроизведем полностью первый параграф, являющийся введением к этой работе.

«*О причине неравенств движения Юпитера и Сатурна.* Астрономические наблюдения обнаружили, что планеты Юпитер и Сатурн не следуют в своем движении законам, установленным Кеплером; это прежде всего относится к Сатурну, который отклоняется от них весьма чувствительно, особенно, когда эти две планеты находятся вблизи их соединения. Мы обязаны этим открытием наблюдениям, но это в то же время все, что мы можем от них ожидать, ибо очень похоже, что, как бы прилежно астрономы ни наблюдали эти неравенства, они никогда не дойдут до познания законов, ими управляющих и позволяющих предсказывать для каждого момента времени уклонение движения планет от законов Кеплера. Таким образом, только теория может руководить нами в этих изысканиях, и только из нее мы можем извлечь законы, которым подчинено движение этих двух планет, каким бы запутанным оно нам ни казалось. Нужно, таким образом, исходить из причины этих неравенств или, что то же самое, найти силы, которые производят в движении этих планет рассматриваемые неравенства.

Но теория Ньютона, устанавливающая всеобщее притяжение между небесными телами, нам сразу указывает силы, которые должны возмущать движение Юпитера и Сатурна; в самом деле, эти две планеты, превосходящие в несколько раз по своей величине все остальные, не могут не действовать достаточно заметно одна на другую, особенно, когда они близки к соединению. Нет поэтому ни малейшего сомнения, что взаимное притяжение этих двух планет является истинной причиной неправильностей, наблюдаемых в их движениях. Остается только узнать, подчиняется ли эта притягательная сила закону обратной пропорциональности квадратам расстояний, как предполагал Ньютон, или нет.

Действительно, раз этот закон столь плохо соответствовал движению апогея Луны, как это до сих пор приходилось думать, то мы были вправе сомневаться, что ему подчиняются силы, с которыми другие небесные тела действуют друг на друга. Но с тех пор как г-н Клеро сделал важное открытие, что движение апогея Луны вполне согласуется с ньютонианской гипотезой относительно закона притяжения, уже не остается ни малейшего сомнения в справедливости закона обратной пропорциональности квадратам расстояний. И поскольку этот закон столь точно представил, несмотря на все делавшиеся раньше возражения, движение Луны, можно смело утверждать, что Юпитер и Сатурн притягивают друг друга именно по этому закону; и что все неправильности, которые могли бы обнаружиться в их движении, обязательно должны быть следствием их взаимного притяжения. Вот в чем заключается истинная причина всех этих неправильностей, каков бы ни был их характер; и если выводы, которые были сделаны из теории всемирного тяготения, не оказались в достаточном согласии с наблюдениями, то мы всегда вправе больше сомневаться в правильности вычислений, нежели в справедливости теории. Ибо, несмотря на то, что эта теория легко дает нам дифференциальные уравнения движения планет, какие бы силы на них ни действовали, все же легко признать, если хоть немного заняться этими уравнениями, что решение их связано с очень большими трудностями. И какие бы предосторожности ни принимались в этой работе, все же мы получим лишь такие приближения, которые не дают возможности судить, насколько результат отклоняется от истины.

При таких трудных обстоятельствах не приходится удивляться, что Королевская академия наук не была вполне довольна работой по этому вопросу, которую она увенчала премией четыре года тому назад; хотя содержащиеся в ней выводы из теории всемирного тяготения стоили большого труда и большинство полученных неравенств оказались подтвержденными наблюдениями, все же автор далеко не исчерпал этот важный вопрос. В самом деле, метод, которым он пользовался для получения своих приближений, не только требует весьма тягостных вычислений, но и оставляет всегда сомнения в достаточности полученных результатов; поскольку число неравенств бесконечно велико, те, которые автор получил своим методом, зависят от неравенств, им отброшенных; а это делает полученные

RECHERCHES

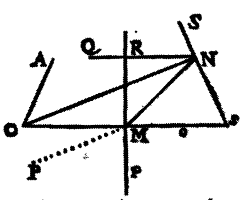
SUR

LES INEGALITÉS

DE JUPITER ET DE SATURNE.

PAR M. LEONARD EULER,

De l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celles de Londres, de Petersbourg, de Berlin, &c.



Cette Figure se rapporte à la page 6 de ce Mémoire.

A PARIS,

Chez PANCKOUCKE, rue & à côté de la Comédie Françoise.

M. DCC. LXIX.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

Титульный лист работы Эйлера «Recherches sur les inégalit de Jupiter et de Saturne».

величины неполными. Я постараюсь избавиться от этого недостатка, воспользовавшись методом, который мне представляется совершенно новым и который не смешивает так сильно вместе различные открываемые им неравенства. В то же время я считаю, что могу не заниматься нахождением неравенств в линии узлов и во взаимном наклоне орбит двух планет, потому что в упомянутой работе эта часть вопроса была, как мне кажется, вполне хорошо разрешена.»

Второй параграф посвящен выводу основных дифференциальных уравнений. Предполагая, что Юпитер и Сатурн двигаются в одной и той же плоскости, Эйлер определяет положение каждой планеты ее радиусом-вектором и долготой. Проектируя силы притяжения на радиус-вектор каждой планеты и на перпендикуляр к нему, он сразу получает четыре дифференциальные уравнения второго порядка, определяющие движение. Правые части этих уравнений просто выражаются через координаты планет и расстояние между ними.

В третьем параграфе излагается тот «совершенно новый» метод решения дифференциальных уравнений задачи, о котором говорилось во введении. Эйлер начинает следующим интересным замечанием: «Я должен прежде всего заметить, что мы ничего не выиграли бы, употребив какой угодно труд на интегрирование этих уравнений. С одной стороны, я сильно сомневаюсь, чтобы когда-либо был найден способ для этого; а с другой стороны, если бы даже нам посчастливилось вывести их интегралы, то эти интегралы были бы крайне сложны и не принесли бы почти никакой пользы для употребления в астрономии. Для этой цели их все равно пришлось бы заменять подходящими приближениями. Но если речь идет о приближенных выражениях, то их столь же легко можно получить непосредственно из дифференциальных уравнений».

Далее подробно рассматривается вопрос о выборе независимой переменной. Эйлер указывает на неудобства употребления в качестве таковой средней, эксцентрической или истинной аномалии одной из планет и приходит к мысли принять за независимую переменную угловое расстояние между Юпитером и Сатурном, т. е. угол ω между их радиусами-векторами. Этот угол он называет «новым видом аномалии». Сложная операция преобразования дифференциальных уравнений к новой независимой переменной выполняется Эйлером с исключительным искусством.

Переходя к решению полученных уравнений последовательными приближениями, Эйлер вводит новую идею, которая при всей своей простоте имела весьма важное значение как здесь, так и в создании теории движения Луны. Эта идея заключается в разделении возмущений на классы и в употреблении специальных приемов для нахождения возмущений каждого класса.

В рассматриваемой сейчас работе Эйлер начинает с нахождения тех неравенств, которые зависят только от угла ω, но не зависят от эксцентриситетов планетных орбит. Иначе говоря, он рассматривает такие движения Юпитера и Сатурна, которые в начальный момент были круговыми, а затем стали отличаться от круговых лишь под действием взаимного притяжения планет.

Приняв массы Юпитера и Сатурна равными соответственно $\mu = 1/1067$ и $\nu = 1/3021$ и положив радиус круговой орбиты, которую описывал бы Юпитер за время своего сидерического оборота, если бы не испытывал никаких возмущений, равным 1 000 000, Эйлер получил для радиуса-вектора и долготы Юпитера следующие выражения:

$$\begin{aligned} x &= 1\,000\,317 + 145\cos\omega - 621\cos 2\omega - 64\cos 3\omega - 17\cos 4\omega - \ldots, \\ \eta &= p - 91''\sin\omega + 226''\sin 2\omega + 19''\sin 3\omega + 3''\sin 4\omega + \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

а для соответствующих координат Сатурна:

$$\begin{aligned} y &= 1\,834\,027 + 1581\cos\omega + 283\cos 3\omega + 65\cos 3\omega + 20\cos 4\omega + \ldots, \\ \theta &= q - 12''\sin\omega - 32''\sin 2\omega - 6''\sin 3\omega - 2''\sin 4\omega - \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Через p и q здесь обозначены средние долготы этих планет. Вычисления проведены с точностью до первых степеней возмущающих масс.

Все эти результаты получены при помощи разложения возмущающих сил в ряды, основанного на употреблении формулы

$$\left(1 - \frac{2ce}{c^2 + e^2}\cos\omega\right)^{-3/2} = \alpha + \beta\cos\omega + \gamma\cos 2\omega + \delta\cos 3\omega + \ldots,$$

относительно которой Эйлер делает следующее замечание: «разложение этой иррациональности в ряд весьма пригодно для нашей задачи, ибо хотя этот ряд сам по себе мало сходящийся, однако изменения, которым он подвергается в процессе вычислений, делают его, как мы видим, столь сходящимся, что достаточно в нем взять пять первых членов; следующие делаются такими маленькими, как в расстояниях от Солнца x и y, так и в долготах η и θ, что можно, не делая заметной ошибки, обойтись без них.»

Очень интересны и следующие замечания, которыми Эйлер заканчивает параграф, посвященный выводу выражений (1) и (2): «Весьма также замечательно то, что если бы орбиты Юпитера и Сатурна не имели эксцентриситетов, неравенства в долготе Сатурна были бы так малы, что их едва можно было бы обнаружить наблюдениями; потому что, как мы видим, они лишь очень редко выходили бы за пределы полминуты. Но, в противовес этому, расстояние Сатурна от Солнца менялось бы больше, ибо в его соединениях с Юпитером, когда $\omega = 0$, расстояние было бы $= 1\,834\,027 + 2049$, а в оппозициях $= 1\,834\,027 - 1543$, так что в первом случае расстояние было бы увеличено на 1/900 часть, а во втором — уменьшено на 1/1200. Но еще более непонятно, что неравенства в движении Юпитера, зависящие от угла ω, оказываются гораздо значительнее неравенств Сатурна, хотя притягательная сила Юпитера была нами предположена втрое большей, чем для Сатурна...»

Переходя затем к нахождению неравенств Юпитера и Сатурна, зависящих от эксцентриситета Юпитера, Эйлер полагает

$$x = c(1 + u), \qquad y = e(1 + v),$$

где, согласно предыдущему

$$c = 1{,}000\,317, \qquad e = 1\,834\,027$$

а u и v — малые величины. Дифференциальные уравнения, определяющие их, он упрощает, отбрасывая члены третьей степени относительно u и v, или даже второй, если они уже содержат множителем одну из масс μ и ν.

Хотя уравнения нелинейные, Эйлеру удается усмотреть, какую форму должно иметь решение; это позволяет найти его способом неопределенных коэффициентов. В выражении для v особенно большим оказывается член вида $\alpha k \cos(\omega - r)$, где k — эксцентриситет Юпитера, r — его угловое расстояние от афелия, так что $\omega - r$ — угловое расстояние Сатурна от афелия Юпитера; α — некоторый коэффициент, определяющий вековое движение перигелия Юпитера. Подстановка в дифференциальные уравнения показывает, что этот коэффициент должен удовлетворять уравнению

$$\alpha(0{,}39264\,\mu - 0{,}53199\,\nu) - 0{,}0487\,\nu\alpha^2 = 0{,}22604\,\mu. \tag{3}$$

Таким образом, принимая вышеуказанные значения масс, Эйлер получает

$$16\alpha^2 - 192\alpha + 212 = 0$$

и берет $\alpha = 1{,}2303$. Для векового движения перигелия Юпитера это дало $9''$ в год, в хорошем согласии с тем, что тогда получалось из наблюдений.

После этого Эйлер выполнил, совершенно таким же образом, вычисление неравенств Юпитера и Сатурна, зависящих от эксцентриситета

Сатурна. В этом случае в выражении для u ведущую роль имеет член вида $\beta l \cos(\omega + s)$, где l — эксцентриситет Сатурна, а $\omega + s$ — элонгация Юпитера от афелия Сатурна, β — коэффициент, определяющий вековое движение перигелия Сатурна.

Вследствие вычислительных ошибок Эйлер получил для β уравнение

$$\beta(0{,}39264\,\mu - 0{,}53199\,\nu) - 0{,}22603\,\mu\beta^2 = 0{,}22416\,\nu. \qquad (4)$$

Между тем, как это можно усмотреть непосредственно из дифференциальных уравнений, определяющих u и v, уравнения (3) и (4) должны получаться одно из другого подстановкой $\alpha = 1/\beta$.

Эйлер указывает, далее, что значение β, получающееся из уравнения (4) при $\mu = 1/1067$ и $\nu = 1/3021$, оказывается мнимым. «Но если немного изменить значения μ и ν так, чтобы сделать корни равными, то мы получили бы приблизительно $\beta = \frac{1}{2}$; поэтому мне кажется, что мы не намного ошибемся, полагая $\beta = \frac{1}{2}$».

Вот каким удивительным образом Эйлер пытался выйти из затруднений, в которые завели его вычислительные ошибки.

Между тем развитая им здесь идея нахождения возмущенных значений эксцентриситетов и долгот перигелиев не только правильна, но и является, по существу, зародышем теории представления вековых возмущений в тригонометрической форме, с таким блеском развитой позднее (1774) Лагранжем.

Не будем останавливаться на дальнейшем содержании этого мемуара. В нем много любопытного, хотя главная цель — дать объяснение открытых наблюдениями больших неравенств в движениях Юпитера и Сатурна — осталась не вполне достигнутой. Мы знаем теперь, почему она не была достигнута: Эйлер ограничил точность своих вычислений членами второй степени относительно эксцентриситетов этих планет. Между тем те большие неравенства, которые безуспешно искал Эйлер, оказываются третьей степени относительно эксцентриситетов. Это стало ясно позднее (1787), когда Лаплас нашел, что среди возмущений третьей степени в долготах планет имеются члены вида

$$\frac{A_1}{(5n' - 2n)^2} \sin(5n' - 2n)\,t + \frac{A_2}{(5n' - 2n)^2} \cos(5n' - 2n)\,t, \qquad (5)$$

где $n = 299'',1283$, $n' = 120,4547$ — средние суточные движения Юпитера и Сатурна.

Несмотря на то, что коэффициенты A_1 и A_2, будучи третьей степени относительно эксцентриситетов, очень малы, возмущения (5) оказываются весьма значительными вследствие малости выражения

$$5n' - 2n = +4''0169,$$

квадрат которого стоит в знаменателе.

В долготах Юпитера и Сатурна получаются возмущения, равные, по вычислениям Хилла (1890), соответственно

$$422'' \sin(5n' - 2n)t + 993'' \cos(5n' - 2n)t$$

и

$$-1029'' \sin(5n' - 2n)t - 2418'' \cos(5n' - 2n)t.$$

Период этих возмущений больше периода обращения Сатурна приблизительно в 30 раз (так как $120'' : 4'' = 30$), т. е. составляет около 900 лет.

Хотя Эйлеру лишь с натяжкой удалось согласовать свои выводы с наблюдениями, тем не менее он заканчивает рассматриваемый мемуар выражением твердой уверенности в полной точности закона Ньютона. Он считает, что надо перестать заниматься выводом эмпирических формул, представляющих наблюдения, а надо стараться открыть все неравенства, вытекающие из закона всемирного тяготения. И если вывод этих неравенств будет вполне правильный, то не приходится сомневаться, что они будут согласны и с наблюдениями. Доказательством этого служит теория движения Луны: «теперь мы знаем, что чем более строго она согласована с законом Ньютона, тем лучше она представляет наблюдаемые явления». Эйлер выражает, в заключение, надежду, что развитый им здесь метод позволит довести до такого же совершенства и теорию движения планет. Эта надежда осуществилась полностью лишь в середине XX в., т. е. ровно через 200 лет, когда огромная работа по развитию тех идей, начало которым было положено в мемуарах Эйлера, завершилась построением теорий движения планет, находящихся в полном согласии с наблюдениями.

Третий большой мемуар Эйлера о планетных возмущениях непосредственно связан с темой, предложенной Парижской академией на соискание премии 1754 г. и касающейся усовершенствования теории движения Земли. В 1754 г. премия не была присуждена, поэтому та же тема была объявлена и на 1756 г. В этом году удвоенная премия была присуждена Эйлеру за обширную работу

№ 43. «Исследование возмущений, которые движение планет испытывает от их взаимодействия» [49].

Мемуар состоит из: 1) обширного предисловия, содержащего общедоступное обоснование необходимости создания гравитационной теории движения Земли; 2) первой части, в которой подробно развивается общий метод нахождения планетных возмущений; 3) второй части, «содержащей приложение Теории к движению Земли и ее возмущениям, происходящим от действия прочих планет»; 4) заключения.

Предлагаемый Эйлером в первой части мемуара метод нахождения планетных возмущений основан на особой форме дифференциальных уравнений движения точки. Положение точки определяется долготой, широтой и сокращенным расстоянием, т. е. проекцией радиуса-вектора на основную плоскость, а действующая на точку сила разлагается на компоненты по сокращенному расстоянию, по перпендикуляру к нему в основной плоскости и по перпендикуляру к этой последней. Уравнение второго порядка, относящееся к широте, заменяется, далее, двумя уравнениями первого порядка, определяющими наклон плоскости орбиты и долготу восходящего узла.

Далее рассматривается случай движения точки, когда основной силой является притяжение к началу координат, изменяющееся обратно пропорционально квадрату расстояния, а все остальные силы составляют лишь малую часть этой основной силы. Эйлер представляет движение эллипсом, элементы которого являются функциями времени, и составляет дифференциальные уравнения, определяющие параметр, эксцентриситет и возмущенное значение истинной аномалии.

Затем рассматривается разложение радикалов, входящих в выражения возмущающих сил, в тригонометрические ряды. Основной здесь является формула

$$(1-s\cos\eta)^{-\frac{3}{2}}=P+Qs\cos\eta+Rs^2\cos2\eta+Ss^3\cos3\eta+Ts^4\cos4\eta+\ldots,$$

$$P=1+\frac{3\cdot5}{2\cdot4}\,\frac{1}{2}\,s^2+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\,\frac{3}{8}\,s^4+\ldots,$$

$$Q=\frac{3}{2}\left(1+\frac{5\cdot7}{4\cdot6}\,\frac{3}{4}\,s^2+\frac{5\cdot7\cdot9\cdot11}{4\cdot6\cdot8\cdot10}\,\frac{10}{16}\,s^4+\ldots\right),$$

$$R=\frac{3\cdot5}{2\cdot4}\left(\frac{1}{2}+\frac{7\cdot9}{6\cdot8}\,\frac{4}{8}\,s^2+\frac{7\cdot9\cdot11\cdot13}{6\cdot8\cdot10\cdot12}\,\frac{15}{32}\,s^4+\ldots\right)$$

. . . .

Эйлер выводит ее при помощи формулы бинома и соотношений, выражающих степени косинуса через косинусы кратных углов. Далее он замечает, что эти ряды, будучи продолжены до бесконечности, становятся близкими к геометрической прогрессии со знаменателем s^2. Отсюда он заключает, что путем умножения на $(1-s^2)$ ряды можно сделать значительно лучше сходящимися. Так:

$$P(1-s^2)=1-\frac{1\cdot1}{4\cdot4}s^2-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{4\cdot4\cdot8\cdot8}s^4-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{4\cdot4\cdot8\cdot8\cdot12\cdot12}s^6-\ldots,$$

$$\frac{1}{2}Q(1-s^2)=\frac{3}{4}\left(1+\frac{1\cdot3}{4\cdot8}s^2+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4\cdot8\cdot8\cdot12}s^4+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{4\cdot8\cdot8\cdot12\cdot12\cdot16}s^6+\ldots\right)$$

. . . .

Он указывает, что нет надобности находить все эти величины при помощи рядов, так как по двум первым легко могут быть вычислены все остальные, поскольку имеют место соотношения

$$s^2R=4Q-3P,\qquad 3s^2S=8R-5Q,$$
$$5s^2T=12S-7R,\quad 7s^2V=16T-9S,$$

. . . .

Более того, второй коэффициент может быть получен из первого

$$Q=2P-s^{-2}\int_0^s Psds,$$

а первый может быть выражен через эллиптические интегралы.

Эти свойства коэффициентов P, Q, R,... явились тем источником, из которого развилась в XIX в теория гипергеометрических функций.

Затем разлагаются в тригонометрические ряды все выражения, входящие в дифференциальные уравнения. Здесь Эйлер ограничивается учетом лишь первых степеней эксцентриситетов возмущаемой и возмущающей планет. Далее выполняется интегрирование, что дает аналитические выражения для возмущенных значений элементов орбит. В заключение дан систематический обзор всех вычислений, которые приходится делать при практическом применении этого метода.

Во второй части изложенный метод используется для вычислений возмущений, испытываемых орбитой Земли от действия Сатурна, Юпитера, Марса, Венеры и Меркурия. Вследствие этих возмущений плоскость эклиптики, т. е. основная координатная плоскость во всех астрономических исследованиях, оказывается подвижной. Чтобы сделать сравнимыми наблюдения, сделанные в различные эпохи, должны быть учтены изменения, испытываемые координатной системой. Полученные Эйлером результаты дали возможность делать такой учет.

Астрономические приложения с большими подробностями рассматриваются в мемуаре:

№ 44. «Об изменении широт неподвижных звезд и наклона эклиптики» [50].

Этот мемуар начинается словами: «Эти два вопроса (об изменении широт звезд и наклона эклиптики.— *М. С.*), крайне важные для Астрономии, я хочу выяснить в этом мемуаре до конца, чтобы здесь не могло уже оставаться никакого сомнения. Известно, что среди астрономов нет единого мнения на этот счет; одни категорически отрицают возможность изменения широт звезд и наклона эклиптики, тогда как другие держатся противоположного мнения». Отметив, что вековое изменение наклона эклиптики, на которое довольно согласно указывают древние наблюдения, не имеет ничего общего с недавно открытыми нутационными колебаниями земной оси, Эйлер подчеркивает, что эти наблюдения не столь точны, чтобы из них можно было вывести величину векового уменьшения наклона эклиптики.

Эйлер указывает, что широко распространенный взгляд на неизменность широт звезд вызван тем, что их изменения тесно связаны с изменением положения эклиптики, между тем как считается, что «по теории Ньютона плоскость эклиптики не может сколько-нибудь заметно менять свое положение. Но если взглянуть на вещи с другой стороны и подумать, что плоскости орбит планет не неподвижны, а перемещаются в силу медленного движения их узлов, то легко изменить свое мнение. В самом деле, поскольку, например, узлы орбиты Марса отступают каждый год на 12″ по отношению к неподвижным звездам, то эта орбита несомненно испытывает изменения, а следовательно, обитатели Марса заметят с течением времени изменения в широтах звезд. Такое же явление будет замечено и обитателями других планет... Но если для обитателей других планет широты звезд меняются, то на каком основании могли бы мы утверждать, что для обитателей Земли имеется исключение? А ведь движение узлов планетных орбит не только достаточно подтверждается наблюдениями; нет никакого сомнения, что оно находится в полном согласии с теорией Ньютона...»

Установив, что изменения, производимые в положении плоскости эклиптики планетами, настолько малы, что их можно находить отдельно и затем складывать, Эйлер получает соответствующие возмущения и выводит из них точные формулы для учета влияния изменения положения эклиптики на долготы и широты. Он дает также приближенные формулы, пригодные для небольших промежутков времени, и таблицы, облегчающие перечисление координат с одной эпохи на другую.

Через 20 лет была опубликована работа, являющаяся как бы продолжением только что рассмотренного мемуара:

№ 45. «Об установлении наиболее неподвижного круга небесной сферы для отнесения к нему планетных и кометных орбит» [51].

Эйлер начинает с указания на большие расхождения, имеющиеся между различными астрономическими таблицами: например, для векового движения узла Сатурна таблицы Кассини дают $1°35'11''$, тогда как по таблицам Галлея это движение равно $0°30'0''$. Одной из причин подобных расхождений является неучет движения эклиптики. Эйлер предлагает принять за основную плоскость плоскость эклиптики для какого-либо определенного момента, например для начала 1700 г., и к этой плоскости относить все наблюдения и все таблицы. Он подробно рассматривает задачи, связанные с переводом элементов орбит с одной эпохи на другую, а также с отнесением полученных из наблюдений координат к введенному им неподвижному кругу небесной сферы.

Это предложение Эйлера — пользоваться эклиптикой определенной эпохи как основой координатной системы — является и до наших дней общепринятым. Эйлер хорошо понимал все значение этого, в принципе столь простого, предложения и в позднейших работах часто отмечал, что оно было сделано и полностью разработано им. К изучению возмущенного движения Земли относится также одна из ранних работ:

№ 46. «Более точное исследование возмущений движения Земли, производимых Луною» [52].

По своей методике эта статья тесно примыкает к тем первым работам Эйлера по теории движения Луны, которые будут рассмотрены в следующем разделе. Движение Земли относительно центра инерции системы Земля — Луна представляет собою точное отображение движения Луны, но уменьшенное приблизительно в 80 раз. Поэтому уже приближенная теория движения Луны позволяет с большой точностью найти возмущения Земли, вызываемые существованием Луны. Это обстоятельство и используется здесь Эйлером.

Среди работ Эйлера, посвященных изучению движения планет, особую группу составляют пять мемуаров, написанных им в последние годы жизни. Характерной особенностью этих мемуаров является то, что Эйлер применяет здесь к изучению движения планет методы, созданные им при разработке теории движения Луны. Он хорошо понимал мощь этих методов, ставших в XIX и XX вв. фундаментом важнейших и наиболее удачно развившихся разделов небесной механики, и старался возможно шире их использовать.

Рассмотрим сначала три работы, целью которых является нахождение возмущений в движении Земли, производимых действием Венеры.

Благодаря близости Венеры эти возмущения довольно велики и точное знание их необходимо для того, чтобы иметь хорошие таблицы Солнца. А таблицы Солнца представляют, как известно, основу изучения движения всех небесных тел. Актуальность этой темы увеличивалась также все еще продолжавшимся обсуждением наблюдений недавнего прохождения Венеры.

№ 47. «О возмущении движения Земли, производимом действием Венеры» [53];

№ 48. «Размышления о неравенствах в движении Земли, производимых действием Венеры» [54];

№ 49. «Исследование возмущений, которые производятся в движении Земли действием Венеры» [55].

Работа № 48 содержит изложение причин, заставивших Эйлера искать новый метод для нахождения планетных возмущений: «Для вычисления возмущений в движении планет, причиняемых их взаимодействием, обычно пользуются методом, который был употреблен впервые мною, если не ошибаюсь, в моих исследованиях неправильностей, наблюдаемых в движении Сатурна. Но этот метод может быть успешным лишь при условии, что найден способ для разложения иррационального выражения

$$(1 \pm n\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}}$$

в такой сходящийся ряд, три первых члена которого уже дают с достаточной точностью истинную величину; это не представляет затруднений во всех случаях, когда n очень малая величина, ибо тогда три первых члена

$$1 \mp \frac{3}{2}n\cos\varphi + \frac{15}{8}n^2\cos^2\varphi$$

дают величину, не отклоняющуюся заметно от истины. Но когда n становится величиной более значительной, в особенности приближающейся к единице, тогда ясно, что сумма этих же самых трех членов будет сильно отличаться от величины рассматриваемого выражения...

Между тем это выражение имеет основное значение для вычислений, поскольку именно оно содержит выражение действия, производимого одной планетой на другую. Чтобы показать это яснее, пусть P и Q две планеты, а S — Солнце; положим $SP = p$; $SQ = q$, а угол PSQ обозначим через φ. Действие одной планеты на другую, обратно пропорциональное квадрату расстояния между ними, будет иметь вид

$$A(p^2 + q^2 - 2pq\cos\varphi)^{-1}.$$

А разложение этой силы на составляющие, требуемое законами движения, приводит к выражениям, имеющим в знаменателе куб этого расстояния, т. е. вида

$$S\,(p^2+q^2-2pq\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}},$$

который приводится к указанной форме, если положить

$$\frac{2pq}{p^2+q^2}=n.$$

Отсюда видно, что величина n зависит от отношения расстояний p и q...».

Эйлер отмечает далее, что в случае Юпитера и Сатурна мы имеем приблизительно $p:q=5:9$, «откуда вытекает значение $n=45:53$, близость которого к единице и является без сомнения причиной, почему теория имела так мало успеха в этом случае».

Указанное затруднение становится еще серьезнее в случае Земли и Венеры, для которых средние расстояния равны $p=72\,340$ и $q=100\,000$, откуда $n=0{,}94979$. Здесь приближенная формула становится совершенно непригодной: например, для $\varphi=0$ она дает

$$1+\frac{3}{2}\,n+\frac{15}{8}\,n^2=4{,}116,$$

что чудовищно отличается от истинного значения

$$(1-n)^{-\frac{3}{2}}=88{,}882.$$

«Я сильно сомневаюсь, чтобы для устранения этого капитального дефекта можно было указать иной метод, нежели тот, который я изложил в XVI томе Новых Комментариев Академии, где указан способ для того, чтобы как бы шаг за шагом проследить планеты в их движении и для каждого небольшого интервала времени находить влияние, оказываемое Венерой на движение Земли.» Далее указывается, что этот план был выполнен «нашим искусным астрономом» Лекселем, что дало таблицу поправок к долготе Земли, приведенную в работе № 47 и снова воспроизведенную здесь.

Статья заканчивается сравнением указанной таблицы поправок с таблицей, опубликованной ранее Лакайлем на основании теории Клеро. Подробно обсуждаются значительные расхождения между этими таблицами.

Дополнением к работе № 47, на весьма интересном содержании которой здесь нет возможности останавливаться, служит статья № 49, в которой находятся возмущения радиуса-вектора Земли и дается таблица соответствующих поправок.

Обратимся теперь к более поздним работам:

№ 50. «Новый метод для представления движения больших планет таблицами» [56]:

№ 51. «Новый метод для нахождения движения планет» [57].

К изучению невозмущенного движения планеты здесь Эйлер применяет тот метод, который был им столь удачно использован в теории движения Луны. Он считает, что таким путем будет еще лучше выявлена сущность и мощь этого метода, потому что сложность движения Луны не позволяет видеть достаточно ясно все его особенности.

Положение планеты в плоскости ее орбиты определяется гелиоцентрическими координатами X и Y относительно равномерно вращающейся системы, в которой ось абсцисс проходит через среднее положение планеты. Таким образом, принимая

$$X = a(1 + x), \quad Y = ay,$$

где a — большая полуось орбиты, будем иметь

$$x = eP + e^2Q + e^3R + \ldots$$

$$y = ep + e^2q + e^3r + \ldots$$

где e — эксцентриситет, а все коэффициенты являются периодическими функциями средней аномалии.

Метод Эйлера заключается, далее, в выводе систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, дающих сначала P и p, затем Q и q, и т. д. Даются наиболее удобные способы для решения этих уравнений.

Последней работой в направлении поисков новых методов для решения планетной проблемы является мемуар

№ 52. «Необходимые условия, которые нужно выполнять при нахождении движения планет» [58].

Он начинается выводом дифференциальных уравнений, определяющих гелиоцентрические прямоугольные координаты двух планет, движущихся под действием как притяжения Солнца, так и взаимного тяготения. Затем указывается, что наиболее ясное и отчетливое представление о возмущенном движении можно получить, сравнивая его с «регулярным», т. е. невозмущенным движением. После этого Эйлер, отбросив взаимодействие планет, очень обстоятельно выполняет интегрирование уравнений задачи двух тел, подробно останавливаясь на зависимостях между элементами орбиты и начальными значениями координат и скоростей.

В следующей небольшой главе Эйлер излагает свои взгляды на наиболее целесообразную форму таблиц возмущенного движения планет.

Наконец, в последней главе рассматривается представление возмущенных координат каждой из планет степенными рядами

$$x = a + a't + a''t^2 + a'''t^3 + \dots,$$
$$y = b + b't + b''t^2 + b'''t^3 + \dots,$$
$$z = c + c't + c''t^2 + c'''t^3 + \dots$$

Эйлер дает формулы для вычисления коэффициентов a'', a''', b'', b''', c'', c''' и, в качестве примера, проделывает вычисления по ним для случая, когда рассматриваются взаимные возмущения Юпитера и Сатурна. Такого рода разложения, ограниченные членами третьей степени, могут дать вполне точные (с принятым числом знаков) величины координат лишь для небольшого интервала времени. Но в конце этого интервала можно взять новые значения координат и скоростей, а затем снова применить те же формулы. При помощи такого процесса, являющегося ничем иным как одной из форм численного интегрирования уравнений движения, Эйлер предлагает вычислить координаты Юпитера и Сатурна для промежутка времени в 60 лет, содержащего два обращения Сатурна и пять обращений Юпитера.

«Отсюда уже не трудно будет вывести все возмущения их движения, происходящие от взаимного притяжения, и построить соответствующие таблицы».

В заключение этого раздела укажем работы Эйлера, относящиеся к его попыткам обнаружить в движениях планет влияние сопротивления среды.

№ 53. «О возмущении (замедлении) движения планет, происходящем от сопротивления эфира» [59].

№ 54. «О постепенном приближении Земли к Солнцу» [60] (из письма Эйлера к Ветштейну).

№ 55. «О сокращении планетных орбит» [61] (из письма Эйлера к Ветштейну).

Непосредственным продолжением и уточнением этих работ явились мемуары сыновей Эйлера, написанные на темы, предлагавшиеся Парижской академией на соискание премий 1760 и 1762 гг. [62]. Эти мемуары помещаются обычно в список работ Эйлера, так как не подлежит сомнению, что они написаны при его участии.

Вопрос о влиянии среды на движение небесных тел впервые был подвергнут научному рассмотрению в «Principia» Ньютона. Ньютон объяснял таким сопротивлением образование кометных хвостов. Он считал, что при прохождении кометы через «солнечную атмосферу», нагретые Солнцем частицы кометы нагревают прилегающие частицы атмосферы, которые становятся от этого удельно легче и потому удаляются от Солнца, увлекая с собой и вещество кометы. Ньютон полагал, что солнечная атмосфера оказывает сопротивление движению комет, проходящих сквозь нее с огромными скоростями. Но вдали от Солнца пространство, по мнению Ньютона, не наполнено никакой вещественной жидкостью, за исключением тончайших паров и лучей света, потому что планеты и кометы движутся без всякого заметного уменьшения скорости.

Эйлер, применив к изучению влияния сопротивления среды на движение небесных тел аналитические методы, с математической стороны настолько исчерпал вопрос, что огромное количество последующих работ (появляющихся еще и теперь в связи с различными космогоническими гипотезами) мало прибавили полезного для решения астрономических задач.

Цель, которую преследовал Эйлер — доказать существование сопротивляющейся среды и получить некоторые представления о ее свойствах— была тесно связана с его физическими представлениями. Известно, как настойчиво в течение всей своей жизни Эйлер старался утвердить волновую теорию света и опровергнуть корпускулярную теорию, развитую Ньютоном. Эйлер выводит здесь формулы, дающие изменения некоторых элементов орбит от сопротивления движению,пропорционального скорости планеты. Эти формулы можно рассматривать как первый шаг к созданию метода вариации элементов. Дальнейшее исследование приводит его к заключению, что единственным практически наблюдаемым эффектом является вековое уменьшение периода обращения планеты. Но даже для Земли, для которой древние измерения продолжительности года дают наибольший интервал времени, охватываемый наблюдениями, результат получился не очень убедительный. В указанном мемуаре сын Эйлера И.- А. Эйлер приходит к заключению, что можно только утверждать, что наблюдения не противоречат существованию крайне малого сопротивления движению Земли, сказывающегося в прогрессивном уменьшении длины года.

V. РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ

Отдельными вопросами теории движения Луны Эйлер начал заниматься одновременно со своими первыми работами по изучению возмущенного движения планет, т. е. в начале 40-х годов.

Первой по времени публикации является статья

№ 56. «О движении узлов Луны и изменении наклона ее орбиты к эклиптике» [63].

Статья начинается описанием печального состояния, в котором находится, несмотря на открытия Ньютона, теория Луны; эта теория до сих пор не может дать больше того, что дают наблюдения. Эйлер указывает, что он также неоднократно занимался этими вопросами, но сложность и обширность выкладок его каждый раз останавливали. Тем не менее ему удалось, наконец, упростить задачу и найти достаточно простой путь для решения вопроса о движении линии узлов и изменении наклона орбиты. Достигнутый здесь успех позволяет надеяться, что этим же путем может быть получено объяснение и других особенностей движения Луны.

Метод, предлагаемый Эйлером, заключается прежде всего в составлении дифференциальных уравнений, определяющих движение в прямоугольных координатах, и их интегрировании. Не следует поэтому удивляться, что Эйлер сопровождает изложение этого метода несколько неожиданным примером: он очень подробно излагает решение задачи двух тел. Сравнение этого решения с другими, уже известными, должно, по мысли Эйлера, сделать особенно ясными преимущества нового метода. Кроме того, для изучения движения Луны необходимо предварительно знать движение Солнца относительно Земли.

Перейдя далее к изучению движения Луны, Эйлер составляет уравнения относительного движения в задаче трех тел. Образовав комбинации этих уравнений, дающие в невозмущенном движении интегралы площадей, он получил из них уравнения для производных по времени долготы узла и наклона орбиты. Приближенное интегрирование дало для долготы узла выражение, состоящее из вековой части и нескольких периодических членов. Теоретическое значение векового движения узла получилось при этом равным 19°35′16″, что было ближе к находимой из наблюдений величине 19°20′44″, чем у Ньютона, но согласие нельзя было считать удовлетворительным. В наклоне лунной орбиты Эйлер нашел три периодических неравенства, из которых только первое было известно раньше.

Основные идеи только что рассмотренного мемуара № 56 Эйлер сразу же применил к построению полной теории движения Луны. Результаты были опубликованы Петербургской академией в виде книги с очень длинным названием

№ 57. «Теория движения Луны, выявляющая все ее неравенства. В Прибавлении дается другая трактовка того же вопроса и показывается, каким образом движение Луны со всеми ее бесчисленными неравенствами может быть представлено и подчинено вычислениям этим другим путем» [64].

Эта книга дает два решения задачи о движении Луны. Ее основная часть, состоящая из введения и 18 глав, содержит так называемую «первую лунную теорию Эйлера»; в обширном «Прибавлении» («Additamentum»)

THEORIA
MOTUS LUNAE
EXHIBENS.
OMNES EIUS INAEQUALITATES

IN
ADDITAMENTO
HOC IDEM ARGUMENTUM ALITER TRACTATUR
SIMULQUE OSTENDITUR
QUEMADMODUM MOTUS LUNAE CUM OMNIBUS
INAEQUALITATIBUS
INNUMERIS ALIIS MODIS
REPRAESENTARI
ATQUE AD CALCULUM REUOCARI POSSIT
AUCTORE
L. EULERO

IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
ANNO 1753.

Титульный лист книги Эйлера «Theoria motus Lunae exhibens omnes eius inaequalitates» дан другой метод, тоже доведенный до числовых результатов, являющийся первоначальной формой общего метода вариации элементов. Содержание «Прибавления» подробно изложено Тиссераном [65]. Что же касается первой лунной теории Эйлера, то она была обстоятельно изложена (в несколько переработанном виде) М. А. Вильевым [66], который полагал, что эта теория забыта совершенно незаслуженно, поскольку она позволяет находить неравенства лунного движения с неменьшей полнотой, нежели другие теории; кроме того, в ней можно усмотреть начальную форму идей, легших в основу метода Ганзена (1838).

Ньютону удалось показать, что открытый им закон тяготения дает для некоторых из наибольших неравенств в движении Луны значения, достаточно близкие к наблюдаемым. Но первые попытки Клеро и Даламбера (1745) получить из этого закона движение лунного перигея были неудачны — период обращения перигея получился равным 18 годам, а не 9, как дают наблюдения. Это повлекло за собой желание ввести в закон Ньютона те или иные эмпирические поправки, что делал, между прочим, и Эйлер в своих первых работах. Однако уже в мае 1749 г. Клеро сообщил Парижской академии об открытии истинной причины расхождения: первое приближение в решении дифференциального уравнения, определяющего движение перигея, было недостаточно, тогда как полученное Клеро второе приближение дало значение, уже очень близкое к наблюдаемому. Это открытие было подробно изложено в сочинении Клеро «Теория Луны, выведенная из одного только принципа притяжения, обратно пропорционального квадратам расстояний», премированном Петербургской академией в 1752 г. [67]. Здесь впервые была дана чисто гравитационная теория движения Луны.

Теория Клеро была численной, так как с самого начала он придавал основным параметрам их значения, выведенные из наблюдений. Аналогичную, но уже аналитическую, теорию вскоре дал Даламбер [68]. Дальнейшим развитием идей Клеро явилась теория Лапласа (1802), являвшаяся в первой половине XIX в. наиболее разработанной.

Рассматриваемая нами теория Эйлера явилась первой аналитической теорией, построенной к тому же на весьма общих принципах, допускающих изучение движения Луны с любой точностью. В то же время в ней ясно видно стремление Эйлера получить в первую очередь практически интересные результаты — дать те приближенные выражения координат, которые могли бы лучше всего служить для составления лунных таблиц. Характерным примером может служить его изложение вопроса о вековом движении перигея.

Та часть векового движения перигея, которая зависит только от средних движений Солнца и Луны, дается, как было впоследствии показано Делоне (1872), формулой

$$\frac{1}{n}\frac{d\pi}{dt}=\frac{3}{4}m^2+\frac{225}{32}m^3+\frac{4071}{128}m^4+\frac{265\,493}{2048}m^5+\frac{12\,822\,631}{24\,576}m^6+\ldots,$$

где

$$m=n'/n=0{,}074\,801\,326\ldots$$

Здесь π — долгота перигея, а n и n' — средние суточные движения Луны и Солнца.

Приближение, полученное сначала Клеро и Даламбером, соответствует первому члену этой формулы и дает для отношения движения перигея к суточному движению Луны величину

$$\frac{3}{4}m^2=0{,}004\,196\,43.$$

Во втором приближении Клеро нашел величину, эквивалентную двум первым членам,

$$\frac{3}{4}m^2+\frac{225}{32}m^3=0{,}007\,139\,23,$$

тогда как точное значение равно 0,008 572 57. Чтобы получить это значение при помощи указанного выше ряда, нужно было бы продолжить вычисления до члена, содержащего m^{14}.

Эйлер поступил здесь весьма мудро — вместо того, чтобы воспроизводить уже полученное другими второе приближение и пытаться получить следующие, он подставляет в свои формулы то значение движения перигея, которое получается из наблюдений. Сравнение таблиц, построенных на этой основе, с наблюдениями служило проверкой применимости закона Ньютона к объяснению движения Луны.

Теория движения Луны, данная Эйлером в главной части рассматриваемой книги, была положена Тобиасом Майером (1723—1762) в основу таблиц Луны, точность которых вызывала изумление современников [6]. Особенность этих таблиц заключалась в том, что Майер взял из теории

[6] Эти таблицы были изданы Британским адмиралтейством в 1755 г. и переизданы в 1770 г. В дальнейшем они несколько раз исправлялись при помощи новых наблюдений (C. Mason, 1787, J. T. Burg, 1806; J. K. Burckhardt, 1812) и долго являлись основой астрономических ежегодников.

В 1765 г. парламент посмертно премировал Майера суммой в 3000 фунтов и постановил выдать Эйлеру вознаграждение в 300 фунтов «за теоремы, при помощи которых недавно умерший профессор Майер из Гёттингена построил свои Лунные Таблицы, позволившие достичь большого прогресса в деле нахождения долгот на море».

Эйлера только форму неравенств, а коэффициенты всех важнейших неравенств нашел из большого числа наблюдений.

Другой метод изучения возмущенного движения Луны, составляющий содержание «Additamentum», тоже имел большое значение для развития науки. Здесь Эйлер сделал следующий значительный шаг в создании метода вариации элементов. К полученным им ранее уравнениям для узла и наклона орбиты он присоединил здесь еще три уравнения — для большой полуоси, эксцентриситета и аргумента широты перигелия. Основная идея этого метода, широко использованного впоследствии Лагранжем, Лапласом и Леверрье для изучения движения планет, получила особенно глубокое развитие в работах Делоне. Метод Делоне позволил построить, ценой двадцатилетней напряженной работы (1846—1867), наиболее полную буквенную теорию солнечных неравенств движения Луны. Эта теория широко используется в настоящее время для изучения движения спутников других планет, для которых можно довольствоваться значительно меньшей точностью, чем для Луны. Развить этот метод настолько, чтобы и для Луны он был столь же эффективен, как метод Эйлера—Хилла (о котором будет речь в следующем разделе), не удалось.

В течение тех 30 лет, которые Эйлер прожил после появления «Theoria motus Lunae», он не переставал работать над усовершенствованием теории движения Луны. Важнейшие из полученных им результатов составили содержание обширного трактата, опубликованного в 1772 г., который будет нами рассмотрен в дальнейшем.

Непосредственным же развитием идей первой лунной теории, данной Эйлером, можно рассматривать мемуар

№ 58. «Исследования по улучшению теории движения Луны и особенно ее вариационного неравенства» [69].

Здесь Эйлер по новому подходит к нахождению возмущений координат, определяющих положение Луны в плоскости орбиты. Интегрирование уравнений, дающих возмущения, не зависящие от эксцентриситетов Луны и Солнца, производится особенно тщательно. Это дает все те члены вариационного и параллактического неравенств, которые не выходили из границ точности таблиц того времени.

Большой исторический интерес представляет последний параграф мемуара, в котором Эйлер рассматривает вопрос о нахождении параллакса Солнца при помощи параллактического неравенства. Он указывает, что «этот метод нахождения солнечного параллакса возможно превосходил бы все остальные, за исключением только прохождений Венеры, если бы таблицы Майера давали всегда положение Луны с ошибкой, не превосходящей минуты». Затем Эйлер подтверждает свое мнение численными расчетами. В пояснение этого места можно отметить, что таблицы Майера являлись для Эйлера точнейшим выражением того, что давали лучшие наблюдения того времени. Нужно также учесть, что мемуар был написан в 1768 г., во время приготовлений к наблюдению прохождения Венеры, на которое возлагалось так много надежд. Известно, однако, что эти надежды на получение параллакса Солнца с точностью, далеко превосходящей все другие методы, прохождение 1769 г. не оправдало (как не оправдали их и следующие прохождения, имевшие место в 1874 и 1882 гг.), вследствие тех осложнений явления прохождения, которые возникают благодаря наличию у Венеры атмосферы.

Таким образом, один из важнейших методов нахождения солнечного параллакса, обычно приписываемый Лапласу, был на самом деле предложен Эйлером. Приписывание его Лапласу (учившемуся по мемуарам Эйлера и очень хорошо их знавшему) является одной из тех существенных исторических неточностей, которые ведут свое начало от «Популярной астрономии» Араго и продолжают часто повторяться и теперь.

В тесной связи с мемуаром № 58 находится работа старшего сына Эйлера, посвященная изучению вариации [70] [7]. Автор отмечает, прежде всего, что хотя таблицы Луны, составленные Майером и Клеро, дают положения Луны почти с такою же точностью, какую мы имеем для положений Солнца, однако теория, лежащая в основе этих таблиц, оставляет желать многого. Большое число неравенств, которые приходится учитывать для получения положения Луны с точностью до одной минуты, показывает, что увеличение точности приведет к такому возрастанию числа неравенств, что учет их выйдет за границы практической применимости.

Свою задачу автор формулирует так: «Найти движение такой Луны, которая совершала бы свои обращения вокруг Земли в плоскости эклиптики и эксцентриситет которой равнялся бы нулю, тогда как Солнце двигалось бы вокруг Земли равномерно по окружности». После чего он делает следующее замечание: «Какой бы химерой не казался такой вопрос, я могу утверждать, что если его удастся полностью разрешить, то уже не встретится почти никаких трудностей в нахождении движения реальной Луны».

Далее выводятся уравнения, определяющие координаты Луны, в той форме, которая всегда применялась Эйлером. Получив из них уравнения, определяющие вариационное неравенство в долготе и в радиусе-векторе, автор решает их буквенно (сам Эйлер ограничивался во всех своих работах

[7] Работа была доложена 17 апреля 1766 г.

численным решением). Коэффициенты получаются в виде рядов, расположенных по степеням отношения продолжительности синодического месяца к продолжительности сидерического года.

Вернемся теперь к начальному периоду деятельности Эйлера в области изучения движения Луны, когда он занимался этим вопросом не столько как математик, сколько как астроном-практик.

В 1749 г. Эйлером были опубликованы четыре статьи:

№ 59. «Метод для нахождения истинных моментов новолуний и полнолуний» [71];

№ 60. «Метод для нахождения истинного геоцентрического положения Луны из наблюдения покрытия неподвижной звезды» [72];

№ 61. «Метод нахождения долгот мест при помощи наблюдения покрытий звезд Луною» [73];

№ 62. «Размышления о последнем затмении Солнца 25 июля 1748 г». [74].

В статье № 59 Эйлер, используя 13 лунных затмений, наблюдавшихся после 1700 г., находит поправки к своим лунным таблицам для моментов сизигий. Этот вопрос представлял тогда большой практический интерес, так как лунные затмения широко использовались для нахождения долгот. Таблицы, построенные с учетом этих поправок, были опубликованы Эйлером в Берлинском астрономическом ежегоднике за 1749 г.

В двух следующих небольших статьях № 60 и 61 даются формулы для решения указанных в заголовках задач.

Статья № 62 начинается словами: «Хотя это затмение произошло в достаточно точном соответствии с моим вычислением, опубликованным в нашем Астрономическом ежегоднике, будет небесполезно повторить вычисление и войти во все подробности, чтобы посмотреть, от чего зависят маленькие расхождения, замеченные в величине и продолжительности затмения. Это исследование послужит, главным образом, для установления истинной величины лунного параллакса, в отношении которой разногласия очень велики и сказываются особенно заметно на этом затмении». Исправление элементов орбиты Луны делается Эйлером путем разнообразных проб, что применялось в XVII в., но уже к концу XVIII в. было вытеснено методом, основанным на составлении и решении условных уравнений.

Очень близка по своему содержанию к только что рассмотренным статьям и работа

№ 63. «О согласии двух последних затмений Солнца и Луны с моими таблицами для нахождения истинных моментов полнолуний и новолуний» [75].

Тот же вопрос об использовании лунных затмений для улучшения таблиц движения Луны подробно трактуется в двух работах, опубликованных (без датировки) через 80 лет после смерти Эйлера:

№ 64. «Об исправлении лунных таблиц при помощи наблюдений затмений Луны» [76];

№ 65. «Три главы из некоторого большего неизданного сочинения по теории Луны» [77].

Эти работы показывают еще раз, как глубоко входил Эйлер в вопросы, занимавшие астрономов, и сколько времени и труда, не говоря уже об остроумии, затрачивал он на их решение. Однако в некоторых случаях его, пожалуй, больше занимало решение задачи, нежели целесообразность ее постановки. Очень скоро наблюдения лунных затмений потеряли всякое значение для изучения движения Луны, поскольку существование земной атмосферы делает такие наблюдения весьма мало точными.

VI. ВТОРАЯ ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ

Обратимся теперь к тем работам, в которых была развита теория движения Луны, получившая название *второй Эйлеровой теории*.

Эти работы находятся в связи со следующей темой, которую Парижская академия предложила на соискание премий как 1770 г., так и 1772 г.: «Улучшить методы, на которых основана теория Луны, и этим путем уточнить те из неравенств этого спутника, которые еще ненадежны, в частности рассмотреть, может ли эта теория объяснить вековое движение Луны». Эйлером были представлены следующие, премированные Академией, мемуары:

№ 66. «Теория Луны» (премия 1770 г.) [78].

№ 67. «Новые изыскания относительно истинного движения Луны, дающие все неравенства, присущие этому движению» (премия 1772 г.) [79].

Работа № 66 начинается сразу (без столь обычного для Эйлера обстоятельного введения) с вывода дифференциальных уравнений движения Луны во вращающейся прямоугольной системе координат. Сначала, взяв плоскость эклиптики за плоскость xy и направив ось x по прямой, соединяющей Солнце с Землей, Эйлер выводит уравнения движения в такой гелиоцентрической, вращающейся вокруг Солнца вместе с Землей координатной системе. Затем он переходит к геоцентрической эклиптической системе, в которой ось абсцисс образует с продолжением радиуса-вектора Земли угол, равный элонгации по долготе средней Луны. Таким образом, в этой окончательной системе координатные оси X и Y вращаются около оси Z с постоянной угловой скоростью, делая полный оборот в синодический месяц. Наконец, Эйлер полагает

$$X = a(1 + x);$$
$$Y = ay, \; Z = az,$$

где a — некоторое среднее значение геоцентрического радиуса-вектора Луны.

Заметим, что в окончательных дифференциальных уравнениях, служащих для нахождения x, y, z, он отбрасывает вторые степени как этих величин, так и эксцентриситета земной орбиты.

Главное отличие своего нового метода от применявшегося ранее, в котором все усилия были направлены на нахождение в отдельности каждого неравенства движения Луны, Эйлер усматривает в том, что в новом методе главной задачей является нахождение координат X, Y, Z, по которым вычисляются уже возмущенные значения долготы, широты и параллакса Луны. Между тем координаты X, Y, Z, заключающие глобальный эффект неравенств, вычисляются проще, нежели все эти неравенства в отдельности. Но самое большое преимущество своего метода Эйлер видит в том, что уже выбор координатной системы учитывает элонгацию Луны от Солнца, т. е. главный фактор, определяющий возмущения. Благодаря этому открывается возможность представить все неравенства тригонометрическими функциями линейных комбинаций углов, изменяющихся пропорционально времени.

Излагаемый далее Эйлером план систематического нахождения неравенств был также весьма важным нововведением. Эйлер указывает, что все неравенства можно отнести, если принять во внимание производящие их причины, к одному из следующих классов:

1) Неравенства, зависящие только от элонгации, т. е. от разности долгот средней Луны и Солнца. Эти неравенства носят, как известно, название *вариации*.

2) Неравенства, зависящие от эксцентриситета лунной орбиты.

3) Неравенства, зависящие от наклона этой орбиты к плоскости эклиптики.

4) Неравенства, зависящие от параллакса Солнца (иначе говоря, от отношения расстояний Луны и Солнца от Земли), получившие название *параллактических*.

5) Наконец, неравенства, происходящие от эксцентриситета орбиты Солнца (или, что то же самое, орбиты Земли).

Нахождение указанных здесь пяти классов возмущений полностью исчерпывает так называемую «главную задачу» теории движения Луны, т. е. ту часть этой теории, в которой она трактуется исключительно как частный случай задачи трех тел (без учета возмущающего действия планет и неполной сферичности Земли).

Эйлер подробно показывает, как возмущения каждого класса могут быть получены быстро сходящимися последовательными приближениями.

В качестве примера приведем найденные Эйлером возмущения первого класса, дающие так называемую вариационную орбиту Луны. Взяв отношение сидерического года к синодическому месяцу равным 12,368 8974, он получил выражения

$$X = a_0\,(1 - 0{,}007\,1800 \cos 2p + 0{,}000\,0061 \cos 4p),$$
$$Y = a_0\,(0{,}010\,2116 \sin 2p + 0{,}000\,0057 \sin 4p),$$

где p — разность средних долгот Луны и Солнца.

Между тем, согласно теории Хилла, вариационная орбита (при современном значении указанного отношения 12, 368 746 90704) дается уравнениями

$$X = a_0\,(1 - 0{,}007\,18004 \cos 2p + 0{,}000\,00604 \cos 4p + \\ + 0{,}000\,00003 \cos 6p + \ldots),$$

$$Y = a_0\,(+\,0{,}010\,21145 \sin 2p + 0{,}000\,00571 \sin 4p + \\ + 0{,}000\,00003 \sin 6p + \ldots).$$

Отсюда видно, какой большой точности достиг Эйлер в этом трудном вопросе при помощи весьма простых средств.

Работа заканчивается формулами, выражающими X, Y, Z линейно через тригонометрические функции, аргументы которых получаются путем сложения и вычитания четырех углов: элонгации p, средней аномалии Солнца t, средней аномалии Луны q и аргумента широты Луны r. Коэффициенты этих выражений зависят от среднего расстояния Луны от Земли, эксцентриситетов орбит Земли и Луны и от наклона лунной орбиты. Все эти величины, так же как и значения углов p, q, t и r для начального момента времени, должны быть взяты из наблюдений. На вопросе об их нахождении Эйлер здесь не останавливается.

Результаты, достигнутые в этом совершенно исключительном по своему значению мемуаре, Эйлер резюмирует следующим образом:

«Мне кажется, что я полностью выполнил задачу, поставленную Королевской Академией Наук. Новая теория Луны, которую я имею честь ей здесь представить, точно устанавливает все неравенства в движении этого спутника; не осталось ни одного неравенства, относительно которого могло бы быть сомнение и потому можно считать вполне установленным, что вековое ускорение в движении Луны не может вызываться силами притяжения.»

Обратимся теперь к работе № 67, премированной в 1772 г., которая является непосредственным продолжением, а также усовершенствованием только что рассмотренного нами мемуара № 66. Отношение ее к этому мемуару Эйлер характеризует следующим образом:

«Прежде всего несомненно, что метод, примененный для этих исследований в названном Мемуаре, основанный на употреблении трех координат, со многих точек зрения заслуживает предпочтения перед всеми другими методами, употреблявшимися до сих пор Геометрами для нахождения неравенств в движении Луны. Несмотря на это, я здесь использую только основную идею, составляющую сущность решения, поскольку я нашел уместным сделать в этом решении несколько изменений, как в отношении расположения трех координатных осей, так и в отношении способов решения уравнений, дающих величины неравенств».

Приняв за единицу длины среднее расстояние Луны от Земли, Эйлер фиксирует ее положение координатами $1+x$, y, z в геоцентрической эклиптической системе, ось абсцисс которой имеет долготу, равную средней эллиптической долготе Луны. Таким образом здесь также употребляется равномерно вращающаяся координатная система, но совершающая полный оборот в сидерический месяц, а не в синодический.

Не приводя вычислений, Эйлер ограничивается указанием, что решение дифференциальных уравнений, определяющих x, y, z, выполнялось изложенным им ранее методом, и сразу дает результаты. Но он отмечает, что приближения были проведены здесь значительно дальше. В то время как в предыдущей работе он ограничивался учетом членов третьей степени относительно малых величин x, y, z, здесь он принимает во внимание члены шестой степени. Далее он говорит: «Я перехожу теперь к результатам этих трудных исследований, причем ограничусь представлением этих результатов в том самом виде, в каком я их нашел с помощью трех искусных вычислителей, каждый из которых взял на себя труд как выполнения вычислений по тем методам, которые я им дал, так и повторения этих вычислений по нескольку раз; так что я могу отвечать за полную точность найденных значений... Что же касается исследований, приведших к этим результатам, и аналитических приемов, употребленных для их достижения, то они заполняют довольно объемистый том, который я не премину своевременно опубликовать».

Раньше чем переходить к рассмотрению того фундаментального труда, о котором здесь идет речь, приведем еще следующие замечания, заканчивающие этот мемуар.

«Всем этим, надеюсь, полностью удовлетворяются пожелания знаменитой Королевской Академии Наук, поскольку найдены и численно выражены все без исключения неравенства, которым подвержено движение этого спутника, если они могут изменять положение Луны больше чем на десять секунд; а так как установлено, что никакое из этих неравенств не может произвести вековое изменение в среднем движении Луны, то такое изменение не может быть приписано притяжению Солнца или какого-либо другого небесного тела; таким образом не остается больше никакого сомнения, что наблюдаемое вековое ускорение Луны является следствием сопротивления той среды, в которой происходит движение небесных тел.»

Напомним, что вопрос о причине векового увеличения среднего движения Луны, открытого еще Эдмундом Галлеем (1693), продолжал в это время оставаться одним из актуальнейших вопросов науки. Существование такого ускорения, равносильное прогрессивному приближению Луны к Земле, ставило под угрозу устойчивость нашей планетной системы.

Эйлер решил, как мы только что видели, первую стоявшую здесь задачу: он показал, что это вековое ускорение не может быть следствием взаимного тяготения Луны, Земли и Солнца. Однако он вышел за пределы действительно им доказанного, утверждая, что оно не может быть приписано и действию «какого-либо другого небесного тела». В 1787 г. Лапласом было показано, что вековое ускорение в среднем движении Луны является следствием уменьшения эксцентриситета земной орбиты. Но изменение этого эксцентриситета носит, как было доказано Лагранжем (1774), не вековой, а долгопериодический характер. В настоящее время он убывает и будет убывать еще в течение примерно 24 000 лет, после чего он начнет возрастать и, сообразно с этим, среднее движение Луны будет уже не ускоряться, а замедляться. Таким образом, изменение среднего движения Луны оказалось следствием тех возмущений, которые производятся притяжением планет в движении Земли, и притом носящих не вековой, а долгопериодический характер.

Между тем Эйлер, так настойчиво искавший всю свою жизнь прямых доказательств существования эфира, чтобы этим нанести решительный удар столь нелюбимой им ньютоновской теории света, сразу увидел в полученном им результате такое доказательство. Поэтому он никогда не искал других возможных путей для объяснения векового ускорения Луны. Лаплас, не бывший в этом отношении столь связанным предвзятой идеей, искал объяснения в самых различных направлениях. Он пытался, например, объяснить вековое ускорение Луны конечной скоростью распространения тяготения. Все эти попытки и открыли ему в конце концов путь к правильному объяснению явления.

Обратимся теперь к сочинению, изданному Петербургской академией в 1772 г. под очень длинным и очень обстоятельным названием:

№ 68. «Теория движения Луны, трактованная новым методом, вместе с астрономическими таблицами, из которых положения Луны для любого времени легко могут быть получены, созданная под руководством Леонарда Эйлера неимоверным усердием и неутомимыми трудами трех академиков: И.- А. Эйлера, В. Л. Крафта, И.- А. Лекселя» [80].

В этом сочинении мы находим все подробности той обширной работы, краткое изложение результатов которой составило содержание только что рассмотренного мемуара № 67. Не будем входить в эти подробности, учитывая наличие русского перевода и обстоятельных комментариев к нему А. Н. Крылова. Напомним дальнейшую судьбу этой работы Эйлера, которую он сам рассматривал как одно из своих наибольших достижений.

Несмотря на то, что это монументальное произведение Эйлера было тщательно разработано во всех деталях с точки зрения практических применений созданной теории[8], оно не только не получило распространения, но и было вскоре основательно забыто. Две причины имели здесь решающее значение. Прежде всего, основная цель — дать гравитационную теорию движения Луны, по своей точности вполне сравнимую с наблюдениями,— достигнута не была. Как известно, такая цель была полностью достигнута только в середине XX в. Таким образом, по своей точности таблицы Эйлера не могли конкурировать с теми полуэмпирическими таблицами, образцом которых явились таблицы Майера. С другой стороны, в пределах точности первого приближения теория Эйлера была сложнее той, которую начали строить Клеро и Даламбер, а полностью развил Лаплас (1802).

Преимущества, присущие теории Эйлера, привлекли внимание только через 100 лет после ее появления, когда Хиллом (1838—1914) были опубликованы две работы, явившиеся непосредственным применением и развитием идей Эйлера. Эти работы стали одним из важнейших источников

[8] Содержащиеся во втором разделе (Liber secundus continens adplicationem Theoriae Lunae ad calculum astronomicum) таблицы были изданы отдельной книгой [81]. Эти таблицы снабжены кратким наставлением, рассчитанным на широкие круги астрономов-практиков.

THEORIA
MOTVVM LVNAE,
NOVA METHODO PERTRACTATA

VNA CVM

TABVLIS ASTRONOMICIS,

VNDE

AD QVODVIS TEMPVS

LOCA LVNAE

EXPEDITE COMPVTARI POSSVNT,

INCREDIBILI STVDIO ATQVE INDEFESSO LABORE TRIVM ACADEMICORVM:

JOHANNIS ALBERTI EVLER,

WOLFFGANGI LVDOVICI KRAFFT,

JOHANNIS ANDREAE LEXELL.

OPVS DIRIGENTE

LEONHARDO EVLERO.

ACAD. SCIENT. BORVSSICAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO

ACAD. PETROP. PARISIN. ET LOND.

PETROPOLI,

TYPIS ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARVM.

1772.

Титульный лист книги Эйлера «Theoria motuum Lunae, nova methodo pertractata etc.»

дальнейшего прогресса всей небесной механики. Первая из них («Researches in the Lunar Theory», 1877) послужила отправным пунктом для создания теории периодических решений, играющей такую большую роль в современной науке и технике. Вторая («On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon», 1878) заложила прочные основы той теории движения Луны, которая наконец разрешила эту проблему. Эту теорию создал Браун (1866—1938), закончивший дело, начатое Эйлером и продолженное Хиллом. Развитая Брауном в 1895—1908 гг. теория была завершена опубликованием тех таблиц (1919), по которым в настоящее время вычисляются эфемериды Луны для астрономических ежегодников. Электронные вычислительные машины позволили доказать (1952), что формулы для координат Луны, полученные Брауном, удовлетворяют дифференциальным уравнениям движения, вытекающим из закона Ньютона, с точностью, далеко превосходящей точность наблюдений.

Так было завершено осуществление разработанного Эйлером плана создания чисто гравитационной теории движения Луны. Побочным результатом этих работ Эйлера и Хилла было возникновение общей теории нелинейных колебаний.

Свидетельством того, что Эйлер до конца своих дней продолжал весьма эффективно заниматься теорией движения Луны, служит его работа № 69. «О теории Луны, доведенной до еще большей степени совершенства» [82].

Указав вкратце принципы, положенные в основу «Theoria motuum Lunae nova methodo pertractata», Эйлер отмечает, что данные там таблицы позволяют удобнее и точнее вычислять положение Луны для любого момента, нежели другие, находящиеся в употреблении таблицы. Однако некоторые неравенства не могли быть в этом сочинении найдены с достаточной точностью вследствие трудности вычислений, которые были ограничены шестью десятичными знаками, тогда как их следовало вести с восемью знаками. Задача этого мемуара заключается в таком изменении теории, при котором неравенства выражаются меньшими числами, что существенно упрощает вычисления.

Предлагаемый прием заключается в отнесении положения Луны к такой геоцентрической координатной системе, в которой за основную плоскость принято среднее пложение плоскости лунной орбиты, а ось абсцисс проходит через среднее положение Луны. Такой прием усложняет уравнения движения, но подлежащие нахождению координаты Луны становятся существенно меньше, что облегчает их вычисление. В заключение

Эйлер указывает, что вычисления могут быть выполнены теми же приемами, которые были им применены в его книге, но в настоящее время он не отваживается браться за столь трудную работу и вынужден либо отложить ее, либо предоставить выполнение ее другим, находящим удовольствие в вычислениях такого рода.

Об оценке полученных Эйлером результатов его современниками дает представление обстоятельная статья А. И. Лекселя [83].

VII. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

В трех предыдущих разделах мы рассмотрели работы, посвященные изучению движения Луны и планет. Одновременно с этими работами Эйлером был опубликован ряд мемуаров, в которых главное внимание уделяется разработке методики изучения возмущенного движения и лишь попутно решаются те или иные конкретные астрономические вопросы.

Изучение относящихся сюда работ мы начнем с мемуара

№ 70. «Исследование общих свойств движения небесных тел» [84].

Эта работа хорошо обрисовывает состояние теоретической астрономии в начале деятельности Эйлера и те задачи, которые вставали перед ним.

Вот что говорится в весьма обстоятельном введении, которым начинается этот мемуар:

«I. После открытия центральных сил, влекущих планеты к Солнцу, а спутники к их центральным телам, и изменяющихся обратно пропорционально квадратам расстояний, движение каждого тела считается правильным только в том случае, если оно в точности подчиняется этому закону. В самом деле, движение планеты было бы вполне правильным, если бы оно согласовалось с законами, установленными Кеплером; или, что приводится к тому же, если бы сила, изменяющая это движение, была всегда направлена в точности к центру Солнца и была строго обратно пропорциональна квадрату расстояния от Солнца. Ибо тогда, как было доказано Ньютоном, эта планета описывала бы вокруг Солнца точный эллипс, в одном из фокусов которого находилось бы Солнце; этот эллипс сохранял бы вечно неизменное положение, так что ни плоскость, в которой он находится, ни положение его оси не подвергались бы никаким изменениям.»

II. Именно такой принцип положен Стритом в основу построенных им «Каролиновых таблиц», в которых не только периодические неравенства каждой планеты вычислены сообразно этому принципу, но и орбиты считаются неподвижными. Ибо он не признает какого-либо перемещения ни афелиев, ни узлов по отношению к неподвижным звездам; он допускает перемещение этих точек только по отношению к точкам равноденствий. Впоследствии астрономы, тщательнее изучив орбиты планет, нашли, что их афелии, а также их узлы слегка перемещаются, даже и по отношению к неподвижным звездам. Такие исследования показали, что афелий Марса за столетие переместился относительно неподвижных звезд прямым движением на 33′20″, тогда как его узлы сместились в обратном направлении на 20′. И у других планет подобные изменения в той или иной степени заметны.»

«III. Поскольку доказано, что ни афелии планет, ни их узлы не претерпевали бы никаких изменений, если бы на каждую планету действовала только сила, направленная к Солнцу и убывающая в точности обратно пропорционально квадрату расстояния, то с необходимостью следует, что сила, фактически действующая на каждую планету, либо не направлена точно к центру Солнца, либо не подчиняется совершенно точно закону обратной пропорциональности квадрату расстояния, либо, кроме этой силы, имеются еще и другие, возмущающие движение планет и вызывающие наблюдаемое смещение афелиев и узлов. Но движение спутников, и прежде всего Луны, позволяет нам распознать, каковы могут быть эти новые силы, действующие на планеты. Ведь Луна притягивается прежде всего к центру Земли; и легко понять, что эта сила должна распространяться на расстояние, гораздо большее, чем расстояние до Луны, так что ее действие может сказываться и на планетах, когда они находятся наиболее близко к Земле.»

«IV. Однако, если мы предположим, что эта притягательная сила Земли, являющаяся причиной тяжести на ее поверхности, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, то она станет столь малой на тех расстояниях, на которые Марс или Венера могут приближаться, что ее действие становится абсолютно нечувствительным. Но иначе дело обстоит с силой, которая удерживает спутников Юпитера; эта сила, будучи также уменьшена в отношении квадрата расстояния, остается еще достаточно значительной в области движения Сатурна, чтобы изменять его движение. И обратно, сила, с которой Сатурн притягивает своих спутников, распространяется до орбиты Юпитера с интенсивностью, еще достаточной, чтобы производить в ней некоторые возмущения. Принцип всемирного тяготения делается такими соображениями весьма вероятным; иначе говоря, все планеты притягиваются не только к Солнцу, но они притягиваются также друг к другу с силами, обратно пропорциональными квадратам их взаимных расстояний: и даже Солнце притягивается к планетам аналогичными силами.»

Эйлер указывает далее, что учет притяжений, испытываемых каждой планетой со стороны других, делает изучение ее движения бесконечно более трудным. Это видно уже из теории движения Луны, где дело обстоит сравнительно очень просто, так как приходится учитывать притяжение только двух тел — Земли и Солнца, отношение расстояний которых от Луны изменяется к тому же лишь в весьма узких границах. Он сомневается, дало ли бы полное решение задачи о движении произвольного числа тел, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, возможность в точности представить наблюдаемые движения планет. «Ибо сделанные мною исследования и размышления как в отношении происхождения этих сил, так и относительно неправильностей, замечаемых в движении Луны и верхних планет, заставляют меня думать, что силы, с которыми, как полагают, планеты притягивают друг друга, изменяются не в точности обратно пропорционально квадрату расстояния; и мне почти кажется, что отклонение от этого закона возрастает с расстоянием, поскольку некоторые периодические неравенства в движении Сатурна, которые нельзя приписать действию других планет, оказываются у Сатурна больше, чем у прочих планет. И астрономы уже заметили, что верхние планеты больше отклоняются от астрономических таблиц, нежели нижние.»

Эйлер отмечает, что и защитники абсолютной строгости закона всемирного тяготения должны признать, что силы, действующие между планетами, следуют более сложному закону, поскольку эти силы складываются из взаимодействия частиц. Таким образом, здесь Эйлером была поставлена задача (впоследствии им разрешенная со всею нужною для астрономии точностью) о силовом поле сфероидов и об учете его при изучении движения небесных тел. Более того, здесь же Эйлером была поставлена и задача о вращательном движении планет, блестяще им разрешенная позднее (1765) созданием механики твердого тела. В рассматриваемом нами мемуаре ему приходится констатировать, что «еще совершенно неизвестны те механические основы, которые нужны для нахождения действия приложенной к телу силы, если направление этой силы не проходит через центр тяжести тела: особенно, когда эта сила стремится наклонить ось, вокруг которой тело уже вращается».

Эйлер касается также вопроса о «сопротивлении, по всем данным испытываемом планетами при их движении сквозь эфир. Как бы ни был субтилен этот флюид, он неизбежно должен оказывать некоторое сопротивление движению планет; и я надеюсь, что уже обнаружил с достаточной очевидностью влияние этого сопротивления на движение Земли». Здесь имеется в виду уже рассмотренная нами работа № 53.

Все эти соображения приводят Эйлера к заключению, что «Теоретическая астрономия еще очень далека от той степени совершенства, которую уже считали достигнутой». Если бы силы, действующие между небесными телами, были в точности известны, то дело сводилось бы к чисто механической задаче нахождения движения по заданным силам: «Эта проблема, как бы трудна она ни была, относится все же к чистой Механике, и можно было бы надеяться, что какие-либо новые открытия в Анализе помогут, наконец, ее разрешить. Но поскольку самый закон действующих на планеты сил еще не вполне известен, то дело не только в одном Анализе: нужно еще многое другое, чтобы довести Теоретическую астрономию до совершенства. Представляется даже, что единственный путь для достижения этой цели заключается в выдвижении нескольких новых гипотез относительно закона сил и в нахождении, после их вычислительной обработки, насколько каждая из них отклоняется от наблюдений; так, при помощи большого числа ошибочных предположений, мы смогли бы в конце концов найти истину. Но со мною легко согласятся, что для достижения этой цели нам недостает еще весьма многого, как со стороны наблюдательной Астрономии, так и со стороны Анализа; и без помощи многих новых открытий как в той, так и в другой науке, мы не можем надеяться на большой прогресс.»

После такой мотивировки Эйлер решает следующие пять проблем:

1. Найти движение тела (т. е. материальной точки) под действием какой угодно центральной силы.

2. Найти движение тела в том случае, когда центральная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния.

3. Когда центральная сила, действующая на тело, почти что обратно пропорциональна квадрату расстояния, найти движение тела в предположении, что его орбита мало отличается от круговой.

4. На тело действуют какие угодно силы, направления которых находятся, однако, всегда в плоскости движения тела; найти движение этого тела.

5. На тело действуют какие угодно силы, самая большая из которых проходит через (неподвижную) точку C; найти движение тела.

Первая, четвертая и пятая из этих проблем являются хорошо известными в настоящее время задачами, вошедшими в учебники механики. В случае плоского движения Эйлер решает их в полярных координатах; в случае пространственного движения он употребляет цилиндрические координаты. Интересно отметить, что уравнение, соответствующее аппликате, он заменяет двумя уравнениями, определяющими долготу узла и наклон оскулирующей плоскости орбиты. Эта идея и явилась зародышем метода вариации элементов.

Говоря о второй проблеме, Эйлер дает весьма обстоятельное решение задачи двух тел в случае эллиптического движения.

Обратимся, наконец, к третьей проблеме, являющейся в сущности конечной целью всего мемуара. Действующую на тело центральную силу Эйлер принимает равной

$$\frac{mc^3}{r^2}+R,$$

где через m и c обозначены некоторые постоянные, через r — расстояние тела от центра силового поля; величина R, являющаяся некоторой функцией r, представляет отклонение действующей силы от закона Ньютона. Особенно подробно изучаются два случая: когда

$$R=\mu c\left(\frac{c}{r}\right)^{\nu}$$

и когда

$$\frac{mc^3}{r^2}+R=mc\left(\frac{c}{r}\right)^{2+\mu},$$

где μ и ν — некоторые постоянные величины, причем μ очень мало. Эйлер с исчерпывающей полнотою находит изменения, вызываемые в эллиптическом движении такими добавочными силами.

Идея заменить вычисление аппликаты планеты нахождением положения оскулирующей плоскости ее орбиты получила свое дальнейшее развитие в работах

№ 71. «Простой метод подчинить астрономическим вычислениям движение небесных тел, испытывающих какие угодно возмущения» [85];

№ 72. «Новый метод для нахождения возмущений в движении небесных тел, вызываемых их взаимодействием» [86].

Уравнения, дающие оскулирующие значения долготы узла и наклона орбиты, здесь представлены в более удобной для астрономических приложений форме. Но Эйлер идет здесь гораздо дальше и получает дифференциальные уравнения для нахождения параметра и эксцентриситета оскулирующей орбиты, а также возмущенного значения истинной аномалии. Производные всех этих величин выражаются через проекции возмущающей силы на радиус-вектор и на перпендикуляр к нему в плоскости орбиты. Эту систему пяти уравнений Эйлер дополняет некоторым вспомогательным и получает таким образом систему уравнений, интегрирование которой дает возможность найти положение светила в оскулирующей орбите. Но это последнее уравнение у него излишне сложно и не вполне правильно.

Несколько иной вывод уравнений, определяющих элементы оскулирующей орбиты, был дан Эйлером несколько раньше в работе

№ 73. «О движении небесных тел, возмущаемом какими угодно силами» [87].

Эйлер не только постепенно совершенствовал вывод этих уравнений, фундаментальное значение которых для небесной механики очень хорошо понимал, но и старался осветить их сущность с различных сторон.

Обратимся теперь к работе (доложенной Берлинской академии 18 декабря 1763 г.):

№ 74. «Размышления о различных способах представления движения Луны» [88].

В ней рисуется состояние теории движения Луны в ту эпоху. «Так как почти невозможно найти из наблюдений положение Луны точнее, чем до минуты, то г-н Майер решил дать своим Таблицам Луны такую именно точность, стремясь к тому, чтобы вычисленное положение Луны не отличалось от истины больше, чем на одну минуту. Без сомнения это все, на что только можно претендовать, поскольку таблицы движения планет еще не достигли бо́льшего совершенства. При теперешнем состоянии наблюдательного искусства, было бы даже бесполезно стремиться к большей точности в астрономических таблицах; если бы и была возможность вычислять положения Луны с точностью до секунды, то это ничего бы не давало для практики. А такая степень точности потребовала бы может быть целой сотни новых неравенств, нахождение которых бесполезно обременило бы вычислителей ...Только по мере осуществления дальнейшего прогресса в наблюдательной практике, будет иметь смысл увеличить точность астрономических таблиц; но напрасна или нет такая надежда, во всяком случае важно стараться полнее развить теорию движения Луны и поднять ее, если это возможно, на высшую ступень точности. Знаменитая задача трех тел, к которой приводится изучение движения Луны, еще слишком превосходит силы Анализа, чтобы можно было надеяться найти полное решение. Все, что нам здесь доступно, сводится к методам приближений, которые могут осуществляться бесконечно разнообразными способами, так что искусство математика выказывается в выборе наиболее подходящих. В такого рода деле имеется много произвола, как и во всех других приближениях: известно, сколь различными способами геометры находили приближения к истинной величине отношения диаметра и окружности круга; причем некоторые из этих способов дают гораздо более быстрое приближение, чем другие, хотя все они являются одинаково хорошо обоснованными. Так же обстоит дело и с движением Луны, для которого можно получать приближения бесчисленным количеством различных методов; вот об этом я и хочу высказать некоторые соображения, вносящие много ясности в этот вопрос, столь же сложный, сколь важный.»

Дальше Эйлер излагает тот принцип употребления промежуточной орбиты, который является основой всех методов: сначала вводится «некоторая квази-Луна, движение которой можно было бы легко найти и которая отличалась бы очень мало от истинной Луны, а потом стараются вычислить для каждого рассматриваемого момента разность положений воображаемой Луны и истинной... Это тот самый путь, которым сначала шли при изучении движения планет, когда вместо каждой планеты вводили другую воображаемую планету, равномерно обращающуюся вокруг Солнца, а потом искали отклонения истинной планеты от этой планеты, имеющей среднее движение, что дало уравнение центра. Великий Кеплер довел этот метод до высшей степени совершенства.»

Эйлер отмечает далее, что изучать движение Луны, исходя из воображаемой Луны с равномерным круговым движением, значило бы начинать слишком издалека. Поэтому воображаемую Луну предполагают движущейся согласно законам Кеплера по эллипсу, которому придается надлежащее движение апсид. На этой идее, развитой еще Ньютоном, основано несколько лунных таблиц, опубликованных в Англии, «которые лучше согласовались с наблюдениями, чем прежние, но все же были еще очень плохи, так как их расхождения с истиной часто доходили до 10 минут; и кажется, что после счастливого начала, сделанного великим Ньютоном, все усилия англичан в этом направлении были бесплодны».

«После нескольких исследований этого вопроса я опубликовал в 1742 году новую форму лунных таблиц, где для удобства вычислений я предположил у воображаемой Луны движение апсид равномерным, а эксцентриситет неизменным, так что ее положение могло быть вычислено столь же просто, как положение планет. Несколько приложенных мною таблиц содержат поправки, которые, будучи прибавлены к положению воображаемой Луны, дают положение действительной Луны. Теория позволила мне найти все эти поправки, а также многие другие, которые я опустил по причине их малости. Но для нахождения некоторых элементов нужно было большое число наблюдений; а так как те, которые я употребил для этой цели, не были достаточно точны, то построенные мною на этом материале Таблицы не удовлетворили меня, хотя они нисколько не уступали английским, а употребление их было гораздо легче.

Между тем, форма моих Таблиц встретила всеобщее одобрение астрономов, считавших, что нужно только лучше определить из наблюдений элементы этих Таблиц, чтобы довести их до высшей степени совершенства. Г-н Майер, собрав большое число наилучших наблюдений, весьма удачно выполнил эту работу и исправил все неравенства, употребленные мною для нахождения положения Луны. Эти именно Таблицы были встречены с таким восторгом как во Франции, так и Англии и нашли широкое применение при предвычислении затмений и во всех других случаях, когда требуется находить положение Луны. Таблицы г-на Клеро построены на тех же принципах, и если они не очень согласны с небом, то причиной являются некоторые второстепенные обстоятельства, легко учитываемые.»

Однако выбор «воображаемой Луны», положенный в основу предложенного Эйлером способа построения таблиц, является, как он отмечает, совершенно произвольным и может быть сделан иначе. Причем, «чем ближе будет воображаемая Луна к истинной, тем Таблицы, основанные на ее употреблении, будут ближе к природе и, возможно, более пригодны для достижения наибольшей точности. Во всяком случае, такая идея в высшей степени заслуживает нашего внимания. Она давно уже привела меня к другому методу, который доставляет для каждого момента то коническое сечение, по которому движется Луна, и по которому она продолжала бы двигаться согласно законам Кеплера, если бы возмущающая сила Солнца мгновенно исчезла. Это привело меня к орбите, изменяющейся во всех отношениях: для каждого момента нужно прежде всего найти большую ось эллипса и его эксцентриситет, затем — положение апсид, или место апогея, движение которого становится тем неправильнее, чем меньше эксцентриситет; и наконец — истинную аномалию...».

Здесь особенно ясно изложен тот путь, который привел Эйлера к созданию метода вариации элементов. Отметив, что дифференциальные уравнения, определяющие оскулирующие элементы, были им раньше получены сложным и несколько искусственным путем, Эйлер дает прямой и весьма простой вывод этих уравнений в новой форме — за независимую переменную он вместо времени принимает аргумент широты, т. е. угловое расстояние светила от узла.

В этом мемуаре, как и в некоторых других, Эйлер много внимания уделяет тем трудностям, которые, как он считал, возникают при применении метода вариации элементов в случае очень малого эксцентриситета орбиты: чем меньше эксцентриситет, тем менее определенным делается положение перигея (или перигелия) и тем менее применимым становится способ последовательных приближений. Но дальнейшее развитие науки показало, что трудность эта только кажущаяся и весьма легко устранима. Нужно только, вместо раздельного нахождения истинной аномалии и положения перигея, искать их сумму, дающую сразу положение светила в орбите, т. е. как раз то̀, что нам именно и требуется для дальнейших вычислений.

Последняя, относящаяся сюда работа, опубликованная Эйлером, носит название

№ 75. «О возмущениях движения планет и комет» [89].

В ней дается вывод уравнений, определяющих оскулирующие элементы, непосредственно из дифференциальных уравнений движения в прямоугольных координатах и их первых интегралов, тогда как в предыдущих работах Эйлер исходил из уравнений движения в цилиндрических координатах. Этот новый, весьма тщательно разработанный вывод идентичен по существу с тем, который, следуя Гауссу, применяют и сейчас для выражения производных оскулирующих элементов через три компоненты возмущающего ускорения.

Статья заканчивается подробным «Наставлением для нахождения возмущений, которые орбиты планет или комет испытывают от действия других небесных тел».

Вопросы общей теории возмущенного движения были также рассмотрены Эйлером в двух работах, опубликованных только в 1862 г. В уже указанной нами «Механической астрономии» (№ 34) этим вопросам посвящены две последние главы VI и VII. Здесь дается еще один вариант уравнений, определяющих оскулирующие элементы. В следующем за этими главами «Отступлении» («Digressio») выведенные формулы применяются к вычислению возмущений, которые, по мысли Эйлера, могла испытать Земля от близкого прохождения большой кометы, имевшего место в 1759 г. Возмущения оскулирующих элементов находятся самым примитивным способом численного интегрирования (способ прямоугольников). Приняв массу кометы, в соответствии с представлениями того времени, равной массе Земли, Эйлер находит, что длина года увеличилась от действия кометы на 27 минут, так что «если бы комета прошла около Земли сто раз, то год увеличился бы на 45 часов, а такой эффект был бы поистине изумительным». Для перемещения линии апсид земной орбиты Эйлер находит $8'20''$ и отмечает, что при стократном прохождении кометы это дало бы $13°23'20''$. Все эти рассуждения он заканчивает замечанием, что «если бы масса кометы намного превосходила массу Земли, то эти возмущения достигли бы таких размеров, что их влияния стали бы ощутимыми не только в астрономии, но и в обыденной жизни». Вопрос о возмущении движения Земли кометой рассматривается также в работе № 87, о которой будет сказано в разделе IX.

Вторая работа носит название

№ 76. «Исследование неравенств, производимых в движении планет какими угодно силами» [90].

В ней вопрос изучения возмущенного движения рассматривается сначала во всей общности, когда возмущающие силы произвольны. Полученные для нахождения оскулирующих элементов уравнения применяются затем к задаче трех тел. Довольно подробно изучается нахождение основных неравенств в движении как спутников, так и планет при помощи приближенного аналитического интегрирования полученных уравнений, аналогично тому, как это делается в работах № 43 и 57.

VIII. ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ И ЕЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

В этом разделе мы рассмотрим те исследования Эйлера, в которых задача трех тел изучается им вне непосредственной связи с ее астрономическими применениями.

Особого внимания, с точки зрения истории знаменитой задачи трех тел, заслуживают прежде всего следующие два мемуара, написанные Эйлером практически одновременно:

№ 77. «Замечания о задаче трех тел» [91].

№ 78. «О прямолинейном движении трех взаимно притягивающихся тел» [92].

Первый мемуар № 77 (представленный Берлинской академии 4 декабря 1765 г.) начинается весьма интересными общими соображениями, остающимися в полной силе и в настоящее время. Приведем их, поэтому, полностью.

«1. Проблема, в которой требуется найти движение трех тел, притягивающих друг друга сообразно гипотезе Ньютона, стала за последнее время столь знаменитой, благодаря затраченным на нее усилиям величайших геометров, что уже начали спорить, кому же принадлежит честь ее решения. Но такой спор слишком преждевременен, и еще очень далеко до получения полного решения этой проблемы. Все, что было сделано до сих пор, относится к одному весьма частному случаю, когда движение каждого из трех тел происходит приблизительно по законам, установленным Кеплером; но даже и в этом случае движение было найдено только приближенно. Во всех же других случаях нельзя похвастаться, чтобы можно было хотя бы приближенно указать движение трех тел, и оно остается для нас такой же полной тайной, как если бы никто никогда не размышлял об этой проблеме.

2. Чтобы ясно показать, как мы еще далеки от полного решения этой проблемы, достаточно сравнить ее со случаем, когда взаимно притягиваются только два тела, или даже с самым простым случаем произвольно брошенного в пустоте тела. Нельзя не признать, что было бы невозможно найти параболу, описываемую таким телом, если бы не был предварительно известен закон, по которому тяжелое тело падает по вертикали вниз. Без открытия Галилея, что скорость падающего тела возрастает пропорционально квадратному корню из высоты падения, никогда бы не нашли параболу, которую описывает в пустоте наклонно брошенное тело.

3. Аналогично обстоит дело и с общим случаем движения двух взаимно притягивающихся тел, где также надо начинать с нахождения прямолинейного движения, которым эти тела сближаются или удаляются друг от друга, раньше чем искать конические сечения, которые описывают эти тела, будучи брошены вкось. Ибо, хотя великий Ньютон и шел в обратном направлении в своих исследованиях, никто не станет сомневаться, что ему никогда не удалось бы найти криволинейное движение, если бы он не был в состоянии найти прямолинейное.

4. Отсюда я делаю неоспоримое заключение, что нельзя надеяться разрешить общий случай задачи трех тел, пока не найдено средство решить ее в том случае, когда три тела движутся по одной прямой, что будет иметь место, если в начальный момент они находились на одной прямой и были либо в покое, либо имели скорости того же направления. Таким образом, раньше, чем браться за решение задачи трех тел в ее обычной формулировке, совершенно необходимо обратиться к случаю, когда движение трех тел происходит по одной и той же прямой; и можно быть вполне уверенным, что если эта последняя задача не поддастся нашим усилиям, то напрасно льстить себя надеждой на решение первой. В столь трудных исследованиях всегда следует начинать с наиболее простых случаев.

5. Между тем случай, когда три тела движутся по одной и той же прямой, гораздо проще того, когда они описывают криволинейные траектории, которые могут оказаться даже не плоскими; это обстоятельство сделает наши исследования особенно сложными. Все это настолько очевидно, что приходится удивляться, как ни один из великих геометров, занимавшихся этой задачей, не начал своих исследований со случая прямоли-

нейного движения; причина этого, очевидно, в том, что такое движение не встречается в природе, и что эти великие люди несколько спешили применить поскорее результаты своих изысканий к действительно встречающимся на Небе явлениям, вместо того чтобы предпринимать исследования, не имеющие к ним прямого отношения.

6. Можно было бы даже подумать, что такой случай был, по причине своей простоты, недостоин сил этих геометров и что они хотели оставить его исследование менее крупным ученым: но такое отношение было бы совершенно необоснованным, потому что решение и в этом случае связано со столь большими трудностями, что они кажутся непреодолимыми для самых великих математиков. Мне представляется поэтому весьма важным выявить все эти трудности, чтобы в дальнейшем желающие заниматься этой великой задачей трех тел могли сосредоточить свои усилия на преодолении их. Усилия в этом направлении будут тем более полезны, что нельзя надеяться получить полное решение этой задачи раньше, чем будет найдено средство для преодоления трудностей, связанных со случаем прямолинейного движения; но и при таком условии мы еще не очень продвинемся, быть может, в разрешении общего случая задачи.»

Мотивировав, таким образом, целесообразность изучения случая прямолинейного движения трех тел, Эйлер переходит к составлению уравнений движения. Массы трех тел A, B и C, расположенных на одной прямой, он обозначает теми же буквами A, B и C; положив $AB=x$, $BC=y$, он получает уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{-A-B}{x^2}+\frac{C}{y^2}-\frac{C}{(x+y)^2}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{-B-C}{y^2}+\frac{A}{x^2}-\frac{A}{(x+y)^2}, \tag{2}$$

делая при этом следующее замечание: «я не затрудняю себя коэффициентом, который нужно было бы поставить перед элементом dt, и который зависит от способа, принятого для исчисления времени». Эти уравнения полностью определяют движение тел A и C относительно тела B.

Эйлер начинает с рассмотрения того частного случая, когда отношения расстояний между телами остаются постоянными. Полагая $y=nx$, из (1) и (2) он находит, что не зависящая от времени величина n должна удовлетворять уравнению 5-й степени

$$(A+B)n^5+(3A+2B)n^4+(3A+B)n^3-(B+3C)n^2-$$
$$-(2B+3C)n-B-C=0; \tag{3}$$

после чего движение получается путем легко выполняемого интегрирования уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{E}{x^2}, \tag{4}$$

где

$$E = A + B - \frac{C}{n^2} + \frac{C}{(1+n)^2}.$$

В мемуаре № 78 Эйлер со всею подробностью изучает полученное решение. Отметив, что уравнение (3) при любых массах имеет один и только один положительный корень (потому что коэффициенты этого уравнения имеют только одну перемену знака), он показывает, что для этого корня $E > 0$. Таким образом, уравнение (4) имеет ту же форму, что и уравнение, определяющее прямолинейное движение в задаче двух тел. Рассматривая отдельно случаи прямолинейно-гиперболического и прямолинейно-эллиптического движений, Эйлер выполняет интегрирования и получает расстояния x и y в функции времени.

Отметим, прежде всего, что мы здесь впервые встречаем те частные случаи задачи трех тел, в которых она приводится к задаче двух тел и, следовательно, разрешается до конца. Если среди рассматриваемых нами трех масс A, B и C нет равных, то, меняя порядок их расположения на прямой, из результатов Эйлера получаем три случая движения этих масс, обладающие только что указанным свойством.

Вопрос о частных случаях задачи трех тел, разрешимых элементарными средствами, нашел свое дальнейшее развитие в знаменитом мемуаре Лагранжа [93], получившем премию Парижской академии наук в 1772 г., т. е. непосредственно после опубликования рассматриваемых нами работ Эйлера.

Занимаясь вопросом о понижении порядка системы уравнений, определяющих движение трех тел, Лагранж получил дифференциальные уравнения, определяющие их взаимные расстояния. Это позволило ему поставить и решить задачу об отыскании всех частных случаев движения, в которых взаимные расстояния трех тел сохраняют постоянные отношения. Оказалось, что помимо только что указанных трех случаев прямоугольного движения, открытых Эйлером, имеются еще два случая, удовлетворяющие поставленному условию. В этих новых случаях движение происходит так, что три тела все время образуют равносторонний треугольник, причем каждое тело движется относительно другого по законам Кеплера.

Благодаря той широкой известности, которую получил мемуар Лагранжа вследствие долго не прекращавшихся попыток дальнейшего понижения порядка дифференциальных уравнений задачи трех тел, все пять случаев часто называются лагранжевыми случаями задачи трех тел. Более того, их называли также лапласовыми случаями, поскольку Лаплас включил вывод всех пяти случаев в свою «Небесную механику» [94] [9], без упоминания работ Эйлера и Лагранжа, а огромное большинство лиц, изучавших его трактат, с этими работами не встречалось. Только в последнее время была отмечена роль Эйлера в открытии этих частных случаев, представляющих теперь для небесной механики не только «интерес чистого курьёза», как думал Лагранж [95, 96] [10].

Вернемся теперь к содержанию мемуара № 77. Отметим, прежде всего, делаемую там попытку проинтегрировать систему уравнений (1), (2). Эйлер находит первый интеграл этих уравнений

$$A(B+C)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2AC\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + C(A+B)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 =$$
$$= 2(A+B+C)\left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y}\right),$$

где Γ — постоянная, введенная интегрированием, и использует его для исключения из некоторой комбинации уравнений (1) и (2) времени. Получив дифференциальное уравнение второго порядка, связывающее переменные x и y, он замечает: «Как ни сложно выглядит это уравнение, все же я мог бы указать похожие случаи, когда интегрирование удалось, поэтому нет оснований отчаиваться в успехе». Сообразно с этим, Эйлер на нескольких страницах делает попытки продвинуть интегрирование дальше, нащупывая путь при помощи рассмотрения частных случаев (когда масса B бесконечно велика по сравнению с массами A и C, или когда одна из этих последних становится бесконечно малой). Убедившись в конце концов в тщетности попыток проинтегрировать уравнение, связывающее x и y, он заключает, что «каждая из этих величин связана более непосредственно со временем t, так что я не уверен, не было ли бы гораздо выгоднее не исключать из вычислений дифференциал dt. Правда, и в этом случае не видно, каким образом можно было бы дойти до решения; это уже дело геометров употребить все усилия для нахождения другого пути, приводящего к решению задачи».

Эйлер делает из всего изложенного следующий вывод:

---

[9] Вывод Лапласа много проще и короче вывода, данного Лагранжем, но он основывается на дополнительном, ничем не мотивированном предположении, что искомые движения должны происходить в неподвижной плоскости.

[10] Книга Винтера [96] содержит довольно полное изложение различных обобщений результатов Эйлера и Лагранжа на задачу многих тел.

«Мы видим, таким образом, что еще очень далеко до решения самого простого случая задачи трех тел, каковым является без сомнения тот, когда движение происходит на прямой линии; стало быть, с еще бо́льшим основанием можно считать недостигнутым полное решение этой великой проблемы. Правильнее считать, что едва сделан только первый шаг. Этот первый шаг основывается на общих свойствах, присущих не только движению трех тел, взаимно притягивающихся между собой, но имеющих место, как бы велико ни было число тел. Так как очень важно знать эти общие свойства, хотя они и не достаточны для нахождения движения, если тел больше, чем два, то я сейчас выведу их из тех основных формул, которые даются принципами механики, дабы было совершенно ясно, насколько мы уже продвинулись в этих исследованиях.»

После этих замечаний Эйлер дает «общие свойства движения тел, которые взаимно притягиваются, как бы велико ни было их число». Взяв для примера четыре тела, он составляет дифференциальные уравнения их движения в прямоугольных координатах. Общие свойства, которые имеет в виду Эйлер, это общеизвестные в настоящее время 10 первых интегралов, имеющих место для изолированной системы точек, движущихся под действием консервативных сил: 6 интегралов движения центра инерции (Эйлер их считает за три), которые были известны, по существу, еще Ньютону, 3 интеграла площадей и интеграл энергии. Даваемый им вывод отличается от современного только тем, что Эйлер не пользуется функцией сил, введенной Лагранжем несколько позже (1777).

Открытие интегралов площадей и интеграла энергии завершило создание тех основ, на которых и сейчас зиждется механика систем материальных точек. Единственным дополнением было здесь открытие неизменной плоскости, сделанной Лапласом (1784). Оно дало новую интерпретацию интегралов площадей. Что же касается астрономической задачи многих тел, то единственным прогрессом после Эйлера здесь было открытие дифференциального уравнения второго порядка, связывающего взаимные расстояния тел. Для трех тел оно было дано Лагранжем (1772), а на произвольное число тел — обобщено Якоби (1842).

Мемуар заканчивается следующими словами, не потерявшими значения и в настоящее время: «Метод, которым я здесь пользовался для отыскания таких комбинаций основных уравнений, которые приводят к интегрируемому равенству, представляется совершенно исчерпанным, так что нужно искать новые пути. При том состоянии, в котором сейчас находится Анализ, невозможно даже сказать, близки мы или нет к нахождению интегрируемых комбинаций, но можно быть уверенным, что нахождение их принесет больше пользы Анализу, нежели Астрономии, ибо, по всей видимости, они будут столь сложны, что окажутся бесполезными для практики.»

В несомненной связи с попытками Эйлера осветить путь решения задачи трех тел при помощи разбора ее частных случаев находятся его работы:

№ 79. «Задача: тело притягивается к двум заданным неподвижным точкам обратно пропорционально квадрату расстояния; найти, в каком случае описываемая телом кривая будет алгебраической» [97];

№ 80. « О движении тела, которое притягивается двумя неподвижными силовыми центрами» [98,99];

Отметив, что движение тела, притягиваемого одним силовым центром, было успешно изучено еще великим Ньютоном, тогда как для решения такой задачи в случае двух притягивающих центров до сих пор не было видно даже пути, Эйлер указывает причины, по которым эта задача представляет интерес: «Но как всегда бывает с задачами, которые величайшие гении напрасно пытались разрешить, ее решение представляет исключительный интерес, поскольку оно связано с теми частями Анализа, от расцвета которых следует ожидать прогресса всей Астрономии... Меньше всего, к тому же, можно сомневаться, что аналитические приемы, которые я здесь употребляю, будут во многих отношениях полезны при разъяснении других проблем того же рода.»

Весьма остроумная замена переменных позволила Эйлеру получить, по крайней мере для случая плоского движения, общее решение задачи. Оказалось, что решение выражается в этом случае через эллиптические интегралы. Но вскоре Лагранжу удалось показать, что сделанное Эйлером ограничение не нужно и что всегда расстояния тела от двух неподвижных центров выражаются через эллиптические функции времени [100]. Это обстоятельство дало возможность позднейшим авторам, пользуясь аппаратом теории эллиптических функций, подробно изучить все весьма разнообразные формы движения [101—103]. Задача двух неподвижных силовых центров не имеет сколько-нибудь значительных астрономических приложений, но благодаря посвященным ей работам, прежде всего Лагранжа, Лежандра и Якоби, она, как справедливо предвидел Эйлер, явилась источником важных математических концепций.

К тому же кругу идей можно отнести мемуар

№ 81. «Размышления о движении небесных тел» [104].

Он начинается замечаниями общего характера. Отметив, что истинной причиной движений небесных тел является их взаимное притяжение, Эйлер указывает, что нам удается изучать эти движения только в тех случаях, когда они не слишком уклоняются от законов Кеплера. А во всех остальных случаях, даже при наличии только трех тел, мы находимся в полном неведении относительно их характера.

Но если и удалось, например, создать теорию, удовлетворительно представляющую движение Луны, то этим мы обязаны особо благоприятным обстоятельствам. Так, если бы Луна находилась в два-три раза дальше от Земли, или если бы ее орбита имела значительный эксцентриситет, то огромные затраченные на это дело труды не позволили бы нам выяснить законы ее движения. Можно поэтому думать, что рассмотрение фиктивного случая, когда Луна предполагается находящейся на гораздо большем расстоянии от Земли, чем на самом деле, будет полезно для развития науки. Мы можем таким способом как бы связать теорию движения планет с теорией движения спутников. Ведь если Луну предположить в сотни раз дальше, то всякий будет ее считать за планету, если же ее удалить только в десятки раз дальше, то будет сомнительно, считать ли ее планетой или спутником. Если бы такой случай имел место на небе, то при помощи бесчисленных наблюдений нам, возможно, и удалось бы найти закономерности, позволяющие предсказывать положение этого тела, но совсем не ясно, смогли ли бы мы когда-нибудь создать теорию, объясняющую его движение. Отсюда, по словам Эйлера, «ясно, что всемудрейший Творец учитывал слабость наших сил, когда ни одно небесное тело не расположил так, чтобы его нельзя было отнести или к планетам, или к спутникам».

Эйлер приходит к заключению, что в таких трудных делах, как задача трех тел, нужно продвигаться вперед постепенно. Лучше всего сначала рассмотреть, вместо общей задачи трех тел, тот частный случай, когда масса одного тела по сравнению с массами двух других как бы исчезает. Здесь движение двух тел, происходящее по законам Кеплера, будет нам в точности известно, а все возмущения будут включены в движение третьего тела. Но и над такой, упрощенной задачей, признается Эйлер, он напрасно выбивался из сил; однако ему удалось открыть весьма удивительный и весьма простой частный случай. Оказывается, что Луне можно было бы сообщить такое начальное движение, что она вечно находилась бы или в соединении или в оппозиции с Солнцем. Рассмотрение такого случая, хотя и не может принести большой пользы в этих трудных вопросах, является все же интересным.

После этих предварительных замечаний Эйлер обращается к дифференциальным уравнениям, определяющим движение Луны. Предполагая движение Солнца известным и строго эллиптическим, и считая, что

Луна движется в плоскости эклиптики, он берет эти уравнения в форме

$$\frac{2dvd\varphi + vd^2\varphi}{d\zeta^2} - \frac{a^3}{u^2}\left(1 - \frac{u^3}{z^3}\right)\sin\eta = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d^2v - vd\,\varphi^2}{d\zeta^2} + \frac{n^2c^3}{v^2} + \frac{a^3v}{z^3} + \frac{a^3}{u^2}\left(1 - \frac{u^3}{z^3}\right)\cos\eta = 0, \tag{6}$$

где

$$z = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\eta}.$$

Здесь u и v — расстояния Солнца и Луны от Земли; φ — геоцентрическая долгота Луны; η — элонгация Луны (т. е. разность долгот Луны и Солнца); ζ — средняя долгота Солнца (т. е. время, измеренное в особых единицах); a и c — средние расстояния Солнца и Луны от земли; n — отношение среднего движения Луны к среднему движению Солнца.

Уравнения (5) и (6) являются основой теории движения Луны, где они решаются приближенно в предположении, что величина v/u всегда очень мала. Но если решать эти уравнения вне какого-либо отношения к реально существующей Луне, то оказывается, что можно найти вполне строгое решение.

Эйлер рассматривает сначала случай, когда фиктивная Луна находится вечно в соединении с Солнцем, т. е. когда $\eta = 0$. Полагая $v = \alpha u$, он замечает, что уравнения движения удовлетворяются, если α — постоянная величина, являющаяся корнем уравнения пятой степени

$$m(1-\alpha)^2 = 3\alpha^3 - 3\alpha^4 + \alpha^5, \tag{7}$$

где

$$m = \frac{n^2c^3}{a^3}.$$

Легко видеть, что это уравнение есть частный случай уравнения (3) о чем, впрочем, сам Эйлер не упоминает. Предполагая α малой величиной, он из уравнения (7) находит

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{m}{3}} = \frac{c}{a}\sqrt[3]{\frac{n^2}{3}} \tag{8}$$

и замечает, что для нашей Луны $n^2 \approx 175$. Это дает

$$v = \alpha u = 4cu/a,$$

а поскольку u можно считать равным a, то $v = 4c$. Итак, если бы Луна находилась от нас в четыре раза дальше, то она могла бы оставаться все время в соединении с Солнцем.

Аналогично Эйлер рассматривает случай Луны, находящейся все время в оппозиции с Солнцем, когда $\eta = 180°$. Здесь α определяется аналогичным уравнением

$$m(1+\alpha)^2 = \alpha^2(1+\alpha)^3 - \alpha^2, \tag{9}$$

также являющимся частным случаем уравнения (3).

В первом приближении для α здесь получается то же самое значение (8). Более точные значения корней уравнений (7) и (9) Эйлер дает в виде

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{m}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{m^2}{9}} - \frac{1}{27}m + \frac{1}{81}m\sqrt[3]{\frac{m}{3}}$$

и

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{m}{3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{m^2}{9}} - \frac{1}{27}m - \frac{1}{81}m\sqrt[3]{\frac{m}{3}}.$$

Большой интерес представляют параграфы этой работы, в которых Эйлер изучает колебания малого тела вблизи найденных им двух положений относительного равновесия. Здесь мы имеем первый пример того изучения решений дифференциальных уравнений, близких к периодическим решениям, которое после работ Пуанкаре стало играть такую большую роль сначала в небесной механике, а затем и в самых разнообразных областях науки и техники.

Подставив в уравнения (5) и (6) приближенное выражение

$$1 - \frac{u^3}{z^3} = -\frac{3v}{u}\cos\eta + \frac{3v^2}{2u^2}(1 - 5\cos^2\eta),$$

Эйлер полагает затем (для первого из двух положений относительного равновесия, когда малое тело находится между Землей и Солнцем)

$$\sin\eta = \eta, \quad \cos\eta = 1 - \frac{1}{2}\eta^2,$$

$$v = c(1+x), \quad m = \frac{n^2c^3}{a^3}.$$

Это приводит его к следующей системе уравнений:

$$2\frac{dx}{d\zeta}\frac{d\eta}{d\zeta} + (1+x)\frac{d^2\eta}{d\zeta^2} + 2\frac{dx}{d\zeta} + 3(1+x)\eta = 0,$$

$$\frac{d^2x}{d\zeta^2} - 3 - 3x - 2(1+x)\frac{d\eta}{d\zeta} - (1+x)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^2 +$$
$$+ 3(1+x)\eta^2 + m(1 - 2x + 3x^2) = 0.$$

Здесь нет возможности подробно изложить интересный способ, применяемый Эйлером для решения этой системы. Заметим только, что он ищет решение в форме

$$\eta = A\sin\omega + B\sin 2\omega + C\sin 3\omega + \ldots,$$
$$x = E\cos\omega + F\cos 2\omega + G\cos 3\omega + \ldots,$$

где $\omega = \alpha\zeta + \beta$, причем β — произвольная постоянная. Для нахождения частоты колебаний он получает приближенное уравнение

$$\alpha^4 + 2\alpha^2 - 27 = 0$$

и рассматривает дальше лишь вещественные корни этого уравнения, для которых $\alpha^2 = -1 + \sqrt{28}$. Существование мнимых корней характеристического уравнения и связанная с этим неустойчивость рассматриваемых периодических решений не привлекли внимания Эйлера.

Обратимся теперь, несколько нарушая хронологическую последовательность, к двум работам, являющимся непосредственным продолжением только что рассмотренного мемуара:

№ 82. «О различных видах движения, которые могут иметь место у спутников планет» [105];

№ 83. «О наиболее нерегулярных движениях, которые могли бы иметь место в космосе, а также о методе, при помощи которого такого рода движения можно проследить сколь угодно далеко» [106].

Эти работы, написанные Эйлером в весьма уже преклонном возрасте, показывают, прежде всего, какой живой интерес к проблемам небесной механики он сохранял до конца своей жизни. Они показывают также, какие пути в изучении задачи трех тел Эйлер на основании своего богатого опыта считал обещающими наибольший успех.

Работа № 82 начинается с указания недостатков, присущих теории движения Луны, несмотря на исключительно благоприятные условия для построения такой теории, создаваемые близостью Луны к Земле и малостью эксцентриситета и наклона ее орбиты. Если бы Луна находилась на значительно большем расстоянии (так, чтобы ее нельзя было отнести ни к спутникам, ни к планетам), то все средства, которыми располагают астрономы, были бы бессильны и мы совершенно не знали бы теории ее движения.

Тщательное рассмотрение возникающих здесь огромных трудностей приводит Эйлера к заключению, что для усовершенствования теории нет другого пути, как подробное изучение многих частных случаев, надлежащим образом выбранных. Причем начинать следует с простейших случаев, освобожденных, насколько возможно, от одновременного присутствия различных трудностей. Поскольку в математике, приступая к трудной задаче, решают сначала ряд простейших, постепенно к ней приближающихся, то к такому же методу следует обратиться и в астрономии.

Исходя из этих соображений, Эйлер кладет в основу следующую задачу: «Предполагая, что Земля движется вокруг Солнца равномерно по круговой орбите и что небольшое тело, квази-Луна, движется как угодно в той же плоскости эклиптики, найти движение этого тела, каким оно представляется, если смотреть из центра Земли».

Таким образом, Эйлер ставит здесь ограниченную задачу трех тел, играющую, начиная с конца XIX в., столь важную роль в развитии небесной механики. И эта задача, введение которой обычно приписывается Якоби, появляется у Эйлера не случайно, а как глубоко продуманный исходный пункт для изучения общей задачи трех тел и, в частности, для планомерной разработки теории движения Луны.

Обозначив через θ и φ долготы Солнца и квази-Луны, а через x, y — прямоугольные геоцентрические координаты Луны, и приняв радиус земной орбиты за единицу длины, Эйлер дает уравнения движения квази-Луны (в дальнейшем она называется просто Луной) в виде

$$(1+m)\frac{d^2x}{d\theta^2} = -\frac{m\cos\varphi}{v^2} + \frac{\cos\theta - v\cos\varphi}{u^3} - \cos\theta, \tag{10}$$

$$(1+m)\frac{d^2y}{d\theta^2} = -\frac{m\sin\varphi}{v^2} + \frac{\sin\theta - v\sin\varphi}{u^3} - \sin\theta, \tag{11}$$

где u и v — расстояния Луны от Солнца и от Земли, так что

$$u = \sqrt{1 - 2v\cos\eta + v^2}, \quad \eta = \varphi - \theta.$$

Через m здесь обозначена масса Земли, выраженная в частях массы Солнца, принятой за единицу. Эйлер принимает $m = 3/1\,000\,000$ и заменяет в дальнейшем $1+m$ единицей.

Так как

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = v, \quad y\cos\varphi - x\sin\varphi = 0,$$

то уравнения (10) и (11) легко приводятся к виду

$$(1+m)\left[\frac{d^2v}{d\theta^2} - v\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2\right] = -\frac{m}{v^2} + \frac{\cos\eta}{u^3} - \frac{v}{u^3} - \cos\eta, \tag{12}$$

$$(1+m)\left[2\frac{dv}{d\theta}\frac{d\varphi}{d\theta} + v\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\right] = -\frac{\sin\eta}{u^3} + \sin\eta. \tag{13}$$

Прежде всего Эйлер ставит вопрос, существуют ли среди движений, определяемых уравнениями (12) и (13), круговые движения, в которых $v = \mathrm{const}$ и $\frac{d\varphi}{d\theta} = n = \mathrm{const}$.

Уравнение (13) показывает, что такое предположение дает $\sin\eta = 0$, ибо равенство $u = 1$, как легко видеть, невозможно. А так как $\eta = (n - 1)\,\theta + \mathrm{const}$, то возможны только два случая кругового движения Луны:

1) когда $\eta = 0°$ и, следовательно, Луна находится все время в соединении с Солнцем (новолуние);

2) когда $\eta = 180°$, т. е. когда Луна всегда находится в положении полнолуния.

И в том и в другом случае Луна описывает вокруг Солнца круговую орбиту с периодом обращения, равным году. Радиусы этих орбит равны соответственно

$$1 \mp \sqrt[3]{\frac{m}{3}} = 1 \mp {}^1/_{100}.$$

Таким образом, Эйлер снова, но уже другим путем, приходит к двум из тех трех положений относительного равновесия, которые были им найдены в мемуаре № 77. Он особенно подчеркивает, что только что указанные два случая отграничивают область тех движений, когда Луну нужно рассматривать как спутника Земли, от таких движений, когда ее нужно было бы уже причислить к самостоятельным планетам (ad classem planetarum principalium numerari debeant). В то время как для Земли радиус сферы, в котором могут находиться ее спутники, равен $^1/_{100}$ астрономической единицы длины, для Юпитера радиус такой сферы равен $^1/_{15}$, а для Сатурна $^1/_{21}$ этой единицы.

Затем Эйлер рассматривает «более непосредственное приложение вышеуказанных формул к лунному движению». Считая v малой величиной, не превосходящей $^1/_{100}$, и пользуясь приближенной формулой

$$u^{-3} = 1 + 3v\cos\eta, \tag{14}$$

он существенно упрощает уравнения (12) и (13). Это дает ему возможность искать решение этих уравнений в форме

$$v = a\,(1 + \alpha\cos 2\eta), \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = n\,(1 + \beta\cos 2\eta),$$

т. е. получить первые члены вариации. Эти формулы он применяет к движению спутника, обращающегося на различных расстояниях от центра Земли — от одного радиуса Земли до 25 ее радиусов.

Далее Эйлер переходит к учету влияния эксцентриситета спутника, т. е. решает задачу об одновременном учете собственных и вынужденных колебаний системы в рассматриваемом случае нелинейных колебаний. Делает он это способом, примененным им во второй теории движения Луны.

Заканчивая этот мемуар, Эйлер еще раз подчеркивает, что, при возрастании расстояния Луны от Земли, трудности изучения ее движения очень быстро увеличивались бы. Если же это расстояние приблизилось бы к $a={}^1/_{100}$, т. е. к границе области движения спутников (ad limitem sphaerae lunaris), то изучение движения при современном состоянии математического анализа было бы невозможно. И тем более изумительно, что по достижении указанного предела $a={}^1/_{100}$ для Луны оказывается возможным круговое равномерное движение. «Рассматриваемый случай можно уподобить тому положению равновесия, которое называется лабильным или неустойчивым (labilis seu caducus). Например, когда копье поставлено на острие, то достаточно сколь угодно мало отклонить его от этого положения, чтобы произошло падение. Подобным же образом, достаточно сколь угодно мало удалить такую Луну от ее регулярного (кругового) движения, чтобы движение сразу стало столь нерегулярным, что его уже нельзя охватить ни теорией, ни таблицами.»

Работа № 83 является непосредственным продолжением работы № 82. В ней Эйлер еще раз выясняет важность полученной им классификации движений, наиболее уклоняющихся от регулярных (т. е. происходящих по законам Кеплера), на три рода: движения, происходящие целиком внутри «лунных или спутниковых сфер», окружающих планеты; движения, происходящие целиком вне этих сфер; движения смешанного характера, протекающие отчасти внутри, отчасти вне этих сфер. Если бы тела, обладающие движениями последнего рода, т. е. являющиеся иногда спутниками, иногда планетами, встретились в солнечной системе, то мы были бы в величайшем затруднении, пытаясь изучить их движения.

Между тем изучение подобных движений принесло бы большую пользу в деле лучшего познания реально встречающихся движений планет и спутников. Пока мы не будем в состоянии изучать движение других лун, находящихся на расстоянии в два, три, но не больше чем в четыре раза дальше действительной Луны, мы не сможем познать до конца неравенства этой последней. Подобным же образом, если бы между орбитами

Юпитера и Сатурна существовала планета и изучение ее движения представляло бы для нас непреодолимые трудности, то нельзя было бы ожидать, что мы познаем в совершенстве неравенства, наблюдаемые в движении Сатурна. Однако такого рода достижения никак невозможны без очень большого развития математического анализа, на которое нельзя рассчитывать в близком будущем.

«Но если нельзя надеяться на получение полного решения уравнений, определяющих такие движения, то мною уже давно был предложен метод, при помощи которого эти движения, сколь они ни были бы иррегулярны, можно проследить шаг за шагом; так что, зная положение и скорость тела для одного момента, мы можем достаточно точно найти его положение по истечении любого интервала времени.»

Далее Эйлер излагает применение к дифференциальным уравнениям, выведенным в мемуаре № 82, данного им ранее (1763) метода численного интегрирования таких уравнений. Этот метод мы рассмотрим подробно в разделе IX вместе с другими его работами по этому вопросу. Упомянем только делаемые им здесь указания о важности применения численного интегрирования для качественного изучения движения в особо трудных случаях и о возможности ограничиться здесь приближенными вычислениями. «А кто пожелал бы выполнить такого рода труд, тот принес бы Астрономии не малую пользу.»

Далеее он дает подробный пример таких вычислений. Для уравнений (12) и (13), несколько упрощенных подстановкой (14), Эйлер берет начальные условия

$$\theta = 0^\circ, \quad \varphi = 0^\circ, \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = 2, \; v = 0{,}008, \; \frac{dv}{d\theta} = 0.$$

Приняв шаг интегрирования $\omega=1^\circ$, он вычисляет значения φ и v для $\theta=1^\circ, 2^\circ,\ldots,10^\circ$. Делаемые Эйлером подсчеты показывают, что увеличивать шаг интегрирования до $\omega=5^\circ$ нецелесообразно, но можно, не усложняя вычислений, взять $\omega=3^\circ$. Приняв $\theta=10^\circ$ за новую эпоху, он находит координаты и скорости для $\theta=13$, 16, 19°.

Как результат применения своего метода Эйлер дает таблицу координат и скоростей от $\theta=0^\circ$ до $\theta=30^\circ$.

Мемуар заканчивается замечаниями о применении этого метода к движениям, выходящим за пределы «лунной сферы», когда он становится единственно пригодным.

Обратимся, далее, к мемуару

№ 84. «Замечание о некоторых особых обстоятельствах, которые надо учитывать при изучении неравенств возмущенного движения небесных тел» [107].

Мемуар начинается обстоятельным обзором достижений и очередных проблем теоретической астрономии. Указывается, что все задачи астрономии приведены теперь к задачам механики, принципы которой уже прочно установлены, и что все остающиеся трудности обусловлены неудовлетворительным состоянием математического анализа. Прогресс может быть достигнут изучением простейшей задачи, которой является задача трех тел, а изучение этой задачи следует начинать с частных случаев. В этом мемуаре Эйлер ограничивается рассмотрением случая плоской задачи трех тел, когда движение их происходит в неподвижной плоскости. Он высказывает уверенность в том, что если будут преодолены все трудности в этом частном случае, то общий случай задачи трех тел едва ли представит значительные затруднения.

После предварительных замечаний Эйлер решает в этом мемуаре следующие задачи:

1. Три тела A, B, C, взаимно притягивающиеся обратно пропорционально квадратам расстояний, движутся в одной и той же плоскости. Найти движение тел B и C, каким оно представляется наблюдателю, находящемуся в теле A. «Решение» заключается здесь лишь в составлении дифференциальных уравнений задачи.

2. Уравнения предыдущей задачи решаются в том частном случае, когда масса тела B равна нулю (задача двух тел).

3. Рассматривается движение тела C со столь малой массой, что оно не возмущает движение тела B, но испытывает возмущения со стороны этого последнего.

4. Рассматривается движение двух тел A и C, притягиваемых телом B с силой, как угодно зависящей от расстояния, при условии, что движение происходит в неподвижной плоскости.

5. Задача 1 обобщается на случай, когда притяжение является произвольной функцией расстояния.

6. Зная движение тела C относительно точки A, найти его движение по отношению к точке O, движение которой относительно A известно.

7. Три тела A, B, C взаимно притягиваются с силой, как угодно зависящей от расстояния. Найти движение тела C относительно точки O, находящейся на прямой AB.

Здесь рассматривается частный случай, когда тело все время находится в точке O (т. е. случай колинеарного движения трех тел), а сила притяжения пропорциональна любой степени расстояния.

Последней работой, посвященной Эйлером частным случаям задачи трех тел, является опубликованная уже после его смерти статья

№ 85. «О движении трех взаимно притягивающихся тел по одной и той же прямой линии» [108].

Она начинается выводом дифференциальных уравнений движения относительного произвольного начала и получением их первых интегралов. От этих уравнений Эйлер переходит к уравнениям (1) и (2) (см. стр. 336) относительного движения. Далее рассматривается опять случай, когда расстояния между телами сохраняют постоянное отношение и получается уравнение (3). В заключение подробно выполняется интегрирование уравнения (4), т. е. рассматривается, по существу, случай прямолинейного движения в задаче двух тел.

IX. ИЗУЧЕНИЕ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Чтобы познакомиться со взглядами и достижениями Эйлера в области применения численного интегрирования дифференциальных уравнений, обратимся к его уже цитированной работе 1763 г. (№ 77).

Получив, на основании «принципов учения о движении» уравнения

$$\alpha d^2x = P dt^2, \quad \alpha d^2y = Q dt^2, \quad \alpha d^2z = R dt^2,$$

где P, Q, R — компоненты равнодействующей всех сил, действующих на рассматриваемое небесное тело, а α — коэффициент, зависящий от его массы и от выбора единиц, Эйлер ставит следующую задачу.

Зная положение (x, y, z) и скорость (p, q, r) тела в заданный момент времени t, найти его положение (x', y', z') и скорость (p', q', r') в другой, не очень отдаленный момент $t+\tau$.

Так как

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dy}{dt} = q, \quad \frac{dz}{dt} = r,$$

то искомое положение тела дается формулами

$$x' = x + \tau p + \frac{\tau^2}{2\alpha} P + \frac{\tau^3}{6\alpha}\frac{dP}{dt} + \cdots,$$

$$y' = y + \tau q + \frac{\tau^2}{2\alpha} Q + \frac{\tau^3}{6\alpha}\frac{dQ}{dt} + \cdots,$$

$$z' = z + \tau r + \frac{\tau^2}{2\alpha} R + \frac{\tau^3}{6\alpha}\frac{dR}{dt} + \cdots,$$

а его скорость — формулами

$$p' = p + \frac{\tau}{\alpha} P + \frac{\tau^2}{2\alpha} \frac{dP}{dt} + \ldots,$$
$$q' = q + \frac{\tau}{\alpha} Q + \frac{\tau^2}{2\alpha} \frac{dQ}{dt} + \ldots,$$
$$r' = r + \frac{\tau}{\alpha} R + \frac{\tau^2}{2\alpha} \frac{dR}{dt} + \ldots;$$

«остается только отметить, что, поскольку силы P, Q, R известны, так как они зависят частично от координат x, y, z, частично от положения и скорости тех тел, которые их производят, то производные $\frac{dP}{dt}$, $\frac{d^2P}{dt^2}$, ... выражаются также через известные величины; таким образом, эти бесконечные ряды в точности представляют искомые величины.»

Эйлер делает далее следующее существенное замечание: «Чем интервал времени τ взять бо́льшим, тем менее сходящимися будут найденные ряды, тем больше придется брать в них членов для получения той же точности. Однако какое бы число членов в них мы ни сочли возможным брать, все же не следует давать τ слишком большие значения, из опасения, что отбрасываемые члены не начнут оказывать влияния. Ибо, хотя делители в последующих членах возрастают, но зато и величины последовательных производных $\frac{dP}{dt}$, $\frac{d^2P}{dt^2}$, ... также обычно возрастают; вследствие чего в большинстве случаев сходимость обусловливается скорее малостью τ, чем величиной знаменателей.»

Найдя указанным способом величины x', y', z', p', q', r', характеризующие «состояние тела» в момент $t+\tau$, можно таким же способом найти его состояние для момента $t+2\tau$ и т. д. «Этим путем, повторяя несколько раз те же самые операции, мы в конце концов получим состояние тела для момента, сколь угодно удаленного от начальной эпохи. И такой результат будет достигнут без каких-либо интегрирований.»

Чтобы достичь момента $t + T$, беря $\tau = T/n$, надо повторить указанные операции n раз. «Отсюда возникает следующий важный вопрос: поскольку в каждой операции мы допускаем некоторую ошибку, которая, будучи повторяема, становится в конце концов ощутимой, то что целесообразнее — давать τ малые или большие значения; надо учитывать, что в первом случае ошибки, хотя и будут меньше, но будут умножаться на числа, бо́льшие, нежели во втором. Чтобы разрешить такой вопрос, предположим, что мы берем в указываемых рядах по три первых члена, так что делаемая ошибка может оцениваться четвертым членом, следовательно, она $= \lambda\tau^3$. Пусть теперь полный интервал времени $T = n\tau$, так что операции должны быть повторены n раз, и тотальная ошибка будет $n\lambda\tau^3 = \lambda\tau^2 T$; отсюда ясно, что чем меньше взять интервал τ, тем меньше будет и тотальная ошибка, несмотря на увеличение числа операций. В предположении, что вычисление ведется с тремя первыми членами, тотальная ошибка будет убывать пропорционально квадрату интервала τ, а если бы мы захотели употреблять четыре члена, то она убывала бы пропорционально кубу этого интервала.»

Эйлер указывает далее, что «нужно приравнять $\lambda\tau^2 T$ той ошибке, которую желают избежать в окончательном результате и из этого равенства найти τ: было бы излишне брать этот интервал еще меньше. Таким образом можно достичь любой степени точности и распространить изучение движения на весьма удаленные эпохи, не опасаясь сколько-нибудь заметных ошибок.»

Очень интересна оценка, даваемая Эйлером изложенному методу изучения движений. Эйлер понимал все возможности этого метода, который он в дальнейшем неоднократно называет «новым методом» или «моим методом». Вот, что он говорит по этому поводу.

«Этот метод, после внимательного рассмотрения, представляется мне столь простым и столь удобным для практики (если учитывать указанные мною предосторожности), что мы можем легко отказаться от полного решения, даваемого интегрированием. Ибо, если бы даже нам когда-либо удалось разрешить знаменитую задачу трех тел так, чтобы можно было представить конечными формулами движение любых трех тел, притягивающих друг друга, то полученные выражения были бы, без сомнения, столь сложны и столь запутанно содержали бы все неизвестные величины, что было бы, вероятно, невозможно разобраться в них и использовать для астрономических вычислений. Без сомнения пришлось бы прибегать к тягостным последовательным приближениям, и мы рисковали бы ошибиться гораздо больше, нежели следуя только что изложенному методу. Конечно, такое решение давало бы движение трех тел для любого момента, как бы он ни был удален от той начальной эпохи, для которой движение известно; мы не ошиблись бы больше через несколько веков, чем через несколько часов, если бы только начальное движение было известно совершенно точно. Но малейшая неуверенность в этом отношении, а ее никогда нельзя избежать, отнимает и это преимущество у полного решения. Как бы мало мы ни ошибались в нахождении движения в начальную эпоху, проистекающие отсюда ошибки будут прогрессивно увеличиваться; по истечении большого промежутка времени это сделает получаемые результаты столь же ненадежными, как и в предлагаемом мною методе. Поэтому

Барельеф, гипс, работы М. Павлова, 1777 г.

(Музей М. В. Ломоносова, Ленинград)

Барельеф, гипс, работы Д. Рашетта 1781 г.

(Париж)

я, не колеблясь, предлагаю изложенный метод для решения задачи трех тел, которое ищут с таким усердием, учитывая, что в полном решении не только вычисления были бы неизмеримо сложнее, но и результаты для отдаленных эпох были бы не менее ненадежны.

Более того: изложенный новый метод превосходит полное решение задачи трех тел и в других отношениях, даже если бы нам посчастливилось найти такое решение и если бы оно не приводило к вычислительным трудностям. В самом деле, весь успех такого решения был бы аннулирован, если бы понадобилось учитывать притяжение четвертого тела...Тогда как предлагаемый мною метод применяется с одинаковою легкостью, как бы велико ни было число тел, действующих на то, движение которого изучается...

Я не могу, однако, не согласиться, что мой метод представляет довольно большое неудобство в том отношении, что в случае нахождения движения для момента, удаленного от начальной эпохи, нужно пройти через все промежуточные моменты; так что нельзя, например, получить положение Луны через год, не вычислив его на каждый день.»

Но, как указывает дальше Эйлер, при вычислении эфемерид по астрономическим таблицам (основанным на аналитических методах) все равно приходится вычислять положения светил на каждый день. А если бы даже применение указанного здесь численного метода потребовало несколько большей вычислительной работы, то это с избытком компенсировалось бы тем, что новый метод дает результат с какой угодно точностью, тогда как самые лучшие астрономические таблицы дают лишь приближенные положения светил.

Далее Эйлер подчеркивает, что предлагаемый им метод вычисления возмущений в прямоугольных координатах предпочтительнее численного интегрирования уравнений, дающих оскулирующие элементы: «В особенности если возмущения велики, лучше всего придерживаться самых простых формул.»

Развитие науки воскресило эту совершенно забытую идею Эйлера только в начале XX в., когда появился столь широко применяемый теперь метод Коуэлла, представляющий не что иное, как численное интегрирование уравнений возмущенного движения в прямоугольных координатах. В связи с быстрым развитием вычислительной техники метод Коуэлла, т.е. по сути дела метод Эйлера, в настоящее время почти совершенно вытеснил метод вычисления возмущений в элементах, подробно развитый Гауссом и Энке и игравший такую большую роль на протяжении всего XIX в. Последний метод применяется теперь только в совершенно исключительных случаях.

Сравнив предлагаемый им метод с вычислением возмущений в элементах, Эйлер делает следующие заключительные замечания:«Во всяком случае, мне представляется, что первый метод является всегда гораздо более предпочтительным; по крайней мере, если возмущения не крайне малы. Мне думается также, что было бы легче следовать этому методу при изучении движения Луны, начав с момента, для которого положение и скорость ее хорошо известны, и вычисляя шаг за шагом, например через каждые 6 часов, положение Луны по данным мною формулам. Тогда вместо Таблиц Луны у нас были бы непрерывные эфемериды, вычисление которых не требовало бы больше труда, чем вычисление по Таблицам положений Луны на полдень и полночь каждых суток. Кроме того, этот новый метод позволил бы достичь большей степени точности, так как не было бы надобности пренебрегать какою-либо силой, действующей на Луну. Это и позволяет мне надеяться, что эти новые идеи привлекут внимание астрономов.»

Высказанная здесь Эйлером надежда не оправдалась и его идеи были основательно забыты. Но выдвинутый им план вычисления эфемерид Луны численным интегрированием уравнений движения снова возник уже в наши дни. Теперь, благодаря быстродействующим электронным вычислительным машинам, он близок к осуществлению.

С только что рассмотренной работой тесно связана следующая (доложенная Берлинской академии 6 февраля 1766 г.):

№ 86. «Новый способ сравнивать наблюдения Луны с теорией» [109].

В ней также идет речь об изучении движения Луны при помощи численного интегрирования уравнений движения. Эйлер отмечает, что этот метод уступает, с точки зрения удовлетворения практических потребностей, аналитическим методам, дающим таблицы движения Луны, которыми каждый может пользоваться; но он очень важен в принципиальном отношении, так как позволяет совершенно строго сопоставить наблюдения Луны с «теорией», т. е. с законом всемирного тяготения.

Вводная часть статьи содержит вывод формул, выражающих первые и вторые производные функции, заданной для равноотстоящих значений аргумента, через разности различных порядков этой функции.

Обозначив через x, y, z прямоугольные геоцентрические эклиптические координаты Луны, а через ζ — время, выраженное в средних солнечных сутках, Эйлер дает дифференциальные уравнения движения Луны в форме

$$\frac{d^2x}{d\zeta^2} = -n^2P, \qquad \frac{d^2y}{d\zeta^2} = -n^2Q, \qquad \frac{d^2z}{d\zeta^2} = -n^2R, \tag{1}$$

где

$$
\begin{aligned}
P &= \lambda \frac{k^3 x}{v^3} - \frac{k^3 (u\cos\theta - x)}{w^3} + \frac{k^3 \cos\theta}{u^2},\\
Q &= \lambda \frac{k^3 y}{v^3} - \frac{k^3 (u\sin\theta - y)}{w^3} + \frac{k^3 \sin\theta}{u^2},\\
R &= \lambda \frac{k^3 z}{v^3} + \frac{k^3 z}{w^3}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь $n=0{,}017\ 2028$ есть среднее суточное движение Солнца, выраженное в радианах. Через k обозначено среднее расстояние Солнца от Земли, через v и u — расстояния Луны и Солнца от Земли, а через w — расстояние между Луной и Солнцем; наконец, θ есть долгота Солнца.

Величина λ, фигурирующая в выражениях (2), есть отношение массы Земли A к сумме $A+B$ масс Земли и Солнца. Эйлер отмечает, что «мы не можем знать истинное значение этой величины иначе, как только из наблюдений: но мы видим также, что достаточно одного уравнения для получения ее значения; а поскольку каждое наблюдение дает нам три уравнения[11], то это увеличивает надежность ее определения, в особенности, если употребить для этого несколько наблюдений. Этим способом мы найдем гораздо надежнее истинное отношение массы Солнца B к массе Земли A, нежели тем, который до сих пор употреблялся для этой цели.

Можно заметить, далее, что для применения наших формул нужно знать истинную величину отношения расстояний Солнца и Луны от Земли, равных соответственно u и v, которое остается неизвестным, пока неизвестен параллакс Солнца...Но, как известно, движение Луны лишь в очень слабой степени зависит от параллакса Солнца; вследствие чего достаточно его знать только приближенно. Я предположу поэтому параллакс Солнца равным $9''$, а среднее расстояние Солнца от Земли равным $k=100\ 000$; в таких же единицах я выражу расстояние Луны от Земли.»

Эйлер отмечает далее, что, проделав вычисления для других значений параллакса, а именно $8''$ и $10''$, можно было бы получить возможность найти точную величину параллакса. «Но легко понять, что для этого нужно было бы употребить наблюдения настолько точные, чтобы ошибка в них не превосходила нескольких секунд, что делает выполнение такого плана почти невозможным...»

«Но здесь я ограничусь выполнением лишь первой задачи, заключающейся в сравнении наблюдений Луны с Теорией, без какой бы то ни было

[11] Эйлер говорит здесь о полном наблюдении, т. е. о таком, которое дает не только широту и долготу Луны, но и ее параллакс. Такое наблюдение позволяет вычислить соответствующие координаты.

помощи Таблиц, поэтому я приму параллакс Солнца на среднем расстоянии $k=100\ 000$ равным $9''$; все сводится, таким образом, к получению хороших наблюдений Луны. Но поскольку общепризнано, что Таблицы недавно скончавшегося Майера дают положения Луны с ошибкой, не превосходящей одной минуты, а Connaissance des mouvements célestes, издаваемый г-ном Лаландом, вычисляется по этим Таблицам, я буду рассматривать даваемые им на каждый полдень положения Луны как наблюдения, тем более, что фактические наблюдения были бы, вероятно, менее точны. Это мне даст еще то преимущество, что все интервалы между наблюдениями будут равны и притом в точности 24 часам, а это весьма удобно для вычислений...»

После этого Эйлер дает подробный пример изложенного метода. Вычислив, по данным указанного Парижского астрономического ежегодника, координаты Луны x, y, z для шести последовательных моментов, разделенных суточным интервалом, он вычисляет, при помощи указанных в начале статьи формул, первые и вторые производные координат для одного из взятых моментов. После этого уравнения (1) дали ему соотношения

$$\frac{d^2x}{d\zeta^2} = -10{,}20 = -3\,212\,791\lambda + 0{,}086,$$
$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} = +11{,}360 = +3\,541\,133\lambda - 0{,}1103,$$
$$\frac{d^2z}{d\zeta^2} = +0{,}6156 = +187\,688\lambda + 0{,}00274\ ,$$

из которых он получил для $1/\lambda$ значения: 312 346; 308 730; 306 250. Взяв среднее арифметическое: $1/\lambda=309\,108$, Эйлер нашел для избранного им начального момента окончательные значения P, Q, R. Это дало ему следующие значения координат Луны для момента, отстоящего на ζ суток от начального:

$$X = +166{,}970 + 36{,}090\zeta - 5{,}104\zeta^2,$$
$$Y = -184{,}039 + 40{,}316\zeta + 5{,}618\zeta^2,$$
$$Z = -9{,}7545 + 5{,}1982\zeta + 0{,}3020\zeta^2.$$

Он замечает, в заключение, что при пользовании этими формулами не следует выходить за пределы интервала времени, равного двум часам. Но интервалы времени можно было бы брать более значительные, если ввести в эти разложения дальнейшие члены, содержащие производные величин P, Q, R.

Численное интегрирование уравнений движения в прямоугольных координатах было использовано Эйлером в большой работе

№ 87. «Предположительные соображения об опасности, угрожающей от слишком близкого прохождения кометы» [110].

Решаемая здесь задача заключается в нахождении тех изменений, которые могут произойти в орбитах Земли и кометы в результате такого прохождения. Для упрощения предполагается, что комета движется в плоскости эклиптики, и что до сближения Земля двигалась по круговой орбите, а комета по прямой, проходящей через Солнце.

Чтобы получить столкновение кометы с Землей приблизительно через двое суток после начальной эпохи (начиная с которой учитываются возмущения), Эйлер берет начальные координаты и скорости для Земли равными

$$X = a, \qquad Y = 0, \ \frac{dX}{d\vartheta} = 0, \quad \frac{dY}{d\vartheta} = a,$$

для кометы

$$x = 1{,}047\,472\,a, \qquad y = 0{,}036\,054\,a,$$
$$\frac{dx}{d\vartheta} = -1{,}380\,581\,a, \qquad \frac{dy}{d\vartheta} = -0{,}047\,520\,a,$$

где через a обозначен радиус земной орбиты.

Эти исходные данные выбраны так, что при продолжении движения без возмущений имело бы место столкновение ровно через двое суток. Благодаря возмущениям имеет место не столкновение, а близкое прохождение.

Массу кометы он принимает опять, как и в работе № 34, равной массе Земли.

Координаты и скорости вычисляются при помощи формулы Тейлора и уравнений движения для моментов, отстоящих от начальной эпохи на 1; $1\,^1/_2$; $1\,^3/_4$; $1^7/_8$; $1\,^{15}/_{16}$; $2\,^1/_{16}$; $2\,^1/_8$; $2\,^1/_4$; $2\,^1/_2$; 3; 4 суток.

Результаты, полученные для последнего момента, служат для вычисления новых орбит Земли и кометы. Продолжительность года оказывается увеличенной на 7 часов. Для кометы получается эллиптическая орбита с периодом в 2716 лет.

X. ПРИТЯЖЕНИЕ СФЕРОИДОВ. ВЛИЯНИЕ ФИГУРЫ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ НА ИХ ДВИЖЕНИЕ

В начале своей деятельности в Петербургской академии Эйлер принимал участие в проводившихся Академией геодезических работах.

Возможно, что это было одной из причин, привлекших его внимание к вопросу о фигуре Земли, а следовательно, и к вопросу о притяжении эллипсоидов.

К этому раннему периоду относится работа

№ 88. «О притяжении эллипсоидально-сфероидальных тел» [111].

Она начинается вычислением притяжения, производимого однородным эллипсом в точке, лежащей на перпендикуляре, проведенном к плоскости эллипса через его центр. Полученные формулы позволяют найти притяжение, производимое однородным эллипсоидом вращения к полюсе и в точке, лежащей на экваторе. После этого решается следующая задача: «Планета, состоящая из однородного вещества, частицы которого притягивают с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, имеет такое вращательное движение около своей оси что сила тяжести на экваторе уменьшается центробежной силой на $1/k$ часть своей величины; найти отношение полярной и экваториальной осей этой планеты.» Эйлер находит, что это отношение с достаточным приближением выражается дробью

$$\frac{4k+8}{4k+13}.$$

Так как для Земли $k = 289$, то отношение земных осей получается равным 233/234, тогда как приближенный прием, употребленный Ньютоном, дал значение 229/230.

Задаче нахождения фигуры Земли Эйлер посвятил впоследствии статью

№ 89. «Разъяснение трудностей относительно фигуры Земли, обусловленной центробежной силой» [112].

Она была доложена Академии 2 ноября 1775 г., а опубликована только через 13 лет, уже после смерти Эйлера.

Трудности, о которых здесь идет речь, Эйлер усматривал в несогласии сжатия Земли, полученного из геодезических измерений и равного 1/201, с теоретической величиной, которую он принимает равной 1/577. Для устранения этой невязки он старается использовать основное уравнение гидростатики и ряд произвольных предположений. Почему для теоретической величины не берется только что указанное значение 1/233, или значение Ньютона, равное 1/229, Эйлер не объясняет.

Весьма значительное влияние на дальнейшее развитие науки оказал мемуар

№ 90. «О движении апсид спутников Юпитера» [113].

Он начинается сравнением движения спутников Юпитера с движением

Луны. Можно было бы ожидать, что возмущения в их движениях будут несравненно меньшими, чем возмущения в движении Луны. Для этого имеются три причины. Во-первых, масса Юпитера в сотни раз больше массы Земли. Во-вторых, он находится значительно дальше от Солнца: ведь если бы Земля находилась на таком расстоянии от Солнца, как Юпитер, то возмущения Луны были бы едва заметны. В-третьих, спутники Юпитера относительно ближе к планете, чем спутник Земли: расстояния их от Юпитера равны соответственно $5^2/_3$, 9, 14 и 25 радиусам планеты, тогда как Луна находится на расстоянии 60 земных радиусов от центра Земли.

Казалось бы, поэтому, что уже созданная и достаточно удовлетворительная теория движения Луны может нам сразу дать все неравенства спутников Юпитера, нужно только подставить в нее другие значения массы центрального тела и расстояний. Но если сделать такую подстановку, то все неравенства почти исчезают и оказывается, что спутники Юпитера, а в особенности ближайший к нему, движутся почти в точности по законам Кеплера. Даже движение апсид, доходящее у Луны до 40° в год, становится у спутников Юпитера крайне незначительным. Взаимные притяжения спутников также не могут произвести значительных возмущений в их движениях, поскольку их массы очень малы по сравнению с массой Юпитера, а расстояния между ними остаются всегда того же порядка, как и их расстояния от Юпитера.

«Но несмотря на все эти соображения, было бы весьма ошибочно утверждать, что движения спутников Юпитера почти правильны, и что наблюдаемые в них неравенства происходят только от эксцентриситетов их орбит и от очень малого движения их апсид. Напротив, наблюдения показывают, что движения спутников,— и особенно первого, который согласно приведенным соображениям должен был бы двигаться особенно правильно,— подтверждены весьма значительным неравенствам, выражающимся прежде всего в крайне быстром движении линии апсид, на много превосходящем движение лунного апогея.

Это обстоятельство, казавшееся сначала противоречащим гипотезе всемирного тяготения, является на самом деле следствием этой гипотезы, столь же необходимым, как и замечательным, что я неоспоримо докажу нижеследующими рассуждениями. Действительно, было бы весьма странно, если бы это быстрое движение апсид спутников Юпитера было в противоречии с теорией, которая объясняет движение Луны; между тем можно показать, что оно является, напротив, необходимым следствием всемирного тяготения: достаточно лишь одного соображения, чтобы устранить все сомнения. Изучая движение Луны, предполагают, что небесные тела взаимно притягиваются силами, обратно пропорциональными квадратам расстояний между ними, согласно общему закону взаимодействия всех частиц материи. Но такой закон может иметь место для тел конечных размеров только в том случае, когда они сферические, или же когда все их моменты инерции равны между собой. Поскольку Земля не является вполне сферической, принятый закон притяжения претерпевает некоторое изменение, столь, однако, малое, что оно не сказывается в движении Луны[12]. Но известно, что фигура Юпитера весьма существенно отличается от сферической, и я покажу, как это обстоятельство настолько меняет закон изменения притяжения с расстоянием, что производит указанное явление... Таким образом открыт новый источник неравенств в движении небесных тел, необъяснимый, если довольствоваться обычным предположением о силах между небесными телами, обратно пропорциональных квадрату расстояния, но это обстоятельство как раз и доказывает убедительнейшим образом справедливость принципа всемирного тяготения.»

После этого Эйлер переходит к изучению движения материальной точки (или сферического тела) в поле тяготения тела, у которого главные моменты инерции (Эйлер обозначает их через Ma^2, Mb^2, Mc^2, где M — масса тела) не равны между собой. Он ограничивается при этом единственно интересным для астрономии случаем, когда $a=b$ мало отличается от c. Взяв для компонента притяжения, производимого телом, приближенные выражения из другой своей работы, Эйлер получает дифференциальные уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{2Mgx}{v^3}\left[1+\frac{3(c^2-a^2)}{2v^2}\left(1-\frac{5z^2}{v^2}\right)\right], \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{2Mgy}{v^3}\left[1+\frac{3(c^2-a^2)}{2v^2}\left(1-\frac{5z^2}{v^2}\right)\right], \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{2Mgz}{v^3}\left[1+\frac{3(c^2-a^2)}{2v^2}\left(1-\frac{5z^2}{v^2}\right)\right], \end{aligned} \tag{1}$$

где x, y, z — координаты спутника относительно главных осей инерции; v — его расстояние от центра планеты; $2g$ — постоянная, зависящая от выбора единиц.

---

[12] При дальнейшем развитии науки влияние неполной сферичности Земли пришлось учитывать. Впервые это было сделано Лагранжем (1793), затем, с гораздо большей полнотой, Лапласом (1820). Сравнение теоретических и наблюдаемых величин соответствующих неравенств в движении Луны дает возможность находить так называемое «динамическое сжатие» Земли.

Решение уравнений (1) Эйлер начинает с простейшего случая, когда движение происходит в плоскости экватора планеты по орбите с небольшим эксцентриситетом. Он показывает, что при значении $c^2 - a^2$, вполне согласующемся с наблюдаемым сжатием Юпитера, можно получить такие движения линии апсид, которые наблюдаются у его спутников.

В заключительной части этого замечательного мемуара Эйлер рассматривает общий случай движения и находит влияние наклона орбиты на движение линий апсид.

В тесной связи с только что рассмотренной работой Эйлера находится работа его старшего сына И.-А. Эйлера

№ 91. «Исследование сил, которым подвержены небесные тела, если они не являются сферическими» [114].

Остановимся на содержании этого мемуара, написанного, вне всякого сомнения, при участии Леонарда Эйлера и включенного в план полного собрания его сочинений.

Мемуар начинается замечаниями общего характера, хорошо освещающими задачи, стоявшие перед наукой того времени.

«При нахождении поступательного движения небесных тел их рассматривают как сферические и предполагают, что всемирное тяготение действует на них так, как если бы их масса была сосредоточена в центре инерции.

Но если тело, не являющееся сферическим, притягивается другим телом, то направление результирующего притяжения не проходит уже через его центр инерции, а результирующая сила не меняется уже обратно пропорционально квадрату расстояния, хотя притяжения, испытываемые каждой частицей тела, следуют этому закону.

Если бы форма небесных тел очень сильно отличалась от сферической, а они не были бы крайне удалены одно от другого, то отклонения действующих сил от этого закона были бы весьма значительны; но поскольку небесные тела большею частью являются достаточно точно сферическими, можно обойтись без учета этого отклонения, особенно если изучается только поступательное движение.

Но когда нужно изучить вращательное движение какой-либо планеты, то весьма существенно учитывать это отклонение, ибо, как ни мало его влияние на поступательное движение, оно может оказаться весьма значительным для вращательного движения.

Именно в этом кроется причина прецессии равноденствий и нутации земной оси, что было неоспоримо установлено г-ном Даламбером; и это несмотря на то, что для Земли уклонение формы от строго сферической едва ощутимо. Потому что, как бы мало не было это отклонение, оно все же меняет силу, влекущую Землю к Луне и к Солнцу, откуда возникает *момент* по отношению к оси Земли, который, действуя безостановочно, производит со временем и прецессию равноденствий и нутацию земной оси.»

Автор отмечает далее, что путь, которым шел Даламбер, не только приводит к очень сложным выкладкам, но и основан на предположении, что Земля состоит из однородных слоев строго эллиптической формы. Таким образом, «еще очень далеко до решения общей проблемы, которую можно формулировать следующим образом: *фигура тела и распределение вещества в нем какие угодно*; *все частицы этого тела притягиваются некоторой точкой с силами, изменяющимися с расстоянием по произвольному закону*; *найти результирующую силу, действующую на это тело.*

Между тем, хотя силы анализа представляются далеко недостаточными для решения такой проблемы, открытие трех главных осей, необходимо присущих каждому телу, дало мне способ для весьма легкого ее разрешения.

I. Какую бы структуру ни имело небесное тело, я предполагаю, что мы знаем его полную массу и его центр инерции. Кроме того, я предполагаю известными три главные оси тела, а также моменты инерции относительно этих осей.

II. Метод нахождения для каждого тела этих последних характеристик объяснен в различных мемуарах, в которых мой отец изучал вращение тел вокруг различных осей и между прочим в его новой *Механике*, в главе V. Но даже если бы применение этих методов к небесным телам встретило трудности, то это не имеет отношения к нахождению действующей силы, чем мы здесь занимаемся; если мы хотим знать движение какого-либо тела, мы обязательно должны знать указанные характеристики.

III. Далее, вместо того, чтобы приписывать телу какую-либо эллиптическую фигуру, состоящую из эллиптических слоев различной плотности, достаточно положить в основу предположение о неравенстве моментов инерции относительно его трех главных осей; такое предположение является бесконечно более общим и включает все возможные фигуры. Фигуру тела можно варьировать до бесконечности, но это скажется лишь постольку, поскольку изменятся три главных момента инерции.»

Автор мемуара начинает с примеров вычисления главных моментов инерции для эллипсоидов с различным распределением плотности. На этих примерах он показывает, что «полное знание внешней фигуры тела не дает еще возможности делать заключения относительно равенства или неравенства его главных моментов инерции». Вернувшись после этих замечаний к общей проблеме, автор рассматривает произвольное тело, масса которого равна M, а моменты инерции относительно главных осей IA, IB, IC, где I — центр инерции, равны соответственно Ma^2, Mb^2, Mc^2. Все частицы этого тела притягиваются точкой R, прямоугольные координаты которой относительно только что указанных осей обозначаются через p, q, r, а расстояние IR через s.

Автор полагает далее

$$a^2 = k^2(1+\alpha),\ b^2 = k^2(1+\beta),\ c^2 = k^2(1+\gamma),$$

где k^2 определяется дополнительным условием $\alpha+\beta+\gamma=0$, что дает

$$k^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

$$\alpha = \frac{2a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2},\ \beta = \frac{2b^2-a^2-c^2}{a^2+b^2+c^2},\ \gamma = \frac{2c^2-a^2-b^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Вычисление силы притяжения производится в предположении, что расстояние s настолько велико по сравнению с размерами тела, что величинами порядка k^2s^{-6} можно пренебречь. Автор находит, что притяжение, производимое на тело точкой R, слагается из главной силы, направленной по прямой IR и равной

$$\frac{Me^2}{s^2} - \frac{15\,Me^2k^2}{2s^4}\left[\alpha\left(\frac{p}{s}\right)^2 + \beta\left(\frac{q}{s}\right)^2 + \gamma\left(\frac{r}{s}\right)^2\right], \tag{2}$$

и трех дополнительных малых сил, направленных по осям p, q, r и равных соответственно

$$\frac{3Me^2k^2}{s^4}\alpha\left(\frac{p}{s}\right),\ \frac{3Me^2k^2}{s^4}\beta\left(\frac{q}{s}\right),\ \frac{3Me^2k^2}{s^4}\gamma\left(\frac{r}{s}\right). \tag{3}$$

Через e здесь обозначено то расстояние от точки R (в которой находится масса, равная единице), на котором материальная точка испытывает ускорение, равное ускорению силы тяжести на поверхности Земли. Такой прием введения в вычисления коэффициента тяготения характерен для XVIII в.

Выражения (3) позволяют легко найти моменты силы притяжения относительно главных осей. Эти приближенные значения моментов лежат в основе теории вращения Земли. Выражения (2) и (3) дают силу притяжения со всею точностью, какая бывает нужна и в настоящее время, если приходится учитывать уклонение структуры небесных тел от строго сферической. Но теперь мы заменяем эти выражения соответствующим значением потенциала.

Можно еще отметить, что все указанные задачи автор решает, в духе XVIII в., также и для сил, пропорциональных любой степени расстояния.

Несколько в стороне от рассмотренных работ находится первая попытка Эйлера изучить влияние фигуры небесного тела на его движение, сделанная в мемуаре

№ 92. «О возмущении движения планеты, происходящем от несферичности ее фигуры» [115].

Отметив трудности, представляемые этим вопросом в общем случае, Эйлер ставит следующую задачу: изучить движение тела, состоящего из двух материальных точек A и B (он называет их шарами), соединенных твердым, лишенным массы стержнем (virga rigida et inertiae experte iunctis), на которое действует центральная сила, изменяющаяся обратно пропорционально квадрату расстояния от центра силы O; движение предполагается плоским, т. е. плоскость OAB считается неподвижной. Эйлер выражает надежду, что решение такой задачи подготовит решение многих других.

Задача решается при упрощающих предположениях, приближающих ее к астрономическим задачам. Размеры тела, измеряемые длиной AB, предполагаются очень малыми по сравнению с расстояниями OA и OB. Эксцентриситет орбиты, описываемой центром инерции тела вокруг O, также считается очень малым.

Эйлер приходит к заключению, что такая схема не может дать удовлетворительного объяснения ни либрации Луны, ни движения ее перигея.

Нужно еще отметить, что в «Механической астрономии» (уже нами рассмотренной под № 34) глава IV посвящена изучению движения сферического тела (т. е., по существу, материальной точки) в поле тяготения тела произвольной формы, главные моменты инерции для которого известны.

XI. ВРАЩЕНИЕ ЗЕМЛИ

Учение о вращательном движении Земли начинается, как известно, теми страницами «Principia» (книга III, задача XX), где Ньютон показывает, правда, еще не количественно, а скорее только качественно, что явление прецессии равноденствий, открытое Гиппархом, является неизбежным следствием закона всемирного тяготения. Зачаточное состояние, в котором находилась тогда механика, не позволило Ньютону открыть явление нутации, вызываемое попятным движением узлов лунной орбиты, хотя им были сделаны некоторые шаги в этом направлении. Здесь наблюдения опередили теорию и нутация была открыта чисто эмпирически Брадлеем. Но уже через полтора года после того, как это открытие было опубликовано, появились знаменитые исследования Даламбера [116], содержавшие довольно полную теорию вращения Земли. Здесь впервые были даны в аналитической форме шесть условий равновесия твердого тела. Из них, при помощи принципа, носящего его имя, Даламбер вывел уравнения движения. Но эти уравнения появляются здесь в очень сложной и неудобной форме. Весь дальнейший прогресс в этой области целиком связан с той новой формой, в которой Эйлеру удалось представить уравнения вращательного движения твердого тела и которая употребляется и сейчас.

В том же 1749 г., когда появилась работа Даламбера, Эйлер опубликовал

№ 93. «Исследования о прецессии равноденствий и нутации земной оси» [117].

Относительно того, в каком отношении его работа находится к мемуару Даламбера, Эйлер опубликовал особое заявление [118]. Приведем его полностью:

«Хотя этот Мемуар был помещен в томе «Мемуаров Академии» за 1749 год, автор заявляет, что он написал его после прочтения превосходной работы г-на Даламбера, посвященной этому вопросу; и что он нисколько не претендует на славу, принадлежащую тому, кто первый разрешил этот важный вопрос. Автор ограничился только изложением пути, которому он следовал, развивая эту проблему, и не дал введения, в котором он не преминул бы указать, что мы целиком обязаны г-ну Даламберу исследованием этого важного вопроса. Кроме того, труд г-на Даламбера был с самого начала встречен с таким восторгом, что казалось излишним говорить о факте столь общеизвестном. Но, поскольку все это может с течением времени быть забытым, он счел необходимым особо осведомить об этом настоящим уведомлением. Совершенно также г-н Даламбер является первым, изучившим природу кривых, имеющих точку возврата второго рода, в форме птичьего клюва.»

Чтобы понять это несколько необычное выступление Эйлера, нужно учесть два обстоятельства. С одной стороны, содержащийся в рассматриваемом мемуаре элементарный метод изучения основных свойств прецессионного и нутационного движений очень близок ко второму методу, излагаемому Даламбером в конце указанного выше сочинения. Но, с другой стороны, Эйлер легко мог получить те же результаты и без чтения мемуара Даламбера, поскольку к этому времени он уже далеко развил и кинематику и динамику твердого тела (в некоторых отношениях значительно дальше, чем Даламбер). Работы Эйлера в этой области были связаны прежде всего с созданием теории корабля. Его двухтомный трактат [119], напечатанный только в 1749 г., был вполне закончен, как это видно из его переписки с Иоганном Бернулли, еще в 1738 г. В этом трактате впервые четко устанавливается независимость вращательного движения тела от его поступательного движения, вводится понятие свободной оси вращения и устанавливается наличие трех главных взаимно-перпендикулярных осей вращения.

Не входя в подробности, относящиеся уже к истории работ Эйлера по механике, заметим, что в рассматриваемом нами мемуаре Эйлер на первый план выдвигает астрономическую сторону проблемы и, не стремясь к постановке общих задач, ставит себе целью получить приближенную, но вполне согласную с наблюдениями теорию прецессии и нутации.

№ 94. «Исследования вращательного движения небесных тел» [120]

В этой работе Эйлер дает уже значительно более полную теорию вращательного движения Земли, существенно превосходящую то, что было сделано Даламбером, и по содержанию и особенно по форме. В это время он уже заканчивал свой большой трактат по механике твердого тела [121] и это дало ему возможность глубже осветить сущность задачи.

Любопытно отметить, что и в этом сложном вопросе нелинейных колебаний Эйлер с особым интересом обсуждает случай резонанса.

«Если бы Луна совершала свое обращение вокруг Земли в двое суток, а не в 27, то ось вращения Земли испытывала бы ужасные возмущения, изучить которые не было бы почти никакой возможности.

Но, по-видимому, подобный случай не существует нигде во Вселенной, или по крайней мере в нашей планетной системе, являющейся предметом наших исследований. Я уже отмечал, что будь Луна вдвое или втрое дальше от Земли, то ее движение было бы столь запутанно, что для нас было бы почти невозможно изучить его даже в общих чертах; а что касается до познания его с полной точностью, то мы далеки от него и в настоящих условиях. С другой стороны, если бы Луна была гораздо ближе к Земле, чем это имеет место в действительности, то изучение ее движения было бы гораздо легче; но, как мы видим теперь, здесь было бы другое неудобство — это сделало бы невозможным нахождение нутации земной оси. Можно поэтому думать, что Провидение пожелало дать нам для изучения такой объект, который не превосходил бы чересчур силы нашего разума, но в то же время и не такой, который мы могли бы полностью осилить. Может быть такого рода движения, недоступные для нашего изучения, встречаются в других планетных системах, где разумные существа обладают более высокой способностью понимания.»

Через десять лет Эйлер еще раз вернулся к теории вращения Земли в мемуаре

№ 95. «Подробное исследование явлений, которые могут производиться в суточном вращении Земли силами небесных тел» [122].

Здесь мы находим теорию вращения Земли, как твердого тела, в той окончательной форме, в которой она излагается, по существу, и сейчас. Разница заключается только в том, что Эйлер довольствовался главными членами разложений возмущающих сил Солнца и Луны, тогда как позднейшие авторы учли еще некоторые дальнейшие члены этих разложений. Помимо уточнения теории, шедшего параллельно с повышением точности астрономических наблюдений, может быть отмечено ее пополнение только в отношении учета не полной твердости Земли. Так, Лаплас показал, что наличие океанов и атмосферы не меняет величину прецессии и нутации (1799). Иммануил Кант (1754) и многие другие после него отмечали, что трение, испытываемое приливной волной, должно производить прогрессивное замедление вращения Земли, хотя количественно этот вопрос был изучен лишь в XX в.

Эйлером была указана принципиальная возможность так называемой свободной нутации, вследствие которой мгновенная ось Земли может при определенных начальных условиях обращаться около оси инерции, причем период этого обращения должен равняться $A/(C - A) = 304$ звездным суткам. Через A и C здесь обозначены экваториальный и полярный моменты инерции Земли.

Важность этого открытия была понята лишь в конце XIX в., когда окончательно было установлено изменение широт точек земной поверхности, зависящее от движения полюсов Земли. Чендлером было найдено (1891), что кривая, описываемая мгновенным полюсом вокруг полюса, соответствующего оси инерции, складывается из двух обращений: одного с годовым периодом и другого, имеющего период около 14 месяцев. Это второе движение мгновенного полюса есть не что иное, как эйлерова нутация, период которой оказался увеличенным с 10 до 14 месяцев вследствие того, что Земля является телом упругим, а не абсолютно твердым, как предполагал Эйлер.

Среди работ, опубликованных уже после смерти Эйлера, изучению вращения Земли посвящена статья

№ 96 «Решение двух задач, относящихся к Механической астрономии» [123].

Первая из решаемых здесь задач заключается в нахождении компонент и моментов сил притяжения, испытываемого однородным телом произвольной формы со стороны центра сил, находящегося на значительном расстоянии. Вторая задача заключается в нахождении движения земной оси, поскольку оно возмущается Солнцем. Решение этой задачи не закончено.

В заключение отметим еще работу И.-А. Эйлера

№ 97. «Размышления о вращательном движении планет и преимущественно Венеры» [124].

В 1757 г. Петербургская академия предложила на соискание премии тему: изучить вращательное движение планет, в первую очередь Венеры, около их осей; при помощи как прежних, так и новых наблюдений найти возможно точнее положение экватора.

Хотя представленная берлинским академиком (в самый разгар Семилетней войны, длившейся с 1756 по 1763 г.) работа не вполне соответствовала объявленной теме, она все же была в 1760 г. премирована, к большому удовольствию Леонарда Эйлера — как это видно из его писем.

Работа начинается кратким обзором того немногого, что было известно о вращательном движении Венеры, после чего автор переходит к подробному изложению теории вращения небесных тел, созданной его отцом. Главы, из которых состоит работа, носят следующие названия: I. Исследование главных осей вращения произвольного тела; II. Изучение вращательного движения около произвольной оси; III. О вращательном движении планеты, на которую не действуют внешние силы; IV. О возмущении вращательного движения, производимом внешними силами; V. О либрационном движении Луны.

Литература

1. A. Speiser, Einteilung der sämtlichen Werke Leonhard Eulers, Commentarii Mathematici Helvetici 20, 1947, стр. 288—318
2. A. Gautier, Essai historique sur le Problème des Trois Corps. Paris, 1817
3. J. Todhunter, A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the Time of Newton to that of Laplace, Vol. I, II. London, 1873
4. Solutio problematis astronomici ex datis tribus stellae fixae altitudinibus et temporum differentiis invenire elevationem poli et declinationem stellae, Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 4 (1729), 1735, стр. 98—101
5. Methodus computandi aequationem meridiei, Ibid., 8 (1736), 1741, стр. 48—65
6. Explicatio phaenomenorum, quae a motu lucis successivo oriuntur, Ibid., 11 (1739), 1740, стр. 150—193

7. Methodus viri celeberrimi Leonh. Euleri determinandi gradus Meridiani pariter ac Paralleli Telluris secundum Mensuram a celeb. de Maupertuis cum sociis institutam, Ibid., 12 (1740), 1750, стр. 224—231
8. Inquisitio physica in causam fluxus et refluxus maris. Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences, t. IV (1738—40), Paris, 1752, стр. 235—350
9. Considerationes super problemate in tomo Commentariorum veterum IV pertractato (Ex 3 ejusdem stellae altitudinibus et intervallis, elevationem poli et declinationem determinare), Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 1 (Pars II, 1777), 1778, стр. 269—275
10. Determinatio caloris et frigoris graduum pro singulis Terrae locis ac temporibus, Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 11, (1739) 1750, стр. 82—99
11. Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et plus petits, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 9, (1753) 1755, стр. 223—257
12. Eléments de la trigonométrie sphéroidique tirés de la méthode des plus grands et plus petits, Ibid., стр. 258—293
13. Mémoire sur l'effet de la propagation successive de la lumière dans l'apparition tant de planètes que des comètes, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 2, (1746) 1748, стр. 141—181
14. De la parallaxe de la Lune, tant par rapport à sa hauteur qu'à son azimut, dans l'hypothèse de la Terre sphéroidique, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 5, (1750) 1751, стр. 326—328
15. Meditationes in Quaestionem ab illustrissima Academia Regia Paris. Scientiarum, pro anno 1747 cum praemio duplicato propositam, quibusnam observationibus mari, tam interdiu quam noctu, itemque durante crepusculo verum temporis momentum commodissimè et certissimè determinari queat? Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences, t. VI (1745—1748), Paris, 1752, стр. 111—167
16. De la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère selon les divers degrés tant de la chaleur que de l'élasticité de l'air. Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 10, (1754) 1756, стр. 131—172
17. Sur la cause de la Lumière Zodiacale, Opuscula Varii Argumenti, I. Berolini, 1746, стр. 245—276
18. Recherches Physiques sur la cause de la queüe des Comètes, de la Lumière Boréale et de la Lumière Zodiacale, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 2, (1746), 1748, стр. 117—140
19. Sur l'atmosphère de la Lune prouvée par la dernière éclipse annulaire du Soleil, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 4, (1749) 1750, стр. 103—121
20. Réflexions sur les divers degrés de lumière du Soleil et des autres corps célestes, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 6, (1750) 1752, стр. 280—310
21. Methodus ex observato transitu Veneris per Solem, inveniendi parallaxin Solis, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 14, (1769) 1770, стр. 322—334
22. Methodus ex eclipsi solari in pluribus locis observata, elementa motus Lunae, hincque longitudinem locorum super Terra accurate determinandi, Ibid., стр. 335—349

23. J. L. Lagrange, Mémoire sur le passage de Vénus du 3 juin 1769 (Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 12 novembre 1767). Oeuvres de Lagrange, t. 2, Paris, 1868, стр. 335—376
24. De trajectu citissimo stellae per duos circulos almucantharat datos pro qualibet elevatione poli, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 20, (1775) 1776, стр. 503—508
25. De figura apparente annuli Saturni pro eius loco quocunque respectu Terrae, Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 1, (Pars I, 1777) 1778, стр. 276—287
26. De apparitione et disparitione annuli Saturni, Ibid., стр. 288—316
27. Sur l'effet de la réfraction dans les observations terrestres, Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 1, (Pars II, 1777) 1780, стр. 129—158
28. Theoria parallaxeos ad figuram Terrae sphaeroidicam accomodata, Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 3,(Pars I, 1778) 1779, стр. 241—278. (Несколько позднее был опубликован перевод этой статьи на немецком языке: L. Euler, Theorie der Parallaxen, in Rücksicht auf die sphäroidische Figur der Erde etc., übersetzt von Bernoulli. Bode's Astronomisches Jahrbuch für 1783)
29. De inventione longitudinis locorum ex observata Lunae distantia a quadam stella cognita. Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 4, (Pars II, 1780) 1784, стр. 301—307
30. De statu aequilibrii maris a viribus Solis et Lunae sollicitati, Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 4, (Pars I, 1780) 1783, стр. 132—153
31. De eclipsibus solaribus in superficie Terrae per projectionem repraesentandis, Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 4, (Pars II, 1780) 1784, стр. 308—323
32. De motu planetarum et orbitarum determinatione, Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 7, (1734—35) 1740, стр. 67—85
33. Orbitae Solaris determinatio, Ibid., стр. 86—96
34. Solutio problematum quorundam astronomicorum, Ibid., стр. 97—98
35. Sur de nouvelles Tables astronomiques pour calculer la place du Soleil, Histoire de l'Académie des Sciences et des Belles Lettres de Berlin, t. I, (1745) 1746, стр. 36—40
36. Nouvelles Tables astronomiques pour calculer la place du Soleil, Leonhardi Euleri Opera Postuma, t. II, Petropoli, 1862, стр. 335—353. Рукопись была представлена Эйлером 9 апреля 1744 г.
37. Tabulae astronomicae Solis et Lunae, Opuscula Varii Argumenti, t. I, Berolini, 1746, стр. 137—168
38. Mémoire sur la plus grande équation des planètes, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 2, (1746) 1748, стр. 225—248
39. De motu cometarum in orbis parabolicis Solem in foco habentibus, Leonhardi Euleri Opera Postuma, t. II, Petropoli, 1862, стр. 402—415
40. Astronomia mechanica, § 1—220, adjecta Digressione de cometa A. 1759 I—VII una cum calculis, Opera Postuma, t. II, Petropoli, 1862, стр. 177—316
41. Emendatio tabularum astronomicarum per loca planetarum geocentrica, Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 12, (1740) 1750, стр. 109—221
42. L. Euler, Theoria motuum planetarum et cometarum, continens methodum facilem ex aliquot observationibus orbitas cum planetarum tum cometarum determinandi,

Berolini 1744, 4°. (Имеется перевод на немецком языке: L e o n h. E u l e r s Theorie der Planeten und Cometen von Iohann Freyherrn von Paccassi übersetzt, und mit einem Anhange und Tafeln vermehrt, Wien, 1781)

43. Determinatio orbitae cometae qui mense Martio hujus anni 1742 potissimum fuit observatus. Miscellanea Berolinensia, t. VIII, 1743, стр. 1—90

44. L. E u l e r, Beantwortung verschiedener Fragen über die Beschaffenheit, Bewegung und Wirkung der Cometen, Berlin, 1744, 8°, Fortsetzung dieser Beantwortung, Berlin 1744, 8°

45. Recherches et calculs sur la vraie orbite elliptique de la Comète de l'an 1769 et son temps périodique, exécutés sous la direction de M. L. Euler par les soins de M. Lexell, St. Pétersbourg, 1770, 159 стр., 4°

46. Determinatio facilis orbitae Cometae cuius transitum per eclipticam bis observare licuit, Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 4, (Pars I, 1780) 1783, стр. 243—254

47. Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter. Paris (chez Delatour) 1749, 123 стр.
Мемуар был включен только в некоторые экземпляры сборника Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences, t. VI (1745—1747), Paris, 1750, 123 стр.

48. Recherches sur les irrégularités du mouvement de Jupiter et de Saturne, Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences, t. VII (1751—1761), Paris, 1769, 84 стр.
Существует отдельное издание с несколько измененным заглавием: Recherches sur les inégalités de Jupiter et de Saturne, Paris, 1769, 84 стр.

49. Investigatio perturbationum, quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur, Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences, t. VIII (1753—1760), Paris, 1771, 138 стр.

50. De la variation de la latitude des étoiles fixes et de l'obliquité de l'écliptique, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 10, (1754) 1756, стр. 296—336

51. De circulo maximo fixo in coelo constituendo, ad quem orbitae planetarum et cometarum referantur, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 20, (1775) 1776, стр. 509—540

52. Quantum motus Terrae a Luna perturbetur accuratius inquiritur, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 1, (1747—48) 1750, стр. 428—443

53. De perturbatione motus Terrae ab actione Veneris oriunda, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 16, (1771) 1772, стр. 426—467

54. Réflexions sur les inégalités dans le mouvement de la Terre, causées par l'action de Vénus, Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 2, (Pars II, 1778) 1780, стр. 297—307

55. Investigatio perturbationum quae in motu Terrae ab actione Veneris producuntur, Ibid., стр. 308—316

56. Nova methodus motus planetarum principalium ad tabulas astronomicas reducendi, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 18, (1773) 1774, стр. 354—376

57. Nova methodus motum planetarum determinandi, Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 2, (Pars II, 1778) 1781, стр. 277—302

58. Cautiones necessariae in determinatione motus planetarum observandae, Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 3, (Pars II, 1779) 1783, стр. 295—334
59. De perturbatione (relaxatione) motus planetarum a resistentia aetheris orta, Opuscula Varii Argumenti I, 1746, стр. 245—276
60. Part of a Letter from Leonhard Euler to the Rev. M. Caspar Wetstein, Concerning the Gradual Approach of the Earth to the Sun, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 46, (1749—50) 1752, стр. 203—205
61. Part of a Letter from Mr. Prof. Euler to the Rev. Mr. Wetstein, Concerning the Contraction of the Orbits of the Planets, Ibid., стр. 356—359
62. Carolo Eulero, Leonhardi filio, Meditationes in questionem: Utrum motus medius Planetarum semper maneat aeque velox, an succesu temporis quampiam mutationem patiatur? Et quaenam sit ejus causa? (Prix 1760), Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences, t. VIII (1753—60), Paris, 1771
J. A. Euler, Mémoire dans lequel on examine: Si les planètes se meuvent dans un milieu dont la résistance produise quelque effet sensible sur leur mouvement? (Accessit de 1762), Ibid.
63. De motu nodorum Lunae eiusque inclinationis ad eclipticam variatione, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 1, (1747—1748) 1750, стр. 387—427
Несколько раньше появился краткий реферат этой работы: Sur le mouvement des noeuds de la Lune, et sur la variation de son inclinaison à l'Ecliptique, Histoire de l'Académie des Sciences et des Belles Lettres de Berlin, 1, (1745) 1746, стр. 40—44
64. L. Euler, Theoria motus Lunae exhibens omnes eius inaequalitates etc. Impensis Academiae Scientiarum Petropolitanae Anno 1753, Berolini, Ex Officina Michaelis, VIII + 347 стр., 4°
65. F. Tisserand, Traité de mécanique céleste, t. III, Paris, 1894, стр. 65—75
66. М. А. Васильев, Исследования по теории движения Луны. Журнал физ.-мат. об-ва при Пермском гос. ун-те, 1919, стр. 1—24.
67. A. C. Clairaut, Théorie de la Lune, déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionelle aux quarrés des distances. St.-Pétersbourg, 1752. Deuxième éd. Paris, 1765
68. J. d'Alembert, Recherches sur différents points importants du système du Monde, t. I, III, Paris, 1754, 1756
69. Considerationes de theoria motus Lunae perficienda et imprimis de eius variatione. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 13, (1768) 1769, стр. 120—158
70. J. A. Euler, Réflexions sur la variation de la Lune. Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 22, (1766) 1768, стр. 334—353
71. Méthode pour trouver les vrais moments tant des nouvelles que des pleines lunes, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 3, (1747) 1749, стр. 154—173
72. Méthode de trouver de vrai lieu géocentrique de la Lune par l'observation de l'occultation d'une étoile fixe, Ibid., стр. 174—177
73. Métode pour déterminer la longitude des lieux par l'observation d'occultation des étoiles par la Lune, Ibid., стр. 178—179
74. Réflexions sur la dernière éclipse du Soleil du 25 juillet 1748, Ibid., стр. 250—273

75. Sur l'accord des deux dernières éclipses du Soleil et de la Lune avec mes Tables, pour trouver les vrais moments des plénilunes et des novilunes, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 4, (1748) 1750, стр. 86—98
76. De emendatione tabularum lunarium per observationes eclipsium Lunae, Opera Postuma, t. II, Petropoli, 1862, стр. 354—364
77. Tria capita ex Opere quodam majori inedito de theoria Lunae, Opera Postuma t. II, Petropoli, 1862, стр. 365—390
78. Théorie de la Lune. Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences, t. IX (1764—1772), Paris, 1777, стр. 1—94
79. Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la Lune. Où l'on détermine toutes les inégalités auxquelles il est assujetti, Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences, t. IX, (1764—1772), Paris, 1777, стр. 1—38
80. Theoria motuum Lunae, nova methodo pertractata, una cum tabulis astronomicis, unde ad quodvis tempus loca Lunae expedite computari possunt, incredibili studio atque indefesso labore trium academicorum: Johannis Alberti Euler, Wolffgangi Ludovici Krafft, Johannis Andreae Lexell, opus dirigente Leonhardo Eulero, Petropoli, 1772, 775 стр., 4°. (Имеется русский перевод наиболее интересных частей этого сочинения: Леонард Эйлер, Новая теория движения Луны. Перевод с латинск. первой части книги первой и извлечений из частей второй и третьей с примеч. и пояснениями переводчика академика А. Н. Крылова. Л., 1934)
81. Leonhardi Euleri, Novae Tabulae Lunares singulari methodo constructae, quarum ope loca Lunae ad quodvis tempus expedite computari licet, Petropoli, 1772, 144 стр., 8°
82. De Theoria Lunae ad maiorem perfectionis gradum evehenda, Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 1, (Pars II, 1777) 1780, стр. 281—327
83. And. Joh. Lexell, Comparatio inter Theoriam Lunae Illustr. Euleri et Tabulas recentiores Celeb. Mayeri, Novi Commentarri Academiae Scientiarum Petropolitanae, 18, (1773) 1774, стр. 537—567
84. Recherches sur le mouvement des corps célestes en général, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 3, (1747) 1749, стр. 93—143
85. Methodus facilis motus corporum coelestium utcunque perturbatos ad rationem calculi astronomici revocandi, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 12, (1766—1767) 1768, стр. 129—165
86. Nouvelle méthode de déterminer les dérangements dans le mouvement des corps célestes causés par leur action mutuelle, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 19, (1763) 1770, стр. 141—179
87. De motu corporum coelestium a viribus quibuscunque perturbato, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 4 (1752—53), 1758, стр. 161—196
88. Réflexions sur les diverses manières dont on peut représenter le mouvement de la Lune, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 19 (1763) 1770, стр. 180—193
89. De perturbatione motus planetarum et cometarum, Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 5, (Pars I, 1781) 1784, стр. 297—340
90. Recherches des inégalités causées au mouvement des planètes par des forces quelconques, Opera Postuma, t. II, Petropoli, 1862, стр. 416—446

91. Considérations sur le problème des trois corps, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 19, (1763) 1770, стр. 194—220
92. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 11, (1765) 1767, стр. 144—151
93. J. L. Lagrange, Essai sur le Problème des trois Corps, Oeuvres de Lagrange, t. VI, Paris, 1873, стр. 229—334
94. P. S. Laplace, Traité de Mécanique céleste, t. IV, Paris, 1805, стр. 307—313
95. R. Marcolongo, Il problema dei tre corpi da Newton (1686) ai nostri giorni, Milano, 1919, ср. 14—15
96. A. Wintner, The analytical foundations of Celestial Mechanics, Princeton, 1941, стр. 430
97. Problème: Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver le cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 16, (1760) 1762, стр. 228—247
98. De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 10, (1764) 1766, стр. 207—242
99. De motu corporis ad duo Centra virium fixa attracti, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 11, (1765) 1767, стр. 152—184
100. J. L. Lagrange, Recherches sur le mouvement d'un corps qui est attiré vers deux centres fixes. Miscellanea Taurinensia, t. IV, 1766—1769, Oeuvres de Lagrange, t. II, Paris, 1868, стр. 67—121
101. C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels, Bd. I, Leipzig, 1902, стр. 117—163
102. A. M. Hiltbeitel, The problem of two fixed centres and certain of its generalisations. American Journal of Mathematics, 22, 1911, стр. 337—362
103. Г. К. Бадалян, О проблеме двух неподвижных центров. Астрономический журнал, 11, 1934, стр. 346—378
104. Considerationes de motu corporum coelestium, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 10, (1764) 1766, стр. 544—558
105. De variis motuum generibus, qui in satellitibus planetarum locum habere possunt, Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 4, (Pars I, 1780) 1783, стр. 255—279
106. De motibus maxime irregularibus, qui in systemate mundano locum habere possent, una cum methodo huismodi motus per temporis spatium quantumvis magnum prosequendi, Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 4, (Pars I, 1780) 1783, стр. 280—302
107. Annotatio quarundam cautelarum in investigatione inaequalitatum, quibus corpora coelestia in motu perturbantur, observandarum, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 13, (1768) 1769, стр. 159—201
108. De motu trium corporum se mutuo attrahentium super eadem linea recta, Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 3, (1785) 1788, стр. 126—141
109. Nouvelle manière de comparer les observations de la Lune avec la théorie, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 19, (1763) 1770, стр. 221—234
110. Commentatio hypothetica de periculo, a nimia cometae appropinquatione metuendo, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 19, (1774) 1775, стр. 499—549

111. De attractione corporum sphaeroidico-ellipticorum, Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 10, (1738) 1747, стр. 102—115
112. Enodatio difficultatis super figura Terrae a vi centrifuga oriunda, Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 2, (1784) 1788, стр. 118—126
113. Du mouvement des absides des satellites de Jupiter, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 19, (1763) 1770, стр. 311—338
114. J.-A. Euler, Recherches des forces dont les corps célestes sont sollicités en tant qu'ils ne sont pas sphériques. Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 21, 1767, стр. 414—432
115. De perturbatione motus planetarum ab eorum figura non sphaerica oriunda, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 3, (1750—51) 1753, стр. 235—253
116. J. d'Alembert, Recherches sur la précession des équinoxes, Paris, 1749
117. Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 5, (1749) 1751, стр. 289—325
118. Avertissement au sujet des Recherches sur la Précession des Equinoxes, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 6, (1750) 1752, стр. 412
119. Scientia navalis. seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus, Petropoli, 1749, 2 vol., 4°
120. Recherches sur le mouvement de rotation des corps célestes, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 15, (1759) 1766, стр. 265—309
121. Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in huiusmodi corpora cadere possunt, accomodata, Rostochii et Gryphiswaldiae, 1765, 4°.
Рукопись этого сочинения была закончена в 1760 г.
122. Investigatio accuratior phaenomenorum quae in motu Terrae diurno a viribus coelestibus produci possunt, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 13, (1768) 1769, стр. 202—241
123. Solutio duorum problematum, Astronomiam mechanicam spectantium, Opera postuma, t. II, 1862, стр. 317—332
124. Joh. Alberti Euleri Academici berolinensis Meditationes de motu vertiginis planetarum ac praecipue Veneris etc., Petropoli, 1760, 48 стр.

M. F. SUBBOTIN

DIE ASTRONOMISCHEN ARBEITEN LEONHARD EULERS

(Zusammenfassung)

Die astronomischen Arbeiten Eulers wurden bisher keiner einigermaßen systematischen Untersuchung unterzogen und sind noch immer sehr wenig zugänglich. Indessen ist die Untersuchung dieser Arbeiten nicht nur vom Standpunkt der Geschichte der Astronomie von Bedeutung. Nicht alle der so gründlich in Vergessenheit geratenen Ideen Eulers sind durch Wiederentdeckungen späterer Gelehrter zum Tragen gekommen, bieten aber auch jetzt noch Interesse.

Der Artikel hat das Ziel, eine hinlängliche Vorstellung von allen astronomischen Arbeiten Eulers ohne Ausnahme zu geben, ihre historische Bedeutung zu offenbaren und zu zeigen, welch ein Interesse sie dem theoretischen Astronomen bieten können. Sein Inhalt ist in die folgenden Kapitel eingeteilt:

I. Einleitung. II. Allgemeiner Überblick über die astronomische Tätigkeit Eulers. III. Die ungestörte Bewegung und die Bahnbestimmung. IV. Die Theorie der Planetenbewegung. V. Arbeiten zur Theorie der Mondbewegung. VI. Die zweite Theorie der Mondbewegung VII. Allgemeine Fragen der Theorie der gestörten Bewegung. VIII. Das Dreikörperproblem und seine Spezialfälle. IX. Die Untersuchung der gestörten Bewegung durch numerische Integration der Differentialgleichungen. X. Die Anziehung der Sphäroide. Der Einfluß der Figur der Himmelskörper auf ihre Bewegung. XI. Die Rotation der Erde.

Я. Г. ДОРФМАН

ФИЗИЧЕСКИЕ ВОЗЗРЕНИЯ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Ни один ученый не мыслит формулами
А. Эйнштейн [1]

Величайшей исторической заслугой Леонарда Эйлера, его признанным подвигом было создание фундаментального математического аппарата для самых разнообразных областей физики, астрономии и техники. Работая над многочисленными задачами этих наук, Эйлер не ограничивался одной лишь математической разработкой существующих физических теорий, но старался наглядно представить себе физические процессы, критически анализировал физическое содержание теорий и приходил, таким образом, к определенным собственным воззрениям на различные физические проблемы. И подобно тому, как в своих трудах по математике и механике, работая по заранее им начертанному плану, Эйлер обозревал всю данную дисциплину в целом, начиная с ее оснований и кончая разветвленными путями приложения,— точно так же и в области физики Эйлер попытался воздвигнуть из огромного материала разрозненных физических знаний стройное единое целое.

Так, наряду с многочисленными физическими статьями Леонарда Эйлера, украшавшими труды Берлинской, Петербургской и Парижской академий, сначала возникло оставшееся в рукописи строгое «Руководство к естествознанию» (1745—1746) [2], а затем яркие красочные «Письма к одной немецкой принцессе о различных вопросах физики и философии» (1760—1761) [3], которыми буквально зачитывались широкие круги современников.

Эпоха деятельности Леонарда Эйлера характеризуется в физике столкновением двух противоположных направлений — ньютонианского и картезианского. Оба эти направления исходили в основном из воззрений механицизма, но резко расходились в методе его применения к истолкованию физических явлений.

Ньютонианцы стремились найти общие основные механические законы физических явлений, допуская при этом существование изначальных, присущих природе «сил», заранее будто бы недоступных естествознанию. Они, по крайней мере в принципе, считали недопустимым построение гипотез о внутреннем механизме процессов, придавая значение лишь строго формальным, протокольным описаниям наблюдаемых фактов.

Картезианцы, напротив, решительно отрицали всякие изначальные неведомые «силы», считая допущение подобных «сил» остатком средневековой схоластики, и пытались путем смелых предположений вообразить себе незримый внутренний механический процесс любого явления. Эти отчаянные по своей смелости картезианские гипотезы, опиравшиеся на множество произвольных допущений, кое-как скрепленных единичными опытными фактами, нередко становились игрой необузданной фантазии и превращались в «физический роман», как его иронически назвал известный историк математики Монтюкла [4].

Леонард Эйлер пытался отыскать в каждом из этих направлений его рациональное зерно. Вместе с тем он находился под влиянием некоторых идей Лейбница и упорно сохранял привитые ему с детства религиозно-мистические представления.

Характеризуя естествознание, Эйлер писал: «Естествознание это наука, устанавливающая причину изменений, происходящих в телах.» Вместе с тем, отдавая «богу богово», он добавляет: «Изменения в телах, которые вызваны духами, выходят за границы естествознания, точно так же, как и чудеса, творимые непосредственно божественной силой» [2, стр. 449].

Попытка Эйлера отнести одни вопросы к физике, а другие к метафизике (μέτα τὰ φυσικά — за пределами физики) не всегда ему удавалась. В его физические теории нередко врываются метафизические аргументы, а в его метафизических рассуждениях звучат вольнодумные нотки естествоиспытателя.

Изучая физику Эйлера, мы не должны ни на минуту забывать, что перед нами один из величайших ученых XVIII в., но он все же и прежде всего сын своего века. И потому оценивать его воззрения надо, разумеется, прежде всего с позиций науки того времени.

Физические воззрения Эйлера, популяризованные через «Письма к одной немецкой принцессе», оказали огромное влияние на развитие физики XVIII в. и первой половины XIX в. Тем не менее они еще очень недостаточно изучены.

Имеются исследования воззрений Эйлера лишь по некоторым отдельным областям физики. Напомним о превосходном обзоре эйлеровской физической оптики С. И. Вавилова [5, стр. 29—38]; В. П. Егоршин [6] и Ю. А. Крутков [7] дали анализ некоторых взглядов Эйлера в области механики. Розенбергер [8] в своей «Истории физики» дал краткий обзор эйлеровской теории эфира и т. д. Однако до сих пор, насколько нам известно, нет подробного исследования, где бы критически анализировалась вся совокупность физических воззрений Эйлера в целом, вся физика Эйлера.

В настоящей статье мы сделали попытку в какой-то степени приблизиться к решению этой задачи, хотя бы в главных чертах.[1]

* * *

Все физические исследования Леонарда Эйлера в той или иной мере опираются на его представления о строении материи, изложенные в ряде трудов [2, 9, 10]. Эти представления не оригинальны, они заимствованы им у различных авторов.

Всякое тело состоит, по мнению Эйлера, из частичек, разделенных друг от друга порами. «Эти частички имеют конечные размеры и, следовательно, состоят из еще более мелких частиц, отличных от тех, которые мы называем элементами. Термин молекулы наиболее пригоден для обозначения маленьких частичек тела. Всякое тело состоит из определенного числа этих молекул, составляющих его собственную материю, которые своим расположением образуют поры, через которые может проходить тонкая материя...» [9]. Пространство между атомами заполнено одной или несколькими «тонкими материями». Возможно, говорит Эйлер, что все атомы состоят из одного вида «собственной материи тела» и что промежутки между ними заполнены одним видом «посторонней» «тонкой материи». «В мире существуют, таким образом, по меньшей мере два главных вида материи, одна грубая, другая тонкая» [2, стр. 509]. Если вычесть из объема тела объемы его межатомных расстояний, то можно определить не только «истинный объем» тела, т. е. объем весомой «грубой» материи в данном теле, но и его истинную плотность. Если существует только один вид «грубой» материи, то «может оказаться, что истинная плотность у всех тел одинакова» [2, стр. 507]. Эйлер считает такое предположение наиболее вероятным, поскольку, как он указывает, инерция у всех тел соответствует содержащемуся в них количеству материи. Следует заметить, что в своих трудах по механике Эйлер высказывает иное мнение: «массу тела, т. е. количество материи, следует определять... по величине его инерции» [6, стр. 384].

---

[1] Уже после сдачи в печать настоящей статьи появилась интересная работа Л. С. Минченко, Физика Эйлера, Труды Ин-та. истории естествознания и техники, т. 19, стр. 221 — 270, 1957.

Итак, молекулы всех тел должны состоять из одной и той же первичной «грубой» материи. «Я не утверждаю, — говорит Эйлер, — что эти частички не обладают вовсе порами. Возможно, что они их имеют, но поры столь малы, что тонкая материя через них не проходит» [9, § 7].

Он отмечает, что поскольку во всех телах имеются поры, то плотность любого тела должна быть меньше «истинной плотности» его первичных частичек. Так как золото, по данным Эйлера, обладает наивысшей плотностью среди известных нам тел, а между тем и в золоте имеются поры, то истинная плотность первичных частичек должна, следовательно, значительно превосходить плотность золота. Поскольку, как уже указывалось, плотность вещества молекул должна быть одинаковой, то, очевидно, чем меньше плотность тела, тем больше должны быть междучастичные поры. Например, сравнивая воздух с водой и с золотом, Эйлер заключает, что только одна 30400-я часть объема воздуха должна содержать собственную материю воздуха. Эйлер приходит также к выводу, что поскольку пропорциональность массы весу имеет место и у планет, то все небесные тела должны быть построены из таких же молекул, как и земные. Одинаковая плотность молекулярного вещества, согласно Эйлеру, является, вероятно, таким же следствием «сущности вещества», как равенство 2π суммы всех углов в треугольнике представляет собою следствие «сущности треугольника» [9, § 10].

Рассматривая строение вещества, Эйлер особо останавливается и в «Руководстве» и в «Письмах к одной немецкой принцессе» на модной «теории монад» Лейбница. «Было время,— пишет Эйлер,— когда спор о монадах был столь жарким и столь всеобщим, что о нем с большой горячностью говорили в любом обществе и даже в караульне. При дворе не было почти ни одной дамы, которая бы не высказалась за или против монад. В конце концов всякий разговор переходил на монады, и ни о чем другом, кроме этого, не говорили» [3, CXXV]. Эйлер указывает, что Берлинская академия, объявив в 1748 г. конкурс по этому вопросу, признала все представленные доводы в пользу монад «столь слабыми и столь химеричными», что «премирована была работа некоего Юсти, наиболее удачно опровергавшего монады...» Это «страшно возмутило сторонников монад, во главе которых стоял великий и знаменитый г. де Вольф, который полагал себя никак не менее непогрешимым в своих решениях, чем папа», и этот «вождь чуть было не обрушил грома философской анафемы на всю Академию» [3]. Хотя число сторонников монад «в то время было гораздо бóльшим и более грозным», чем в 1760—1761 гг., когда Эйлер писал свои «Письма», все же он счел себя вынужденным «немножко остановиться» на этом вопросе. Это вполне понятно, поскольку, как известно, Эйлер лично возглавлял в описываемое им время в Берлинской академии противников теории монад и еще в 1746 г. выпустил анонимную брошюру на немецком языке «Мысли об элементах тел, в которых испытывается учение о простых вещах и монадах и раскрывается истинная сущность тел» [11].

В теории монад, по словам Эйлера, утверждается, что так как все тела делимы до бесконечности, то они состоят из бесконечного числа бесконечно-малых частиц. Эйлер подчеркивает, что принципиальная делимость тел до бесконечности не подлежит заранее никакому сомнению, независимо от всяких предположений о строении вещества. Однако из этой неоспоримой принципиальной делимости никак еще не следует, что тела действительно состоят из бесконечного числа бесконечно малых и притом метафизических, нематериальных «монад» [2, стр. 455]. Эйлер также решительно возражает против утверждения, будто все эти бесконечно-малые частицы вещества обладают способностью по своей воле изменять свое собственное состояние. «Сторонники теории монад хотят,— как говорит Эйлер,— отнести эти элементы материи к классу существ, включающему в себя духов и души, несомненно обладающих способностью самим изменять свое состояние» [3, LXXVI], т. е. обладающих свободой воли.

Этот вопрос Эйлер специально рассмотрел в 1746 г. в работе «Может ли быть приписана материи способность мышления или нет?». Эйлер полагает, что «способность мышления теснейшим образом... связана с силой изменения своего состояния». В таком случае, по мнению Эйлера, способность мышления должна была бы противоречить принципам механики: «Ни одно тело не может обладать силой, противоположной инерции. Но способность мышления есть сила, противоположная инерции. Значит ни одно тело не может обладать способностью мышления» [12]. Отсюда Эйлер делает вывод, что мышление должно быть связано с присутствием в теле души. Мыслить может, по его мнению, только душа, а не сама безжизненная материя.

Рассматривая строение различного вида тел, Эйлер находит разницу между твердыми и газообразными телами прежде всего в различии межатомных расстояний и подвижности частиц. Следует, однако, заметить, что из газов науке того времени был известен, строго говоря, только воздух [2]. Поэтому, относя воздух и жидкотекучие тела к одному классу

[2] Углекислый газ, открытый Блэком в 1757 г., назывался тогда «связанным воздухом», а кислород, открытый Пристли в 1772 г., получил название «дефлогистированного воздуха». Отличие этих газов от воздуха было доказано Лавуазье в 1776 г.

тел, а именно к жидкостям, Эйлер подчеркивает, что воздух отличается от них лишь своей сжимаемостью и упругостью.

Известно, что в 1738 г. Парижской академией была удостоена премии представленная Эйлером на конкурс работа «Огонь, его природа и свойства» [10], в которой он защищал теорию «огненной материи». Нередко утверждается, что позднее Эйлер перешел на позиции кинетической теории. Однако и в 1760—1761 гг., описывая в «Письмах к одной немецкой принцессе» действие огня, т. е. тепла, на вещество, Эйлер говорит, что это действие «состоит не в чем ином, как в разрыве связи между мельчайшими частицами тела, которые *затем* приходят в быстрое движение» [3][3]. Иными словами, он полагает, что теплота сама по себе не заключается в движении частиц. Его точка зрения совпадает с распространенными воззрениями того времени, согласно которым «теплород», или «огненная материя», или «огонь», мыслился как вещество, состоящее из сильно подвижных частиц, внедряющееся при нагревании между атомами и молекулами вещества и разрывающее связи между ними. Эйлер попытался приложить к этим представлениям законы механики. Поэтому его теория теплоты является кинетической теорией... теплорода, а не молекул вещества.

На подобного же рода представлениях основано, по-видимому, высказывание Эйлера в одном из его писем к Лагранжу от 24. VI 1760 г.: «Должна быть некая существенная разница между жидкими и твердыми частицами (les particules fluides et solides), из которых состоит среда. Нажимы передаются жидкими частицами лишь последовательно друг за другом, между тем как частица твердая, будучи ударена с одного конца, как бы мгновенно передает удар своему другому концу» [13].

Здесь бросается в глаза то обстоятельство, что, по воззрениям Эйлера, *сами* молекулы жидкости и твердых тел должны обладать принципиально различными свойствами. Эта точка зрения несовместима с кинетическими представлениями об аггрегатных состояниях и, по-видимому, также имеет свои корни в распространенных в ту эпоху представлениях о «постоянных» жидкостях и «постоянных» твердых телах. Поводом к утверждению, будто Эйлер перешел на кинетические позиции, послужило, по-видимому, то обстоятельство, что он в 1746 г. высказался весьма одобрительно о кинетических работах Ломоносова, в частности о его «Размышлении о причине теплоты и холода». В этом отзыве Эйлер действительно,

---

Курсив наш.— *Я. Д.*

после многочисленных похвальных эпитетов, написал о теории Ломоносова следующую фразу: «Я совершенно уверен в справедливости его изъяснений» [14]. Однако после всех приведенных выше цитат, мы считаем, что этот торжественный отзыв, как и все ему подобные другие отзывы Эйлера, не следует понимать чересчур буквально.

Эйлер относился благожелательно к Ломоносову и, хорошо зная тогдашние порядки в Петербургской академии, в ответ на назойливые, диктуемые интригами запросы управляющего Академией Шумахера писал такие отзывы, которые должны были гарантировать Ломоносова от неприятных случайностей. Итак, переход Эйлера когда-либо на позиции кинетической теории нам представляется крайне сомнительным.

В своем рассмотрении строения материи, Эйлер особо останавливается на природе тонкой материи, заполняющей, по его мнению, все поры в телах и все мировое пространство. Поскольку небесные тела в своем движении не встречают заметного сопротивления со стороны эфира, то, по мнению Эйлера, «истинная плотность тонкой материи должна быть по крайней мере в 100 000 раз меньше истинной плотности земных тел» [2, стр. 509].

В мемуаре «О замедлении движения планет», приложенном к его «Новой теории света и цветов» (1746), Эйлер с курьезной педантичностью рассчитал, что эфир не может оказать заметного действия на планеты, если его плотность в 387 367 100 раз меньше плотности воздуха [5, стр. 32].

Известно, что еще Ньютон в своей «Оптике» (1704) впервые рассмотрел тот же вопрос и пришел к следующему выводу: «Если этот эфир предположить в 700 000 раз более упругим, чем наш воздух, и более чем в 700 000 раз разреженным, то сопротивление его будет свыше чем в 600 000 000 раз меньшим, чем у воды. Столь малое сопротивление едва ли произведет заметное изменение движений планет за десять тысяч лет» [15]. Все эти расчеты позволили Эйлеру высказать уверенность, что беспрепятственное движение планет в космическом пространстве не может служить аргументом против гипотезы о существовании эфира.

Эйлер рассматривает эфир, как тончайшую упругую жидкость, и приходит к выводу, «что материя, которая составляет эту тонкую жидкость..., обладает совершенно иной природой, чем та, из которой образованы все ощутимые тела» [9, § 10].

Этой особенностью должны обладать и те многочисленные «тонкие жидкости», смесью которых, возможно, по мнению Эйлера, является «эфир».

* * *

Поскольку, согласно воззрениям Эйлера, все физические процессы должны быть объяснимы из принципов механики, он уделил огромное внимание развитию и углублению последних.

Воззрения Эйлера в области механики изложены в основном в его трудах «Механика, т. е. наука о движении, изложенная аналитическим методом» (1736), «Теория движения твердых тел» (1765) и «Общие принципы движения жидкостей» (1755).

В предисловии, предпосланном «Механике», Эйлер подчеркивает прежде всего, что он в отличие от своего предшественника Ньютона излагает механику аналитическим методом, чтобы сделать механику орудием практических расчетов. Здесь же Эйлер отмечает и принципы построения изложения механики. Сначала излагаются «законы сохранения состояния» (покоя и движения), а затем «принципы, на основании которых можно понять, каким образом, с одной стороны, сохраняется движение, с другой — оно возникает или изменяется под влиянием сил» [6, стр. 36—37]. Рассмотрению этих законов и принципов предпослано Эйлером обстоятельное исследование абсолютного и относительного движения. Этот вопрос в свою очередь приводит к необходимости исследования проблемы о понятиях пространства и времени.

«Опираясь на чувственное восприятие,— пишет Эйлер,— мы до сих пор не знали другого вида покоя или движения, как только по отношению к другим телам, почему мы и назвали как покой, так и движение относительными» [6, стр. 324]. Однако для рассмотрения всех особенностей движения необходимо изучить «два рода начал, обусловливающих движение тел», из которых одни Эйлер называет «внутренними», а другие «внешними». А для исследования внутренних начал требуется, «по крайней мере в уме, удалить все окружающие тела: тогда налицо останется как бы в единственном числе только то тело, о котором идет речь» [6, стр. 323]. Иными словами, требуется рассмотреть изолированное тело в совершенно пустом пространстве. Эйлер указывает, что такого рода рассмотрение должно неминуемо вызвать возражения со стороны некоторых философов, которые заметят, что эта гипотеза содержит в себе противоречие, поскольку «все тела в мире... тесно связаны друг с другом» [6, стр. 323].

На эти возражения Эйлер тут же отвечает, что речь вовсе не идет «о том, чтобы изъять одно тело из вселенной», но «даже и философу не возбраняется поразмыслить над вопросом, что случилось бы с данным телом, если бы остальные тела на него совершенно не влияли» [6, стр. 323]. «Философы постоянно прибегают к подобного рода абстракциям: если бы они вздумали их запретить, не осталось бы путей к познанию истины» [6, стр. 323].

Итак, рассмотрение изолированного тела в пустом пространстве есть своего рода экстраполяция, это абстракция, необходимая для научного изучения природы движения. Предупредив, таким образом, возможные возражения, Эйлер формулирует аксиому 1: «Всякое тело, взятое безотносительно ко всем прочим телам, находится либо в покое, либо в движении. Речь здесь идет об абсолютном покое и об абсолютном движении» [6, стр. 324].

Эйлер считает абсолютное движение (как и абсолютный покой) не только дозволенной, но и неизбежной для науки абстракцией. Он подчеркивает, что если говорить только об относительном движении, то невозможно ни об одном теле утверждать, находится ли именно это тело в покое, или в движении. Значит, отбросив понятия абсолютного покоя или абсолютного движения, пришлось бы не только «отбросить законы движения..., но и допустить, что вообще не может быть никаких законов движения», «пришлось бы утверждать, что все происходит случайно и без всякой причины», а такое утверждение, по мнению Эйлера, антинаучно.

Но движение определяется Эйлером как «перемещение тела из того места, которое оно занимало, в другое место» [6, стр. 40]. А, с другой стороны, «место есть часть неизмеримого, или бесконечного, пространства, в котором находится весь мир». «Не заботясь о том, есть ли такое пространство, или нет,— продолжает Эйлер,— мы требуем только одного, чтобы тот, кто хочет исследовать вопрос об абсолютном движении и абсолютном покое, представил себе такое пространство» [6, стр. 42], которое он называет «абсолютным пространством».

Итак, понятия абсолютного пространства, абсолютного движения и абсолютного покоя являются для Эйлера совершенно необходимой научной абстракцией, одним «из путей к познанию истины». В такой же степени необходимым он считает понятие абсолютного времени.

Вводя эти абстрактные понятия в механику, Эйлер не забывает все же подчеркнуть, что «место не является только чистым понятием нашего ума» [6, стр. 361], а деление времени на равные промежутки, «равенство времен имеет под собой определенное основание, находящееся вне нашего сознания» [6, стр. 284]. Отчетливо понимая, что абстрактные понятия и, в частности, понятие абсолютного покоя, могут смутить неискушенного читателя, Эйлер добавляет: «Здесь, на пороге механики, нам не следует беспокоиться по поводу абсолютного покоя, о котором мы вообще не знаем, существует ли он и в каком именно виде: ведь мы в механике будем подвергать исследованию лишь то, что мы постигаем с помощью наших чувств» [6, стр. 284]. Вместе с тем, говорит Эйлер, «движение и покой противоположны друг другу лишь по названию, но не по существу дела... Движение отличается от покоя не в большей мере, чем одно движение от другого» [6, стр. 277].

Развив эти мысли, Эйлер вновь возвращается к вопросу о реальности абсолютного покоя и движения. Несмотря на то, что мы из чувственных ощущений знаем только относительные покой и движение, «отсюда еще нельзя делать вывода», «будто абсолютные покой и движение сами по себе представляют собой не больше, чем чисто умозрительное отношение, и что в самих телах не содержится решительно ничего такого, что соответствовало бы нашим понятиям покоя и движения» [6, стр. 324].

Эйлер обращает внимание на то, что и размеры тела относительны, так как их можно узнать лишь путем сравнения данного тела с другими телами, однако если удалить все окружающие предметы, то «в теле все-таки останется как бы основа его размеров» [6, стр. 325], так как в том случае, если тело сожмется или расширится, «придется считать, что в нем произошло некоторое реальное изменение» [6, стр. 325]. Точно так же, по мнению Эйлера, даже если бы существовало изолированное тело, «пришлось бы считать, что оно либо находится в покое, либо движется» [6, стр. 325], так как «нельзя предположить, что существует и то, и другое одновременно, или что не существует ни того, ни другого». Поэтому он считает, что можно поставить вопрос, находится ли изолированное тело в покое или в движении.

Итак, Эйлер считает абсолютное движение абстракцией, притом не только необходимой, но и реальной, и переходит к рассмотрению причин, обусловливающих покой или движение. Прежде всего он рассматривает причину, вызывающую сохранение состояния покоя или прямолинейного равномерного движения у изолированного тела. Эту причину Эйлер признает внутренней и именует ее «инерцией». «Инерция представляет собой истинную причину, вследствие которой тела сохраняют неизменным свое состояние; поскольку эту причину приходится искать в самом теле, ее, без сомнения, следует считать свойством, общим для всех тел» [6, стр. 336].

В «Руководстве к естествознанию» Эйлер с самого начала заменил латинский термин «inertia» (буквально: бездействие, косность, лень) немецким Standhaftigkeit (что означает непоколебимость, стойкость, постоянство).

В «Письмах к одной немецкой принцессе» Эйлер объясняет, что термин «инерция» был введен первоначально теми философами, которые полагали, что всякое тело имеет стремление к покою. Они уподобляли тела ленивым людям, предпочитающим отдых труду, и приписывали телам отвращение к движению, подобное отвращению ленивых людей к труду. «Но хотя с тех пор стало известным, что тела сохраняют как свое состояние покоя, так и свое состояние движения, слово инерция было сохранено для обозначения вообще свойств тела сохранять свое состояние как движения, так и покоя» [3, LXXV].

Эйлер возражает «во избежание какой-либо путаницы» против применяемого иногда выражения «сила инерции», так как под силой, говорит он, принято понимать причину, изменяющую состояние тела. Поэтому свойство материи сохранять свое абсолютное состояние покоя или движения Эйлер именует просто «инерцией» [6, стр. 337]. «Все, что способно изменять абсолютное состояние тела, называется силой»,— говорит Эйлер, причем «сила является внешней причиной» [6, стр. 354].

Утверждение Эйлера, что всякая причина, вызывающая изменение состояния тела, должна быть обязательно внешней, а не внутренней, отнюдь не случайно. Эта мысль заимствована Эйлером из метафизики Лейбница, который доказывал, что никакое движение не является имманентным свойством материи, а чуждо ей и привнесено в материю извне. Поэтому и причина движения, т. е. «сила», должна, согласно Лейбницу, лежать вне материи (extra corpus). Поскольку вне материи не может быть ничего материального, то причиной движения оказывается в итоге такого рассуждения дух, или божество. Приблизительно такие же идеи развивали и последователи Ньютона.

Метафизическое эйлеровское определение силы как «причины движения» можно, к сожалению, еще нередко встретить и в современных курсах физики и механики, куда оно автоматически перенесено вместе с эйлеровскими уравнениями [16]. Между тем, по современным представлениям, сила есть величина, характеризующая действие одного тела на другое, приводящее к изменению механического состояния тела и заключающееся, как отметил Ф. Энгельс, в «переносе движения».

Чтобы изучить действие сил, Эйлер определяет эту величину: «Действием какой-либо силы, произведенным над заданным тельцем за малый промежуток времени, называется тот отрезочек пути, на который тельце, находящееся в покое, перемещается или на который движущееся тельце смещается в сторону от пути, который оно прошло бы вследствие своей инерции» [6, стр. 372]. Отсюда следует утверждение, что «действие» пропорционально приложенной силе.

Далее Эйлер ставит вопрос, «почему определенная сила P вызывает в данном тельце в течение промежутка времени dt определенное действие $d\omega$». «Причина этого заключается в том,— говорит он,— что тельце обладает некоторой определенной способностью к сохранению покоя, что и составляет инерцию. Но подобную способность сохранять состояние покоя мы не можем себе представить без известного сопротивления, противодействующего возникновению движения, и чем последнее будет больше или меньше, тем труднее или легче проявиться действию силы» [6, стр. 380].

Очень наглядно Эйлер описывает постепенное накопление телом количества движения под действием некоторой силы: «количество движения, возникшее за определенное время, которое обычно измеряют скоростью, помноженной на массу, пропорционально... стремлению», т. е. силе [6, стр. 184].

Шаг за шагом Эйлер подводит читателя к заключению, что «если на различные покоящиеся тельца действуют одинаковые силы, то действия этих сил за один и тот же промежуточек времени обратно пропорциональны инерции этих телец» [6, стр. 381]. «Величину заключенной в теле инерции» Эйлер называет «массой» [6, стр. 383].

Таким образом, определение «массы» у Эйлера существенно отличается от определения, данного Ньютоном, назвавшим массу мерой количества материи. Тем не менее Эйлер сочетает оба эти определения и указывает, что «массу тела, т. е. количество материи, следует определять не по объему тела, а по величине его инерции, в силу которой оно стремится сохранить свое состояние и противодействует всякому его изменению... Таким образом, о количестве материи судят по инерции» [6, стр. 384].

Между тем, согласно Ньютону, о количестве материи судят по весу.

В своих трудах по механике Эйлер не раскрывает причины этого несколько неожиданного сочетания двух физически совершенно различных определений массы. Однако это сочетание вытекает непосредственно из его воззрений на строение вещества, о которых шла речь выше.

Значительное внимание уделяет Эйлер вопросу о происхождении внешних сил. Он спрашивает: «Откуда происходят те силы, под влиянием которых... состояние тела постоянно изменяется?» [2, стр. 449—450; 6, стр. 356]. Он даже ставит вопрос, не следует ли их приписать нематериальным субстанциям. «Однако воздействие на тела не представляется столь тяжелым делом, чтобы его следовало приписать только всемогуществу божественной воли»,— иронически отвечает Эйлер на им же поставленный вопрос. Он заявляет при этом, что не видит «никаких оснований оспаривать у духов их силу воздействия на тела, хотя мы совершенно не в состоянии указать, каким именно образом они действуют» [6, стр. 369].

Переходя к выяснению физической природы сил, Эйлер заключает, что появление сил вызвано тем обстоятельством, что вследствие непроницаемости тел в одном и том же месте не могут находиться одновременно два или больше тел. Таким образом, Эйлер объясняет непроницаемостью происхождение сил, вызванных столкновением тел.

Здесь остается нераскрытым вопрос, объсняются ли таким способом все силы, однако Эйлер высказывает твердое убеждение, «что тела не проявляют по отношению друг к другу никаких других сил, кроме тех, которые необходимы для предотвращения проникновения» [6, стр. 370]. Во всяком случае, он этим отчетливо высказывается против всякой возможности существования дальнодействия. С этой точки зрения Эйлер рассматривает и силу тяготения, т. е. «силу, действующую извне на тело и влекущую его вниз» [6, стр. 409].

«Утверждают,— продолжает он,— что тела влекутся к Земле не в силу какого-либо свойственного им самим инстинкта, а притягиваются к ней силой притяжения самой Земли... Представляют себе дело таким образом, как если бы Земля испускала по всем направлениям силы, которые охватывают окружающие тела и направляют их к Земле; при этом... предполагают, что упомянутое испускание происходит не при посредстве какой-либо промежуточной среды, но что оно совершенно так же имело бы место, если бы в промежутке между Землей и телами была полностью удалена какая бы то ни было материя» [6, стр. 409]. А это, по мнению Эйлера, равносильно предположению, «что тяжесть является действующей на тела нематериальной силой, которая, однако, связана с Землей...,что тела направляются вниз как бы каким-то духом» [6, стр. 409]. Эйлер не считает такое предположение априори абсурдным, поскольку он, как мы видели, в принципе не отрицает существование «духов». Но он все-таки признает «более правдоподобным... предположение, что сила тяжести происходит вследствие действия некоторой тонкой материи, ускользающей от наших чувств. И хотя мы не в состоянии ясно указать, каким именно образом возникает подобная сила, тем не менее нам представляется совершенно неправильным прибегать к каким-либо оккультным качествам» [6, стр. 410]. Он решительно возражает против позиции Ньютона и особенно его последователей. «Если бы мы увидели,— иронически пишет Эйлер,— что повозка следует за лошадьми, хотя они не впряжены в нее и хотя не видно ни веревки, ни чего-либо другого, что могло бы поддерживать связь между повозкой и лошадьми, то мы не стали бы говорить, что повозку тянут лошади. Вернее всего мы были бы склонны полагать, что повозка увлекается некоей силой, хотя ее не видно, если только это не проделки какой-то чародейки... Однако господа англичане.., утверждают, что таково свойство, присущее всем телам, притягиваться между собою, что это свойство столь же естественно для них, как и протяженность, и что если Творец пожелал, чтобы все тела взаимно притягивались, то этого достаточно, и тем самым весь вопрос уже разрешен» [3, IV].

Не считая возможным вносить метафизику в физику, Эйлер стремился дать механистическое объяснение силам тяготения. Он отчетливо намечает путь к истолкованию силы тяготения с помощью эфира: «В гидродинамике учат, что в жидкостях могут возникать силы подобного рода» [6, стр. 410]. (Этот вопрос Эйлер подробно развивает в тесной связи со своей теорией магнетизма, речь о которой будет ниже.) «А когда сторонники притяжения заявляют, что Бог наделил Землю притягательной силой, они в сущности утверждают, что Бог сам непосредственно толкает тела по направлению к Земле» [6, стр. 410].

По-видимому, Эйлер считал, что основой механики не могут быть несколько законов, а должен существовать один фундаментальный закон. В «Письмах к одной немецкой принцессе» он выдвигает первый закон Ньютона, т. е. принцип инерции, как «основу всей науки о движении, именуемой механикой» [3, LXXIII]. Однако в «Механике» и в «Теории движения твердых тел» Эйлер опирается на первые два ньютоновских закона, лишь пытаясь свести оба эти закона к одному. Он пишет: «...основа всей механики заключается в следующем едином законе: если на тельце, масса которого равна A, действует сила, равная p, и если после разложения движения по направлению силы тельце за промежуточек времени dt проходит отрезочек пути ds со скоростью $\frac{ds}{dt}$, то $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{\lambda p}{A}$ или $dv=\frac{\lambda p dt}{A}$. Таким образом, приращение скорости, взятое по направлению действующей силы, прямо пропорционально произведению действующей силы на промежуточек времени и обратно пропорционально массе» [6, стр. 403]. (Здесь λ — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц.)

Характерно, что третий закон Ньютона вообще не фигурирует в явном виде у Эйлера. Фактически он его заменяет представлением о роли непроницаемости тел в происхождении сил.

В «Руководстве к естествознанию» Эйлер выводит из первого и второго законов Ньютона два соотношения

$$Mv = npt \text{ и } Mv^2 = 2nps.$$

Указав, что Mv^2 называют живой силой, Эйлер считает это название неприемлемым и противоречащим определению силы, тем более, что оно численно равно произведению силы p на путь s. «Если поэтому,— говорит он,— для данного произведения подобрать надлежащее название, то это название можно было бы также присвоить величине Mv^2» [2, стр. 481]. Приводя вышеуказанные два соотношения, Эйлер замечает, что, таким образом, решается спор о том, какая из двух мер движения справедлива, Mv или Mv^2; обе меры оказываются справедливыми одновременно. Как известно, в ту эпоху еще продолжался этот горячий спор о мерах движения, возникший в свое время между Лейбницем и Декартом.

Исследуя движение тела под действием сил, Эйлер приходит к заключению, что выражение

$$\int vds,$$

где v — скорость, а s — путь, имеет меньшее значение для траектории, по которой *фактически* тело движется, чем для любых других кривых, имеющих с ней общую начальную и конечную точки.

Разумеется, это справедливо только в том случае, если v есть функция только координат, что подчеркивает и сам Эйлер.

Принцип, открытый Эйлером, был, как известно, затем видоизменен Лагранжем, который выразил его в форме

$$\delta \sum m \int vds = 0,$$

впоследствии преобразованной далее Гамильтоном. Этот принцип Эйлер связал с именем Мопертюи, своего коллеги по Берлинской академии. В действительности принцип, провозглашенный Мопертюи, не имел ни строгой математической формулировки, ни даже строгого смысла. Он гласил: «Если в природе происходит само по себе какое-либо изменение, то необходимое для этого количество действия есть наименьшее возможное» [8, стр. 276], причем под «количеством действия» понималось произведение mvs. Придав научное содержание принципу Мопертюи, Эйлер сохранил, однако, богословскую аргументацию этого принципа: «Так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума; поэтому нет никакого сомнения, что все явления с таким же успехом можно определить при помощи метода максимумов и минимумов из целей конечных, как и из самых причин, их производящих» [17].

* * *

Крупнейшей заслугой Эйлера является создание аналитической механики сплошной среды в труде «Общие принципы движения жидкостей» (1755). В отличие от Ньютона, рассматривающего давление жидкости как удары отдельных частиц жидкости о поверхность тела, Эйлер впервые ввел понятие «давления» жидкости. Он подчеркнул, что жидкость «до достижения тела изменяет свое направление и скорость так, что, подходя к телу, протекает мимо него вдоль его поверхности и не прилагает к телу никакой другой силы, кроме давления, соответствующего отдельным точкам сопротивления» [18].

Исследование свойств сплошной среды, а также исследование упругости колеблющихся струн, произведенное Эйлером не только теоретически, но и, по-видимому, экспериментально, позволило ему развить представления о распространении колебаний в упругой среде и попытаться построить всеобщую эфирную теорию световых, электрических и гравитационных явлений.

Теория сверхтонкой и сверхлегкой материи, именуемой эфиром, в своих истоках восходит к незапамятным временам, однако лишь Джордано Бруно в конце XVI в. стал рассматривать эфир как субстанцию, заполняющую вакуум.

Огромную роль понятие эфира приобретает впервые в физике Декарта. Свет рассматривался им как давление эфирного вихря. Гук в 1662 г. попытался объяснить световые явления колебаниями в эфире [19], причем в 1672 г. он даже высказал предположение о поперечности световых колебаний [8, стр. 177].

В 1675 г. Ньютон прислал в Британское королевское общество свою работу «Одна гипотеза, объясняющая свойства света, изложенные в нескольких моих статьях» [20; 21, стр. 555—582]. По мнению Ньютона, свет есть поток каких-то частиц, распространяющихся в эфире и вызывающих в нем колебания. С помощью гипотезы эфира он пытается также объяснить явления тяготения и электричества. Эта работа была несколько развита Ньютоном в 1679 г. в его письме к Бойлю. Однако Ньютон, как он сам говорил, имел «мало вкуса к вещам подобного рода», т. е. к гипотезам, и не придавал им серьезного значения, а к концу своей жизни стал даже вовсе отрицать существование эфира в межпланетных пространствах. Последователи Ньютона твердо стояли на позициях корпускулярной теории истечения.

В 1690 г. появился знаменитый «Трактат о свете» Гюйгенса, в котором были заложены основы волновой теории света. Впрочем, Гюйгенс считал световые колебания продольными, при этом он оставил попытку разрешить вопрос о природе цветов и не дошел до понимания явлений интерференции.

Следующий шаг был сделан в 1688 г. Мальбраншем, который в основу своей теории положил аналогию между светом и звуком. Рассматривая, подобно Гюйгенсу, световые колебания как продольные (vibrations de pression — колебания давления), Мальбранш приписал различие цветов различию в быстроте (promptitude), т. е. частоте этих колебаний. Однако волновые воззрения на природу света были в начале XVIII в. почти полностью вытеснены теорией истечения, предложенной Ньютоном, и энергично пропагандировались его сторонниками. Выдающиеся работы Гюйгенса, Гука и Мальбранша оставались без внимания.

Таково было положение, когда этими проблемами занялся Эйлер. Им была разработана новая эфирная теория света, в основе примыкающая к идеям Мальбранша. Недаром, обсуждая в письме к Лагранжу (от 24. VI 1760 г.) проблему распространения возмущений в упругой среде, Эйлер писал: «Этот вопрос является без сомнения самым важным в физике: от него зависят не только все явления распространения звука, но я убежден, что и распространение света следует тем же законам. Необходимо лишь подставить эфир на место воздуха, и возмущения, которые в нем распространились, дадут нам распространение света» [13, стр. 561].

В «Письмах к одной немецкой принцессе» Эйлер отмечает снова, что вопрос о природе света, несомненно, один из самых важных, от которого зависит бесконечно много явлений. Он критически рассматривает теорию истечения, предложенную Ньютоном, которая в ту эпоху была «принята большинством физиков... и особенно англичан» [3, XVII]. Эйлер находит в ней три существенных затруднения. Во-первых, непрерывное испускание световых частиц должно было со временем постепенно ослаблять излучение Солнца, чего не наблюдается. Во-вторых, бесчисленные потоки световых частиц, испускаемые во всех направлениях звездами, должны были бы сталкиваться и искажать прямолинейное распространение света. Между тем этого не наблюдается, «что служит верным доказательством, что многочисленные лучи могут проходить через одну и ту же точку, не мешая друг другу; это представляется несовместимым с теорией истечения» [3, XVII]. С. И. Вавилов справедливо замечает по этому поводу, что приведенное возражение Эйлера могло быть легко обойдено, если допустить, что частицы световой материи имеют крохотные размеры [5, стр. 32]. Эйлер, однако, не высказал такого предположения, вероятно опасаясь, как бы такая гипотеза не привела его в пропасть ненавистной теории монад.

В-третьих, поскольку световые лучи совершенно свободно и прямолинейно распространяются с огромной скоростью сквозь прозрачные тела во всех направлениях, приходится заключить, что эти тела пронизаны во всех без исключения направлениях прямолинейными порами. Таким образом, тела, представляющиеся нам достаточно прочными, оказались бы насквозь пронизанными порами. И, обращаясь к принцессе, к которой адресуются «Письма», Эйлер добавляет: «Ваше высочество будет конечно изумлено тем, что эта теория изобретена столь великим человеком и поддерживается столькими просвещенными философами. Но уже Цицерон заметил, что нет ничего столь абсурдного, что бы философы оказались неспособными поддержать. Я же слишком далек от философов, чтобы разделять теорию» [3, XVII].

Эйлер поясняет, что Ньютон вынужден был придумать такого рода теорию лишь потому, что он вообразил все межпланетное пространство абсолютно пустым, поскольку движение небесных тел не встречает заметного сопротивления. Однако из его же теории истечения следует, что это пространство должно быть заполнено потоками мчащихся с огромной скоростью частиц, «которые должны оказывать большее сопротивление, чем если бы они находились в покое». «Ошибки этого великого человека,— говорит Эйлер,— должны способствовать нашему унижению и должны заставить нас признать слабость человеческого ума, который, даже поднявшись на наивысшую ступень, на которую люди способны, тем не менее часто рискует впасть в самые грубые заблуждения» [3, XVII].

Итак, Эйлер приходит к двум выводам. Во-первых, мировое пространство заполнено тонкой материей—эфиром. Во-вторых, лучи солнца и звезд не являются потоками вещества этих светящихся тел. «И таким образом представляется весьма достоверным, что свет по отношению к эфиру является тем же, что звук по отношению к воздуху» [3, XIX].

Развивая эту теорию, Эйлер встречается, однако, с вопросом, каким же образом Солнце непрерывно посылает волны света, т. е. «какой силой поддерживается это вечное колебание в частицах Солнца». Он должен признать, что на этот вопрос наука еще не имеет ответа.

Припоминая, что, согласно его собственным исследованиям, слышимый звук имеет частоту от 30 до 3000 колебаний в секунду [4], Эйлер заме-

---

[4] На самом деле, как известно, слышимая область звука заключается в диапазоне от 20 до 20 000 гц.

чает, что воздух слишком груб, чтобы реагировать на частоту колебаний более 3000, и слишком тонок, чтобы менее 30 колебаний могли произвести в нем заметный эффект. Напротив, для эфира 3000 колебаний в секунду слишком грубы; «требуются гораздо более частые колебания и многие тысячи колебаний в секунду, прежде чем они окажутся способными воздействовать на эфир и вызвать в нем возмущение» [3, XXII]. Когда глядят на пламя свечи, говорит Эйлер, то легко себе представить, «что в его мельчайших частицах царит поразительное волнение... Я не думаю, что моя теория встретит с этой стороны какое-либо возражение» [3, XXII].

Эйлер подчеркивает, что природа цветов все еще неизвестна и вызывала во все времена большие споры среди ученых.

Приведя мнение Ньютона, что цвета заключены в самих лучах, Эйлер указывает, что «другие, считающие эту теорию слишком грубой, утверждают, что цвета существуют только в ощущениях. Это наилучший способ, чтобы прикрыть собственное невежество, иначе народ мог бы подумать, что ученый не больше знает о природе цветов, чем он сам» [3, XXII]».

«В действительности,— продолжает Эйлер,— каждый простой цвет (в отличие от сложных цветов) связан с определенным числом колебаний, совершающихся за определенное время.»

Если в «Письмах к одной немецкой принцессе» эти воззрения на природу оптических явлений изложены с чисто качественной стороны, то в «Новой теории света и цветов» [22] они подвергнуты некоторой математической обработке. Эйлер представляет себе свет, как продольные колебания в эфире. Пучок световых лучей, по его представлению, аналогичен колеблющейся конической струне, а сферическую волну он считает механической суммой лучей, колеблющихся независимо, подобно струнам. Рассматривая распространение этих световых пучков, Эйлер впервые вводит в науку известное уравнение волны. В обозначениях Эйлера это уравнение выглядит следующим образом.

Если точка A смещается во время колебания на

$$Aa = \alpha(1 - \cos mt),$$

то точка B, удаленная от нее на расстояние c, смещается на

$$Bb = \alpha\left[1 - \cos m\left(t - \frac{c}{a}T\right)\right],$$

где $\frac{a}{T}$ — скорость распространения колебаний, так как за время T колебание распространяется на расстояние a.

Как отмечает С. И. Вавилов, «разбирая движение светового луча, Эйлер пишет, вероятно, впервые в истории учения о свете, привычное нам теперь уравнение плоской гармонической волны, т. е. создает аппарат элементарной волновой оптики, вполне достаточный для решения простейших интерференционных задач» [5, стр. 32—33]. Однако Эйлер не дошел до понимания интерференции. Мало того, Эйлер «не знал или не признавал принципа Гюйгенса, и его теория, отрицая корпускулы Ньютона и волны Гюйгенса, была лучевой теорией, теорией колеблющихся лучей, а не волн в пространстве» [23, стр. 55]. Впрочем, как указывает С. И. Вавилов, «идея о световом пучке как своего рода конической струне, по которой распространяются световые колебания, впервые высказанная Эйлером, в XIX в. стала общепринятой при элементарной трактовке оптических задач с заменой продольных колебаний на поперечные» [23, стр. 55].

Возможно, что Эйлер остановился у порога явления интерференции только потому, что, пытаясь математически рассчитать отдельные задачи, наткнулся на серьезные затруднения. Во всяком случае в своей работе «Физические предположения о распространении звука и света» [24] Эйлер пишет: «В движении тел и, в особенности, жидкостей имеется много явлений, объяснить которые теория не в состоянии. Ибо, хотя принципы механики, на которых основаны все законы движения, по-видимому, достаточно известны..., однако очень часто анализ становится недостаточным для решения уравнений.»

Особое внимание уделяется Эйлером вопросу об окраске различных непрозрачных тел. Он считает совершенно неприемлемым утверждение, что мы видим непрозрачные тела благодаря отражению света от их поверхности. Ньютон придерживался этой точки зрения, по словам Эйлера, лишь потому, что он исходил из своей неправильной теории истечения, и ему не оставалось ничего другого, как допускать отражение летящих частиц света. «Да и вообще величие ума никогда не гарантирует от абсурдности идей, если эти идеи однажды им самим придуманы»,— ехидно добавляет в письме XXIV Эйлер [3].

Эйлер указывает, что если бы речь шла о прямом отражении света, то мы бы имели выполнение основного геометрического закона отражения — угол падения равен углу отражения. Поскольку этого нет, то Эйлер считает, что отражение не играет здесь существенной роли. Вопроса об отражении или рассеянии света от шероховатой поверхности он вообще не касается. Он предполагает, что окраска тел вызвана своего рода резонансным возбуждением. Например, красный предмет представляется нам красным, согласно мнению Эйлера, потому, что он резонирует на содержащиеся в белом свете красные лучи и испускает собственные красные лучи во все стороны. Пытаясь ответить на вопрос, почему же это индуцированное испускание света мгновенно исчезает с исчезновением первичного освещения, Эйлер обращает внимание на то, что такое послесвечение, по-видимому, наблюдается в некоторых веществах, открытых Маркграфом, «которые, будучи однажды освещены, сохраняют на некоторое время свой свет» [3, XXVII]. При этом Эйлер отмечает, что одни тела дольше люминесцируют, другие менее долго, а третьи совсем не обнаруживают этой способности.

Идея резонансного возбуждения настолько захватила Эйлера, что он в мемуаре «Опыт физического объяснения цветов чрезвычайно тонких поверхностей» (1752) попытался (совершенно ошибочно) ее применить даже к объяснению цветов тонких пластинок и ньютоновых колец. Резонирующими частицами, по теории Эйлера, являются участки эфира в тонком зазоре между стеклами в опыте Ньютона. С. И. Вавилов указывает, что «Затруднение, состоящее в том, что с этой точки зрения все кольца должны различаться по цвету, так как они соответствуют разным толщинам, а следовательно, разным периодам, Эйлер обходит по аналогии с музыкальными октавами, заимствованной у Ньютона... Эта остроумная сама по себе теория Эйлера закрыла ему глаза на интерференционную сущность явления и отодвинула эпоху действительной победы волновой теории до времен Юнга и Френеля» [5, стр. 33].

Теория света и цветов Эйлера (1744) оказала несомненно сильнейшее влияние на М. В. Ломоносова в его «Слове о происхождении света, новую теорию о цветах представляющем» (1756), причем эйлеровская теория резонанса получила свое отражение в ломоносовской «теории совмещения».

Особое внимание уделяет Эйлер вопросу о происхождении голубого цвета неба. Он объясняет его следующим образом: «Воздух наполнен большим числом маленьких частиц, которые не совсем прозрачны. Будучи освещены лучами солнца, они получают колебательное движение, которое вызывает новые лучи, присущие этим частицам..., но цвет этих частиц голубой. Вот объяснение нашего явления; оно состоит в том, что воздух содержит множество маленьких голубых частиц» [3, XXXII]. Точно так же объясняет Эйлер и зеленоватый цвет воды наличием в ней множества зеленоватых частиц. Оба эти объяснения, разумеется, неправильны. Указанные явления вызываются рассеянием цвета на пространственных неоднородностях.

Известно, что теория истечения Ньютона находила себе как будто хорошее подтверждение в явлении светового давления, впервые отмеченного Кеплером на кометных хвостах. Замечательно, что, развивая эфирную теорию света, Эйлер попытался на волновой основе объяснить световое давление. Свои идеи по этому вопросу он изложил в мемуаре «О причине кометных хвостов, о северном сиянии и зодиакальном свете» (1746).

* * *

Наибольшее внимание в XVIII в. привлекали явления электричества. Эта область физики непрерывно пополнялась новыми открытиями, природа которых оставалась непонятной.

Дю-Фэ в 1729—1739 гг. впервые предложил довольно туманную теорию эфирных вихрей, которые, по его мнению, должны окружать наэлектризованные тела.

В 1745 г. Бозе вводит представление о некой крайне упругой электрической материи, «плавающей в нашем воздухе», концентрирующейся в наэлектризованных телах и вылетающей из них, оказывая воздействие на окружающие тела. В том же году Нолле́ разрабатывает теорию электростатических явлений, объясняющую электрическое поле с помощью представления о потоках струящейся электрической материи.

«Теории истечения» получают в разных вариантах широкое распространение. В 1751 г. появляется теория Франклина, истолковывающая заряжение тел с помощью гипотезы об электрической материи. Поле в этой теории чисто формально описывается способностью частиц электрической материи взаимно отталкиваться.

Когда в 1753 г. Петербургская академия объявила по предложению М. В. Ломоносова конкурс на тему: «Сыскать подлинную електрической силы причину и составить точную ее теорию», то, уведомляя всех «натуры испытателей» об этом конкурсе, Петербургская академия «за полезно рассудила» препроводить им также некоторые соображения, написанные Ломоносовым [25,стр. 138—141], которые «не должно почитать за правило и необходимо нужную принадлежность, но за одно только напоминание». В этом «напоминании» указывались, во-первых, некоторые недостатки существующих теорий, особенно смешение электричества с «огнем». Во-вторых, обращалось особое внимание на необходимость объяснить природу изоляторов и проводников электричества и, в-третьих, указывалось на возможность существования трех разных видов движения «тончайшей електрической материи, которая сквозь скважины тел ходит, т. е. прохождение, вертение и трясение», и предлагалось выяснить, который из этих видов объясняет электрические явления. Это «напоминание» должно было служить предупреждением, «чтоб мысль наша, пренебрегши свойства чувствительных тел и гоняясь за нечувствительными материями, не стала больше снисходить своим воображением, нежели последовать строгости рассуждения» [25, стр. 138—141]. В целом «напоминание» фактически предупреждало соискателей конкурса, что Петербургская академия относится весьма неодобрительно к существующим теориям и желала бы увидеть работы, построенные на совершенно новых идеях.

Эйлер, проживавший в тот период в Берлине, представил на конкурс свою работу. Поскольку, однако, он не знал, имеет ли он право лично участвовать в конкурсе, будучи членом Петербургской академии, официально автором работы был назван сын Эйлера — И.-А. Эйлер. После того, как «Рассуждение И.-А. Эйлера о природе электричества» оказалось премированным, Леонард Эйлер счел возможным письменно признаться в своем авторстве [26, стр. 155—156]. Тем не менее «Рассуждение» было опубликовано Академией под именем И.-А. Эйлера [27].

В этой работе свойства электричества объясняются с помощью эфирной гипотезы. Эти же воззрения изложены и в «Письмах к одной немецкой принцессе». «Поскольку,— пишет Эйлер в «Рассуждении»,— нет никакого сомнения, что все электрические явления осуществляются некоей тонкой материей, необходимо прежде всего установить, какова природа этой тонкой материи» [27, стр. 3]. Он отмечает, что эти научные соображения получили бы большее подтверждение, если бы «существование этой тонкой материи было бы уже твердо установлено из других явлений, дабы она не казалась придуманной ради одного только электричества... Особенно надо опасаться, чтобы не сделать каких-либо легкомысленных допущений. Напротив, причины всех действий этой материи должны быть самым ясным образом выведены из истинных основ механики... Итак, во-первых, я утверждаю,— говорит Эйлер,— что эта тонкая материя, создательница электрических сил есть — эфир» [27, стр. 5], существование которого уже установлено в многочисленных явлениях и особенно световых явлениях. Он указывает, что два свойства эфира, его разреженность, или тонкость, и его упругость, вполне достаточны, чтобы объяснить все наблюдаемые электрические явления. Полагая, что скорость распространения света в эфире в 600000 раз превышает скорость распространения в воздухе звука (на самом деле в 1 000 000 раз), Эйлер приходит к выводу, что если принять упругость эфира в 10 000 раз больше упругости воздуха, то плотность эфира должна быть в 36 000 000 раз меньше плотности воздуха.

Все электрические явления Эйлер приписывает нарушению равновесия в эфире, т. е. «если эфир будет более упругим в одном месте, что произойдет, если он там более сжат, чем в окружающих частях... Электричество не что иное, как нарушение равновесия эфира» [3, CXL].

По мнению Эйлера, это нарушение равновесия возникает в том случае, если по какой-то причине эфир выдавливается из «пор» вещества или, наоборот, туда нагнетается. Поэтому разнообразные тела должны отличаться по своим электрическим свойствам, благодаря различию в строении этих «поровых» пространств, в зависимости от строения выходов этих «пор» на поверхность. Эйлер полагает, что диэлектрики или, как их тогда называли, «первично электрические» тела, обладают закрытыми порами, напротив, проводники, или «вторично электрические» тела, имеют более или менее открытые поры. Таким образом, Эйлер приходит к утверждению, что «поры в воздухе совсем закрыты» [3, CXLI] или «чрезвычайно закрыты» [3, CXLIV].

Приведенное заключение Эйлера звучит настолько парадоксально в наше время, что необходимо на нем особо остановиться. В самом деле, мы видели выше, что по расчету Эйлера только $\frac{1}{30400}$ часть объема воздуха должна содержать собственную материю воздуха, а $\frac{30399}{30400}$ объема, т. е. практически почти весь объем воздуха, должно быть занято порами, заполненными эфиром. Но, казалось бы, совершенно немыслимо себе представить при таких условиях, чтобы именно поры воздуха были почти или чрезвычайно закрытыми. В таком случае необходимо предположить, что воздух представляет собой совокупность наполненных эфиром тонкостенных пузырьков, причем в этих пузырьках должны быть крохотные отверстия.

Недаром Эйлер пишет, с одной стороны, что «эфир, благодаря своей исключительной тонкости и упругости, проникает в самые маленькие поры всех тел, куда воздух не смог бы войти, и *даже* в поры самого воздуха» [3, CXL] [5]. А с другой стороны, он указывает на «эфир, содержащийся внутри частичек воздуха» [3, CXLIV]. Недаром он также подчеркивает, что природа упругости воздуха еще твердо не установлена и служит предметом спора ученых [3, XI].

Вспомним, например, что М. В. Ломоносов, предлагая разные модели строения частиц воды, вынужден был отвергнуть «пузырчатую» модель главным образом потому, что «предложенные здесь полые шарообразные корпускулы водной материи мало соответствуют несжимаемости воды» [25, стр. 357].

[5] Курсив наш.— *Я. Д.*

Вспомним, что сам Эйлер представлял себе горючие вещества состоящими из шариков, наполненных огненной материей, а Лейбниц предполагал вообще все тела построенными из пузырьков, заполненных эфиром [2, стр. 452—453].

Таким образом, «пузырчатая» модель, лежащая, по-видимому, в основе гипотезы Эйлера о «закрытых порах» воздуха, не представляла собой ничего чудовищного с точки зрения физики XVIII в., тем более, что, как мы уже указывали, воздух считался в ту эпоху единственным образцом «упругих жидкостей».

Итак, Эйлер причислил вещества, не проводящие электричества,— воздух, стекло, янтарь, смолы, серу «и особенно шелк»,— к телам с почти закрытыми порами. Напротив, «прежде всего вода», жидкости, металлы и тела животных были отнесены к классу тел с открытыми порами, т. е. к проводникам.

Процесс электризации трением представлялся Эйлеру в следующем виде: «Янтарь или испанский воск имеют достаточно закрытые поры; поры шерсти, посредством которой он натирается, достаточно открыты. Во время трения поры и того и другого сжимаются и этим увеличивается упругость заключенного в них эфира. Поскольку поры шерсти более восприимчивы к более или менее сильному сжатию, чем поры янтаря или испанского воска, то произойдет либо переход части эфира из шерсти в янтарь, либо наоборот из янтаря в шерсть. В первом случае янтарь становится избыточно наэлектризованным, во вторых убыточно, и, поскольку его поры закрыты, это состояние сохранится в течение некоторого времени...» [3, CXLII].

На основе этих гипотез Эйлер объясняет электрический разряд, как выравнивание давлений эфира, причем этот эфирный ветер должен происходить «по законам гидродинамики» [27, стр. 3].

В «Письмах к одной немецкой принцессе» Эйлер пытается с единой точки зрения подробно истолковать все основные опыты тогдашней электростатики. Между прочим, он останавливается и на природе грозы, указывая, что электрическое происхождение молнии вытекает из опыта с железным шестом, который электризуется при грозе. Характерно, что Эйлер при этом не называет имени Франклина. Это полное игнорирование Эйлером роли Франклина, по-видимому, объясняется его резко отрицательным отношением к франклиновой теории электричества, допускавшей существование «электрической материи»; в 1760—1761 гг. Франклин еще не представлял собой видной политической фигуры, и Эйлером не могли руководить политические соображения. Интересно отметить, что причину возникновения атмосферного электричества Эйлер, подобно Франклину и Ломоносову, видит в циркуляции атмосферы. Однако самый механизм электризации каждый из этих ученых представлял себе по-разному. Франклин думал, что самое превращение воды в пар сопровождается увеличением концентрации «электрической материи» в жидкости; Ломоносов считал, что электризация восходящих потоков вызывается трением «жирных шаричков», содержащихся в воздухе; Эйлер полагал, что поднимающиеся вверх нагретые массы воздуха уносят в своих расширенных порах большое количество эфира, а охладившись в верхних слоях атмосферы, сжимаются и сохраняют в своих почти закрывшихся порах избыточный эфир, т. е. положительный заряд.

Идеи Эйлера о происхождении атмосферного электричества, разумеется, столь же далеки от истины, как и идеи Франклина и Ломоносова.

Все перечисленные здесь воззрения Эйлера на электричество сводятся к истолкованию процессов возникновения и исчезновения электрических зарядов. В его вышеупомянутой конкурсной работе теория электричества этим и ограничивается. Однако в письме CXLIV «Писем к одной немецкой принцессе» [3] Эйлер говорит: «Я чуть было не забыл сказать об одном весьма существенном обстоятельстве, сопровождающем как положительную, так и отрицательную электризацию тел, которая позволяет нам многое раскрыть в объяснении электрических явлений.» Речь идет о том, что всякое наэлектризованное тело должно быть окружено «электрической атмосферой», т. е. *электрическим полем.*

По мнению Эйлера, эта «электрическая атмосфера» образуется благодаря тому, что эфир, заключенный в слоях воздуха, примыкающих к поверхности наэлектризованного тела, либо несколько сгущается (при положительном заряде тела), либо несколько разрежается. Следует заметить, что и в случае безвоздушного пространства, заполненного эфиром, приходится ожидать, следуя Эйлеру, что вблизи наэлектризованных тел должны наблюдаться сгущения или разрежения эфира.

Таким образом, описанная Эйлером «электрическая атмосфера» должна существовать в какой-то степени и в вакууме. Однако этот вопрос почему-то не затрагивается Эйлером. Вместе с тем необходимо подчеркнуть, что в теории Эйлера нет никакой принципиальной разницы между зарядом тела и окружающим его полем. Электрическая теория Эйлера не содержит фактически понятия заряда, а представляет собой попытку построения чистой теории поля. В этом отношении теория Эйлера прямо противоположна теории Франклина (развитой затем Эпинусом и Кавендишем), которая фактически игнорирует поле и поэтому представляет собой попытку построения чистой теории зарядов. Эти два противоположных воззрения на электричество были, как известно, объединены в одно целое лишь в электронной теории Лоренца (1895).

Однако эйлеровская гипотеза «нарушений равновесия в эфире», послужив впоследствии прообразом теории Фарадея — Максвелла, сыграла огромную роль в развитии физики.

* * *

Обратимся теперь к рассмотрению воззрений Эйлера на магнитные явления.

Следует заметить, что в рассматриваемую эпоху сведения о магнетизме были гораздо более скудными, чем сведения об электричестве. Между тем как, согласно опытным данным того времени, все тела обнаруживали те или иные электрические свойства, огромное большинство тел оказывалось при тогдашних методах исследования совершенно индиферентным к магнитным силам. Считалось, как указывал Эпинус в своем трактате 1759 г., что реагируют на магнитное поле «прежде всего железо, а затем все тела, именуемые железными, поскольку в них есть железо» [28]. Отталкивание висмута магнитом, обнаруженное в 1778 г. Антоном Бругмансом, еще не было известно в рассматриваемую эпоху, да и позднее оно не оказало никакого влияния на развитие физики магнетизма и справедливо названо М. Лауэ «преждевременным открытием» [29]. Точно так же почти не обратило на себя внимания открытие Далибаром в 1752 г. намагничивания стальных игол при прохождении разряда электричества, извлеченного посредством металлического шеста из облаков. Догадка Далибара о том, что магнетизм есть не что иное, как действие «электрической материи», получила развитие лишь в XIX в.

Таким образом, воззрения на магнетизм должны были в ту эпоху исходить из селективных свойств железа и железосодержащих тел и ограничивались магнитостатикой.

Между тем как еще Гильберт в 1600 г. приписывал магнетизм некоей родственной «симпатии» железосодержащих тел друг к другу, первую попытку объяснить природу магнитных явлений на механистической основе сделал Декарт. Его богатое воображение позволило ему нарисовать картину, которую историки науки, как правило, называют и наивной, и фантастической, но которая все же сыграла огромную роль в истории развития учения о магнетизме в XVII и XVIII вв.

Декарт представлял себе земной шар пронизанным вдоль оси тончайшими винтовыми каналами, по которым непрерывно циркулируют винтообразные частички (particulae striatae) особой материи, образующей вихрь вокруг Земли. По мнению Декарта, железо отличается от всех других тел наличием винтовых каналов, подобных каналам Земли. Поэтому поток материи, непрерывно циркулирующей вокруг Земли, ориентирует любой кусок железа так, чтобы поток проходил через него беспрепятственно [30]

В 1688 г. Даленсе дополнил картину Декарта предположением, что сохранение направления течения материи в каналах магнита обеспечивается особыми внутренними клапанами [8, стр. 250].

Теория магнитных явлений Эйлера была им впервые изложена в работе, представленной на конкурс и премированной Парижской академией в 1744 г. под заглавием «Новая теория магнита» [31]. В «Письмах к одной немецкой принцессе» эта теория повторяется без существенных изменений.

Воззрения Эйлера на магнетизм в своей основе мало чем отличаются от представлений Декарта и Даленсе. Они исходят прежде всего из опыта с расположением железных опилок вблизи магнита. Приведя соответствующее изображение, Эйлер пишет: «Расположение, наблюдаемое нами на железных опилках, не оставляет никаких сомнений в том, что именно тонкая и невидимая материя нанизывает частички опилок и располагает их в том направлении, которое мы видим. Кроме того, столь же ясно, что эта тонкая материя проходит сквозь самый магнит, входя через один из полюсов и выходя через другой, так что она образует посредством непрерывного движения вокруг магнита некий вихрь, переводящий тонкую материю от одного полюса к другому, и нет никакого сомнения, что это движение является чрезвычайно быстрым. Таким образом, в этом непрерывном вихре и заключается природа магнитов, отличающая их от всех других тел» [3, CLXXVI].

Эйлер подчеркивает, что пока нельзя установить, через который из полюсов эта материя входит и через который выходит, т. е. направление вращения вихря остается невыясненным. Он полагает несомненным, «что общий вихрь Земли снабжает этой тонкой материей все частные (природные) магниты, железо и намагниченную сталь и он поддерживает все частные вихри, окружающие эти тела» [3, CLXXVI]. Стремясь выяснить природу этой тонкой материи, Эйлер подчеркивает селективное действие ее исключительно на магнитный железняк, железо и сталь. Отсюда он делает естественный вывод, что эта материя находится в каком-то особом отношении к этим телам. Поскольку магнитное взаимодействие не задерживается ни одним из обычных тел, то, по мнению Эйлера, эта материя свободно их все пронизывает. «Следовательно, эта тонкая материя проходит сквозь все тела за исключением железа столь же свободно, как и сквозь воздух и даже сквозь чистый эфир», поскольку все опыты удаются как в воздухе, так и в вакууме. «Эта материя,— говорит он,— следовательно, отличается от эфира и даже более тонка, чем он» [3, CLXXVI]. «Поэтому можно было бы назвать железо и сталь магнитными телами, в отличие от всех прочих тел» [3, CLXXVI].

Итак, рассматривая этот вопрос несколько более подробно, Эйлер приходит к заключению, что характерной особенностью намагниченных тел является способность свободно пропускать сквозь себя эту тонкую материю только в одном направлении, от одного полюса, служащего входом, к другому, служащему выходом. В ненамагниченном состоянии эти же «магнитные» тела не пропускают свободно сквозь себя этой материи ни в каком направлении. «Немагнитные» тела свободно пропускают эту материю сквозь себя всегда и во всех направлениях. Эйлер обращает внимание на то, что по своим электрическим свойствам железо должно обладать совершенно открытыми порами, пропускающими «менее тонкую материю, чем магнитная материя». Однако он полагает, что надо отличать «простую пропускную способность» от «способности пропускать без малейшего препятствия» магнитную материю в ее быстром движении.

При этом Эйлер оговаривает: «Этого недостаточно, чтобы я претендовал на полное объяснение магнитных явлений. Я здесь встречаю трудности, с которыми не сталкивался в электрических явлениях. Причина заключается, без сомнения, в том, что электричество состоит в слишком большом или слишком малом сжатии тонкой жидкости, заполняющей поры тел, без того, чтобы эта тонкая жидкость, т. е. эфир, находилась действительно в движении. Но магнетизм вряд ли можно объяснить без предположения о существовании быстро движущегося вихря, проникающего в магнитные тела» [3, CLXXVII]. Интересно отметить, что уже в этой зачаточной теории электричества и магнетизма магнитное поле, в противоположность электростатическому, интуитивно связывалось с перемещением материи.

Эйлер думает, что материя этих вихрей, более тонкая, чем обычный эфир, находится в смеси с обычным эфиром подобно тому, как эфир заполняет поры воздуха и таким образом смешан с ним: «Можно сказать, что магнитная материя заключена в порах самого эфира» [3, CLXXVII]».

Для объяснения способности поровых каналов намагниченных тел пропускать сверхтонкую материю магнитных вихрей лишь в одном направлении Эйлер предполагает, что эти каналы покрыты изнутри особыми ворсинками, ориентированными в одну сторону. Это предположение он пытается обосновать тем, что в кровеносных сосудах имеются специальные клапаны, обеспечивающие прохождение крови только в одном направлении. Он указывает, что такого рода клапаны применяются и в технике. «Таким образом,— говорит Эйлер,— я думаю, что мое допущение не содержит ничего противного природе, когда я говорю, что каналы в магнитах, не пропускающие никакой иной жидкости, кроме магнитной материи, имеют некое подобное устройство» [3, CLXXVII]. Из этих слов, по-видимому, следует, что гипотезу ворсинок Эйлер выдвигает лишь как наглядную рабочую гипотезу, подлежащую в дальнейшем проверке.

В своей «Новой теории Магнита» [31, § XLVII] Эйлер особо замечает, что «в железе или стали, еще не приобретших магнитную силу, эти поры находятся в полном беспорядке». Эти еще не подвергнутые намагничиванию железо и сталь, по мнению Эйлера, не пропускают потока сверхтонкой магнитной материи и не отличаются от других, т. е. немагнитных тел. Он указывает, что внешний вихрь другого магнита способен ориентировать поры железа и стали и ворсинки в этих поровых каналах. Полагая, что чем сильнее намагничен магнит, т. е. чем сильнее его поле, тем быстрее движется магнитный вихрь, Эйлер обращает внимание на то, что «медленный вихрь» (т. е. слабое поле) Земли может постепенно намагнитить долго лежащие неподвижно железные стержни, что, как он справедливо отмечает, наблюдается на опыте. В холодных образцах это происходит очень медленно, так как частицы железа мало подвижны. Если же нагреть железо, то оно в том же положении по отношению к Земле быстрее намагнитится, «так как от тепла частицы железа раздвигаются и легче могут переместиться друг относительно друга» [31, § XLVIII]. С другой стороны, именно нагрев и накал «очень возмущают магнитную силу железа, так что магнит может по этой причине даже сам почти полностью лишиться своей силы». Все это, по мнению Эйлера, так естественно согласуется с экспериментом, что с этой стороны не остается ни малейшего сомнения в справедливости данной гипотезы» [31, § XLIX].

Эйлер полагает, что если обычно сверхтонкая магнитная материя смешана с эфиром, то в намагниченном теле должно происходить разделение этих двух видов тонкой материи. И можно легко вообразить себе, говорит он, смесь из такого рода жидкостей, из которых одна более тонка, чем предыдущая. «Природа дает нам недвусмысленные примеры этого: мы знаем, что вода содержит в своих порах частички воздуха, которые мы видим зачастую поднимающимися в виде маленьких пузырьков. Далее уже нет сомнения, что воздух содержит в своих порах жидкость, несравненно более тонкую, которая есть эфир и которая выделяется из нее даже во многих случаях, как мы это видели в электричестве. Теперь мы видим, что эта прогрессия идет еще дальше и что эфир содержит еще более тонкую материю, являющуюся магнитной материей. Быть может, она содержит другие еще более тонкие материи, это, по меньшей мере, не невозможно» [3, CLXXVII]. Таким образом, Эйлер приходит к признанию неисчерпаемой сложности строения материи.

Рассматривая в своей «Новой теории Магнита» причины возникновения «магнитного вихря» Земли, Эйлер считает доказанным, что этот вихрь возник за счет «упругой силы эфира», а «как известно, совершенно невозможно возбудить движение без ослабления сил» [31, § LXXII].

Поэтому там, где движется поток тонкой эфирной материи, давление эфира должно понизиться. Поскольку этот магнитный поток, по мнению Эйлера, выходя из одного полюса и входя в другой, обтекает весь земной шар широким потоком, простирающимся на далекое расстояние от поверхности Земли, то «необходимо, чтобы упругая сила (эфира) в окружении Земли уменьшилась» [31, § LXXII]. Эйлер полагает, что упругость, а значит и плотность эфира убывают обратно пропорционально расстоянию от центра Земли.

Такого рода уменьшение плотности эфира должно, как указывает Эйлер, привести к своеобразному гидростатическому давлению, прижимающему все погруженные в эфир тела по направлению к центру Земли. Причем, как показывает расчет Эйлера, сила эта должна при таком виде градиента плотности убывать обратно пропорционально квадрату расстояния от центра. И Эйлер приходит к выводу, что сила тяготения, действующая в пространстве, окружающем земной шар, является не чем иным, как следствием градиента плотности эфира, возникшего в свою очередь в результате магнитного вихря.

Иными словами, земной магнетизм оказывается, по Эйлеру, первопричиной тяготения. Отсюда Эйлер делает следующий шаг и утверждает, что поскольку сила тяготения присуща всем небесным телам, то, очевидно, все они должны быть намагничены. Такова гидростатическая эфирная теория тяготения, на которую, как мы видели выше, намекал Эйлер в своей «Теории движения твердых тел».

Следует, впрочем, заметить, что хотя эти соображения о связи магнетизма с тяготением излагаются в «Новой теории Магнита» (1744), в «Письмах к одной немецкой принцессе», написанных в 1760—1761 гг., они отсутствуют. Надо полагать, что сомнения, которые Эйлер испытывал в отношении самой теории магнитного вихря, заставили его признать свою теорию тяготения слишком проблематичной.

* * *

Такова в общих чертах нарисованная Эйлером картина физических явлений. Леонард Эйлер выступает здесь перед нами не только как великий ученый, но и как замечательный художник.

На первый взгляд кажется странным, как могли в одном лице сочетаться великий гений математика с такой неудержимой склонностью к созданию почти фантастических гипотез. Однако необходимо помнить, что математика не была для Эйлера самоцелью. Напротив, она была для него самым мощным орудием исследования и использования природы. Именно поэтому капитальные труды по математике и механике Эйлера представляют собою изумительные руководства к практическому применению данной науки, к решению конкретных задач.

Целью, увлекавшей Эйлера, было прежде всего познание «причин, вызывающих изменение в природе». К этой заветной цели он шел различными путями. Где это было, по его мнению, возможно, он прокладывал, не жалея сил, на века вперед строгий и основательный математический путь. Если это было необходимо, он сам ставил отдельные эксперименты. Но там, где он не видел возможности продвижения вперед ни математическим, ни экспериментальным путем, там Эйлер, влекомый жаждой понять и наглядно представить себе сущность явления, не останавливался перед самыми смелыми гипотезами, перед самыми головокружительными, рискованными домыслами.

Здесь он давал волю своему истинно художественному воображению. Нередко при этом он, однако, делал грубые промахи, упущения. Многие гипотезы, казавшиеся ему правдоподобными, или даже не вызывавшие у Эйлера ни малейшего сомнения, впоследствии оказывались несостоятельными. Современному читателю они подчас кажутся даже наивными. Но прежде всего необходимо иметь в виду, что в основе всех гипотез XVIII в. лежит предпосылка, что все процессы в природе должны быть чисто механическими. Далее нельзя забывать, что такого рода произвольные гипотезы, подчас грубо ошибочные, мы находим в изобилии у всех выдающихся физиков той эпохи, и у тех, кто, подобно Ньютону, принципиально отрицает гипотезы вообще, и у тех, кто, подобно Эйлеру, Ломоносову или Декарту, верит в них, как в несомненные факты.

На эти обстоятельства неизбежно обращают внимание почти все исследователи физических трудов того времени. Перед историком науки встает серьезный вопрос, чем объясняется тот факт, что столь выдающиеся умы, как Эйлер, Ньютон, Ломоносов и многие другие, допускали в своих трудах не только фантастические идеи, но даже ошибки и упущения, которые несомненно могли быть замечены современниками? Как случилось, что, например, Эйлер «ни от кого не получил указания хотя бы на то, что им забыты диффракция и поляризация света и не принят во внимание принцип Гюйгенса» [5, стр. 35]. С. И. Вавилов объясняет данный факт, с одной стороны, слабостью физической интуиции Эйлера, а с другой «отсутствием интереса у общества того времени к вопросам специально физической оптики,т. е. технической бесполезностью их в то время» [5,стр. 35].

Это объяснение нам представляется малоубедительным, так как, во-первых, указанные факты можно обнаружить не только в оптических работах, но и во всех других областях физики, и, во-вторых, они замечаются, как мы уже указывали, у всех наиболее выдающихся ученых того времени, а вряд ли можно всем им отказать в физической интуиции.

По нашему убеждению, дело заключается не в личных недостатках того или иного великого человека и не в отсутствии интереса у читателей именно к этим физическим вопросам. Дело заключается в тех специфических общественных условиях, в которых протекала научная деятельность этих ученых. Эйлер, разумеется, совершенно прав, когда он особо подчеркивает, что грубые ошибки могут допустить подчас и самые выдающиеся люди. Основным является вопрос, как относится к этим промахам великого человека общественное окружение, как быстро и энергично оно реагирует на них, насколько способна научная общественность корректировать действия отдельного ученого.

Надо иметь в виду, что, во-первых, в ту эпоху имелось ничтожно малое число крупных специалистов по каждому данному вопросу, и эти специалисты были к тому же рассеяны по разным странам и крайне слабо связаны друг с другом.

Во-вторых, в большинстве случаев наиболее выдающиеся ученые находились обычно в особо привилегированных условиях, пользовались личным покровительством государей и вельмож и становились объектом лести и угодничества со стороны всех окружающих. В-третьих, коллективы тогдашних академий наук были засорены вельможными «дундуками» и состояли под «руководством» полуграмотных «меценатов» или их чиновных управителей.

В-четвертых, печатание научных книг и журналов протекало тогда крайне медленно, поступавшие научные статьи, как правило, выходили в свет через 2—4 года. Да и книжная торговля между странами стояла на очень низком уровне.

Все это, разумеется, приводило к тому, что в рассматриваемую эпоху научная дискуссия, критика научных взглядов если и возникала, то либо оказывалась слишком робкой и запоздалой, либо отражала не столько соревнование научных воззрений, сколько борьбу конкурирующих придворных клик. Поэтому Эйлер, как и другие наиболее выдающиеся ученые того времени, в отличие от наших современников был предоставлен самому себе и находился вне контроля широкой научной общественности.

Никто не указал своевременно великому Леонарду Эйлеру на имевшиеся в его трудах ошибки, а сам он не замечал их, вечно увлекаемый новыми проблемами и новыми замыслами. Подходя критически к физическим идеям Эйлера, необходимо учитывать гигантские масштабы его деятельности, его почти необъятную разносторонность и неиссякаемую изобретательность. Нет, в сущности, ничего удивительного в том, что известная доля того громадного потока различных идей, которые выдвинул Эйлер, оказалась неудачной, но приходится поистине изумляться тому, что огромное их число в той или иной форме живет поныне в современной науке и служит ее прогрессу (многочисленные идеи в области механики и математической физики, оптический резонанс, ахроматические оптические системы, представление об электрическом поле и т. д.).

Нельзя также ни на минуту забывать, что если нам сейчас так отчетливо видна известная наивность некоторых физических идей Эйлера, если нас поражает иногда его «недогадливость», то происходит это только потому, что мы смотрим на его деятельность с высот науки второй половины XX в., т. е. только потому, что, говоря словами Ньютона, мы «стоим на плечах гигантов», одним из которых и был сам Леонард Эйлер.

Литература

1. Л. Инфельд, Мои воспоминания об Эйнштейне, УФН, т. LIX, 1, 163 (1956)
2. L. Euleri, Opera postuma, t. II, Petropoli, 1862, Anleitung zur Naturlehre
3. L. Euler, Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie, à St.-Pétersbourg, 1768
4. J. F. Montucla, Histoire des Mathématiques, an VII, t. II, 327
5. С. И. Вавилов, Физическая оптика Л. Эйлера. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти Л. Эйлера, Изд-во АН СССР, 1935
6. Л. Эйлер, Основы динамики точки, перев. В. С. Гохмана и С. П. Кондратьева под ред. с предисл. и примеч. В. П. Егоршина, Гостехиздат, 1938
7. Ю. А. Крутков, Об одной нерешенной задаче эйлеровой Theoria motus. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти Л. Эйлера, стр. 95—102

8. Ф. Розенбергер, История физики, ч. II, М., Гостехиздат, 1933
9. Recherches physiques sur la nature des moindres parties de la matière, Opuscula Varii argumenti, t. I, 1746
10. Le feu, sa nature et ses propriétés, Opuscula, Varii argumenti, t. 1
11. С. Я. Лурье, Эйлер и его «исчисление нулей». Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти Л. Эйлера, стр. 57—58
12. Utrum materiae facultas cogitandi tribui possit nec ne? Ex principiis mechanicae petita, Opuscula, t. III, 1746
13. L. Euleri, Opera postuma, t. I, Petropoli, стр. 561—563
14. Б. Н. Меншуткин, Труды М. В. Ломоносова по физике и химии, Изд-во АН СССР, 1936, стр. 116
15. И. Ньютон, Оптика или трактат об отражениях и т. д., перевод С. И. Вавилова, ГИЗ, 1927, стр. 274
16. К. Шефер, Теоретическая физика, т. I, ч. I, М., ОНТИ, 1935, стр. 75
17. Л. Эйлер. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума и т. д., М.— Л., 1934, стр. 447
18. Л. Г. Лойцянский, Механика жидкости и газа, М., Гостехиздат, 1950, стр. 20
19. R. Hooke, An Attempt for Explication of the Phenomena, 1662
20. С. И. Вавилов, Эфир, свет и вещество в физике Ньютона. Сборник статей к 300-летию со дня рождения Ньютона, М., Изд-во АН СССР, 1943
21. K. Lasswitz, Geschichte der Atomistik, Hamburg, 1890
22. Nova theoria lucis et colorum L. Euleri, Opuscula varii argumenti, t. I, стр. 189
23. С. И. Вавилов, Микроструктура света, М., Изд-во АН СССР, 1950
24. Conjectura physica circa propagationem soni et luminis, Opuscula varii argumenti, т. II, стр. 1
25. М. В. Ломоносов, Полное собрание сочинений, т. 3, М.— Л., 1952
26. С. Я. Лурье, Неопубликованная переписка Л. Эйлера. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти Л. Эйлера, стр. 155—156
27. J. A. Euleri, Disquisitio de causa physica electricitatis ab Acad. Sci. Imp. Petropolitana praemio coronata, Petropoli, 1755
28. Ф. У. Т. Эпинус, Теория электричества и магнетизма, М., Изд-во АН СССР, 1951, стр. 25
29. М. Лауэ, История физики, М., Гостехиздат, 1956, стр. 53
30. J. Schaller, Geschichte der Naturphilosophie I, Leipzig, 1842, стр. 272
31. Nova theoria Magnetis ab illustrissima Academia Regia Scientiarum Parisina praemio coronata, 1744, Opuscula varii argumenti, t. III

J. G. DORFMAN

DIE PHYSIKALISCHEN ANSCHAUUNGEN VON LEONHARD EULER

Es wird versucht, das physikalische Weltbild Eulers kritisch zu analysieren.

Zunächst werden seine Vorstellungen über den Aufbau der Materie betrachtet, da sie den Hintergrund aller seiner physikalischer Forschungen bilden. Alle Stoffe sind nach Euler aus Partikeln aufgebaut, die aus einer ursprünglichen «groben» Materie bestehen. In den Zwischenräumen und Atomporen vermutet er verschiedene «dünne» Materien wie Aether, Feuerstoff usw. Er betrachtet die Wärme als eine Bewegung der Feuerpartikel, nicht der Atome selbst. Somit ist seine Theorie sozusagen eine «kinetische Feuerstofftheorie». Da nun alle physikalischen Prozesse nach Euler aus den Prinzipien der Mechanik hergeleitet werden sollen, so hat er seine Aufmerksamkeit zunächst auf die Ausbildung und Erweiterung der Mechanik gelenkt. Es wird gezeigt, daß seine Definition der Kraft als eine «äußere» Ursache der Bewegung (die noch zuweilen samt den Eulerschen Gleichungen in die modernen Lehrbücher übertragen wird) der Leibnizschen Metaphysik entnommen ist. Andererseits betrachtete Euler die newtonianische Gravitationstheorie als metaphysisch und suchte die Gravitation mechanisch zu deuten. Im Gegensatz zu Newton hielt er daher die Trägheit eines Körpers, nicht sein Gewicht, als maßgebend für die Maßebestimmung. Es sei zu betonen, daß Euler einer der ersten gewesen ist, der den Impuls und die lebendige Kraft als Doppelmaß der Bewegung anerkannte.

Ein Einblick in die Eulersche Lichttheorie, die allerdings schon früher von S. I. Wawilow eingenhend studiert worden ist, liefert einige neue Anhaltspunkte.

Die Eulersche Elektrizitätstheorie wird ausführlich betrachtet im Zusammenhang mit seinen Ideen über den Aufbau der Materie. Euler hat es versucht, sämtliche ihm bekannte Phänomene der Elektrizität von einem einheitlichen Standpunkt zu erklären. Seine Theorie, die im 19. Jahrhundert zum

Vorbild der Maxwellschen gedient hatte, ist im Gegensatz zur Franklinschen Ladungstheorie als eine ladungslose Feldtheorie zu betrachten.

Die von Euler vorgeschlagene Theorie des Ferro- und Erdmagnetismus basiert auf der Annahme eines unaufhörlichen Strömens einer magnetischen Materie, die noch «dünner» als der Aether sein soll. Diese Strömung durch und um den Erdball herum soll nach Euler die hydrodynamischen Druckdifferenzen im Aether hervorrufen, die für die Gravitation verantwortlich sein sollen.

Zuletzt wird die Frage aufgeworfen, mit der sich die Geschichtsschreiber der Physik schon früher befaßt haben, wie es eigentlich zu erklären ist, daß ein Genie wie Euler mitunter ganz phantastische Hypothesen zu verteidigen suchte und dabei sogar einige grobe Fehler übersehen hatte. Es wird nun betont, daß diese Züge den meisten hervoragenden Gelehrten der damaligen Zeit eigen sind. Der Grund dafür liegt, unserer Meinung nach, einerseits in der damaligen, ausschließlich mechanischen Erklärungsweise sämtlicher Prozesse, andererseits in der privilegierten und zugleich isolierten sozialen Stellung der großen Gelehrten in einem feudalen aristokratischen Staat, im Fehlen eines freien, tatkräftigen wissenschaftlichen Kollektivs.

Г. Г. СЛЮСАРЕВ

«ДИОПТРИКА» ЭЙЛЕРА

Открытие в начале XVII в. Снеллем и Декартом закона преломления создало перелом в развитии оптики и позволило с полной строгостью вывести законы распространения лучей и создать точную математическую теорию изображений. Сам Декарт использовал строгую формулировку закона преломления для определения поверхностей линз и целых оптических систем, исходя из условия, чтобы все лучи, испускаемые точкой, после прохождения через оптическую систему вновь пересекались бы в точке (или оказались бы параллельными друг другу, что соответствует случаю бесконечно удаленного изображения). Однако Декарт при своих расчетах не учитывал (и не мог учитывать) наличия хроматических аберраций; явление дисперсии света было открыто лишь Ньютоном.

Поэтому оптические системы Декарта, исправленные только в отношении сферической аберрации, не могли получить никакого практического применения, как в этом убедился сам автор после изготовления линз своего расчета. Свою неудачу Декарт довольно правдоподобно объяснил плохим изготовлением поверхностей и скверным качеством стекла.

Закон преломления и его последствия оказались в руках геометров источником бесконечного числа интересных математических упражнений; появилась даже возможность при изучении каустических поверхностей и кривых применить новый, еще не вполне созревший, но суливший большие надежды математический метод — исчисление бесконечно малых. В руководстве «Оптические и геометрические лекции» (1674), составленном учителем Ньютона Исааком Барроу, можно найти большое число задач на эту тему. В ранние годы Ньютон увлекался этими упражнениями, хотя и мало ценными для теории оптических инструментов, но полезными для развития необходимых навыков как студентов, так и преподавателей, но впоследствии к ним охладел и никаких следов этих его увлечений в его книгах по оптике не осталось.

Причину этого охлаждения нетрудно увидеть в том, что Ньютон стал интересоваться оптикой не как полем для математических упражнений, а как отделом физики, посвященным изучению ряда любопытных и непонятных явлений, связанных с распространением света, и, в частности, как основой для теории оптических инструментов, которые привлекли его внимание уже около 1663 г., когда ему было не более 20 лет. Открыв явление дисперсии и объяснив с его помощью хроматическую аберрацию линз и оптических систем, Ньютон первый дал формулу для определения хроматической аберрации линзы. Используя только что разработанный метод разложения в ряды, он впервые дал выражение для продольной сферической аберрации в частном случае, когда предмет на бесконечности [1, предложение XXXI].

В своем изучении свойств изображений Ньютон пошел еще дальше и показал существование явления, которое мы в настоящее время называем астигматизмом, с той оговоркой, что излучающая точка находится на оси, вследствие чего понятие астигматизма можно здесь считать лишь условным [1, предложение XXXII].

Выдающееся открытие Ньютоном явления дисперсии и вытекающей из нее хроматической аберрации линз не принесло тех плодов, которые можно было ожидать. Увлекшись некоторой частичной аналогией между акустикой и светом, Ньютон пришел к неправильной зависимости, связывающей дисперсию Δn (разность показателей для лучей двух определенных цветов) с преломляющей силой ($n - 1$) материала. Согласно его соображениям, эти две величины должны быть пропорциональны друг другу, независимо от материала; другими словами, отношение $\frac{n-1}{\Delta n}$, которое в настоящее время принято называть коэффициентом дисперсии[1] (или числом Аббе) ,является мировой постоянной. Опыт, выполненный на скорую руку Ньютоном, подтвердил, как ему показалось, его теорию, а в дальнейшем другим экспериментаторам разубедить его оказалось невозможным. Поскольку из постоянства отношения $\frac{n-1}{\Delta n}$ вытекала полная невозможность исправлять хроматическую аберрацию путем построения сложных объективов с применением нескольких материалов, Ньютон своим упорством на длительное время задержал развитие линзовых систем, и после

[1] Понятие дисперсии времен Ньютона и Эйлера было весьма неопределенным, так как не существовало точно измеряемой величины, соответствующей длине волны. Спектральные линии еще не были обнаружены, и единственно приемлемой величиной, в зависимости от которой возможно было определить значение показателя преломления, был цвет, понятие, и сейчас не подлежащее точному измерению, а тем более в XVIII в.

него в течение полувека никто из оптиков не решался, наперекор законам природы, создать ахроматические объективы.

Однако сам Ньютон указал выход из создавшегося (благодаря его ошибке) тяжелого положения — строительство отражающих телескопов. Он изготовил собственноручно первое хорошее зеркало параболоидной формы, которое намного превосходило по качеству все до него известные линзовые объективы.

Когда Эйлер в середине XVIII в. занялся диоптрикой, его положение оказалось трудным. Еще не прояснился спорный вопрос об ахроматизации. Прав ли был Ньютон, или нет? Встречались противоположные мнения. Среди сторонников Ньютона находился потомок французских эмигрантов крупный английский оптик Доллонд.

Другая трудность заключалась в том, что телескопы и микроскопы того времени строились эмпирически, без всяких правил, и в сущности не было никакого основания, на котором можно было бы построить методику расчета оптических систем, не было ясно, что *нужно* получить от них, и еще менее, что *можно* получить от них. Если Декарт мог мечтать о том, чтобы увидеть с помощью своих линз людей на луне, то еще до Эйлера пришли к убеждению, что достижения оптики ограничены, хотя точные причины этого ограничения не были ясны.

Эйлера можно считать основоположником оптических вычислений. Ему принадлежит идея о расчете конструктивных элементов оптической системы на бумаге, и, конечно, это большой шаг вперед по сравнению с тем способом изготовления линз, какой был принят у лучших оптиков того времени.

К сожалению, во времена Эйлера не существовало теории аберраций оптических систем. Как мы видели, Ньютону были известны сферическая аберрация, хроматическая аберрация и частный случай астигматизма; ничего не было известно об аберрациях для точек, находящихся на некотором расстоянии от оси оптической системы; эта теория была разработана лишь в середине XIX в.

Конечно, Эйлер был способен решить этот вопрос полностью, но, очевидно, сам вопрос еще не созрел. Даже эксперимент не обнаруживал аберраций, скрытых другими причинами плохого качества изображения — низким качеством стекла и неправильной формой оптических поверхностей, для исследования которых не существовало точных средств.

Вопросами оптики Эйлер занимался в течение многих лет, и основные итоги своим работам по теории оптических вычислений подвел в трехтомной «Диоптрике» [2].

«Диоптрика» Эйлера посвящена методике расчета телескопов и микроскопов. Основанием методики служит устранение или доведение до минимума сферической аберрации, и лишь в тех случаях, когда требования к качеству изображения особо велики, добавляется условие исправления хроматической аберрации положения. Известна Эйлеру также хроматическая разность увеличений, которую он исправляет, когда представляется возможность. На этом кончается список аберраций, известных Эйлеру.

Еще одно обстоятельство сильно мешало Эйлеру. Геометрическая оптика еще не была создана. Не были известны общие свойства оптических систем, не имелось учения о параксиальной оптике, о кардиальных точках, не знали простейших законов построения изображения по известному предмету. Теория ограничения пучков вместе с понятием зрачков, люков, без которой немыслимо определение свойств оптической системы, связанных со светосилой, глубиной резко изображенного пространства, находилась в зачаточном состоянии, хотя отдельные энергетические свойства оптических систем были знакомы некоторым физикам, как Мавролику и Декарту. Но все эти знания носили случайный характер, и соответствующие понятия были еще крайне туманны, разбросаны по разным трудам без всякой связи между собой.

Можно удивляться тому, что Эйлер с его многосторонним, глубоким гением сам не пришел к мысли об обобщении свойств одной преломляющей (или отражающей) поверхности на целую оптическую систему, так как это обобщение совершенно элементарно и опирается единственно на закон преломления, хорошо известный Эйлеру. Естественно предположить, что надобность в таком обобщении должна была появиться лишь много позже, когда оптические инструменты стали достоянием многих исследователей и работа с ними без знания законов отображения, ограничения пучков и т. д. оказалась невозможной. Лишь полстолетия спустя Гаусс, Максвелл и другие построили учение об оптике параксиальных лучей.

Отсутствие общей теории оптических инструментов, развитой в духе XIX в., является причиной одного из основных недостатков громадного труда Эйлера. Решив задачу о расчете какой-нибудь оптической системы для случая, когда система состоит из одной линзы, он решает ту же задачу заново и для случая, когда она состоит из двух, трех, ..., десяти линз. Решив задачу для одной определенной комбинации, он решает ее снова для другой, третьей, ..., десятой комбинации, хотя все эти комбинации отличаются только расположением линз, причем решает отдельно для случая бесконечно тонких линз и для случая, когда толщина линз отлична от нуля; отдельно для случая, когда материалом линзы служит обыкновенное стекло, и отдельно, когда в качестве материала применен флинт, и т. д. Таким образом легко заполняются вычислениями три больших тома по 500 страниц каждый, из которых состоит «Диоптрика».

С точки зрения современного конструктора-оптика, труд Эйлера представляет лишь исторический интерес, так как вся методика расчета основана на неверной предпосылке — что при исправлении сферической и хроматической аберрации обеспечено хорошее качество всего изображения. Поэтому весь огромный вычислительный материал, помещенный Эйлером в его «Диоптрике», теперь полностью забыт, ни в одном курсе геометрической оптики, теории оптических инструментов или методики расчета оптических систем нельзя найти ссылок на Эйлера, касающихся способа расчета телескопов или микроскопов. Если и можно найти кое-где упоминание об Эйлере, то оно относится к его точке зрения на исправление хроматической аберрации, к которой мы обратимся несколько далее.

Причин, вызвавших глубокое забвение такого значительного для своего времени труда, много. Помимо указанных ранее, можно указать и на необычный способ изложения, более пригодный для учебника по геометрии, где весь материал разбит на мелкие отделы, лишенные между собой связи, на отсутствие обобщающих выводов. Все это весьма затрудняет понимание книги, несмотря на то, что математическое изложение весьма элементарно.

Тем не менее в разных местах «Диоптрики» разбросаны оригинальные идеи, недостаточно подчеркнутые автором, и возможно по этой причине не обратившие внимания читателей.

С самого начала своего труда Эйлер ставит верхний предел для углов, образованных лучами с осью и с нормалью к поверхности в месте пересечения луча с ней: эти углы не должны превышать 30°. При выполнении этого условия он считает себя вправе ограничиться приближенными выражениями для продольной сферической аберрации, как до него, впрочем, поступал Ньютон. Любопытно отметить, что и Кеплер в своей «Диоптрике» ставил такой же предел для углов лучей, но при этом он преследовал другие, более скромные цели — нахождение некоторых закономерностей параксиальной оптики. Прием Эйлера в сущности по идее близок к тому, что применяют современные авторы теорий аберрации. Вероятно, Эйлер впервые использовал прием сложения аберраций, но он не приводит доказательства законности этого приема.

Особый интерес представляют идеи Эйлера о дисперсии стекла. На основании малоубедительных рассуждений он приводит два возможных закона, связывающих дисперсию и рефракцию стекла

$$\Delta n = K\, n \lg n \text{ либо } \Delta n = K \frac{n^2-1}{n},$$

где K — постоянная, не зависящая от материала.

Здесь Эйлер, которого обычно выставляют как противника Ньютона в вопросе о дисперсии, в сущности является скорее его союзником. Законы, предлагаемые им, весьма мало отличаются от закона Ньютона о постоянстве отношения $\Delta n/(n-1)$ и приводят к тому же выводу о *практической* невозможности исправления хроматических аберраций. Как вытекает из формул Эйлера, коэффициенты дисперсии $\frac{n-1}{\Delta n}$ так мало отличаются друг от друга для кронового стекла и для флинта, что из них было бы немыслимо строить ахроматические объективы, если бы гипотезы Эйлера оказались справедливыми.

Спор Эйлера с Доллондом по этому вопросу не лишен странностей и очень напоминает спор Ньютона с льежским физиком Люкасом. Сначала Эйлер убедил Доллонда, ярого сторонника Ньютона, чтобы он занялся опытами по определению дисперсии с целью доказать ошибку Ньютона. Это удалось Доллонду блестяще, но полученные им результаты опрокидывали и законы Эйлера, и последний немедленно усомнился в правильности опытов Доллонда. Эйлер специально занялся вопросом о влиянии взаимного наклона призм на результаты измерений, в надежде найти ошибку в найденных Доллондом значениях дисперсии. Однако его вычисления показали, что Доллонд прав, и Эйлер скрепя сердце согласился с ним, что не помешало ему некоторое время продолжать расчеты на основании своих неверных предположений.

Таким образом, обычно высказываемое мнение о том, что именно Эйлер обнаружил ошибку Ньютона и поставил решение вопроса об исправлении хроматизма на правильный путь, неверно. Заслуга Эйлера здесь косвенная, а правильным решением вопроса мы обязаны, если и не Доллонду, то английскому оптику-любителю Честеру Холлу, впервые построившему ахроматический объектив.

В «Диоптрике» Эйлер среди первых поставил вопрос о поле зрения, о правильном положении глаза по отношению к оптическим системам, а также высказал ряд соображений, связанных с фотометрией и энергетикой оптических систем.

Не следует забывать, какую роль сыграл Эйлер в развитии первых отечественных микроскопов, которые он сам рассчитал и сдал на изготовление оптической и инструментальной мастерским Академии наук

(1773—1775); работу Эйлера по расчету микроскопов продолжал, с одной стороны, его ученик Николай Фус, с другой — известный член Академии наук Эпинус [3].

Если работы Эйлера по математике и механике поставили его на одно из первых мест среди ученых всех времен и всех стран, то его работы по геометрической оптике, несомненно, занимают значительно более скромное место среди трудов, посвященных этой прикладной дисциплине. Наука XVIII в. была еще достаточно ограничена, чтобы великие умы той эпохи были в состоянии владеть ею во всем ее разнообразии, но никому не удалось одинаково блистать во всех ее областях. Забыт нашими современниками Ньютон-химик; забыт Юнг-архитектор, и нет ничего удивительного в том, что и Эйлер как оптик также забыт. Среди работ крупнейших физиков всегда найдутся такие, которые в настоящее время уже не привлекают внимания. Немалое число изящных теорем Ньютона по геометрической оптике тоже постигла эта участь лишь потому, что найденные им теоремы не нашли применения в практической оптике. Несмотря на то, что Эйлер потерпел неудачу в своей попытке построить методику расчета оптических систем, за ним остается слава основоположника вычислительной оптики.

Литература

1. И. Ньютон, Лекции по оптике, ч. I, 1669, 1728
2. Л. Эйлер, Dioptrica, СПб., 1769—1771
3. С. Л. Соболь, История микроскопа, М.— Л., Изд-во АН СССР, 1949

G. G. SLJUSSARJOW

EULERS «DIOPTRIK»

(Zusammenfassung)

Die genaue Formulierung des Gesetzes von der Brechung hat ein neues Gebiet der Optik, nämlich die geometrische Optik, geschaffen.

Bereits Descartes hatte die Form der Linsenoberflächen berechnet, bei der die von einem Punkt emittierten Strahlen sich nach ihrer Brechung wieder in einem Punkt sammeln. Newton schritt auf diesem Wege weiter und fand unter Anwendung der gerade zur Anerkennung gekommenen Methode der Reihenentwicklung eine Formel für den Ausdruck der sphärischen Aberration der Linse; er hat auch als erster eine Formel für die chromatische Linsenaberration abgeleitet; da er aber von der falschen Behauptung der Konstanz des Dispersionskoeffizienten aller durchsichtiger Körper ausgegangen war, zog er den fehlerhaften Schluß von der prinzipiellen Unmöglichkeit, die chromatische Aberration eines beliebigen optischen Systems zu korrigieren.

Die Teleskope und Mikroskope aus dem 17. und dem Beginn des 18. Jh. wurden empirisch konstruiert. Euler kann als Begründer der optischen Berechnungen betrachtet werden: von ihm stammt die Idee einer Berechnung der Konstruktionselemente. Seine gesamte «Dioptrik» ist der Frage der Berechnung von Fernröhren, astronomischen Objektiven, des Mikroskops und der Spiegelteleskope sowie der Okulare gewidmet. Der Berechnung liegen zwei Bedingungen zugrunde: die Beseitigung der sphärischen und der chromatischen Aberration. Euler kannte nicht die Aberrationen der Punkte, deren Abstand von der Achse von Null verschieden ist; daher berücksichtigte er sie nicht, während dieses in den modernen optischen Berechnungen stets getan wird. Aus diesem Grunde bieten seine Berechnungen in unserer Zeit lediglich ein historisches Interesse, obgleich sie seinen Schülern in Rußland geholfen haben, das erste achromatische Mikroskop in der Welt zu bauen. Sehr interessant sind die Ansichten Eulers über die Dispersion optischer Gläser und sein Briefwechsel mit dem Optiker Dollond, der Euler auf seinen Fehler hingewiesen hatte.

Ein großes Verdienst Eulers besteht darin, daß er als erster eine Reihe exakter Definitionen und Begriffe gegeben hat, die beim Studium optischer Systeme notwendig sind: die Begriffe des Sehfeldes, der Eintritts- und Austrittspupille und eine Reihe photometrischer Begriffe.

В. Л. ЧЕНАКАЛ

ЭЙЛЕР И ЛОМОНОСОВ

(К истории их научных связей)

В истории многих отраслей точного знания Леонард Эйлер и М. В. Ломоносов сыграли исключительно большую роль, а для истории русской науки их творчество было основополагающим. В длинном списке ученых, живших и работавших в XVIII в. в России, имена этих величайших гениев должны быть по праву поставлены первыми.

И Эйлер и Ломоносов много лет провели в Петербургской академии наук. Первый работал здесь в течение 31 года, второй — 24 года. Однако обстоятельства жизни обоих ученых сложились так, что личное знакомство между ними не состоялось.

Проработав с 1727 г. в стенах Петербургской академии 14 лет, Эйлер 8 июня 1741 г. выехал в Берлин и возвратился оттуда в Петербург только 17 июня 1766 г. [1] Ломоносов приехал в Петербург после пятилетнего обучения в Германии 8 июня 1741 г., в день отъезда Эйлера, и, прожив затем здесь 24 года, умер 4 апреля 1765 г., т. е. за год с лишним до возвращения Эйлера.

Известно, что Ломоносов находился в Петербурге восемь с лишним месяцев в 1736 г., когда он обучался в Академическом университете. Прибыл он тогда из Москвы 2 января 1736 г. и 23 сентября того же года выехал в Германию для изучения химии и горного дела. В это время Эйлер уже давно находился в Петербурге, был одним из наиболее деятельных профессоров Петербургской академии, и Ломоносов с ним, безусловно, встречался. Но Ломоносов тогда был еще начинающим студентом, и эти встречи не могли вылиться в подлинное знакомство.

Однако весьма вероятно, что Ломоносов, который в то время с увлечением знакомился с новой научной литературой, остававшейся для него

[1] Здесь и далее все даты приводятся по старому стилю, по которому в России велось летоисчисление вплоть до 1917 г.

недоступной в московский период его жизни, уже тогда читал отдельные сочинения Эйлера.

Чтобы не возвращаться к вопросу о том, насколько основательно знал Ломоносов многие труды Эйлера, скажем сразу, что он всегда знакомился с ними по мере выхода их в свет и знал многие из них превосходно.

Точно известно, что в последующие годы жизни Ломоносову были хорошо знакомы такие работы Эйлера, как «Теория движения планет и комет», «Новые лунные таблицы», «Новая теория света и цветов», «Физические разыскания о причине хвостов комет, северного сияния и зодиакального света», «Введение в анализ бесконечно малых» и некоторые другие [1, л. 344—348; 2, л. 297—301; 3, стр. 149, 157, 315—344, 533, 534]. Отдельные из этих работ Ломоносов использовал в ряде собственных исследований, в которых можно найти неоднократные упоминания имени Эйлера.

По возвращении в 1741 г. из Германии Ломоносову время от времени приходилось сталкиваться с некоторыми сочинениями Эйлера и в несколько ином плане. Например, в период между 11 апреля и началом июня 1744 г., работая над переводом «Описания в начале 1744 года явившейся кометы Готфрида Гейнзиуса», Ломоносову пришлось переводить на русский язык помещенный автором в «Прибавлении» отрывок из письма Эйлера, где дается расчет пути описываемой Гейнзиусом кометы [4, стр. 109].

В январе 1746 г. Ломоносову довелось просмотреть корректуру статьи Эйлера «Доказательства некоторых арифметических теорем», печатавшейся тогда в X томе «Комментариев». Когда в Академическом собрании, где отсутствовали «члены математического класса», встал вопрос о том, кому из присутствовавших ученых следовало бы отдать на просмотр корректуру математических работ печатаемого тома «Комментариев», то Ломоносов сам изъявил согласие просмотреть эту довольно объемистую работу Эйлера [5, стр. 107—108].

В связи с тем, что в литературе и среди некоторых историков науки распространено мнение о том, что Ломоносов никогда серьезно не интересовался математикой, может возникнуть вопрос, как же он в таком случае мог держать корректуру математической работы Эйлера.

Имеется ряд документов, не обращавших до сих пор на себя внимания исследователей, которые дают полное основание считать такое мнение неверным и показывают, что Ломоносов не только хорошо знал математику, но и стремился применить ее в естествознании.

Есть, например, свидетельство самого Ломоносова, показывающее, что он проявлял большой интерес к математике еще во время пребывания в Германии. В письме к И. Д. Шумахеру от 5 ноября 1740 г. Ломоносов писал: «В настоящее время я живу инкогнито в Марбурге у своих друзей и упражняюсь в алгебре, намереваясь применить ее к химии и теоретической физике» [6, стр. 55, 60].

Находясь под домашним арестом с 28 мая 1743 г. по 18 января 1744 г. (т. е. еще в бытность адъюнктом), Ломоносов подал 23 июля 1743 г. в Канцелярию Академии доношение следующего содержания:

«Потребна мне нижайшему для упражнения и дальнейшего происхождения в науках математических Невтонова Физика и Универсальная арифметика, которые обе книги находятся в книжной академической лавке. Того ради Академию наук покорнейше прошу, дабы повелено было помянутые книги выдать ис книжной лавки на щет моего жалованья сего 1743-го года, и о том милостивое решение учинить» [7, стр. 49]. (Под «Невтоновой Физикой» Ломоносов подразумевал несомненно «Математические начала натуральной философии».) Обе книги были Ломоносову выданы.

Как Ломоносов в дальнейшем использовал сведения, почерпнутые из «Универсальной арифметики», установить трудно, что же касается «Математических начал натуральной философии», то в глубоком знании ее Ломоносовым можно убедиться по многим его работам[2] .

В протоколах Академического собрания от 18 октября 1745 г. и 18 августа 1746 г. говорится, что в первый из названных дней Ломоносов получил задание дать отзыв на выполненный академическим переводчиком И. И. Голубцовым русский перевод «Краткого руководства к теоретической геометрии» Г. В. Крафта [11], а во второй — возвратил рукопись перевода, заявив, что против издания книги никаких возражений не имеет [5, стр. 89, 155]. Сохранилась рукопись этого перевода, служившая оригиналом при наборе книги, из которой видно, что Ломоносов не только прочитал ее как рецензент, но и тщательно отредактировал [12].

Спустя четыре года аналогичная работа была поручена Ломоносову вторично. В последних числах сентября или в первых числах октября 1750 г. учитель математики Шляхетного кадетского корпуса, впоследствии генерал-инженер и «главный директор строения государственных дорог», Н. Е. Муравьев обратился в Академию с просьбой издать написанную им книгу «Начальные основания математики». Получив рукопись, Канцелярия Академии наук решила прежде всего получить отзывы от сведущих

[2] Более обстоятельно о знакомстве Ломоносова с трудами Ньютона и об его отношении к этим трудам см. в работах [8—10].

ученых. На своем заседании 9 октября 1750 г. она «определила» послать эту рукопись профессорам Х. Н. Винсгейму и Ломоносову и адъюнкту Н. И. Попову [13, л. 380; 14, л. 123].

Среди дошедших до нас документов отзыв Ломоносова на указанную рукопись отсутствует, имеются лишь отзывы Винсгейма и Попова [13,л. 124—126]. Возможно, что, будучи занят другими делами, Ломоносов вообще не рецензировал книгу. Для нас важно, что рецензирование этой математической книги ему поручалось.

Среди дошедших до нас бумаг исполнявшего в 1746—1749 гг. обязанности конференц-секретаря Петербургской академии профессора прав Ф.-Г. Штрубе де Пирмонта сохранился черновик его письма от 3 апреля 1747 г. к находившемуся в то время за границей Крафту. Остановившись на ряде вопросов, связанных с метеорологией, ботаникой, математикой, Штрубе де Пирмонт писал далее: «Твои размышления, славнейший муж, относительно [вычисления] поверхности наклонного цилиндра и наклонного конуса с круговыми основаниями, которые тщетно было бы искать в трудах многих геометров, отличаются новизной и достойны того, чтобы стать известными занимающимся геометрией. Однако вместо аналитического метода, которым ты успешно пользовался для определения поверхности наклонного цилиндра с круговым основанием, наш славнейший Ломоносов неожиданно применил более короткий способ, без каких-либо длительных расчетов; таким образом он легко нашел, что прямой цилиндр с эллиптическим основанием и с такой же стороной, как наклонный цилиндр с круговым основанием, основание которого (т. е. прямого цилиндра с эллиптическим основанием.— *В. Ч.*) равно нормальному сечению, проведенному перпендикулярно к оси наклонного цилиндра с круговым основанием, имеет кривую поверхность, равную кривой поверхности цилиндра с круговым основанием» [15, л. 57—65][3].

Отрывок письма Штрубе де Пирмонта служит еще более наглядным доказательством наличия у Ломоносова серьезных математических знаний и интересов. Целый ряд свидетельств свободного владения Ломоносовым математикой можно найти и во многих уже давно известных его диссертациях, особенно по физике и астрономии.

В 1749 г. Академия готовилась к изданию присланной ей Эйлером из Берлина рукописи книги «Морская наука». По желанию Эйлера, напи-

[3] Этот чрезвычайно интересный и ценный документ обнаружен в Архиве АН СССР сотрудником Института истории естествознания и техники АН СССР Т. А. Красоткиной. Публикуя с разрешения Т. А. Красоткиной отрывок этого письма, автор приносит ей за это искреннюю благодарность.

санное им вместо предисловия большое посвятительное письмо президенту Академии К. Г. Разумовскому должно было печататься на двух языках, для чего авторский латинский текст его должен был быть переведен на русский язык.

Во исполнение этого пожелания Эйлера, поддержанного Разумовским, Шумахер 26 января 1749 г. решил поручить эту работу Ломоносову и написал ему письмо следующего содержания: «Его сиятельство господин президент решил, чтобы письмо господина Эйлера, которое будет предпослано его «Scientia navalis» вместо предисловия, было также напечатано по-русски, и так как я уверен, что Вы с удовольствием исполните все, что послужит к удовлетворению его сиятельства, то, не колеблясь, посылаю это письмо Вашему высокородию для перевода на русский язык с возможной скоростью. Остаюсь с полным почтением Вашего высокородия» [6, стр. 94]

Выполнил ли Ломоносов это поручение Шумахера — неизвестно. Никаких материалов, которые показывали бы, что он этот перевод делал, не имеется. 14 марта 1749 г. Шумахер в письме к Эйлеру в Берлин все еще писал, что требующийся перевод посвящения «выполнит» Ломоносов [16, л. 88]. В вышедшей в том же году из печати «Морской науке» Эйлера имелось посвящение на русском языке [17]. Однако было ли оно переведено Ломоносовым, или кем-либо другим, сказать трудно.

Говоря о большом интересе Ломоносова к трудам Эйлера, нельзя не упомянуть еще одного интересного факта. Среди дошедших до нас рукописей Ломоносова, оставшихся в доме ученого после его смерти, имеется собственноручная рукопись Эйлера [2, л. 265—268]. В рукописи нет нескольких первых страниц, текст начинается с параграфа девятого и заканчивается параграфом двадцать четвертым, и мы не имели возможности сравнить ее с печатными публикациями. По содержанию она относится к разрабатывавшейся великим математиком на протяжении многих лет проблеме ахроматизации оптических систем посредством составления их объективов из двух и большего числа стекол с различными показателями светопреломления.

В 1762—1763 гг. Ломоносов, как известно, упорно и долго работал над получением стекол с различными показателями светопреломления, пригодных для изготовления ахроматических зрительных труб [18]. Зная об успешных теоретических исследованиях Эйлера в указанной области, он, по-видимому, получил названную рукопись для практического использования содержащихся в ней расчетов. Как эта рукопись попала в руки Ломоносова, пока неизвестно.

Приведенных примеров достаточно для того, чтобы видеть, что Ломоносову были известны труды Эйлера еще со студенческих лет, что он регулярно их читал, а позднее даже принимал участие в переводах их на русский язык и изданиях. С течением времени Ломоносов все больше проникался особым уважением к Эйлеру. На протяжении многих лет вплоть до смерти Ломоносов считал Эйлера высоким образцом ученого, следовать примеру которого в постановке и решении научных задач достойно для всякого.

Первое знакомство Эйлера с трудами Ломоносова датируется маем 1739 г.[4] В марте этого года находившийся тогда в Марбурге Ломоносов прислал в Академию свою вторую[5] научную работу: «Физическая диссертация о различии смешанных тел, состоящем в сцеплении корпускул, которую для упражнения написал Михайло Ломоносов, студент математики и философии, в 1739 году в марте месяце» [19, стр. 23—63]. Полученная в Петербурге 30 апреля 1739 г. эта работа была передана для чтения ученым. На последней странице рукописи имеются пометки, показывающие, что 1 мая 1739 г. ее прочитал Крафт, 2 мая — И. Вейтбрехт, а 4 мая — Эйлер. Впрочем никаких сведений о том, каково было мнение Эйлера об этой работе, не имеется.

Подлинное знакомство Эйлера с трудами Ломоносова произошло только в 1747 г. В начале июля этого года в Академии наук встал вопрос о подготовке к печати очередного тома «Комментариев». В числе других работ петербургских ученых, написанных в предшествующие годы и ожидавшие очереди, чтобы быть напечатанными, было также две работы Ломоносова: «Диссертация о действиях химических растворителей вообще» [19, стр. 337—383] и «Физические размышления о причинах теплоты и холода» [20, стр. 63—103]. Первая из них была написана ученым в 1743—1744 гг., 7 декабря 1744 г. он представил ее в Академическое собрание, а 22 и

[4] Несмотря на то, что Ломоносов был моложе Эйлера лишь на четыре года, жизнь его сложилась так, что он начал свою научную деятельность на двенадцать лет позже Эйлера. Когда Эйлер в 1727 г. опубликовал свою первую научную работу и оказался уже на службе в Петербургской академии в качестве ее адъюнкта, Ломоносов еще жил у себя на родине и к науке никакого отношения не имел. В год получения Эйлером профессорского звания — 1731 г.— Ломоносов еще только начинал учиться в «спасских школах» в Москве, а ко времени написания им первой научной работы в 1739 г. Эйлер был уже одним из крупнейших ученых своего времени.

[5] Первый известный научный труд Ломоносова «Работа по физике о превращении твердого тела в жидкое, в зависимости от движения предсуществующей жидкости» [19, стр. 5—21] была прислана им в Академию из Марбурга вместе с «репортом» о своих учебных делах от 4 октября 1738 г.

29 марта и 22 апреля 1745 г. прочитал ее в последнем. Вторая работа была написана в 1744 г. и вместе с первой 7 декабря 1744 г. представлена в Академическое собрание, а 21 и 25 января 1745 г. прочитана.

Неизвестно, по чьей инициативе 7 июля 1747 г. Разумовский, Шумахер и Г. Н. Теплов подписали в Канцелярии Академии наук указ, касавшийся ряда вопросов, связанных с изданием трудов Академии наук. В четвертом пункте указа говорилось: «Пиесы профессоров Ломоносова и Рихмана списавши послать к почетным Академии членам Эйлеру, Бернулию и к другим, какое об оных мнение дадут и можно ли оные напечатать, ибо о сем деле из [з]дешних профессоров ни один основательно рассудить довольно не в состоянии» [21, л. 39; 22, л. 60]. Последние слова объясняют, почему доложенные в Академическом собрании еще в начале 1745 г. и не вызвавшие при этом никаких замечаний диссертации Ломоносова так долго оставались лежать без движения.

В ноябре того же 1747 г. диссертации Ломоносова и Рихмана были уже у Эйлера.

Начав чтение этих работ, Эйлер 7 ноября 1747 г. писал Разумовскому в Петербург: «Я начал читать работы, о которых Ваше превосходительство сделало мне честь запросить мое мнение. То, что я пока прочел, внушило мне весьма хорошее мнение о г-не Рихмане, который, мне кажется, сделал очень значительные успехи в физике и в математических науках. Я надеюсь закончить чтение этих работ к ближайшей почте, когда я не премину отослать их Вашему превосходительству, высказав о них свое мнение с полной уверенностью» [23, стр. 252].

Спустя три дня, т. е. 10 ноября, Эйлер направил Разумовскому второе письмо по этому же вопросу: «Ваше сиятельство, рассмотрев, согласно распоряжений Вашего превосходительства, работы господ Рихмана и Ломоносова, я высказал мое мнение о них на прилагаемом листке. Я чрезвычайно восхищен, что эти диссертации по большей части столь превосходны, что Комментарии Императорской Академии станут многим более значительны и интересны, чем труды других академий» [23, стр. 253].

На приложенном к письму листке Эйлер о сочинениях Ломоносова написал следующее: «Все сии сочинения не токмо хороши, но и превосходны, ибо он изъясняет физические и химические материи, самые нужные и трудные, кои совсем неизвестны и невозможны были к истолкованию самым остроумным ученым людям, с таким основательством, что я совсем уверен о точности его доказательств. При сем случае я должен отдать справедливость господину Ломоносову, что он одарован самым счастливым остроумием для объяснения явлений физических и химических.

Желать надобно, чтобы все протчие Академии были в состоянии показать такие изобретения, которые показал господин Ломоносов» [6, стр. 282].

В одной из записных книжек Эйлера, относящихся к описываемому времени, имеется запись, сделанная в период чтения им полученных из Петербурга диссертаций Ломоносова [24, л. 372] [6]. Эта запись ясно показывает, что читались именно работы Ломоносова «Диссертация о действии химических растворителей вообще» и «Физические размышления о причинах теплоты и холода».

Ознакомился Ломоносов с полученным Разумовским отзывом Эйлера о его диссертациях через Теплова, который не только дал ему письмо и приложенный к нему листок для прочтения, но и разрешил снять с последнего копию. По этой снятой самим Ломоносовым копии с отзыва Эйлера он, собственно, известен теперь нам, так как оригинал до сих пор не обнаружен.

Рассказ о посылке диссертаций Ломоносова к Эйлеру на отзыв сохранился в изложении самого Ломоносова. Содержится он в трех дошедших до нас его документах — в письме к Теплову от 30 января 1761 г., в «Краткой истории о поведении Академической канцелярии», относящейся к 1764 г., и в незаконченном и неотправленном письме к Эйлеру, написанном в феврале 1765 г.

В первом из названных документов Ломоносов писал: «...вспомните с другой стороны Ваши споры с Шумахером, между тем письмо о моем уничтожении к Ейлеру и ответ, что Вы мне сообщили» [6, стр. 233]. Во втором говорится: «...умыслил советник Шумахер и асессора Теплова пригласил, чтобы мои апробованные уже диссертации в общем Академическом собрании послать в Берлин, к профессору Ейлеру, конечно с тем чтобы их он охулил» [7, стр. 065], и далее: «Сверх сего асессор Теплов, Ломоносову тайно показав аттестат Ейлеров о его диссертациях, великими похвалами преисполненный, объявил, что де Шумахер хотел его определить к переводам, а от профессорства отлучить; однако де ему не удалось. А как Ломоносов выпросил Ейлеров аттестат, то прислана к нему тотчас от Теплова цидулка, чтобы аттестат отослать неукоснительно назад, и никому, а особливо Шумахеру не показывать» [7, стр. 065]. И, наконец, в третьем: «Кроме сего прочего, сообщаю то, что сам я вынес [от Шумахера.— *В. Ч.*]. 1) Когда Академическое собрание избрало меня в профессоры и покойная императрица утвердила, Шумахер послал к Вам мою, уже

[6] Впервые обнаружил эту запись Л.С. Минченко. Полный текст ее публикуется в книге: Л о м о н о с о в. Сборник статей и материалов, т. IV.

одобренную, диссертацию, надеясь получить от Вас дурной отзыв. Но Вы поступили тогда как честный человек» [6, стр. 312—314].

Как видно, Ломоносов, не зная, по-видимому, упомянутого указа Канцелярии Академии наук от 7 июля 1747 г., в котором совершенно точно определялась цель отправки его диссертаций к Эйлеру, считал, что это обращение к Эйлеру было результатом происков Шумахера, находившегося, как известно, именно в это время в весьма недружественных с ним отношениях.

Заметим, что все писавшие по этому вопросу ранее исходили при объяснении причин посылки этих диссертаций к Эйлеру только из приведенных выше слов Ломоносова, которые, как видно из изложенного выше, истинному ходу событий не соответствовали [23, стр. 251—252; 25—31][7].

Ознакомившись с «великими похвалами преисполненным» отзывом Эйлера о его диссертациях, Ломоносов был крайне обрадован. Немного времени спустя эта радость стала еще большей. В начале февраля 1748 г. Шумахер получил от Эйлера письмо, датированное 20 января 1748 г., в котором последний писал, что Берлинская академия наук в качестве темы на премию 1749 г. избрала вопрос о происхождении селитры. «Я не сомневаюсь,— писал он далее,— чтобы об этом кто-нибудь смог представить лучшее, чем господин Ломоносов, которого я прошу убедить взяться за эту работу. Было бы, конечно, весьма почетно, если бы член императорской Академии, да к тому же русский, удостоился нашей премии» [7, стр. 96].

Не получая до этого подобных отзывов о своих научных трудах, да тем паче от таких крупных ученых, как Эйлер, Ломоносов исполнился желания высказать ему за это свою благодарность и установить с ним постоянную переписку. 16 февраля 1748 г. он послал Эйлеру первое письмо [23, стр. 255—258]. Высказавшись в первых же строках этого письма о том, какую большую радость доставило ему письмо Эйлера к Разумовскому с характеристикой его работ, Ломоносов писал далее: «Ведь я считаю, что на мою долю не могло выпасть ничего более почетного и более благоприятного, чем то, что мои научные занятия в такой степени одобряет тот, чье достоинство я должен уважать, а направленное на меня благоволение превыше всего почитать,— к тому же тот, чьи заслуги и авторитет в ученом мире велики» [23, стр. 258].

---

[7] Единственным биографом Ломоносова, указавшим еще в 1865 г. на необоснованность предположения Ломоносова, что посылка его диссертаций к Эйлеру являлась враждебным по отношению к нему актом Шумахера, был П.С. Билярский [7, стр. 69, 77].

«Хотя это Ваше благоволение в высшей степени обязывает меня, но оно будет еще гораздо более приятным, если, благодаря Вашей доброте, можно будет пользоваться им и в дальнейшем» [23, стр. 258].

Предлагая Эйлеру вступить с ним в постоянную переписку, Ломоносов говорил: «Не сомневаюсь, что для меня будет очень полезно, если Вы не сочтете меня недостойным беседовать с Вами посредством писем» [23, стр. 258].

Касаясь предложения Эйлера Шумахеру рекомендовать Ломоносову принять участие в конкурсе Берлинской академии наук на тему о происхождении селитры, Ломоносов писал: «Ваш чрезвычайно почетный для меня совет, переданный мне через почтеннейшего Шумахера, внушил мне сильное желание написать рассуждение о рождении селитры, которое я решил, посильно его разработав, послать в назначенный срок в славную Берлинскую академию на соискание премии» [23, стр. 258].

Получив письмо Ломоносова, Эйлер принял предложение систематически «беседовать» с ним «посредством писем» и вскоре, 12 марта 1748 г., послал ему ответное письмо.

Полный текст этого письма Эйлера к Ломоносову до сих пор не найден. Известно оно по двум сравнительно небольшим отрывкам, выписанным из него и переведенным с латинского языка на русский самим Ломоносовым [6, стр. 69—70]. Оба эти отрывка содержат подобные приводившимся выше отзывы Эйлера о трудах Ломоносова; они невелики и мы приведем их полностью. «Столь много проницательству и глубине вашего остроумия в изъяснении претрудных химических вопросов я удивлялся, так равномерно Ваше ко мне письмо было приятно...» [6, стр. 70]. «Из Ваших сочинений с превеликим удовольствием я усмотрел, что Вы в истолковании химических действий далече от принятого у химиков обыкновения отступили и с препространным искусством в практике высочайшее основательной физики знание везде совокупляете. Почему не сомневаюсь, что нетвердыя и сомнительныя основания сея науки приведете к полной достоверности; так что ей после место в физике по справедливости дано быть может» [6, стр. 70].

Датируется это письмо по имеющейся на копии пометке, сделанной рукою Ломоносова: «Ейлер в письме от 23 марта 1748 года»[8].

Нет никакого сомнения в том, что в этом письме Эйлера содержались и другие мысли. В ответном письме Ломоносова на это письмо Эйлера,

---

[8] Дата указана здесь Ломоносовым по новому стилю, как у Эйлера, находившегося в это время в Берлине, где был принят новый стиль.

о котором речь пойдет ниже, имеются, например, такие строки: «Очень Вам признателен, что Вы не только Вашим советом, для меня особенно почетным, побуждаете меня к объяснению рождения селитры, но и даете мне точку опоры для более ясного познания самого предмета, разработкой которого я занимаюсь со всей заботой и старанием. Я читаю с большой пользой для себя «Артиллерию» Робинса, снабженную Вашими превосходнейшими замечаниями» [20, стр. 170, 171].

Как видно, Эйлер вновь писал Ломоносову относительно разработки проблемы о происхождении селитры и, скорее всего, давал какие-то конкретные советы по этому вопросу; в частности, рекомендовал ему ознакомиться со снабженным его, Эйлера, примечаниями немецким переводом книги английского ученого Б. Робинса «Новые основания артиллерии», в которой среди прочего содержалось много сведений о свойствах порохов, а следовательно, и селитры и обсуждалась проблема движения тел в воздухе с различными скоростями [32].

Трудно сказать почему, но, получив письмо Эйлера не позже конца марта — начала апреля, Ломоносов ответил на него лишь 5 июля 1748 г.

Это письмо, в прошлом неоднократно публиковавшееся и полностью [6, стр. 72 — 91; 20, стр. 169 — 193] и с сокращениями [7, стр. 109—110; 26, стр. 230, 240, 293; 31, стр. 92—96; 33, стр. 48, 199—203], а также почти целиком повторенное самим Ломоносовым в его диссертациях «Об отношении количества материи и веса» [3, стр. 349—371] и «Рассуждение о твердости и жидкости тел» [3, стр. 377—409], настолько широко известно, что пересказывать подробно его содержание еще раз вряд ли целесообразно. Отметим только, что Ломоносов обстоятельно излагал Эйлеру свои мысли о природе тяжести тел, доказывая, что широко распространенное мнение о том, что «плотность связанной материи тел пропорциональна их весу», несостоятельно, что истинной причиной тяжести тел является наличие в природе особой «тяготительной материи», толкающей их к центру земли, вследствие чего и удельный вес тел изменяется пропорционально поверхностям, противопоставляемым тяготительной материи непроницаемыми для нее частицами этих тел; Ломоносов просил Эйлера высказаться об этом суждении, которое он, по его собственным словам, несмотря на то, что оно было «по большей части противоположно взглядам, принятым великими мужами», обдумывал «уже много лет».

В этом же письме Ломоносов впервые в истории естествознания, с предельной простотой и точностью сформулировал закон сохранения материи и движения. «...все встречающиеся в природе изменения,— писал он в этом письме,— происходят так, что если к чему-либо нечто прибавилось, то это отнимается у чего-то другого. Так, сколько материи прибавляется какому-либо телу, столько же теряется у другого, сколько часов я затрачиваю на сон, столько же отнимаю от бодрствования и т. д. Так как это всеобщий закон природы, то он распространяется и на правила движения: тело, которое своим толчком возбуждает другое к движению, столько же теряет от своего движения, сколько сообщает другому, им двинутому» [20, стр. 183—186].

Говоря о своей работе по написанию диссертации о происхождении селитры, Ломоносов после слов о чтении «Артиллерии» Робинса продолжал: «Но так как я полагаю, что, узнав настоящую причину упругости воздуха, легче раскрыть силу, которая сгущает воздух в селитре, то поэтому я счел целесообразным предпослать трактату о рождении селитры теорию упругости воздуха» [20, стр. 170—173].

Послано было это письмо Ломоносова Эйлеру, как и письмо от 16 февраля 1748 г., через Шумахера. Касаясь в сопроводительном письме высказанных Ломоносовым сомнений относительно своего объяснения природы тяжести тел, Шумахер писал Эйлеру: «...я советовал господину Ломоносову действовать во всех случаях осторожно, и это-то имело последствием настоящее письмо. Он высказывает настоящий академический дух» [25, стр. 379].

13 августа 1748 г. великий математик ответил своему новому петербургскому другу. Как и первое письмо Эйлера к Ломоносову от 12 марта 1748 г., это письмо известно нам лишь по небольшому отрывку, переведенному на русский язык самим Ломоносовым. Приводим весь текст этого отрывка: «Как преглубоки Ваши рассуждения, которых сообщением дали Вы мне чувствительный знак своей любви и благосклонности, о умедление моего ответа прошу непрогневаться: затем, что о толь далеких и сокровенных вещах мысли времени требуют» [6, стр. 91].

Прислано было это письмо Эйлера к Ломоносову в Петербург вместе с его же, Эйлера, письмом Разумовскому, датированным тоже 13 августа, где Эйлер писал: «Позвольте, милостивый государь, передать Вашему сиятельству мой ответ господину Ломоносову о чрезвычайно деликатном в физике предмете; я никого не знаю, кто был бы в состоянии лучше разъяснить этот трудный предмет, чем этот гениальный человек, который своими познаниями делает честь не только императорской Академии, но и всему народу» [7, стр. 113; 25, стр. 379].

Приведенные только что отрывки свидетельствуют, что мысли Ломоносова о природе тяжести тел произвели на Эйлера большое впечатление. Отсутствие в нашем распоряжении полного текста письма не дает, конечно, возможности установить смысл суждений Эйлера по этому вопросу. Однако, судя по приведенному отрывку, Эйлер полностью одобрял предпринятую Ломоносовым работу.

Всю вторую половину 1748 г. и первые три месяца 1749 г. Ломоносов, наряду с выполнением множества других работ и, в частности, постройки своей химической лаборатории и налаживанию в ней различного рода исследований, усиленно готовил для Берлинской академии наук диссертацию о рождении селитры, боясь опоздать с представлением ее к установленному сроку—1 апреля 1749 г. Следуя своим планам, он начал в этой работе с того, что в течение лета 1748 г. написал диссертацию «Опыт теории упругости воздуха» [20, стр. 105—139].

Только после завершения этой работы и представления ее в Академическое собрание, где она вскоре и была обсуждена, Ломоносов приступил непосредственно к работе над диссертацией о рождении селитры. Начал он писать ее 16 января 1749 г., закончил к марту этого года и послал в Берлинскую академию, где она была получена 18 марта 1749 г. Вместе с «Диссертацией о рождении и природе селитры» [20, стр. 219—319] в Берлинскую академию была послана Ломоносовым и упоминавшаяся выше работа «Опыт теории упругости воздуха».

8 апреля 1749 г. Шумахер писал Эйлеру: «...господин Ломоносов сказывал мне, что он отослал свою статью о селитре. Когда я имел честь говорить об этом предмете с господином президентом, то он дал мне понять, что желает в настоящем случае сохранить безпристрастие: если заслуживает статья господина Ломоносова быть увенчанною — хорошо; если нет, то этим нисколько не обидится...» [25, стр. 379—380].

Отвечая на это письмо Шумахера, Эйлер писал, что он не вмешивается в дела по рассмотрению представленных на соискание премии задач, однако слышал, что одна из представленных работ основательна и превосходна. «Я бы,— заключает он,— желал, чтобы автором ее был господин Ломоносов» [25, стр. 380].

27 мая 1749 г. написал письмо Эйлеру и сам Ломоносов. Объясняя в этом письме причины своего долгого молчания, он писал: «Посылая к Вам, муж славнейший, это письмо, почти не имею основания извинить перед Вами мою задержку. Может быть, впрочем, Вы соизволите принять за такое извинение признание мое, что я очень ленив на писание писем, в которых ничего нет кроме изъявления приветствий. Не могу также умолчать, что кроме недостатка в серьезных предметах, о коих мог бы я писать к Вам, был я еще занят делами нелегкими. За время с получения Вашего письма я был озабочен оборудованием Химической лаборатории,

выстроенной прошедшим летом на щедроты государыни в Академическом саду, и приобретением для нее посуды, инструментов и материалов, не говоря уже о работах над русским языком. Однако я все время думал об отношении тяжести и массы и многое имел в виду добавить к тому, на что Вы любезно мне ответили; но так как не многое из этого казалось мне имеющим какое-либо значение, то, собираясь заняться более важными делами, я со дня на день откладывал писание писем. И когда я послал свою диссертацию о селитре в Берлин, мне ничего не удалось Вам написать, потому что пока я занят был обработкой третьей главы, жена моя родила дочь, и из-за этого я едва-едва закончил свой труд» [6, стр. 100].

Основным вопросом, который пытался выяснить Ломоносов у Эйлера, направляя ему это письмо, был вопрос о судьбе его диссертации о рождении селитры. «Так как время, назначенное для присуждения премий, уже прошло,— писал он,— а из новых газетных известий не видно, кто получил премию, то прошу Вас, славнейший муж, уведомить меня об этом. Кроме того я к своей диссертации, посланной под девизом «Cognitio principiorum in Chymia tanti est, quanti principia ipsa in corporibus» («Знания начал в химии так же важны, как сами начала в телах»), приложил диссертацию об упругой силе воздуха, которую Вы, несомненно, прочитали» [6, стр. 100—101].

Далее Ломоносов коснулся ряда деталей, связанных с его воззрениями на упругость воздуха, и закончил это свое письмо такими словами: «Поэтому я теперь готовлю об этом вопросе дополнение к размышлениям об упругой силе воздуха; а в то же время стараюсь закончить свою диссертацию о монадах, которую начал уже более четырех лет тому назад; я считаю, что собрал достаточно веские доводы против простых сущностей. Я пошлю, если не откажетесь, все это окончательное рассмотрение и на Ваш просвещенный суд» [6, стр. 101].

Ответ Эйлера на это письмо Ломоносова до нас не дошел. Как и в какой форме сообщил Эйлер результаты берлинского конкурса, неизвестно. Из других источников мы знаем, что присланная Ломоносовым в Берлинскую академию наук «Диссертация о рождении и природе селитры» премии не получила. Присуждена была премия немецкому автору[9].

Неизвестно, читал ли Эйлер «Опыт теории упругости воздуха», посланный Ломоносовым вместе с «Диссертацией о рождении и природе селитры».

С мая 1749 г. переписка между учеными временно прервалась и

---

[9] Вопрос о том, почему Берлинская академия сочла достойной премии другую работу, а не диссертацию Ломоносова, до сих пор, к сожалению, не изучен.

была возобновлена лишь в феврале 1754 г. В этот промежуток времени мы встречаем, однако, ряд очень интересных отзывов Эйлера о Ломоносове и его работах.

В августе 1749 г. Ломоносов написал «Слово похвальное всепресветлейшей, державнейшей великой государыне императрице Елизавете Петровне...», представляющее собой прекраснейший образец ораторской прозы. 26 ноября того же года эта речь была произнесена ученым в торжественном собрании Академии наук. Одновременно она была напечатана в Петербурге отдельным изданием на русском языке [34] и в выполненном самим Ломоносовым латинском переводе [35].

Прочтя посланный ему в Берлин экземпляр «Слова» Ломоносова, Эйлер 3 января 1750 г. написал Шумахеру письмо, в котором говорил: «...я был восхищен, услыхав о последнем славном собрании в Академии наук. Статьи, читанные при этом случае, заслужат похвалы от всех ученых; в особенности панегирик господина Ломоносова мне кажется образцовым в этом роде» [25, стр. 409]. Эти слова Эйлера свидетельствуют о том, что он высоко ценил не только научные работы Ломоносова, но и его, действительно являвшуюся для своего времени образцом, ораторскую прозу.

В 1753 г. Ломоносов написал «Слово о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих» [3, стр. 15—99] и содержавшие некоторые дополнения к нему «Изъяснения» [3, стр. 101—133], необходимость в которых возникла у него в связи с несогласием профессоров А. Н. Гришова, Попова и И.-А. Брауна с некоторыми из положений, высказанных в самом «Слове».

Наряду с большим числом других новых мыслей о природе атмосферного электричества Ломоносов высказал в обоих этих работах отличные от принятых ранее воззрения на ту роль, которую играют вертикальные перемещения воздушных масс на температуру у поверхности земли. Так как именно эти воззрения Ломоносова и вызвали самые резкие возражения, особенно со стороны Гришова, то когда «Слово» и «Изъяснения» к нему были напечатаны, Шумахер послал их в Берлин Эйлеру с просьбой высказать свое мнение.

Отпечатанный в типографии текст «Слова о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих» и «Изъяснений» к нему содержал также предложенную Ломоносовым программу задачи на премию Академии наук на 1755 г., предлагавшую «сыскать подлинную электрической силы причину и составить точную ее теорию» [3, стр. 135—141]. Шумахер просил Эйлера высказаться и об этой программе.

К описываемому времени иногда более или менее натянутые, но в общем все же нормальные взаимоотношения между Ломоносовым и Шумахером резко изменились в худшую сторону,и последний с большим удовольствием получил бы от Эйлера неблагоприятный отзыв о посланных ему работах Ломоносова. Более чем вероятно, что именно такого ответа он и ждал из Берлина. Однако надежды его не оправдались. Ознакомившись с присланными ему работами Ломоносова, Эйлер писал Шумахеру 18 декабря 1753 г.: «Сочинения господина Ломоносова об этом предмете я прочел с величайшим удовольствием. Данные им относительно столь внезапного возникновения стужи и происхождения последней от верхних слоев воздуха в атмосфере объяснения я считаю совершенно основательными. Недавно я сделал подобные же выводы из учения о равновесии атмосферы. Прочие предложения столь же остроумны, сколько и правдоподобны, и свидетельствуют о счастливом даровании господина автора к распространению истинного познания естествознания, чему образцы, впрочем, он и прежде представил в своих сочинениях. Ныне таковые умы весьма редки, так как большая часть остаются только при опытах, почему и не желают пускаться в рассуждения; другие же впадают в такие нелепые толки, что они в противоречии всем началам здравого естествознания. Поэтому предположения господина Ломоносова тем большую имеют цену, что они удачно задуманы и правдоподобны. Отсюда вовсе не следует, что они были вполне доказаны, потому что дальнейшие исследования — согласуются ли они с истиной, или нет — приведут нас к желанной цели. Все, что мы теперь знаем достоверно в физике, было первоначально окружено только догадками, и если бы мы никогда не допускали таковых, даже ложных, то мы бы не достигли истины. Сам господин автор не выдает своих предположений за абсолютные истины, а поэтому и Академии не следует признавать их таковыми. Между тем каждый может ранее принять в том участие, видя, что предположения не отвергаются без дальнейших рассуждений, а найдены достойными дальнейших изысканий. Это, как мне кажется, и имел в виду господин профессор Гришов в своем ответе, и я не нашел в нем ничего такого, чтобы мог принять в худую сторону господин Ломоносов» [36, л. 80—80 об., 25, стр. 526—527].

Столь высокая оценка Эйлером и этой работы Ломоносова заставила Шумахера вторично попытаться представить его великому математику как человека, не заслуживающего таких похвал. Первого января 1754 г. он послал Эйлеру новое письмо, в котором писал: «...что у господина советника и профессора Ломоносова замечательный ум и что у него особливое пред прочими дарование, того не отвергают и здешние профессоры и академики. Только они не могут сносить его высокомерия и тщеславия, что будто бы высказанные им в рассуждении мысли новы и принадлежат ему. В этом они не хотят ему уступить, но полагают, что означенные мысли были высказаны другими прежде его. В особенности не намерены они простить ему, что в своих примечаниях он дерзнул нападать на мужей, прославившихся в области наук. Одним словом, как здешние, так и иноземцы вовсе не довольны поведением автора» [37, л. 34; 25, стр. 528].

По-видимому, еще до получения этого письма Шумахера Эйлер 11 января 1754 г. обратился в Петербургскую академию наук с новым письмом, касавшимся предложенной Ломоносовым задачи на премию «сыскать подлинную электрической силы причину и составить точную ее теорию».

«Тотчас как мне стала известна задача о причинах электрических явлений, которую славнейшая Академия решила публично предложить на ближайший год с премией в 100 золотых,— писал Эйлер в этом письме,— я позаботился об опубликовании ее в наших газетах, откуда она скоро распространится по всей Европе. Эта задача, которая, несомненно, будет с величайшим старанием подвергнута исследованию, безусловно весьма достойна внимания. Много лет тому назад я уже предлагал такую задачу нашей Академии для решения ее учеными. Однако тогда она осталась нерешенной либо потому, что в то время многие явления еще не были изучены, либо потому, что тогда еще не обладали подлинным умением философски мыслить и проникать в причины явлений природы. Мне кажется, что этот недостаток настолько распространен среди большинства естествоиспытателей и до сих пор, что они считают чуть ли не грехом собраться с духом и попытаться исследовать причины; и поскольку, по моему мнению, такое невежество недостойно философа, то мне крайне понравилось то, что сказал об этом предмете в своей последней речи наш славнейший коллега Ломоносов. Ведь как много истинных причин явлений природы мы теперь знаем и достигли мы их, разумеется, лишь после выдвижения многих гипотез, и едва ли истина когда-либо позволяла открыть себя внезапно. Итак, поскольку мы были бы лишены этого знания, если бы иногда не допускали гипотез, то от них и в будущем следует ожидать величайшей пользы для развития физики, поэтому ими следует широко пользоваться, однако не взятыми случайно, а созданными постепенно с умом и прежде всего соответствующими законам механики. В электрических явлениях некая тонкая материя обнаруживает себя столь явно, что ее гипотезой даже не следует считать, но того, каково ее строение и от какого толчка она обнаруживает свое действие, мы, разумеется, никогда и не узнали бы, даже поставив бесконечное число опытов, если бы мы не создали предварительно некоторых гипотез и не совершенствовали бы их в дальнейшем, путем сравнения с явлениями. То, что мудрейший Ломоносов разъяснил относительно течения этой тонкой материи в облаках, должно оказать величайшую пользу тем, которые хотят приложить свои силы к решению этой задачи. Прекрасны также его соображения об опускании верхнего воздуха и возникающем вследствие этого сильном холоде. Ведь то, что в высших слоях атмосферы царит сильный холод, достаточно доказано наблюдениями, но каким образом этот холодный воздух понуждается к опусканию, мне кажется, можно показать из точнейших принципов гидростатики» [38, л. 99—100; 7, стр. 251—252].

В ответ на письмо Шумахера от 1 января 1754 г. Эйлер 12 февраля 1754 г. писал: «...что касается того, что Ваше благородие сообщили мне о господине Ломоносове, я просмотрел его работы и не мог в них заметить, чтобы он где-либо с презрением отзывался о великих людях, но, без сомнения, он часто позволяет себе это в речах, приводя этим в недоумение своих коллег. Особенно жаль из-за его прекрасных дарований, что он допускает высокомерию господствовать над его чувствами» [36, л. 87; 25, стр. 528].

Оба приведенные письма Эйлера показывают, что великий математик по-прежнему высоко ценил творчество Ломоносова и всеми мерами старался оградить его от неосновательных нападок, которым тот подвергался в стенах Петербургской академии наук со стороны некоторых ученых и в первую очередь Шумахера.

В феврале 1754 г. возобновил переписку с Эйлером и сам Ломоносов. Посланное им 12 февраля 1754 г. к Эйлеру в Берлин письмо настолько интересно не только для восстановления взаимоотношений между обоими учеными, но и для биографии его автора, что мы позволим себе процитировать его здесь в несколько большем объеме, нежели это делалось в отношении других писем.

Желая объяснить Эйлеру причины своего столь длительного молчания, Ломоносов начал письмо с их изложения: «Причиной столь давно прервавшейся нашей переписки было только то обстоятельство, которое заставило и адъюнкта Котельникова посетить сначала Лейпциг, напоследок уже Берлин[10]. А затем различные занятия и исследования, которые

---

[10] Здесь Ломоносов имеет в виду политические события, в частности перерыв в дипломатических сношениях между Россией и Пруссией, который привел к тому, что командированный весной 1751 г. в Берлин к Эйлеру для усовершенствования в

я производил за это время, не давали случая письменно поговорить с Вами, славнейший муж. В течение трех лет я был весь погружен в физико-химические испытания, касающиеся учения о цветах. И труд мой оказался не бесплодным, так как кроме результатов, полученных мною при различных растворениях и осаждениях минералов, почти три тысячи опытов, сделанных для воспроизведения разных цветов в стеклах, дали не только огромный материал для истинной теории цветов, но и привели к тому, что я принялся за изготовление мозаик. Сделанный мною образчик, а именно, образ Божьей Матери, я поднес государыне, когда в 1752 г. праздновалось торжество ее тезоименитства. Он ей понравился, и это еще возбудило меня. 16 декабря того же года по постановлению Правительствующего Сената дана на 30 лет привилегия на производство таких и подобных же работ из цветного стекла мне одному, а всем прочим запрещено, и пожаловано 4000 рублей на устройство мастерской» [6, стр. 157—158].

Рассказав далее о том, что ему для устройства этой «мастерской» был «пожалован» обширный земельный участок в нескольких десятках верст от Петербурга, что там им уже построен «стекольный завод», Ломоносов продолжал: «Итак, Вы понимаете, славнейший муж, что я прервал нашу переписку так надолго не вследствие какого-либо охлаждения. Я ведь всегда очень высоко ценил Вашу дружбу. Итак, перенесите, прошу Вас, дружелюбно и спокойно неаккуратность моей переписки и примите еще и следующее извинение: я вынужден здесь быть не только поэтом, оратором, химиком и физиком, но и целиком почти уйти в историю. Прошедшей весной я провел некоторое время в Москве, ожидая подписи дарственной, и августейшая императрица, удостоив меня милостивейшей беседы, заявила, между прочим, что ей приятно будет, если я напишу моим слогом отечественную историю. Итак, вернувшись в Петербург и составляя недавнюю мою речь, я часто за самой работой ловил себя на том, что душой я блуждаю в древностях российских» [6, стр. 158].

Следующие далее строки письма касаются, несомненно, — вне связи с приводившейся выше перепиской между Шумахером и Эйлером — вопроса об отношении Ломоносова к тем его «нападкам на писания великих мужей», к которым ему нередко приходилось прибегать в своих научных спорах. «Поэтому,— писал Ломоносов,— мною пропущено не мало доказательств того, что верхняя атмосфера при полном спокойствии должна нередко спускаться в нижнюю. Так же точно не коснулся

математических науках адъюнкт С. К. Котельников был вынужден поехать первоначально в Лейпциг к профессору астрономии Г. Гейнзиусу, и лишь в июле 1752 г. переехал в Берлин к Эйлеру.

я и многого, что совершенно разрушило бы [представление] о хвостах комет, состоящих будто бы из паров. Признаюсь, что я главным образом и оттого все это оставил, чтобы, нападая на писания великих мужей, не показаться скорее хвастуном, чем искателем истины. Эта же самая причина мне давно уже препятствует предложить на обсуждение ученому свету мои мысли о монадах. Хотя я твердо уверен, что это мистическое учение должно быть до основания уничтожено моими доказательствами, но я боюсь опечалить старость мужу[11], благодеяния которого по отношению ко мне я не могу забыть; иначе я не побоялся бы раздразнить по всей Германии шершней-монадистов» [6, стр. 158—159].

Получив это полное глубокого к нему уважения письмо, Эйлер не замедлил ответить. Уже 19 марта он писал: «Я всегда изумлялся Вашему счастливому дарованию, выдающемуся в различных научных областях. Вы объясняете явления природы с исключительным успехом при помощи теории, и я с великой радостью усмотрел из ваших писем, доставивших мне большое удовольствие, что замечательные заслуги Ваши встречают все большее признание и по достоинству награждены августейшей императрицей, От души поздравляю Вас с этой исключительной милостью, желаю Вам совершенного здоровья и сил достаточных, чтобы выносить такие труды и превзойти ожидания, которые Вы возбудили относительно себя.

Ваши опытные исследования относительно природы цветов, конечно, скоро появятся в «Комментариях» Академии; весьма стремлюсь познакомиться со всем, подробно иллюстрирующим это возвышенное учение, а особенно узнать установленную Вами теорию. Я уже давно, на основании обыкновенных опытов, был вынужден отказаться от теории Ньютона, так как не мог истолковать ни истечение лучей наподобие реки, ни их отражения в непрозрачных телах, от которого происходят цвета. Поэтому я придумал другую теорию...» [6, стр. 164].

Изложив далее довольно пространно свою теорию цветов и те сомнения, которые возникли у него при ее разработке, в частности в вопросе о цветах непрозрачных тел, Эйлер закончил этот раздел письма такими словами: «Правда, эта теория, которую я пространнее развил в нескольких диссертациях, весьма нуждается в подкреплении многочисленными опытами, и не сомневаюсь, что ее можно усовершенствовать при помощи Ваших опытов, произведенных так тщательно» [6, стр. 165].

«Вообще, — писал далее Эйлер, — то, что Вы, славнейший муж,

---

[11] Здесь Ломоносов имеет в виду своего марбургского учителя Христиана Вольфа.

исследовали относительно наведения разных цветов на стекла, достойно Вас. Наши химики считают особенно важным это открытие, и если Вы захотите переслать мне какой-нибудь маленький образчик через господина Софронова [12], то я его буду рассматривать с величайшей благодарностью» [6, стр. 165].

На высказанные Ломоносовым в письме от 12 февраля 1754 г. соображения о причинах, мешающих ему «предложить на обсуждение ученому свету» свои мысли по ряду вопросов, в том числе о природе кометных хвостов и о монадах, Эйлер отвечал так: «Не знаю, видели ли Вы, что я писал интересного по поводу кометных хвостов, в которых я отрицаю всякое наличие пара. Мне очень интересно, что Вы подробнее скажете по этому поводу. Монады уже почти всеми отвергнуты, и многие философы, последователи Вольфа, среди которых на первом месте стоит Плакет, признались, что впали в ошибку; поэтому Вам нечего сомневаться относительно опубликования Ваших соображений на этот счет» [6, стр. 165].

Заканчивалось письмо Эйлера к Ломоносову, подобно другим его письмам к последнему, теплой, дружественной фразой: «Прощайте, муж славнейший, и не оставляйте меня и впредь Вашей дружбой, для меня всего драгоценнейшей» [6, стр. 165].

Как видно, больше всего заинтересовало Эйлера в письме Ломоносова от 12 февраля сообщение о работе последнего над теорией цветов, а также те почти три тысячи опытов, в результате которых ему удалось приготовить стекла различной окраски и наладить производство мозаик. Занимаясь на протяжении многих лет разработкой теории света и цветов [13], Эйлер, естественно, не мог пройти мимо новой работы, посвященной этому вопросу, а особенно мимо исследований Ломоносова, творчество которого он так высоко ценил. Особенно интересовали его работы Ломоносова еще и потому, что в основе их лежала громаднейшая экспериментальная работа, чем сам Эйлер, как известно, занимался мало. Излагая Ломоносову свою теорию цветов, и в частности раздел ее, объясняющий природу окраски непрозрачных тел, он прямо пишет, что вся эта его теория «весьма нуждается в подкреплении многочисленными опытами», и высказывает надежду, что ее можно усовершенствовать именно с помощью опытов Ломо-

---

[12] Эйлер имеет в виду адъюнкта Петербургской академии Софронова, который должен был вскоре направиться к нему в Берлин для усовершенствования в математических науках.

[13] Наиболее полное изложение работ Эйлера по теории света и цветов на русском языке см. в статье С. И. Вавилова [39].

носова. Заслуживает внимания и та просьба, с которой обратился великий математик к своему петербургскому коллеге — прислать ему «какой-нибудь маленький образчик» «наведения разных цветов на стекла».

Оставаясь верным своей привычке, Ломоносов и на этот раз ответил Эйлеру не сразу, но только 28 ноября 1754 г., т. е. через восемь месяцев после получения его письма. Возможно, что ответ задержался бы еще более, если бы в жизни Ломоносова не произошли некоторые события, побудившие его обратиться к Эйлеру за помощью немедля.

После того, как вышедший в 1750 г. первый том «Новых комментариев» Петербургской академии, в котором были опубликованы диссертации Ломоносова «Размышления о причине теплоты и холода», «Опыт теории упругости воздуха», «Прибавление к размышлениям об упругости воздуха» «Диссертация о действии химических растворителей вообще» и «О вольном движении воздуха в рудниках примеченном», стал известен ученым Западной Европы, в научных журналах время от времени стали появляться посвященные ему обзоры. В некоторых из этих обзоров, наряду с другими статьями, резко критиковались и диссертации Ломоносова, причем критика была как правило несправедливой. Критиковались диссертации Ломоносова в лейпцигском журнале «Commentarii de rebus in scientia naturali et medicina gestis» (vol. I, Pars II, Lipsiae, 1752, стр. 222—227), в эрфуртской «D. R. A. Vogels... Medicinische Bibliothek» [Bd. 2, Erfurt und Leipzig, 1753 (St. 14, 1752), стр. 332—335], в «Hamburgisches Magazin, oder gesammelte Schriften, zum Unterricht und Vergnügen aus der Naturforschung und den angenehmen Wissenschaften überhaupt» (Bd. II, St. 3 u. 4, Hamburg und Leipzig, 1753, стр. 315—316, 385—386) и в некоторых других периодических изданиях.

Все эти выступления против его работ, естественно, вызывали возмущение со стороны Ломоносова. Еще большего напряжения достигло возмущение ученого, когда он узнал, что некий магистр И. X. Арнольд, желая занять место доцента физики в Эрлангенском университете, защитил в 1754 г. диссертацию «О невозможности объяснить теплоту посредством вращательного движения частиц тела вокруг их осей», где пытался показать несостоятельность молекулярно-кинетической теории теплоты Ломоносова. Опубликованный в журнале «Staats und Gelehrte Zeitung des Hamburgischen unpartheyischen Correspondenten» (Am Freitage den 22 November. Anno 1754, Num. 187, Hamburg, 1754) отчет о защите этой диссертации настолько задевал научный престиж Ломоносова, что он решил немедля дать должную отповедь как Арнольду, так и другим критикам его работ.

Написав специальную статью «Рассуждение об обязанностях журналистов при изложении ими сочинений, предназначенное для поддержания свободы философии» [3, стр. 201—232], являющуюся ответом всем критиковавшим его работы авторам, и решив, что публикация ее в России не окажет должного воздействия на общественное мнение европейских ученых, Ломоносов решил отослать ее Эйлеру с тем, чтобы последний теми или иными путями сделал ее известной широким кругам ученых.

Упомянутое выше письмо к Эйлеру от 28 ноября 1754 г. и было тем сопроводительным письмом, при котором Ломоносов направил великому математику свое «Рассуждение об обязанностях журналистов».

«Хотя и о многом хотел бы я в этом письме известить Вас, — писал он Эйлеру,— в особенности же сообщить Вам мысли мои о происхождении цветов, но мешает мне недостаток времени, ибо должен я спешить похвальным словом Петру Великому, которое должен буду произнести 19 декабря. К тому же меня тревожит наглость рецензентов, которые с язвительностью Теона наперерыв терзают мои рассуждения, когда как они Вами рассмотрены и одобрены Вашим авторитетным приговором. Конечно, Вам, муж проницательнейший, известно, что издатель лейпцигского «Журнала естествознания и медицины» не столько из любви к науке, сколько по недоброжелательству напал на мои труды, и, плохо поняв их, жестоко отделал. Посылаю на Ваше проницательное рассмотрение яркий образчик его злобы и тупости и вместе с тем почтительнейше прошу: подобно тому, как Вы с особенною благосклонностью оказали мне помощь в моем отечестве, то не поскучайте защитить меня своим покровительством и в чужих странах. Пример вышеозначенного рецензента увлек многих других, и они с яростию восстали против меня, а именно: какой-то Фогель в своей «Медицинской библиотеке», также издатель «Гамбургского магазина» и некто Арнольд из Эрлангена, о диссертации которого я недавно читал благоприятный отзыв в гамбургской газете» [6, стр. 179].

Переходя к конкретному изложению своей просьбы, Ломоносов писал дальше: «Итак, если Вы по своей благосклонности не погнушаетесь помочь мне, то я нахожу самым удобным к тому способом, чтобы с защитой приложенного здесь опровержения (которое представляю на Ваше усмотрение изменить и, может быть, смягчить) по напечатании его публично выступил в каком-либо университете человек ученый (как в Эрлангене был против меня диспут Арнольда); после же можно будет поместить в ученом журнале разбор этого выступления против врагов моих. Издержки напечатания мною будут сполна возвращены. Впрочем, настоящее возражение мое может быть издано в форме программы под чужим именем. Между тем предупреждаю Вас, что здесь в Петербурге никто не знает и знать не будет об этих моих предложениях: почему и Вас покорнейше прошу, чтобы все это было исполнено втайне. Подозреваю, что и здесь есть немаловажные особы, которые принимают участие в таковом моем опорочивании. Это Ваше благодеяние останется вечным залогом нашей дружбы; я со своей стороны никогда не перестану со всею искренностию поддерживать ее и оказывать Вам всевозможные знаки моей благодарности» [6, стр. 179—180].

В приписке к этому письму, сделанной после подписи и даты, Ломоносов сообщал Эйлеру об интересовавших его образчиках цветного стекла: «Камешки для мозаичных работ я давно уже передал в Канцелярию для пересылки Вам» [6, стр. 180].

Будучи более опытным в делах, касавшихся того, как следует реагировать на различного рода нападки критиков, Эйлер отнесся к этому взволнованному письму Ломоносова и изложенным в нем фактам довольно спокойно. Еще до того, как ответить на это письмо Ломоносову, он 20 декабря того же 1754 г. писал Г.-Ф. Миллеру, в то время конференц-секретарю Петербургской академии наук: «Господин советник Ломоносов писал ко мне по поводу нелепых критик на его сочинения. Меня это дело тем менее удивляет, что я уже привык видеть, как жестоко все мои сочинения и издания здешней Академии отделываются лейпцигскими и гамбургскими рецензентами, в чем немалое участие принимает, кажется, господин Кестнер, не умеющий держать в узде своего сатирического духа. Волноваться из-за этих людей значило бы тратить попустому время, тем более, что они еще чванятся, когда видят, что на них досадуют. Но господин Формей хочет защитить господина Ломоносова в своем журнале. Можно бы сверх того в следующем томе «Комментариев» поместить предостережение, чтобы публика не доверяла так называемым ученым ведомостям» [6, стр. 122—123].

Спустя десять дней, 31 декабря 1754 г., Эйлер ответил Ломоносову. Как и в только что цитировавшемся письме к Миллеру, он весьма спокойно относился к описанным Ломоносовым нападкам на его диссертации и вообще не придавал этому сколько-нибудь серьезного значения.

«Бесстыдное поведение большинства немецких газетных писак,— писал он своему петербургскому коллеге,— дело всем настолько известное, что меня больше совершенно не удивляет, когда приходится встречаться с издевательским продергиванием ими самых блестящих произведений. Эти люди полагают, что подобным способом они приобретают особо громкое имя, втирают очки невеждам, будто им знакомы даже ничтожнейшие материи и что им принадлежит право являться судьями важнейших исследований, которые они обычно рассматривают как мелочи. Наша здешняя Академия это уже в достаточной мере испытала, ибо почти всё, появляющееся в наших Мемуарах, наглым образом осмеивается, при этом обычно особо выделяется профессор Кестнер в Лейпциге, который пользуется большим влиянием не только в лейпцигских, но и в геттингенских и гамбургских научных журналах. С нашей стороны делались попытки противодействовать этой наглости, но добились лишь того, что они еще усиливают свои издевательства. Мой совет всегда был — относиться к этой злобе с презрением, ибо подобным людям, пишущим исподтишка, ничто не может доставить большего удовольствия, чем сознание, что их непристойности ранят и вызывают раздражение. При подобных условиях я редко читаю так называемые научные журналы, не читал ничего и из того, в чем Ваше высокородие усмотрели основание для столь серьезного возмущения. На тех, кто хоть немного знаком с этим делом, подобные нелепые оценки не могут произвести впечатления, ибо хорошо известно, что все, имеющееся в книгах по физике о причине теплоты, отнюдь не достаточно для того, чтобы хоть несколько осветить этот серьезный вопрос: поэтому усилия тех, которые над ним работают, неизменно заслуживают высокой похвалы. Поэтому нужно питать особую признательность к Вашему высокородию, поскольку Вы весь этот вопрос извлекли из темноты и положили счастливое начало его обсуждению. Предложение Вашего высокородия о проведении Вашей защиты путем диспута в каком-либо университете я бы затруднился осуществить, и подобный диспут, как и большинство ему подобных, навсегда остался бы в неизвестности и не был бы отмечен никем из пишущих в журналах. Тем временем я передал статью Вашего высокородия нашему коллеге господину профессору Формею, который мне почти обещал вести ее защиту во французском журнале, что мне кажется единственным и лучшим путем.

Далее предоставляю усмотрению Вашего высокородия, не следовало ли бы снабдить новый том «Комментариев» кратким напоминанием, исходя из того, что большинство рецензентов преподносят их содержание публике в неверном и искаженном виде и что публика не должна обращать внимания на подобные рецензии, причем можно было бы одновременно высказать по отношению к ним презрение, которое для них было бы более болезненным, чем серьезные опровержения» [6, стр. 184—185].

Последний из приведенных абзацев письма полностью повторяет мысль, высказанную Эйлером еще раньше, в письме к Миллеру.

В конце письма Эйлер вновь напомнил Ломоносову о своем желании более обстоятельно познакомиться с его воззрениями на природу цветов. «Ваше высокородие возбудили во мне большое желание познакомиться с Вашими соображениями по вопросу о причине цветов, так как я уже в течение длительного времени старался внести бо́льшую ясность в этот вопрос, поскольку он относится к области оптики» [6, стр. 185].

Высказав далее несколько мыслей по этому вопросу, Эйлер продолжал: «...ожидаю поэтому получить по наиболее существенным пунктам разъяснений от Вашего высокородия, каковую мою надежду подкрепляют приданные Вами стеклу столь прекрасные и различные краски, которыми я с величайшим наслаждением любуюсь у любезно пересланных мне кусочков, за которые я настоящим приношу свою почтительнейшую, хотя и слишком позднюю, благодарность» [6, стр. 185].

Возвращаясь к основному предмету этого письма Эйлера к Ломоносову, т. е. к тем советам и обещаниям, которыми великий математик ответил своему петербургскому другу на просьбу защитить его от несправедливых нападок критиков, следует сказать, что здесь Эйлер проявил по отношению к Ломоносову исключительную чуткость и доброжелательность.

Посоветовав Ломоносову не обращать серьезного внимания на все эти «наглые» нападки «немецких газетных писак», «бесстыдное поведение» которых широко известно, Эйлер в то же время сделал все зависящее от него для выполнения его просьбы. Еще до написания цитированного письма он попросил секретаря Берлинской академии И.-Г.-С. Формея опубликовать присланное Ломоносовым «Рассуждение об обязанностях журналистов» в издававшемся в эти годы Формеем научно-критическом журнале на французском языке «Новая германская библиотека». Относясь с большим уважением и к Эйлеру, и к Ломоносову, Формей выполнил эту просьбу. В течение первых трех месяцев 1755 г. он перевел эту статью Ломоносова на французский язык и опубликовал ее в «Nouvelle Bibliothèque Germanique ou Histoire littéraire de l'Allemagne, de la Suisse et des Pays du Nord» (Tome seizième, Seconde Partie, Amsterdam, 1755, стр. 343—366).

Посылая 16 мая 1755 г. Ломоносову оттиск этой статьи, Формей в сопроводительном письме писал: «Как я желаю Вам сделать обязательство во всем, что от меня зависит, то я исполнил и посылаю Вам при сем листки из моего журнала, где оная диссертация напечатана. Сие было должность, чтобы защитить толь праведное Ваше дело от таких неправедных поносителей» [6, стр. 191].

Нет сомнения, что всем тем, что сделал для него в рассматриваемом вопросе Эйлер, Ломоносов остался весьма доволен. Недовольным, однако, в результате остался Эйлер, и не без основания.

Получив приведенное выше в отрывках письмо Эйлера от 31 декабря 1754 г., Ломоносов, не придав, по-видимому, этому никакого значения, опубликовал его без разрешения автора в издававшемся в те годы в Петербурге бароном Теодором-Генрихом Чуди (Шевалье де Люсси) французском журнале «Le Caméléon Littéraire» (St.-Petersbourg, № 20, 18 mai 1755, стр. 453—456).

Когда об этом стало известно Эйлеру, он был крайне недоволен самовольным поступком Ломоносова, как это видно из писем Эйлера к Миллеру и Шумахеру от 24 июня 1755 г.

В письме к Миллеру Эйлер писал: «Тем не менее, мне очень больно, что господин Ломоносов напечатал мое письмо в Хамелеоне, ибо хотя всем известно, что господин Кестнер большой охотник до насмешек и надеется возвысить свои маленькие заслуги, унижая других, однакож я вовсе не желаю из-за этого с ним ссориться; если бы Хамелеон только опустил имя Кестнера и поставил проф..., то для Ломоносова было бы все равно, а меня бы это избавило от неприятности» [6, стр. 124].

В письме к Шумахеру об этом говорилось следующее: «Господин Ломоносов оказал мне плохую услугу, дав напечатать в Хамелеоне письмо мое, которое я дружески написал к нему; если б он опустил только имя проф. Кестнера или означил его точками, как в подобных случаях часто делается, то это не стоило бы внимания. Так как, однакож, справедливость того, что мною написано, очевидна, и господин Кестнер, как известно, старается возвысить себя, унижая других, то ему приходится смолчать, а те, на кого он нападал, будут радоваться его невзгоде» [6, стр. 124].

Сообщая о своем недовольстве действиями Ломоносова Миллеру и Шумахеру, Эйлер самому Ломоносову, насколько известно, об этом не написал. Вероятно, Эйлер понимал, что, публикуя указанное письмо, Ломоносов не думал его обидеть.

Возможно, что причиной большого недовольства Эйлера Ломоносовым была не только публикация последним его письма, но и некоторые другие обстоятельства, в частности следующие.

В начале того же 1754 г. в Академии появилась вакансия на должность профессора физики и механики. При обсуждении в Академическом собрании 14 марта вопроса о замещении этой вакансии Ломоносов предложил пригласить на эту должность профессора математики и философии

Марбургского университета И.-К. Шпангенберга, а Гришов — профессора из Галле И.-П. Эбергардта.

Принявший в начале марта 1754 г. на себя обязанности конференц-секретаря Академии Миллер 29 марта сообщил об этих предложениях Ломоносова и Гришова Эйлеру и попросил его высказать свои соображения по этому вопросу.

Отвечая 16 апреля 1754 г. на эту просьбу Миллера, Эйлер дал весьма нелестный отзыв о предложенных Ломоносовым и Гришовым кандидатах на замещение профессорских должностей и со своей стороны предложил в качестве кандидатов на эти места профессора Т. Майера из Гёттингена, профессора Г.-Ф. Бермана из Виттенберга и профессора А.-Г. Кестнера из Лейпцига.

С большой похвалой упомянут был Эйлером в этом же письме его ученик адъюнкт Петербургской академии С. К. Котельников, который, по его мнению, также заслуживал профессорского звания.

Получив письмо Эйлера, Миллер счел своим долгом познакомить с ним и Ломоносова. Трудно сейчас понять, почему все это принималось Ломоносовым так близко к сердцу, но, ознакомившись с письмом Эйлера, он остался весьма им недоволен.

«Письмо господина Ейлера,— писал он 7 мая 1754 г. Миллеру из Усть-Рудицы в Петербург,— прочитал я не без удивления. Шпангенберга и Ебергардта признает за таких людей, которые в Академии негодны, затем что ничего не писали годного в Комментарии. Сие учинено против справедливости и против его самого. Он рекомендовал Академии таких людей уже прежде, которых сочинения в Комментарии мало годны, и только на будущее надеялся. Также и ныне представляет Мейера, Кестнера и Бермана, которые в ученом свете не чудотворцы» [6, стр. 168].

Приведя далее примеры, долженствовавшие, по его мнению, показать правоту его суждения по этому вопросу и ошибочность суждений Эйлера, Ломоносов, сознательно или бессознательно, допустил в них ряд нелюбезных и даже весьма резких выражений по отношению к великому математику. Так, говоря о неверных, по его мнению, суждениях Эйлера о предложенном Гришовым кандидате Эбергардте, Ломоносов писал: «Что ж до Эбергардта надлежит, то его сочинения весьма не хуже Краценштейновых. Разве только тем негодны, что он Невтоновой теории в рассуждении цветов держится. Я больше, нежели господин Ейлер, в теории цветов с Невтоном не согласен, однако тем не неприятель, которые инако думают» [6, стр. 169].

Высказываясь по поводу высокой оценки, данной Эйлером Котельникову, Ломоносов заявлял: «В рассуждении Котельникова нет ли, полно, пристрастия. Господин Ейлер сам не такой великой был математик, когда здесь произведен в профессоры» [6, стр. 169]. «Итак,— писал Ломоносов далее,— мое мнение состоит в том, чтобы для физики експериментальной и для курса математического выписать профессора Шпангенберга, для механики Ебергарда или Бермана; вышшую математику Котельникову оставить» [6, стр. 169].

Прекрасно, по-видимому, понимая, что эти его неодобрительные высказывания об Эйлере и его суждениях могут вызвать соответствующую реакцию со стороны последнего, Ломоносов, заканчивая письмо, писал: «Сие прошу сообщить его сиятельству господину президенту, а господина Ейлера о том не уведомлять, затем чтобы дружба моя с ним не нарушилась; правду больше всего почитая, притом стараюсь, чтоб без ее нарушения дружба сохранилась» [6, стр. 169]. Выполнил ли Миллер эту просьбу Ломоносова, или нет, неизвестно. Если учесть те взаимоотношения, которые существовали в описываемое время между этими учеными, то можно допустить, что с этой просьбой он мог и не посчитаться.

Само собой разумеется, что если содержание этого письма стало Эйлеру известным, то оно могло послужить еще одной из причин к тому его большому недовольству поведением Ломоносова, которое он высказывал в своих письмах 24 июля 1755 г. к Миллеру и Шумахеру.

Небезынтересно отметить, что, не соглашаясь с мнением Эйлера в вопросе о кандидатах на замещение вакантных профессорских мест и, более того, резко выступая против него лично, Ломоносов, тем не менее, дорожил дружбой с ним и желал, чтобы она «не нарушилась».

Несмотря на то, что ни Ломоносов, ни Эйлер не желали нарушения установившейся между ними дружбы, она все же прервалась. Ни в 1755, ни в 1756 г. Эйлер не написал Ломоносову ни одного письма. Не обращался в эти годы со своими письмами к Эйлеру и Ломоносов.

В течение пяти последующих лет, т. е. с 1757 по 1761 г., происходили события, из-за которых Эйлер и Ломоносов не могли бы при всем желании возобновить переписку. В 1756 г. Россия, как известно, в союзе с Австрией и Францией вступила в войну за австрийское наследство против Пруссии и Англии. Начатые русскими войсками в июле 1757 г. и продолжавшиеся затем вплоть до 1761 г. военные действия против Пруссии повлекли к прекращению сношений с последней, а следовательно, к почти полному прекращению переписки между учеными, жившими в Пруссии и в России. В это время Эйлер мог поддерживать только официальную и не очень регулярную переписку с Миллером и советником Академической канцелярии И. К. Таубертом.

Эйлер весьма сожалел, что состояние войны между Пруссией и Россией не позволяло ему по-прежнему переписываться ни с Петербургской академией, ни с отдельными ее учеными. Так, еще в период приготовления русской армии к выступлению против прусских войск, Эйлер в письме к Миллеру от 14 сентября 1756 г. писал: «...не хочу я верить, чтобы общественные беспокойства прервали нашу переписку и помешали моей преданности императорской Академии» [40, стр. 278]. В 1759 г. в письме к Тауберту, датированном 16 февраля, Эйлер по этому же поводу писал: «...по крайней возможности моей стараться буду должность свою к императорской Академии наук во всем исполнить. Хотя сумнительные времена не допускали меня поныне продолжать корреспонденцию мою с императорскою Академиею наук, однако я во все оное время сочинил много разных диссертаций, которые все по первому требованию перешлю тою дорогою, коею мне приказано будет, потому что я не знаю, каким трактом оные могу отправить» [40, стр. 278], а в 1760 г., в письме к Миллеру, датированном 18 января, писал: «...в особенности я желаю скорейшей перемены нынешних обстоятельств, чтобы без опасения продолжать с вами прежнюю переписку и доказывать на деле мое усердие к императорской Академии» [40, стр. 278].

К концу 1760 г., а особенно к началу 1761 г. так нетерпеливо ожидавшаяся Эйлером «перемена нынешних обстоятельств» наступила. Прерванная войной переписка между Эйлером и его коллегами из Петербурга возобновилась и вскоре достигла прежних размеров. К тому времени забылись Эйлером и его обиды на Ломоносова. В Ломоносове он по-прежнему видел замечательного ученого и отзывчивого товарища. Свидетельством этому может служить такой пример.

В конце сентября 1760 г., во время пребывания русских войск в Берлине, одна казачья часть в ходе военных действий нанесла имению Эйлера, находившемуся в Шарлоттенбурге (западное предместье Берлина), значительный материальный ущерб.

Однако, несмотря на ощутимые материальные потери, Эйлер не был в обиде за это на русскую армию. Описывая это событие в письме от 7 октября 1760 г. к Миллеру, он писал: «Впрочем, я всегда желал, что если бы когда-либо суждено было Берлину быть занятым иностранными войсками, то пускай это были бы русские» [40, стр. 278—279].

Рассказав в этом же письме о том, как у него побывала группа русских «храбрых офицеров», доставивших ему «величайшую радость своим посещением», Эйлер писал далее: «...все означенные русские господа офицеры выражали мне искреннее сожаление, уверяя при том, что по моему званию члена русской императорской Академии может быть исходатайствовано мне, за претерпенные мною убытки, вознаграждение от высочайших императорских щедрот» [40, стр. 279]. Приложив к письму «покорнейшее представление» на имя президента Петербургской академии Разумовского с просьбой оказать ему содействие в получении компенсации за указанные убытки, Эйлер просил Миллера передать это «представление» по назначению и со своей стороны также оказать ему в этом деле содействие [40, стр. 279—280].

Неизвестно, что было тому причиной, но ни в ноябре — декабре 1760 г., ни в январе — феврале 1761 г. никаких шагов для удовлетворения просьбы Эйлера в Петербурге сделано не было. 6 февраля 1761 г. Эйлер направил Миллеру еще одно письмо по этому же вопросу. На этот раз он приложил к нему письмо, адресованное уже не Разумовскому, как это сделал в октябре 1760 г., а Ломоносову. «...прилагаю при сем,— писал Эйлер,— рекомендательное письмо к господину советнику Ломоносову, надеясь, что он не откажет мне в своем добром содействии» [40, стр. 280].

Отыскать это письмо Эйлера к Ломоносову до сих пор не удалось. Однако уже приведенные строки показывают, что после многих лет молчания Эйлер вновь обратился к своему петербургскому коллеге, притом с письмом, которое, в свою очередь, заставляло и Ломоносова высказать свое отношение к Эйлеру.

В числе хранящихся в Архиве Академии наук СССР рукописей Ломоносова имеется такая, к сожалению не датированная, записка[14]: «Получив письмо от г. Эйлера о его разорении, докладывал я вчера о том его сиятельству, милостивому государю графу Михаилу Ларионовичу [Воронцову.— *В. Ч.*]. И его сиятельство склонен принять от Канцелярии на то реляцию. Для того надобно заготовить, а прежде того сообщить мне в доме его ж сиятельства» [42, л. 562; 25, стр. 752]. Текст этой записки показывает, что Ломоносов не только сочувственно отнесся к просьбе Эйлера, но и сделал

[14] П. П. Пекарский [25, стр. 752] и Л. Б. Модзалевский [41] датируют эту записку январем 1761 г. Однако поскольку само письмо Эйлера к Миллеру, к которому было приложено письмо на имя Ломоносова, датировано 6 февраля 1761 г., то согласиться с этой датой никак нельзя. Наиболее вероятно, что написана была Ломоносовым эта записка либо во второй половине февраля, либо в марте 1761 г., после получения им письма Эйлера.

все от него зависевшее для ее выполнения, а это в свою очередь говорит о том, что он по-прежнему с глубоким уважением относился к великому математику.

Весной 1763 г. понесенные Эйлером от русских войск убытки были возмещены. Хлопоты Ломоносова оказались, таким образом, не напрасными.

В октябре 1762 г. в стенах Петербургской академии наук произошло еще одно событие, показывающее, как высоко ценил Ломоносов Эйлера и в то время. Во второй половине этого года, подводя итоги объявленному ею ранее конкурсу на решение задачи «Исследовать, сколько несовершенства зрительных труб и микроскопов или мелкозоров, происходящие от различного преломления лучей и от круглого стекол вида, соединением многих стекол исправить или уменьшить можно, потом теорию совокупить с практикою и опытами утвердить», Академия наук печатала в своей типографии поступившую на этот конкурс работу шведского математика и физика Самуэля Клингенштерна «Опыты по уменьшению и исправлению аберраций световых лучей в сферических преломляющих стеклах и по усовершенствованию диоптрических телескопов» [43].

В конце октября, просматривая уже отпечатанный первый лист этой работы и найдя на четвертой его странице такие слова: «То, что написал по этому поводу славнейший математик Эйлер в берлинских Комментариях 1757 г., будучи лишено доказательств, написано, по-видимому, не столько для поучения читателей, сколько для того, чтобы побудить почитателей математики собственными силами взяться за дело», Ломоносов написал на полях полосы против этих слов: «Здесь автор несколько с презрением и неправедно говорит о г. Эйлере. А нам для многих причин надобно за него стоять. Итак, должно сие инако отменить» [44, стр. 635].

Хотя при обсуждении этого требования Ломоносова в Академическом собрании 1 ноября того же 1762 г. оно оказалось отвергнутым большинством присутствующих как «не основательное» [5, стр. 491], оно само по себе еще раз убеждает нас в том, что отношение великого русского ученого к Эйлеру было исключительно доброжелательным.

Никаких сведений, которые показывали бы, насколько интенсивной была переписка Эйлера с Ломоносовым после получения Ломоносовым упомянутого письма Эйлера от 28 февраля 1761 г., в нашем распоряжении не имеется. Все же можно думать, что они время от времени продолжали обмениваться письмами и после указанной даты. Об этом говорят следующие факты.

В 1762 г. Ломоносов много и упорно трудился над разработкой технологии получения стекла с различными коэффициентами светопреломления, пригодного для изготовления оптических инструментов, и сплавов для металлических зеркал, устойчивых к воздействиям внешней среды — температуры и влажности воздуха. 25 июня 1762 г. он внес в свой лабораторный журнал запись о том, что в тот день одна из очередных плавок указанного металла дала ему значительное по весу количество «доброго зеркального металлу без ноздрей» [4, стр. 421]. Вслед за этой записью Ломоносовым была поставлена в журнале нотабена, за которой следовало: «К Ейлеру» [4, стр. 421]. Можно думать, что, получив после многочисленных опытов желаемые результаты в изготовлении нужного качества составов для зеркал оптических инструментов, Ломоносов прежде всего решил написать об этом Эйлеру. О том, что Эйлер глубоко интересовался любым успехом практической оптики, Ломоносову, конечно, было хорошо известно. Написал ли Ломоносов Эйлеру, неизвестно.

Сохранилась другая интересная запись Ломоносова, относящаяся к весне 1764 г.:

«Писать 1) к Ейлеру и к Формею
2) к Генсиусу и к Володимеру Григорьевичу (Орлову.— *В. Ч.*).
3) к Варгентину
4) к Занотти
5) к Ноллету и Кондамину
NB. Ишпания
7) Лондон
8) к Бернулию и ко всем почетным членам Иностр. Парижской Академии» [6, стр. 29].

Эта запись показывает, что Ломоносов собирался писать Эйлеру и весной 1764 г. Было ли выполнено это намерение, также неизвестно.

Несколько особняком в переписке Ломоносова с Эйлером стоит нижеследующий эпизод, имевший место в феврале 1765 г., т. е. примерно за два месяца до смерти великого русского ученого.

Известно, что на протяжении почти всей своей работы в Петербургской академии Ломоносов, наряду со значительным числом друзей, искренне и с большим уважением относившихся к нему и как к ученому, и как к человеку, имел в ней немало врагов, всеми мерами старавшихся помешать ему в его творческой работе. Враги Ломоносова пытались внести разлад в его отношения с Эйлером. Выше уже говорилось о том, как еще в 1753—1754 гг. Шумахер безуспешно пытался очернить Ломоносова в глазах Эйлера.

В 1756 г. эту «миссию» взял на себя другой неприятель Ломоносова в Академии наук — возвратившийся в конце августа этого года после двухлетнего пребывания в Берлине, где он совершенствовался у Эйлера в математических науках, адъюнкт С. Я. Румовский.

Обучая Румовского математике, Эйлер проникся большой симпатией к нему. Еще в период пребывания в Академическом университете Румовский отличался большими способностями и усердием, что в свое время отмечалось и Ломоносовым[15], а в бытность у Эйлера он проявил исключительные успехи. В короткий срок Румовский в совершенстве овладел математикой и при отъезде из Берлина получил от своего учителя очень высокую оценку.

Трудно сейчас установить, что было тому причиной, так как жизнь и деятельность Румовского и как ученого и как человека до сих пор остается малоизученной, однако после возвращения из Берлина он почти сразу же занял по отношению к Ломоносову крайне враждебную позицию. Не ограничиваясь личными выпадами против своего университетского учителя, где это только представлялось возможным, Румовский делал все от него зависящее, чтобы восстановить против него других ученых, в том числе и Эйлера.

То недовольство Эйлера Ломоносовым, о котором рассказывалось выше, было Румовскому, конечно, хорошо известно, так как с июня 1754 г. по август 1756 г. он жил бок о бок с великим математиком[16] и должен был быть в курсе всех его дел. Рассчитывая, что это недовольство Эйлера при определенных условиях можно довести до настоящей вражды, Румовский начал систематически чернить Ломоносова в своих письмах в Берлин.

В первой половине 1756 г. Ломоносов сконструировал и построил принципиально новый оптический инструмент для наблюдений удаленных

[15] В «репорте» в Канцелярию Академии от 5 февраля 1753 г. об успехах приданных к нему «для наставления» академических студентов Ломоносов писал о Румовском: «Чтож до моих химических лекций касается, то имеют оные быть окончены около мая месяца сего 1753 года, и по окончании онаго явится успех каждого. Между тем могу засвидетельствовать, что на чинимые на лекциях моих вопросы способнее других ответствуют Степан Румовский, который по соизволению Канцелярии с прочими студентами на мои лекции прилежно ходит...» [7, стр. 190].

[16] Изучая математические науки у Эйлера в Берлине, Румовский не только слушал лекции последнего, но и жил в его доме, проводил часы отдыха в кругу его семьи и т. д.

предметов при недостаточном их освещении, названный им «ночезрительной трубой». Непонятная для многих ученых того времени физическая основа этого инструмента заставила некоторых из них выступить с резкими возражениями против этого изобретения. В числе последних был и Румовский. Однако если другие ученые ограничивались при этом лишь изложением своих возражений в Академическом собрании, то Румовский пошел гораздо дальше. Приглашенный Ломоносовым для более обстоятельного знакомства с опытным образцом его ночезрительной трубы, он не только не пожелал пронаблюдать с ее помощью предметы на местности при различной их освещенности, после чего, собственно, и можно было говорить о ее эффективности, но написал об этом инструменте Эйлеру совсем не то, что следовало.

«Имев честь быть допущенным к смотрению многих предметов в его (Ломонсова.— *В. Ч.*) телескоп,— писал Румовский Эйлеру 7 декабря 1756 г.,— я, однако, пользуясь им, не заметил никакой разности от того, что видят в обыкновенные телескопы, исключая того, что мне показались все предметы очень цветными и что радужные цвета представляются там в высшей степени совершенства, из чего заключаю, что решение этого вопроса, по мнению господина Ломоносова, заключается не в ином чем, как в размещении телескопских стекол так, чтобы радужные цвета были как можно более явственны» [25, стр. 600].

Утверждение Румовского, что видимые им в ночезрительную трубу Ломоносова предметы были «очень цветными и что радужные цвета представляются там в высшей степени совершенства», говорит о том, что наблюдал он удаленные предметы с помощью этой трубы днем, т. е. в тех условиях, для которых инструмент не предназначался, и на основании этого делал далеко идущие выводы [17].

Касаясь в этом же письме другого разрабатывавшегося в эти годы Ломоносовым вопроса — «количество движения пропорционально ли массе, помноженной на скорость или на квадрат скорости?»,— Румовский писал: «Господин Ломоносов хочет издать рассуждение, которым намеревается ниспровергнуть все, что до сих пор успели открыть, потому что он доказывает, что тяжесть тела не пропорциональна количеству вещества и что количество движения не пропорционально массе, помноженной на квадрат скорости. Если это сочинение явится в свет, то журналистам будет много работы, и вы, сделавший величайшие открытия, основанные на

[17] Изложение истории ночезрительной трубы Ломоносова см. у С. И. Вавилова [45].

этих началах, имеете справедливо опасаться такого сочинения...» [25, стр. 600].

Еще более пренебрежительно высказался Румовский о творчестве Ломоносова в письме к Эйлеру от 21 февраля 1757 г., в котором, например, есть такие строки: «...господин советник Ломоносов ничего не открыл для опровержения теории тяготения, ни вашей — об электричестве. Первую он старается уничтожить на основании одних умозрений, которые осмеливаюсь предложить на ваше обсуждение...»; и далее: «Что касается до третьего вопроса, то ваше толкование так ясно, что мне теперь кажется, что я его понимаю вполне, и надеюсь, что, после прочтения указанной статьи буду в состоянии доказать ложность мнения господина Ломоносова. В отношении этого вопроса он основывается на опыте, производимом при помощи маленького колеса, помещаемого в канале, чрез который течет вода. Этот опыт не заслуживает того, чтобы о нем рассказывать, потому что я сам в состоянии видеть несовершенство его и ложные заключения, которые он отсюда выводит...» [25, стр. 600—602]. Ясно, что роль Румовского состояла в том, чтобы представить Ломоносова великому математику как ученого, чьи труды не заслуживают сколь-либо серьезного внимания.

Одновременно с Румовским «непримиримую войну» против Ломоносова вел профессор Миллер. 1 июля 1756 г. Ломоносов прочитал в Публичном собрании Академии наук известное «Слово о происхождении света, новую теорию о цветах представляющее» [3, стр. 315—344]. На следующий день Миллер в письме к Эйлеру писал: «Что касается нашего вчерашнего собрания, то господин советник Ломоносов прочитал на русском языке сочинение о свете и цветах, в котором пытается утвердить новую теорию. В справедливости ее он обещал убедить прочих членов Академии потом, когда его труд будет переведен на латинский язык, о чем, посредством печати, может также сделаться известным и иностранным ученым» [25, стр. 596].

С такой же иронией писал Миллер об этой работе Ломоносова спустя год в письме к жившему в то время в Копенгагене почетному члену Петербургской академии профессору механики Х.-Г. Кратценштейну. Приведем наиболее яркий в этом смысле отрывок из этого письма, датированного 30 мая 1758 г.: «...если ваша система физики еще не готова, то ныне можете ее обогатить новою теориею господина советника Ломоносова о цветах. О ней было бы сообщено ранее, если бы только не в недавнее время сочинение о том появилось в латинской одежде. В то время, как она была произнесена в торжественном собрании и напечатана по-русски, никто не знал о ней из наших академиков-иноземцев и, следовательно, не мог высказаться о ней...» [25, стр. 596].

То обстоятельство, что Эйлер вскоре после окончания семилетней войны вновь обратился к Ломоносову как к другу с просьбой помочь ему получить компенсацию за понесенные во время войны убытки, дает основание думать, что особого влияния все эти выпады Румовского и Миллера против своего петербургского коллеги на великого математика не оказали.

В 1760—1764 гг. длившаяся в Академии наук на протяжении многих лет борьба между Ломоносовым и его врагами — Миллером, Румовским, Таубертом, Тепловым и другими «гонителями наук российских», как он их обычно называл — достигла высшего подъема. Усилилась в связи с этим в письмах указанных лиц к Эйлеру и тенденциозная информация о Ломоносове, его творческой деятельности и отношении к другим ученым.

Одним из наиболее активных противников Ломоносова по-прежнему оставался Румовский. Неоднократно повторявшиеся его нападки на Ломоносова по самым различным вопросам заставили, естественно, и последнего изменить свое отношение к этому человеку.

В конце 1764 г. Эйлер получил из Петербурга сообщение, что Ломоносов крайне враждебно настроен по отношению к его ученику Румовскому. От кого именно получил он это сообщение, неизвестно. Наиболее вероятно, что это был либо сам Румовский, либо Миллер, а скорее всего и тот, и другой.

Во второй половине февраля 1765 г. Миллер получил от Эйлера письмо, датированное 5 февраля. Наряду с другими имелись в этом письме и такие строки: «...я самым лучшим образом г. Румовского рекомендовал г. канцлеру. Положение его действительно заслуживает сожаления, потому что против него так сильно восстает г. советник Ломоносов. Конечно, у Румовского прекрасный ум, приносящий очень много чести русскому народу, и было бы в высшей степени непростительно, когда бы его стали притеснять его же собственные единоземцы. Я надеюсь, что г. канцлер всемерно заступится за него. Будьте так добры сказать г. Румовскому, что теперь он может свободно явиться к его сиятельству, но прежде пусть переговорит с молодым графом Воронцовым, которому я еще недавно дал истинное понятие о способностях Румовского...» [25, стр. 872].

Познакомившись неизвестно при каких обстоятельствах с этим письмом Эйлера и увидев, что великий математик стал целиком на сторону Румовского, Ломоносов был до глубины души этим оскорблен. Решив открыть Эйлеру глаза на истинные причины своей неприязни к Румовскому, Ломоносов начал писать в Берлин письмо.

«В высшей степени удивился я тому,— писал он,— что Ваше высокородие, великий ученый и человек уже пожилой, сверх того великий счетчик, так решительно просчитались в последнем своем выступлении. Ясно видишь, что высшая алгебра — жалкое орудие в делах моральных: столько известных данных для Вас оказалось недостаточно, чтобы вычислить одно маленькое, в половину уже известное количество? Вы достаточно знали, какой шельмой был для ученых Шумахер, и что ученик его, зять и преемник, еще хуже его; что Миллер — невежда и всеми первостепенными профессорами именуется бичем профессоров; что он сущий Маккиавель и постоянно был и есть возмутитель мира Академии. И, однако, Вы не могли заметить его лживых инсинуаций, касающихся Таубертовой комнатной собачки — Румовского. Тауберт, как только увидит на улице собаку, которая лает на меня, тотчас готов эту бестию повесить себе на шею и целовать под хвост. И он продолжает это до тех пор, пока ему нужен ее лай; потом он выкидывает ее в грязь и натравливает на нее других собак. То, что Ваше высокородие писали заклятому врагу всех честных людей, Миллеру, прилагаю здесь в извлечении с моими замечаниями. Впрочем, Вы не поставите мне в вину моих жестких выражений, потому что они исходят от сердца, ожесточенного неслыханной злостью моих врагов, безбожные нападки коих я хочу кратко представить Вашему высокородию... Мошенническое правило Шумахера: разделяй и будешь властвовать доныне в большом ходу у его преемника. Вашему высокородию очень хорошо известно, что Шумахер всегда натравливал молодых профессоров на старых. Кроме всего прочего, сообщаю то, что сам я вынес» [6, стр. 311—314].

Приступив далее к перечислению всех обид, которые были ему нанесены в Академии врагами, Ломоносов на четвертом пункте этого перечня остановился. Найденная черновая рукопись этого письма на этом месте обрывается. То обстоятельство, что письмо дошло до нас лишь в этом незаконченном черновике, дало основание ряду исследователей прийти к выводу, что оно вообще не было дописано и отправлено Эйлеру [7, стр. 686; 25, стр. 872; 6, стр. 313]. Известно, что в начале марта 1765 г., т. е. вскоре после того, как было начато это письмо, Ломоносов тяжело заболел и больше до самой смерти с постели не поднимался. Скорее всего поэтому указанное его письмо к Эйлеру и осталось недописанным и неотправленным. Впрочем, в числе других причин, которые могли побудить Ломоносова воздержаться от отправки этого письма Эйлеру, вероятна и следующая. Написанное в порыве чрезмерного гнева, оно содержало ряд оскорбительных выражений, относившихся не только к Шумахеру, Миллеру, Тауберту и другим его врагам, но и к самому Эйлеру. Трудно допустить, чтобы Ломоносов, обретя хладнокровие, решил послать своему старому другу такое письмо.

На описанном эпизоде история переписки Эйлера с Ломоносовым заканчивается. Как видно, научные связи Эйлера с Ломоносовым, которые так успешно развивались на протяжении многих лет и лишь в конце жизни последнего по причинам, не зависящим ни от того, ни от другого, оказались почти полностью прерванными, были ценны для них обоих и оказывали плодотворное влияние на их творчество. Пользуясь в течение длительного времени подлинно товарищеской поддержкой Эйлера, который, не в пример ряду близоруких современников, правильно оценил замечательные дарования Ломоносова, последний, естественно, со значительно большей уверенностью решал те научные проблемы, которые стояли перед наукой его времени. Для Эйлера длительная переписка его с Ломоносовым имела также немаловажное значение. Вместе с тем эта переписка служит еще одним наглядным примером того, как внимателен был великий математик к другим ученым, а особенно к тем, в чьем творчестве он видел залог дальнейших успехов науки.

Литература

1. Архив АН СССР, ф. 20, оп. 1, № 2
2. Архив АН СССР, ф. 20, оп. 1, № 3
3. М. В. Ломоносов, Полное собрание сочинений, т. 3, М.— Л., Изд-во АН СССР, 1952
4. М. В. Ломоносов, Полное собрание сочинений, т. 4, Изд-во АН СССР, 1955
5. Протоколы заседаний Конференции императорской Академии наук с 1725 по 1803 год, т. II, СПб., 1899
6. М. В. Ломоносов, Сочинения, т. VIII, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948
7. П. С. Билярский, Материалы для биографии Ломоносова, СПб., 1865
8. Т. П. Кравец, Ньютон и изучение его трудов в России. В кн.: Исаак Ньютон, 1643—1727. Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения. Под ред. акад С. И. Вавилова, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1943, стр. 318—320
9. Т. И. Райнов, Ньютон и русское естествознание. Там же, стр. 330—333
10. П. С. Кудрявцев, Ломоносов и Ньютон. Тр. Ин-та истории естествознания и техники АН СССР, т. 5, М., Изд-во АН СССР, 1955, стр. 33—51
11. G.-W. Krafft. Kurze Einleitung zur theoretischen Geometrie zum Gebrauch der studirenden Jugend in dem Gymnasio bei der kayserlichen Academie der Wissenschaften in S.-Petersburg. S.-Petersburg, 1740 (см. перевод: Г.-В. Крафт. Краткое руководство к теоретической геометрии, в пользу учащегося в гимна-

зии при императорской Академии наук российского юношества. Перевод с немецкого И. Голубцова, СПб., 1748)
12. Архив АН СССР, р. II, оп. 1, № 102
13. Архив АН СССР, ф. 3, оп. 1, № 519
14. Архив АН СССР, ф. 3, оп. 1, № 146
15. Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 20
16. Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 38
17. L. Euler, Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus, Petropoli, 1749, стр. 1—5
18. В. Л. Ченакал, Проблема оптического стекла в России XVIII века. «Природа», № 6, 92—99 (1939)
19. М. В. Ломоносов, Полное собрание сочинений, т. 1, Изд-во АН СССР, 1950
20. М. В. Ломоносов, Полное собрание сочинений, т. 2, Изд-во АН СССР, 1950
21. Архив АН СССР, ф. 3, оп. 1, № 456
22. Архив АН СССР, ф. 3, оп. 4, № 1
23. В. Л. Ченакал, Новые материалы о переписке Ломоносова с Леонардом Эйлером. В кн.: Ломоносов. Сборник статей и материалов, т. 3, М.— Л., Изд-во АН СССР, 1951
24. Архив АН СССР, ф. 136, оп. 1, № 134, л. 372
25. П. П. Пекарский, История императорской Академии наук в Петербурге, т. II, СПб., 1873
26. Б. Н. Меншуткин, Труды М. В. Ломоносова по физике и химии, М.— Л., Изд-во АН СССР, 1936, стр. 115
27. А. А. Елисеев, М. В. Ломоносов, Л., Учпедгиз, 1941, стр. 53—54
28. Л. Б. Модзалевский, Комментарии к переписке Ломоносова [6, стр. 221]
29. А. А. Морозов, Михаил Васильевич Ломоносов, М., Изд-во «Молодая гвардия», 1950, стр. 311—312
30. А. А. Елисеев, Примечания к работе Ломоносова «Размышления о причине теплоты и холода» [19, стр. 648—643]
31. Б. Г. Кузнецов, Творческий путь М. В. Ломоносова. М., Гостехиздат, 1956, стр. 68—69
32. B. Robins, Neue Grundsätze der Artillerie, enthaltend die Bestimmung der Gewalt des Pulvers nebst einer Untersuchung über den Unterschied des Widerstands der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen. Aus dem englischen übersetzt und mit den nöthigen Erläuterungen und vielen Anmerkungen versehen von Leonhard Euler, Berlin, 1745
33. Б. Н. Меншуткин, М. В. Ломоносов как физико-химик, СПб., 1904
34. Слово похвальное всепресветлейшей державнейшей великой государыне императрице Елизавете Петровне самодержице всероссийской, на пресветлый и торжественный день восшествия на всероссийский престол ея величества ноября 25 дня, который празднован в императорской Академии наук публичным собранием ноября 26 дня 1749 года, говоренное Михайлом Ломоносовым. СПб., 1749; см. также М. В. Ломоносов, Сочинения, т. IV, СПб., 1898, стр. 249—271
35. Panegyricus Elisabetae Augustae russiarum imperatrici patrio sermone dictus orante Michaele Lomonosow. Latine redditus eodem auctore, Petropoli, 1749
36. Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 44

37. Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 43
38. Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 40
39. С. И. Вавилов, Физическая оптика Леонарда Эйлера. В кн.: Леонард Эйлер, 1707—1783. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1935
40. П. П. Пекарский. История императорской Академии наук в Петербурге, т. I, СПб., 1870
41. Л. Б. Модзалевский, Рукописи Ломоносова в Академии наук СССР, М., Изд-во АН СССР, 1937, стр. 262
42. Архив АН СССР, ф. 3, оп. 1, № 259
43. S. Kliengenstiern, Tentamen de definiendis et corrigendis aberrationibus radiorum luminis in lentibus sphaericis refracti, et de perficiendo telescopio dioptrico, Petropoli, 1762
44. М. В. Ломоносов, Полное собрание сочинений, т. 9, Изд-во АН СССР, 1955
45. С. И. Вавилов, Ночезрительная труба М. В. Ломоносова. В кн.: Ломоносов. Сборник статей и материалов, т. 2, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1946, стр. 71—92.

W. L. TSCHENAKAL

EULER UND LOMONOSSOW
Zur Geschichte ihrer wissenschaftlichen Beziehungen

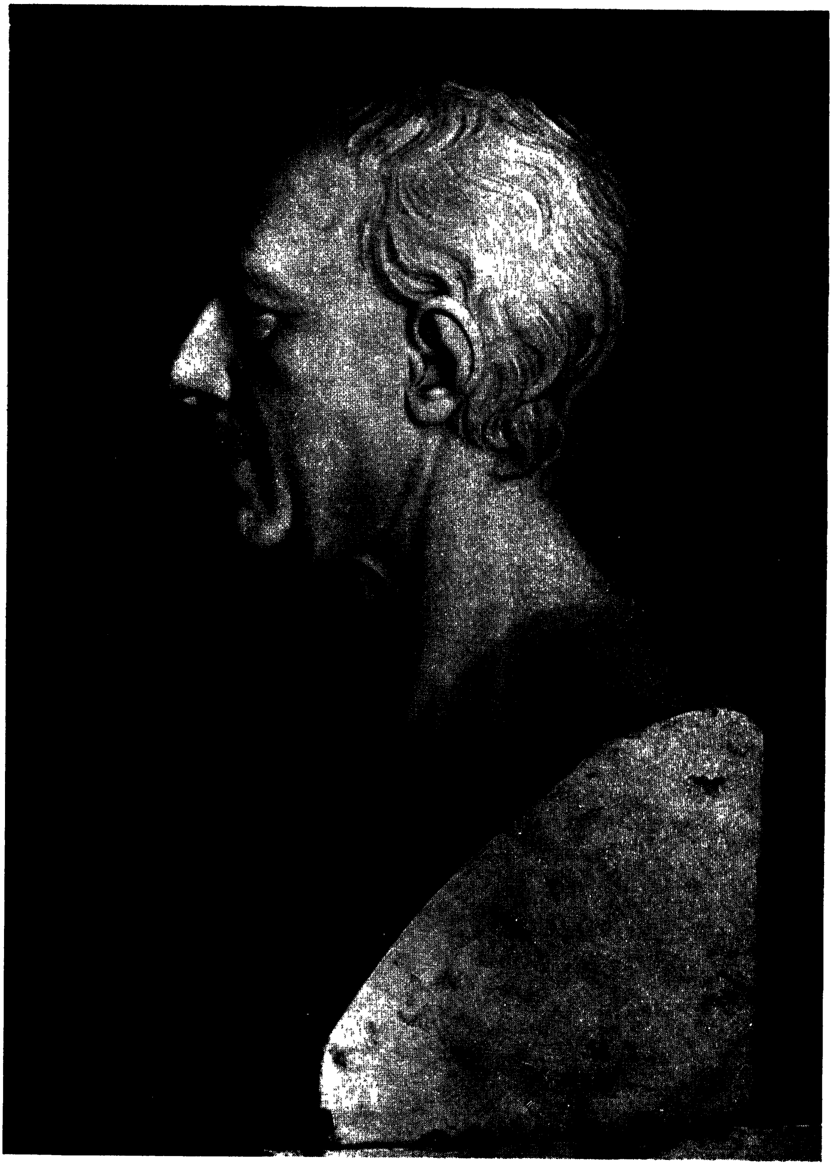
(Zusammenfassung)

In dem Aufsatz werden die wissenschaftlichen Beziehungen zwischen den beiden großen Gelehrten des 18. Jahrhunderts — Leonhard Euler und Michail Wassiljewitsch Lomonossow in Einzelheiten ans Licht gebracht.

Die Briefe Eulers an Lomonossow ebenso wie an die Petersburger Akademie der Wissenschaften bezeugen das ständige Interesse Eulers für Lomonossows Schaffen und enthalten eine hohe Würdigung seiner Arbeiten. Der Briefwechsel zwischen diesen Gelehrten von 1748 bis 1765 hat sich als fruchtbar für die Forschungen beider erwiesen.

Бюст, мрамор. Работа Д. Рашетта 1784 г.

(Академия наук СССР, Москва)



Бюст-герма. Мрамор. Конец XVIII в.

(Музей М. В. Ломоносова, Ленинград)

Э. ВИНТЕР и А. П. ЮШКЕВИЧ

О ПЕРЕПИСКЕ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА и Г. Ф. МИЛЛЕРА

Проследить переписку между двумя выдающимися учеными за продолжительный промежуток времени всегда заманчиво. История науки, история академических учреждений, к которым они принадлежали, часто находит в такой переписке более отчетливое отражение, чем в дошедших до нас официальных документах.

Большой интерес в этом отношении представляет переписка Леонарда Эйлера, опубликованная до сих пор лишь в незначительной части. Сам Эйлер придавал серьезное значение своей научной корреспонденции и тщательно ее сохранял. Узнав о кончине своего давнишнего корреспондента Хр. Гольдбаха, он писал 8. I 1765 г. (28. XII 1764 г.)[1] из Берлина в Петербург Г. Ф. Миллеру, что перед отъездом из Петербурга оставил там всю свою переписку, выражал желание получить ее обратно и добавлял: «... если кто-либо возьмет на себя труд ее прочитать, он найдет в ней многие важные вещи, публикация которых более пришлась бы по вкусу публике, чем самые глубокомысленные работы».

Эти слова можно в значительной степени отнести к переписке Эйлера с Миллером. Переписка начинается в конце 1734 или в начале 1735 г., когда Миллер находился в составе известной Сибирской экспедиции, и продолжается с перерывами вплоть до 14. II (25.I) 1767 г.; таким образом, она охватывает период целого поколения. Всего переписка состоит из 208 писем, среди них 111 писем Эйлера и 97 Миллера. Почти все эти письма хранятся в Архиве Академии наук СССР в Ленинграде [1], одно в ЦГАДА, одно письмо Эйлера принадлежит отдаленному его родственнику, д-ру Карлу Эйлеру в Гиссене.

Нас интересует прежде всего центральная часть этой переписки за 1754—1765 гг., когда Миллер был непременным секретарем Петербургской академии и официально поддерживал связь с Эйлером, который

[1] Здесь и в дальнейшем в скобках приводятся даты по старому стилю.

с 1741 г. работал в Берлинской академии. Таким образом, переписка делится на три части: первую (13 писем), включающую редкие письма 30-х и начала 40-х годов; вторую, гораздо более обширную, которую справедливо можно назвать ядром всей переписки и которая характеризует связи между Петербургской и Берлинской академиями, и третью часть, представляющую завершающий обмен деловыми письмами в 1765—1767 гг. (8 писем).

Оба корреспондента состояли в числе первых ученых, помогавших созданию Петербургской академии и постоянно принимавших самое деятельное участие в ее развитии.

Г. Ф. Миллер родился 29 (18). X 1705 г. в Герфорде в Вестфалии и прибыл в Петербург на два года раньше Эйлера, в 1725 г. Между ними сложились дружеские отношения, о чем свидетельствует первая часть переписки. Первое время Миллер преподавал в Академической гимназии латынь, историю и географию, а с января 1728 г. был привлечен управляющим делами Академии И. Д. Шумахером к разнообразной организационной работе и редактированию «Санкт-Петербургских ведомостей» и «Примечаний» к ним, издававшихся на русском и немецком языках. Как помощник и доверенное лицо Шумахера Миллер в то время был в весьма плохих отношениях со многими профессорами. Впрочем, дружба с Шумахером продолжалась недолго и уже в 1731 г. перешла во вражду, конец которой положила только смерть Шумахера в 1761 г.

2.II. (22.I) 1731 г. Миллер был назначен профессором истории Академии (в тот же день получил профессуру и Эйлер).

Ссора с Шумахером повлекла за собой отстранение Миллера от организационных дел. Следуя склонностям, Миллер обратился к занятиям историей и географией. В 1732—1733 гг. появились первые выпуски обширного собрания документов и сведений по русской истории «Sammlung Russischer Geschichte»; всего в 1732 — 1764 гг. Миллер опубликовал 9 томов этого собрания.

В 1733—1743 гг. Миллер вместе с профессором химии и натуральной истории И. Г. Гмелиным, студентом и в будущем академиком С. П. Крашенинниковым и другими принял участие во второй Камчатской экспедиции Беринга. Задачей Миллера было исследование истории и этнографии народов Сибири. Наряду с этим он занимался и географией этого края. Он собрал огромное количество ценных документов и устных преданий, которые вместе с записями его личных наблюдений составляют 38 томов «Портфелей Миллера», хранящихся в архивах СССР.

Когда Миллер, проделав, по его подсчетам, 31 362 версты, возвратился зимой 1743 г. в Петербург, Эйлер уже уехал, приняв приглашение во вновь основываемую Берлинскую академию. С отъездом Эйлера его дружеские отношения с Миллером заметно ослабели.

Оба, Миллер и Эйлер, пережили в 40-е годы XVIII в. немало тяжелого. Эйлер приехал в страну, где король был больше занят войной, чем науками, но в то же время хотел в значительной мере лично вершить судьбы Академии. Поэтому президентом так называемой новой Берлинской академии, которая в 1746 г. после долгих перипетий, наконец, начала свою регулярную деятельность, стал не Эйлер, а угодный королю француз Мопертюи, естествоиспытатель, возбудивший интерес ученой Европы, прежде всего своим Лапландским путешествием. Как относился к Эйлеру Фридрих II, видно из его переписки с братом Августом-Вильгельмом, которая до сих пор не изучена еще с достаточным вниманием. 28.X 1746 г. последний писал королю: «... г. Мопертюи познакомил меня с математиком Эйлером. Я нашел, что в нем подтверждается та истина, что все вещи несовершенны. Благодаря прилежанию он развил в себе логическое мышление и приобрел тем самым имя; но его внешность и неловкая манера выражаться затемняют все эти прекрасные качества и мешают получить от них удовольствие» [2].

Король ответил ему 31.X 1746 г. следующим образом: «Милейший брат! Я уже думал, что беседа с г. Эйлером не доставит тебе особого удовольствия. Его эпиграммы состоят в вычислении новых кривых, каких-либо конических сечений или астрономических измерений. Среди ученых бывают такие сильные вычислители, комментаторы, переводчики и компиляторы, которые полезны в республике наук, но в остальном отнюдь не блестят. Их употребляют подобно дорическим колоннам в архитектуре. Они принадлежат нижнему этажу, как опоры всего здания и коринфских колонн, являющихся его украшением» [2][2].

Несмотря на это, Эйлер ревностно исполнял обязанности директора физико-математического класса. Как в области научно-организационной, так и в области теоретических исследований и их приложений в практике он развил деятельность, которая не может не вызывать удивления. Ярким свидетельством этого навсегда остаются протоколы Берлинской академии за 1746—1766 гг.

Миллер также переживал в это время трудности. Он оказался в самом

[2] Слова Фридриха о переводчиках и комментаторах связаны с тем, что незадолго до того Эйлер опубликовал свой немецкий перевод английского труда по артиллерии Б. Робинса с обширными собственными дополнениями. («Neue Grundsätze der Artillerie», Berlin, 1745).

центре различных споров в Академии и стал в дурные отношения не только с Шумахером и его окружением, но с М. В. Ломоносовым и рядом других академиков. В 1747 г. Миллер изъявил намерение принять русское подданство (присягу он дал в начале следующего года) и был назначен историографом русского государства и ректором Академического университета. В 1749 г. Миллер подготовил для торжественного собрания Академии речь «Origines gentis et nominis Russorum», в которой, некритически используя легендарные сведения старинных русских летописей о призвании варяжских князей, развивал так называемую норманскую теорию происхождения Древнерусского государства. Эта речь не была произнесена, так как при предварительном обсуждении ее против основных положений Миллера решительно выступили М. В. Ломоносов, С. П. Крашенинников и Н. И. Попов [3, 4].

Споры в Академии привели в конце концов к тому, что осенью 1750 г. Миллер в наказание был на год переведен в адъюнкты; впрочем, уже в феврале 1751 г. он был прощен. Это было для Миллера горьким испытанием, которое он, однако, выдержал. Основываясь на личных долголетних изысканиях в Сибири, он продолжал работать над большой историей Сибири, которая стала первой и одной из наиболее основательных книг по истории этого края. Первый том этого труда вышел в 1750 г., второй при жизни автора был напечатан в разных изданиях только частично. Полное издание «Истории Сибири» Миллера предприняли только советские историки: первые два тома опубликованы в 1937 и 1941 гг., третий и четвертый подготовлены к печати.

Хотя труды Миллера по истории не снискали ему широкой международной славы, он все же принадлежит к числу недостаточно оцененных до сих пор ученых XVIII в. Ряд научных работ Миллера только теперь получает высокую оценку, и прежде всего работы по истории Сибири, как бы заново открытые в наше время. Характерно, что только советская наука отметила 250-летие со дня рождения Миллера [5].

Леонард Эйлер намеренно держался тогда вдали от Миллера, как об этом свидетельствует переписка, или вернее, пробел в ней. В официальной переписке, которую Эйлер вел с конца 40-х годов с Петербургской академией через Шумахера, начальника канцелярии, и Теплова, секретаря Президента Академии, ясно обнаруживается его двойственное отношение к Миллеру.

Неблаговидный поступок астронома и географа Петербургской академии Ж.-Н. Делиля, который в начале 1747 г. покинул Россию и увез с собой ценный исследовательский материал, дал Миллеру повод отчетливо определить свою позицию. В 1752 г. Делиль издал в Париже сочинение «Explication de la carte des nouvelles découvertes au Nord de la mer du Sud», в котором впервые сообщил о некоторых результатах второй Камчатской экспедиции. В России эти материалы еще не публиковались; сведения Делиля к тому же были весьма неполны и неточны. Понятно, что такое нарушение доверия со стороны бывшего сотрудника Петербургской академии наук было встречено в разнообразных русских кругах с чрезвычайным недовольством. Президент Академии Разумовский предложил выступить с критикой карт и пояснений Делиля, и Миллер анонимно написал вызвавшее тогда большой шум сочинение «Lettre d'un officier de la marine russienne à un seigneur de la Cour concernant la carte des nouvelles découvertes au Nord de la mer du Sud, et le Mémoire qui y sert d'explication publié par M. de l'Isle». Оно было напечатано в «Nouvelle Bibliothèque germanique» (XIII 1753), благодаря Л. Эйлеру, который взял на себя заботу о его публикации и распространении по поручению Шумахера. Этим своим выступлением Миллер вновь завоевал прежнее место в Петербургской академии. Влияние начальника Академической канцелярии, всемогущего, но в то время уже стареющего Шумахера, шло на убыль, и 26. II 1754 г. (ст. ст.) Миллер был назначен непременным секретарем Академии. Ему была поручена также переписка с иностранными членами Академии и другими учеными. Теперь он вступает с Эйлером, который был иностранным членом с годовой пенсией в 200 руб., в официальный контакт от имени Петербургской академии. С этого начинается вторая, самая важная часть переписки, которая не прерывалась полностью, хотя и становилась более редкой, даже во время Семилетней войны. Эта часть переписки заканчивается с отъездом Миллера из Петербурга в марте 1765 г. в Москву, где он стал главным надзирателем вновь созданного Воспитательного дома и вскоре вслед затем, весной 1766 г., начальником Московского архива Коллегии иностранных дел. Это был высокий ответственный пост. С Петербургской академией Миллер сохранял самую тесную связь и стал официальным посредником между Москвой и Петербургом. Заметим, что Миллер был выбран представителем Академии в Комиссии для разработки нового уложения 1767 г.,— этой пародии на парламент[3].

Во время жизни в Москве Миллер издал ряд новых публикаций памятников русской истории и оригинальных работ, а также сочинений других авторов, и вообще продолжал трудиться до глубокой старости; скон-

[3] Подробнее о Миллере см. в книге П. Пекарского [6, стр. 308—430] и [27].

чался он 22 (11).X 1783 г., пережив Эйлера немногим более, чем на месяц.

Обширное эпистолярное наследие Миллера (оно составляет много тысяч писем) представляет большой интерес для всякого, кто занимается историей русской науки. Подготовляемое нами издание переписки Эйлера — Миллера кладет только начало изучению этого наследия.

Третья часть переписки падает на время 1765—1767 гг. Далее следует свыше тысячи писем, которыми обменялись Миллер со старшим сыном Эйлера, Иоганном-Альбрехтом, непременным секретарем Петербургской академии с 22. II 1769 г. (ст. ст.). Эта переписка примыкает к рассматриваемой нами, и ее исследование также остается задачей будущего. Важным источником для истории обеих академий и истории науки в России и Германии является также продолжавшаяся до 90-х годов переписка И.-А. Эйлера с непременным секретарем Берлинской академии Формеем.

Переписка Л. Эйлера и Г. Ф. Миллера не представляет собой чего-либо обособленного, но является частью постоянной интенсивной связи между Петербургской и Берлинской академиями, между наукой в России и в Германии, связи, о которой до сих пор имеется недостаточное представление. Здесь имело место взаимное доверие и взаимный свободный обмен, об интенсивности и обширности которого мы знали мало.

После этого общего введения мы рассмотрим в основных чертах содержание переписки, преимущественно второй части.

Важным вопросом, по которому переписывались оба ученых, был обмен результатами научных исследований, особенно в то время, когда оба занимали руководящие посты в академиях. Эйлер был духовным центром Берлинской академии, Миллер официально представлял Петербургскую академию как непременный секретарь.

Поскольку Эйлер одновременно являлся почетным (иностранным) членом Петербургской академии, центр тяжести видимо клонится в сторону Петербургской академии, Берлинская академия как бы отступает на второй план. Это ощущалось уже в то время. Так, 25 (14).I 1749 г. Эйлер просит Шумахера не забыть написать на титуле его сочинения, издававшегося Петербургской академией (речь идет о «Scientia navalis»), что автор является не только членом Петербургской академии, но также директором физико-математического класса Берлинской академии,— этого желают в Берлине.

Однако второстепенное место, отводимое Берлинской академии в переписке, на самом деле только кажущееся. Если мы посмотрим более пристально, то заметим, как много получала от этой переписки Берлинская академия. Переписка Эйлера с Ломоносовым, Миллером, Шумахером и другими была важным каналом взаимной информации и взаимного научного обогащения, причем речь идет в ней о научных работах, которые велись не только в России и Германии, но и в Англии, Франции, Италии, Швеции и т. д.

Прежде чем перейти к характеристике научных вопросов, обсуждаемых Эйлером с Миллером, укажем, что через всю переписку проходят просьбы и поручения о приобретении и высылке различных книг, более всего по географии (включая карты) и истории, где встречались интересы обоих ученых, а также календарей, эфемерид и т. д.

Важной обязанностью Эйлера было возможно скорее выполнять настойчивые заказы Петербургской академии на книги, приобретаемые у книготорговцев и букинистов не только в Берлине и Лейпциге, но и по всей Европе. Для примера укажем на письмо Миллера от 10.VIII (30.VII) 1754 г., в котором речь идет о возможно более быстром приобретении важной литературы по географии. Миллер неоднократно выражает желание получить новые карты тотчас же после их выхода в свет, особенно, имея в виду Делиля. Как велик был интерес Эйлера к картам, относящимся к России, показывает его письмо от 20 (9).XI 1751 г. к Шумахеру, где речь идет о приобретении карты Лапландии, необходимой в связи с русско-шведскими спорами по поводу границ. Географический департамент Петербургской академии, в котором сотрудничал и Эйлер, был важным центром научных исследований в России. Уже Петр I придавал огромное значение созданию хороших карт не только России, но и других стран. Для этого, однако, нужно было внимательно следить за всеми картами, издававшимися в Европе. В ряде случаев Эйлер проявляет большой интерес к русской истории, например, в письмах от 29(18).I 1760, от августа 1760, 16(5).II 1765 г. и др.

Среди научных вопросов, о которых идет речь в переписке, выделяются проблемы учения об электричестве и проблемы оптики.

Электричество, в частности атмосферное электричество, привлекало в середине XVIII в. внимание многих ученых. В Петербургской академии оно было предметом исследований Ломоносова и Г. Рихмана, трагически погибшего при наблюдении грозы летом 1753 г. В том же 1753 г. по предложению Ломоносова был объявлен конкурс на тему о причинах и точной теории электрической силы. Шумахер известил об этом Эйлера, одновременно приложив для отзыва труд Ломоносова «Слово о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих» [7, стр. 15—99]. В ответном письме 29 (18).XII 1753 г. Эйлер весьма лестно отозвался об этом сочинении; он противопоставлял Ломоносова другим физикам, которые либо простые эмпирики, либо вздорные фантазеры [8, стр. 342]; в письме в Академию от 22 (11).I 1754 г. Эйлер одобряет конкурсную тему [8, стр. 343]. На конкурс поступило много работ, и 10.XII (29.XI) 1754 г. Миллер сообщил о двух из них, анонимного француза и итальянца П. Фризи. 31 (20).XII 1754 г. Эйлер ответил, что от первой из них, в которой делается попытка объяснить электричество брожением, он не ожидает чего-либо особенного и что работы Фризи ему неизвестны. Далее Эйлер писал, что одновременно направляет в Академию еще одну поступившую к нему диссертацию. Последняя, по мнению Эйлера, дает довольно естественное объяснение важнейших электрических явлений и грозы. 26 (15).IV 1755 г. Эйлер пишет, что рекомендовал выслать работу на эту же тему известному своими исследованиями в этой области чешскому ученому П. Дивишу (который поставил в 1754 г. первые в Европе громоотводы). В письме от 20 (9).IX 1755 г. Миллер известил Эйлера, что премия присуждена за присланную им анонимную работу. Эйлер 7.X (26.IX) 1755 г. ответил, что теория, изложенная в премированном сочинении, принадлежит ему, но что обработку он поручил своему сыну Иоганну-Альбрехту, так как не знал, может ли, будучи членом Петербургской академии, участвовать в конкурсе сам. Речь идет о мемуаре «Disquisitio de causa physica electricitatis» (Petropoli, 1753), в котором электрические явления объяснялись на основе представления о проникающей в поры всех веществ тончайшей и весьма упругой материи — светоносном эфире. При трении тел поры их, имеющие разную величину, сжимаются в разной степени; возникающие при этом изменения в упругом состоянии заключенного в телах эфира, производят электрические явления; привлекается также взаимодействие эфира и воздуха. Отметим, между прочим, близость в некоторых существенных пунктах взглядов Эйлера ко взглядам М. В. Ломоносова.

Петербургская академия в заседании 20.VIII 1755 г. (ст. ст.) постановила напечатать также сочинение Фризи «De existentia et motu aetheris, seu de theoria electricitatis, ignis et lucis» (Petropoli, 1755) и вскоре избрала его почетным членом [9, стр. 334, 346, 367][4].

К вопросам учения об электричестве Эйлер возвращается в переписке с Миллером и позднее. В связи с обсуждением кандидатуры молодого немецкого ученого И.-К. Вильке на должность преподавателя физики

[4] Подробный анализ работ, поступивших на конкурс, см. в статье Б. Г. Кузнецова [10].

в незадолго перед тем основанном Московском университете он дает в письме от 27 (16).V 1757 г. высокую оценку его работы «De electricitatibus contrariis» (Rostock, 1757), подчеркивая большую важность новых экспериментов автора и их естественное объяснение. В письме 10.I 1761 г. (30. XII 1760 г.) Эйлер просит Миллера передать работавшему с 1757 г. в Петербурге (ранее в Ростоке и Берлине) Ф. У. Т. Эпинусу благодарность за присылку его «Tentamen theoriae electricitatis et magnetismi» (Petropoli, 1759). Эйлер характеризует эксперименты Эпинуса как превосходные, но выражает несогласие с его теорией электричества. По Эпинусу, развивавшему далее взгляды Франклина, существует особая тончайшая и весьма упругая электрическая жидкость, частицы которой отталкивают друг друга; избыток и недостаток ее проявляются в виде положительных и отрицательных зарядов. Наряду с этим Эпинус принимает, что в обыкновенной материи, кроме сил тяготения, имеются и силы отталкивания; те и другие находятся в некоторых взаимодействиях с электрическими. Между прочим, Эпинус подходил уже к закону Кулона о взаимодействии зарядов. Важным шагом вперед, который Эйлер не оценил в должной мере, было установление Эпинусом аналогии между электростатическими и магнитными явлениями; для объяснения последних, впрочем, привлекалась особая магнитная жидкость. Эйлер вообще весьма уважал Эпинуса как физика и астронома, и между обоими учеными существовали дружеские отношения; одно время Эпинус столовался в доме Эйлера [см. письмо последнего от 31 (20).VII 1756 г.]. О теории электричества Эйлер пишет еще в ряде писем.

Так рассматриваемая переписка отражает интенсивную разработку учения об электричестве в Петербурге и Берлине (а также Ростоке) Эйлером и его сыном, Ломоносовым, Рихманом, Эпинусом, Вильке и их тесное научное общение по этим вопросам[5].

Большое место в переписке занимают вопросы оптики. В письме от 18 (7).XII 1762 г. Эйлер сообщает, что этой наукой начал заниматься более 30 лет тому назад в Петербурге, увидев «что все, сделанное в этой области, ранее, крайне несовершенно и что даже не развиты удовлетворительно главные принципы, на которых преимущественно основывается усовершенствование диоптрических инструментов». Здесь он встретился, пишет Эйлер, с большими трудностями и лишь примерно 10 лет назад смог

[5] О развитии учения об электрических и магнитных явлениях в середине XVIII в. подробнее см. в работах Ф. Розенбергера [11, стр. 302—326], О. А. Лежневой [12, стр. 333—348], Л. С. Минченко [13, стр. 255—261], Я. Г. Дорфмана и М. И. Радовского [14].

преодолеть их полностью. Действительно, Эйлер продолжал исследования по оптике в Берлине, как теоретические, так частично и экспериментальные, причем в центре стояла проблема построения ахроматических объективов и методы расчета оптических систем. В первой половине XVIII в. еще безраздельно господствовало мнение Ньютона, что диоптрические системы обязательно дают окрашенное изображение предмета, причем окраска усиливается с увеличительной способностью линзы. Это привело к отказу от дальнейшего улучшения рефракторов и их вытеснению зеркальными телескопами. В 1747 г. Эйлер, исходя, правда, из не вполне верных представлений об оптических свойствах глаза, пришел к заключению, что можно построить ахроматические объективы, соединяя прозрачные среды с различными показателями преломления. Свой мемуар «Sur la perfection des verres objectifs des lunettes» он зачитал в собрании Берлинской академии 26.IX 1748 г. [15, стр. 130] и опубликовал в «Mémoires de l'Académie de Berlin», т. III (1749). В техническом отношении объектив Эйлера, состоящий из двух стеклянных менисков с жидкостью между ними, был еще несовершенен.

Новые идеи Эйлера были сперва подвергнуты резкой критике известным английским оптиком Дж. Доллондом, но в результате полемики, в которой на стороне Эйлера выступил шведский математик С. Клингенштерна, была показана неполнота соответствующих опытов Ньютона. Доллонд переменил свое мнение и в 1757 г. построил первый ахроматический рефрактор с объективом из двух сортов стекла (кронгласа и флинтгласа) различной преломляемости. Это произвело революцию в оптической технике и повлекло за собой целую серию работ, посвященных теории расчета новых оптических систем,— прежде всего Эйлера, а также А. Клеро, Даламбера, Клингенштерна и др.

Поздравляя Эйлера с премией за сочинение об электричестве, Миллер 11.XI(31.X) 1755 г. сообщал, что Ломоносов предлагает объявить очередной конкурс на тему о пропорциональности массы (количества материи) и веса тела, и запрашивал мнение Эйлера. Ломоносов, вопреки Ньютону, считал, что пропорциональность массы и веса не имеет места для малых частиц материи, хотя с хорошим приближением выполняется для больших тел.

Организация конкурсов на научные темы была важной задачей академий. Лауреаты нередко награждались высокими денежными премиями. Премии Петербургской академии, например, составляли 100 золотых. Эйлер принимал решающее участие в выдвижении конкурсных тем в Берлинской академии, вокруг чего здесь нередко разгорались страстные споры[6], и оказывал большое влияние на конкурсы Петербургской академии. В переписке с Шумахером за 1749—1751 гг. не раз обсуждается этот вопрос, причем инициативу проявлял Эйлер. Как упоминает Миллер в письме от 11.XI (31.X) 1755 г., на 1750 г. был объявлен конкурс по теме, выставленной Эйлером,— это был знаменитый конкурс по вопросу о согласии движения Луны с теорией тяготения Ньютона, сыгравший огромную роль в укреплении и развитии ньютоновской небесной механики. Премию по отзыву Эйлера получил французский геометр А. Клеро. Несколько позднее, узнав, что в Петербурге намечается конкурс по физике, Эйлер послал Президенту Академии А. Г. Разумовскому список в 17 вопросов [см. письма Эйлера к Шумахеру 2.III (19.II) 1751 и 24 (13).VIII 1751 г.; список не обнаружен][7], однако конкурс был тогда объявлен по химии.

29 (18).XI 1755 г. Эйлер советует Миллеру отклонить предложение Ломоносова. Тема о пропорциональности массы и веса тел сама по себе, говорит Эйлер, была бы величайшей важности, если бы можно было надеяться на поступление основательных сочинений, ведущих к решению вопроса, чего ожидать нельзя. Мы знаем теперь, что Эйлер был в этом прав. Эйлер продолжает: «По моему мнению, при таком обсуждении следует принимать во внимание не столько самую важность предложенного вопроса, сколько те сочинения, поступления которых можно вероятным образом ожидать.» Этим он руководствовался, ставя вопрос о теории Луны, который и привел к желательному результату. На отдельном листе, который не найден, Эйлер сообщал Миллеру список подходящих тем по физике и математике для Петербургской (и Берлинской) академий[8]. В самом письме особенно рекомендуется назначить премию за усовершенствование теории и конструкции диоптрических телескопов и микроскопов.

---

[6] Как известно, к конкурсу Берлинской академии на 1749 г. о происхождении селитры Эйлер привлек М. В. Ломоносова.

[7] В письме от 2.III (19.II) 1751 г. Эйлер указывает, как особо важную, задачу о постоянстве или переменности времени обращения Земли вокруг Солнца, которая долгое время привлекала его интерес (он полагал, что период обращения Земли из-за сопротивления эфира постепенно сокращается). Парижская академия объявила по этому вопросу конкурс на 1760 г.; премия была присуждена второму сыну Эйлера Карлу, по специальности врачу, за сочинение «Meditationes in quaestionem, utrum motus medius planetarum semper maneat aeque velox, an successu temporis quampiam mutationem patiatur et quaenam sit eius causa?» Вряд ли можно сомневаться в том, что автором этого сочинения был Леонард Эйлер и что он же явился инициатором самого конкурса.

[8] В письме к Я. Штелину от 23 (12).V 1765 г. (Библиотека им. Салтыкова-Щедрина в Ленинграде, Архив Штелина, № 801, лл. 1—2 об.) Эйлер приводит список 22 конкурсных тем по механике, физике, метеорологии, биологии.

При этом подчеркивается актуальность темы, которая привлекает широкий интерес в Англии и Франции. «В этом смысле одним из важнейших вопросов, в ответ на который можно было бы ожидать поступления весьма основательных сочинений, является усовершенствование составленных из стекол телескопов,— открытие, которое как бы близко к рождению и над которым теперь работают в Англии и Франции.»

Оставляя в стороне вопрос о несомненной личной заинтересованности Эйлера, следует признать, что и в этом он был прав: всего два года спустя последовало открытие Доллонда. Различные обстоятельства помешали в то время принять предложение Эйлера, но впоследствии Петербургская академия к нему возвратилась. Предложение Ломоносова также не встретило в Академии поддержки и, по совету И.-А. Брауна и А. Н. Гришова, конкурс был объявлен на темы: по теории магнетизма и о суточном обращении Венеры вокруг оси. 21(10). IX 1756 г. Миллер просил Эйлера переслать программу конкурса в газеты и журналы. Об исполнении этого поручения Эйлер писал 16 (5).XI 1756 г., полностью одобряя первый вопрос и выражая сомнения в возможности успешного решения второго из-за атмосферных помех. Впрочем, премию по второй теме получил в 1760 г. И.-А. Эйлер за сочинение «Meditationes de motu vertiginis planetarum, ac praecipue Veneris» (Petropoli, 1760); об этом Миллер извещал 19 (8). IX 1760 г.

В переписке 1756 г. дважды говорится о волшебном фонаре, усовершенствованном Эйлером еще в 1750 г., о чем он сообщал Шумахеру 3.III (20.II) 1750 г. и писал в работе «Emendatio laternae magicae et microscopii solaris», доложенной Берлинской академии 19.III 1750 г. и Петербургской 30.IV 1750 г. (ст. ст.) [15, стр. 149; 9, стр. 228]. В этой работе, опубликованной в «Novi commentarii Academiae Petropolitanae», т. 3 за 1750—1751 гг. (1753), Эйлер впервые рассмотрел также вопрос о конструкции солнечного (проекционного) микроскопа для непрозрачных предметов. В 1752 г. Эйлер послал экземпляр своего волшебного фонаря в Петербург [см. его письмо к Шумахеру от 30 (19).XII 1752 г.]. В письмах к Миллеру от 13(2).I и 27 (16).IV 1756 г. Эйлер обсуждает вопрос о возможных причинах и способах устранения недостатков изображения, говорит об успехе своего прибора в Париже и сообщает о своих интенсивных занятиях диоптрикой и проводимых им в этой связи сложных расчетах.

Регулярные и важные исследования по оптике и оптической технике велись в 40-е и 50-е годы и в Петербурге. Особенно значительны здесь заслуги Ломоносова, который, начиная с 1743 г., внес ряд улучшений в конструкцию микроскопа и был инициатором широкого применения этого прибора в химии, а также создал никтоскоп, или ночезрительную трубу, позволявшую улучшать видимость земных объектов в вечерние и ночные часы. В 1757 и следующие годы над усовершенствованием солнечного микроскопа работал И. Г. Цейгер, а затем Эпинус; профессорам Академии помогал штат квалифицированных техников во главе с замечательным оптиком И. И. Беляевым. В развитии физики сыграло видную роль «Слово о происхождении света, новую теорию о цветах представляющее» Ломоносова (СПб., 1756), в котором он предложил оригинальный вариант волновой теории света. 7.VII 1757 г. (ст. ст.) конкурсную тему по диоптрике выдвинул А. Н. Гришов, но безрезультатно, как видно из протокола 26.VII 1762 г. [9, стр. 385, 487, 488].

Исследования по оптике Эйлера переплетались с работами его петербургских коллег, и понятен высокий взаимный интерес в этой области. Как только затихают военные действия, Эйлер возвращается в переписке с Миллером к вопросам оптики. В письмах 17 (6).II и 14 (3).III 1761 г. Эйлер рассказывает о своих занятиях расчетами диоптрических систем, требующих весьма трудных и кропотливых вычислений, а также об изготовлении при участии искусного шлифовальщика линз, которые позволят отказаться от применения зеркальных телескопов. Если не удастся изготовить для этих линз два разных сорта стекла, то он добьется цели с помощью своих наливных линз; этот путь даже предпочтительнее. В первом письме Эйлер с гордостью писал: «Никогда, пожалуй, еще не встречался такой случай, в котором труднейшие и запутаннейшие вычисления имели бы столь важное и необходимое влияние на практику.»

Как раз в это время Петербургская академия по предложению Эпинуса [9, стр. 454—455] в собрании 25.VIII 1760 г. (ст. ст.) объявила на 1762 г. конкурс на лучшую работу по теории и конструкции преломляющих телескопов и микроскопов. Узнав из письма Миллера от 5.V (24.IV) 1761 г. о предположении французского астронома Н. Л. де Лакайля, что премию получит Доллонд, Эйлер 30 (19).V заявляет, что работы Доллонда несомненно не удовлетворяют требованиям конкурса, так как он совершенно не знает теории и только весьма тщательно технически разработал предложения, сделанные ему Эйлером. Главное здесь в точной шлифовке, и сам Эйлер не добился полного успеха лишь из-за несовершенства работы местных мастеров (здесь Эйлер явно преуменьшает заслуги Доллонда как создателя новых сортов оптического стекла). Эйлер продолжает: «Но императ. Академия несомненно требует теоретического объяснения, как определять на основании принципов преломления такие зрительные трубы, обладающие всеми совершенствами, и здесь м-р Доллонд, конечно, ничего не даст. Теория чрезвычайно трудна и требует кропотливейших вычислений, и мне не известно, чтобы кто-либо уже предпринял такое исследование; поэтому я займусь к будущему году этой работой, ибо льщу себя надеждой, что полностью разобрал теорию.»

11.XI (31.X) 1761 г. Эйлер вновь говорит о трудностях технической реализации своих идей, требующих высокой точности шлифовки и больших расходов. Он советует заняться этим делом в Петербурге и предлагает прислать целый ряд различных проектов.

Беспокойство Эйлера относительно возможности премирования Доллонда оказалось излишним; из письма Миллера от 5.X(24.IX) 1762 г. он узнал, что премировано сочинение С. Клингенштерна «Tentamen de definiendis et corrigendis aberrationibus radiorum luminis in lentibus sphaericis refracti, et de perficiendo telescopio dioptrico» (Petropoli, 1762), присланное незадолго до того для «Комментариев». Вместе с тем Миллер уведомлял, что на конкурсе Академии отмечено и сочинение Эйлера «Constructio lentium objectivarum ex duplici vitro, quae neque confusionem a figura sphaerica oriundam, neque dispersionem colorum pariunt», которое решено издать отдельной книгой, — оно вышло в Петербурге тогда же. Заметим, что Эйлер отзывается о других работах Клингенштерна по оптике довольно пренебрежительно [письма от 18 (7). XII 1762 г. и 15(4). I 1763 г.]. Познакомившись с его премированным трудом, Эйлер 12(1). II 1763 г. писал: «Сочинение г. Клингенштерна очень хорошо и обработано без сомнения с большим усердием. Однако в нем содержатся далеко не все пункты, на которых основано совершенство диоптрических инструментов и которые я полностью изложил в моем сочинении в XIII томе наших Мемуаров. Впрочем, то, что я там даю, стоило мне более 20 лет времени.» Эйлер имел в виду свои «Règles générales pour la construction des télescopes et des microscopes de quelque nombre de verres qu'ils soient composés», напечатанные в «Mémoires de l'Académie de Berlin», т. XIII (1759). Впрочем, Клингенштерн дал некоторый повод для раздражения Эйлера, заявив в своем премированном сочинении, что упомянутый мемуар Эйлера не содержит доказательств и потому не столько поучает читателей, сколько побуждает других ученых самих взяться за дело. Это место в сочинении Клингенштерна подверглось специальному обсуждению в Собрании Петербургской академии от 1.XI 1762 г. (ст. ст.), причем М. В. Ломоносов тщетно настаивал на его исключении, ибо, как писал он, «Здесь автор несколько с презрением и не праведно говорит о господине Эйлере» [9, стр. 491].

В это время Цейгер раскрыл состав флинтгласа, державшийся в секрете Доллондом, и изготовил ряд его сортов (то же сделал одновременно Ломоносов, не опубликовавший свои результаты). Это важное исследование, содействовавшее освобождению от зависимости от английской промышленности и ценное в научном отношении, очень заинтересовало Эйлера. Он горячо советовал Цейгеру продолжить техническую разработку дела, ожидая от этого высшей степени усовершенствования зрительных инструментов. В качестве помощника Эйлер рекомендовал испанского механика Пачческо, в конце 1763 г. выехавшего на работу в Петербург [ср.письма от 13 (2).III, 21 (10).IV и 9.VI (29.V) 1764 г.].Об открытии Цейгера Эйлер сделал 6.XII 1764 г. сообщение в собрании Берлинской академии наук, продемонстрировав при этом полученные из Петербурга стекла [15, стр. 304].

Сам Цейгер сообщил о своих работах в «Рассуждении о стеклах различно свет преломляющих» (СПб., 1763), произнесенном в Публичном собрании Петербургской академии 2.VII 1763 г. (ст. ст.), на котором также выступил с яркой «Речью о начале и приращении оптики, до нынешних времен» (СПб., 1763), ученик Эйлера С. Я. Румовский. На собрании присутствовала императрица Екатерина II, и Миллер 19 (8).VII того же года просил Эйлера позаботиться о напечатании за границей специальной информации. Уже 6.VIII (26.VII) Эйлер сообщил об исполнении этого пожелания. Между прочим, в этом письме Эйлер все еще высказывает ряд сомнений в значении открытия Доллонда. Здесь же Эйлер впервые рекомендует Миллеру Пачческо.

Несколько раз Эйлер сообщает Миллеру о подготовляемых им к печати сочинениях по оптике. Особенно интересно письмо от 23 (12).X 1762 г., в котором приведен список 27 готовых мемуаров Эйлера по оптике и говорится, что помимо них написаны еще два больших трактата. К предложению издать эти труды или часть их Миллер отнесся довольно холодно, советуя объединить все эти статьи в книгу; он указывает 26 (15).XI 1762 г., что Петербургская академия имеет еще большой запас ненапечатанных работ Эйлера. О двухтомном сочинении по оптике Эйлер вновь говорит 18 (7).XII 1762 г. и 28 (17).V 1763 г., замечая в последнем случае, что намерен внести в этот труд еще некоторые улучшения. Речь шла о первом варианте «Диоптрики» Эйлера. Эта работа была закончена только в Петербурге, где с помощью Л. Ю. Крафта Эйлер подготовил трехтомный труд «Dioptrica», вышедший там же в 1769—1771 гг. Заметим, что и после возвращения в Петербург Эйлер неоднократно обращался к геометрической оптике и оптотехнике, в чем ему, помимо Крафта, помогали Н. И. Фус, И. И. Беляев с сыном А. И. Беляевым и знаменитый изобретатель И. П. Кулибин[9].

В переписке Эйлера с Миллером затрагиваются и другие научные вопросы. В письме от 11.I 1760 г. (31.XII 1759) Миллер информирует Эйлера о только что произведенных Брауном (и Ломоносовым) замечательных опытах по замораживанию ртути при погружении термометра в различные охлаждающие химические составы; об этом же идет речь в письме Миллера от 19 (8).IX 1760 г. [7, стр. 377—427]. Говорится о различных вопросах астрономии: о вращении Венеры вокруг оси (об этом мы уже упоминали; ср. письмо Эйлера от августа 1760 г.), о предполагаемом открытии спутника Венеры [письма Эйлера от 11.VIII (31.VII) и 11.XI (31.X) 1761 г.], о наблюдении прохождения Венеры по диску Солнца [письма Миллера от 24(13).III 1761 г. и Эйлера от 26 (15).VI 1762 г.].

В уже упоминавшемся письме от 5.X (24.IX) 1762 г. Миллер уведомляет о присуждении И.-А. Эйлеру половины премии на конкурсе по вопросу о теории кометных орбит за сочинение «Meditationes de perturbatione motus cometarum ab attractione planetarum orta» (Petropoli, 1762); другую половину премии получил А. Клеро. В письмах от 25 (14).I и 8.III (25.II) 1755 г. Эйлер информирует Миллера об открытом в Германии усовершенствованном способе дубления кож [ср. 15, стр. 208]. 29 (18).I 1760 г. Эйлер просит по поручению одного немецкого ученого справку по вопросам ботаники, на что Миллер подробно отвечает в июне. 11.VIII (31.VII) 1761 г. Эйлер по специальной просьбе Парижской академии запрашивает, что известно в Петербурге о замерзании винного спирта; Миллер отвечает на это 15(4).IX. В подавляющем большинстве случаев высказывает свои мнения по естественнонаучным вопросам только Эйлер, что вполне объясняется кругом занятий Миллера. Встречается один раз математическая задача, о которой Эйлеру сообщил Миллер 27 (16).XI 1756 г. Это задача из одного присланного в Петербург сочинения П. Фризи: требуется найти поверхность, описываемую какой-либо плоской кривой, вращающейся вокруг данной оси и одновременно движущейся вдоль нее по какому-либо закону. Петербургские геометры, писал Миллер, считают задачу недостаточно определенной или даже непонятной. Эйлер 14 (3).XII 1756 г. ответил, что сразу нашел решение этой весьма общей задачи, причем не особенно трудное, но что ему неясно, каковы ее возможные применения.

[9] Подробнее см. книгу С. Л. Соболя [16, по указателю] и статью Л. С. Минченко [13, стр. 250—255].

О ПЕРЕПИСКЕ ЭЙЛЕРА И МИЛЛЕРА

О тесном сотрудничестве Петербургской и Берлинской академий в XVIII в. свидетельствует регулярно проявляющееся в переписке стремление систематически склонять общественное мнение ученых России и Германии в пользу определенных работ или задач. Но переписка содержит также сведения о связях с Россией и других центров духовной жизни Германии. Хотя доверенным лицом Петербургской академии в Лейпциге был астроном Г. Гейнзиус, но и через Эйлера протягиваются нити, как например к И.-Х. Готшеду, который занимал руководящее положение в литературной жизни Лейпцига и оказывал в середине XVIII в. сильное влияние на развитие немецкой литературы. В переписке отражены известные тесные связи Миллера с А.-Ф. Бюшингом, который играл столь крупную роль в немецкой литературе о России, особенно в 70-е годы. В 1754 г. Бюшинг как раз возвратился в Гёттинген из первой поездки в Россию и в том же году опубликовал первый том своего землеописания [17], которое существенно содействовало уточнению тогдашних представлений о России в Западной Европе.

Отметим попутно, что Петербургская академия поддержала план Формея, непременного секретаря Берлинской академии, об издании извлечения из французской энциклопедии. Миллер пишет Эйлеру в письме от 21 (10).IX 1756 г.: «Здесь очень хотят, чтобы это удалось осуществить».

В споре Ломоносова с его научными противниками в Германии Эйлер весьма старается устранить этот конфликт с Петербургской академией и искусно продвинуть возражения Ломоносова во влиятельные научные журналы Германии. Здесь Эйлер делал явно больше, чем этого желал Миллер, ибо последний вовсе не был другом Ломоносова. Работы Ломоносова по физике, в том числе по теории теплоты, встретили неблагоприятные отзывы в некоторых немецких журналах и специальных сочинениях, в частности в магистерской диссертации И.-Х. Арнольда, защищенной в 1754 г. в Эрлангене. Отчет об этой диссертации появился в № 187 «Staats und Gelehrte Zeitung des Hamburgischen unpartheyischen Correspondenten». 10.XII (29.XI) 1754 г. Миллер просит Эйлера возможно скорее выслать экземпляр диссертации Арнольда в Петербург, так как Ломоносов намерен ответить своим критикам. Днем ранее обратился с письмом к Эйлеру сам Ломоносов. Эйлер оказал широкую поддержку замечательному русскому ученому. В письме к Миллеру от 31 (20). XII 1754 г. он осуждает абсурдную, по его выражению, критику, замечая, что сам уже привык к недоброжелательной критике собственных сочинений в Гамбурге и Лейпциге, немалое участие в которой принимает по-видимому А.-Г. Кестнер. Эйлер обещает достать диссертацию Арнольда и пишет, что ответ Ломоносова сможет быть опубликован в журнале, редактируемом Ж. Формеем, непременным секретарем Берлинской академии [18, стр. 122—123]. Ломоносову Эйлер ответил большим письмом 11.I 1755 г. (31.XII 1754 г.) [18, стр. 177—185]. Действительно, ответ Ломоносова его критикам был напечатан под заглавием «Dissertation sur les devoirs des journalistes dans l'exposé qu'ils donnent des ouvrages destinés à maintenir la liberté de philosopher» в «Nouvelle Bibliothèque Germanique» за 1755 год [7, стр. 201—232].

Следует добавить, что Ломоносов без согласия Эйлера опубликовал упомянутое письмо его от 11.I 1755 г. (31.XII 1754 г.), содержавшее резкие замечания о ряде критиков, особенно о Кестнере, в петербургском журнале «Le Caméléon littéraire» № 20 за 29 (18).V 1755 г. Всегда осторожный Эйлер был этим весьма недоволен, что и высказал в письмах Миллеру и Шумахеру от 5.VII (24.VI) 1755 г.

В последнем упомянутом письме к Миллеру Эйлер высказывается о сочинении Ломоносова по теории теплоты, т. е. о «Размышлениях о причине теплоты и холода» [19] следующим образом: «...все, что об этом говорится другими, нелепо или неосновательно, поэтому гипотеза, хотя бы еще далекая от того, чтобы быть достоверным объяснением, заслуживает всяческого внимания: возражения же его противников показывают частью, что они не поняли его мнения, частью же их грубое невежество, поскольку они хотят уверить читателей, будто этот вопрос уже трактуется в другом месте лучше и весьма основательно». Эти слова перекликаются с известной высокой оценкой этой и других работ Ломоносова, данной Эйлером еще ранее, в конце 1747 г. [18, стр. 282].

Мы не будем входить здесь в подробности отношений между Эйлером и Ломоносовым, ибо им в настоящем сборнике посвящена специальная статья В. Л. Ченакала. Заметим только, что разбираемая нами переписка содержит интересные дополнительные сведения об отношении к Ломоносову Миллера.

Миллер вообще не сумел справедливо ценить Ломоносова. Он не мог забыть страстного выступления Ломоносова в защиту русских национальных интересов по вопросам истории России, которое нанесло ему, Миллеру, тяжелый удар. В переписке иногда ясно заметна эта, выражаемая, правда, очень осторожно, настроенность Миллера против Ломоносова, хотя Миллер старается скрыть ее под покровом подчеркнутой беспристрастности. В письме от 27 (16).XII 1755 г. Миллер запрашивает Эйлера, не стоит ли исхлопотать приглашение в Петербургскую академию на должность профессора физики для Арнольда из Эрлангена (который так необъективно выступил против Ломоносова): ведь Арнольд «не может думать, что мог кого-либо оскорбить своими учеными возражениями». Конечно, Миллера и его друзей Арнольд своими нападками задеть не мог! Эйлер в письме от 13 (2).I 1756 г. отвечает, что совершенно ничего не знает о способностях Арнольда, и добавляет: «Критиковать в этих вопросах, не предлагая взамен что-либо лучшее, на мой взгляд весьма непохвально.»

Недоверие Миллера к научному авторитету Ломоносова сквозит в письме от 13 (2).VII 1756 г., где речь идет о работе Ломоносова о свете и цветах. Когда Ломоносов опасно заболел, Миллер сообщает об этом Эйлеру 3.IX (23.VIII) 1762 г. одновременно с известием о болезни советника канцелярии И.-К. Тауберта и при этом заявляет: «Последнему [Тауберту] я бы желал долгого здравия, т. к. он почти незаменим в канцелярии». Здесь ограниченность Миллера обнаруживается полностью. В конце концов, он все же человек канцелярии, прилежный чиновник, который не имеет никакого представления об истинной гениальности Ломоносова: по Миллеру, смерть Ломоносова не будет потерей для Академии.

Таким образом, расхождение между Миллером и Ломоносовым было не только внешним. Перед нами два совершенно разных человека, и Эйлер, естественно, становится на сторону близкого ему своей гениальностью Ломоносова.

Имя Ломоносова упоминается в переписке с Миллером еще несколько раз, в частности в связи с хлопотами Эйлера о возмещении ему убытков за ущерб, нанесенный в 1760 г. во время военных действий его имению в Шарлоттенбурге. В этом деле Ломоносов, как известно, оказал Эйлеру существенную помощь.

Переписка с Миллером представляет большой интерес и для характеристики литературной деятельности Эйлера. В качестве почетного члена Петербургской академии Эйлер выступал не только как автор, но и как редактор ее «Комментариев». Огромная трудоспособность Эйлера позволяла ему регулярно снабжать своими трудами как Берлинскую, так и Петербургскую академию. Более того, обе Академии не успевали печатать его книги и статьи в своих научных органах, иногда выходивших к тому же нерегулярно. Мы не будем перечислять все книги, опубликованные Эйлером в 1741—1766 гг. в России, Германии, Швейцарии. Отметим три большие монографии, изданные по поручению и на средства Петербургской академии. Это начатые еще в Петербурге двухтомная «Scientia navalis, seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus» (Petropoli, 1749), и «Institutiones calculi differentialis, cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum» (Берлин, 1755), а также тесно связанная с упоминавшимся конкурсом Петербургской академии 1750 г. «Theoria motus Lunae, exhibens omnes ejus inaequalitates» (Берлин, 1753). Печатание больших математических трактатов было в то время нелегким делом, нередко посильным только академиям, так как для частных издателей риск убытка был довольно велик. «Дифференциальное исчисление» Эйлера было готово уже в 1752 г. [письмо Эйлера Шумахеру 26 (15).IX 1752] и печаталось под его наблюдением с лета 1752 г. по лето 1755 г., причем частью на суммы, авансируемые Эйлером и возмещенные ему много позднее. Расходилась книга плохо, о чем Эйлер извещал Миллера через шесть лет, 29 (18). IX 1761г. Действительно,из тиража в 500 экземпляров продано было только 94, а 406 осталось. Здесь немалую роль могли сыграть внешние обстоятельства (Семилетняя война). Но и спустя пять лет, 18 (7).II 1766 г., Эйлер писал Я. Штелину, что почти весь тираж все еще лежит у него дома. Недаром так трудно было Эйлеру опубликовать его классическую «Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum». Как видно из его письма от 29 (18).VII 1761 г., один издатель в Ростоке соглашался взяться за это дело, но при условии достаточного числа подписчиков. 26 (15).VI 1762 г. Эйлер писал Миллеру, что мысль об издании отпала, так как нашлось только 12 подписчиков, хотя аванс и не требовался. Все же в 1765 г. книга увидела свет в Ростоке у издателя Рёзе и была переиздана в 1790 г. Добавим, что дополнительного гонорара за печатание научных работ Эйлер обычно не получал. За «Scientia navalis» ему было выдано бесплатно 50 экземпляров. Правда, за «Theoria motus Lunae» он получил 50 экземпляров и 200 рублей вознаграждения.

В годы берлинской жизни Эйлер работал над рядом сочинений, законченных по возвращении в Петербург. Мы видели это уже на примере его «Диоптрики». Укажем еще на «Интегральное исчисление». В письме от 29 (18).IX 1761 г. Эйлер писал, что этот труд (вторая часть Analysis infinitorum) почти готов, добавляя, что он, видимо, так и останется в рукописи. 7.VI (27.V) 1763 г. он извещает, что вновь взялся за книгу и намерен вскоре довести ее до завершения; к этому побудило Эйлера одно письмо советника Петербургской академии И.-К. Тауберта. «Institutiones calculi integralis» были закончены в Петербурге и вышли в трех томах в 1768—1770 гг.[10]

[10] Когда Эйлер возвратился в Петербург, «Интегральное исчисление» состояло из двух томов, как видно из протокола Собрания Академии от 7. VIII 1766 г. (ст. ст.) [9, стр. 567].

О ПЕРЕПИСКЕ ЭЙЛЕРА И МИЛЛЕРА

В переписке с Миллером отчетливо отражены большие заслуги Эйлера в издании «Комментариев» Петербургской академии. Даже война России с Пруссией 1756—1762 гг. не могла препятствовать его сотрудничеству. В общей сложности в XIII—XIV томах «Commentarii Acad. Petropolitanae» за 1741—1746 гг. (1751) и первых 11 томах «Novi commentarii» за 1747—1765 гг. (1750—1767) Эйлер опубликовал 96 мемуаров.

Важным вкладом Эйлера в издание «Новых комментариев» были также вводные резюме, так называемые рецензии к печатавшимся статьям. Подготовку этих рецензий попросил Эйлера взять на себя Шумахер в письме от 23 (12).I 1751 г., на что Эйлер 20 (9).II 1751 г. ответил согласием. В переписке с Миллером о рецензиях говорится неоднократно. В письме от 3.IX (23.VIII) 1757 г. Миллер просит Эйлера придать рецензиям более исторический характер, он полагает, что «... в таких рецензиях должно быть нечто большее, чем одно содержание, ибо последнее и без того бросается в глаза при чтении статей. Я бы желал именно, чтобы сообщалась история каждого открытия, что было при этом сделано другими, каковы недостатки, от которых избавились, как это случилось и какова от того польза. Это относится mutatis mutandis и к совсем новым предметам, о которых еще никто не писал. Ибо история наук представляется мне в таких рецензиях главным делом». Эйлер не только согласился с пожеланием Миллера [письмо от 22(11). XI 1757 г.], но сделал более, давая в своих рецензиях пояснения и нередко ценные оригинальные дополнения. По поводу X тома «Новых комментариев» он писал 25 (14).II 1764 г.: «Я льщу себя надеждой, что прилагаемые резюме первых VII статей заслужат общее одобрение, так как я в каждом нашел случай пояснить некоторые важные обстоятельства и еще присоединить такие дополнения, которые знатоки найдут в высшей степени важными.» Из переписки видно, что рецензии на математические и физические статьи писались по большей части Эйлером. Это была трудоемкая работа, весьма ценная для истории науки.

Едва только между Россией и Пруссией в 1762 г. был восстановлен мир, Эйлер принялся с удвоенной энергией сотрудничать в «Новых комментариях». В письме от 1.V (20.IV) 1762 г., в котором Эйлер приветствует заключение мира, он говорит о завершении VII и подготовке VIII тома. Работа в «Новых комментариях» была для Эйлера еще осложнена большим расстоянием, трудностью и ненадежностью почтовой связи, особенно во время войны. Обо всем этом также можно получить отчетливое представление из переписки [см. письма Эйлера от 27 (16).VII и 21 (10).IX 1762 г.]. К качеству статей, печатавшихся в «Новых комментариях», Эйлер предъявлял высокие научные требования, как это видно, например, из письма от 3.VI (23.V) 1755 г., в котором он выражает неудовольствие по поводу публикации в III томе статьи Г. Кюна о мнимых величинах.

Одним из наиболее важных вопросов переписки является привлечение в Петербургскую академию через посредство Эйлера способных ученых, прежде всего в области математики, физики и прикладной механики [20]. В этих областях Эйлер имел обширные личные связи, которые он поставил на службу Петербургской академии. Но этим он служил также и развитию немецкой науки, которая в Берлинской академии при короле Фридрихе II ценилась невысоко. Фридрих II не только в литературе, но и в науке ценил французов значительно выше, чем немцев, которых он почти не знал. Дело дошло до того, что прусский король, когда создалась опасность ухода из Берлинской академии астронома Ф. Ноде, обратился к Эйлеру с поручением найти замену Ноде, как он сам буквально выразился, в России [21, стр. 293]. Таким образом, Петербургская академия рассматривалась как своего рода резерв для Берлинской академии, чему немало способствовал Эйлер.

Уже в переписке Эйлера с Шумахером находится в центре внимания забота о привлечении к работе в Петербургской академии достойных научных сил. Сколько стараний приложил, например, Эйлер в 1748—1750 гг. к тому, чтобы его друг И.-Г. Гмелин сохранил после отъезда из Петербурга связь с Академией, ибо его сочинение о флоре Сибири, прокладывающее новые пути в науке, должно быть доведено до конца и затем издано Петербургской академией.

С вопроса о замещении вакантных должностей в Петербургской академии начинается вторая часть переписки Эйлера с Миллером [см. письмо последнего от 9.IV (29.III) 1754 г.], причем Эйлеру поручаются подбор и характеристика кандидатов и в значительной мере посредничество между ними и Академией. Тема эта повторяется в очень многих письмах.

Основными местами, где Эйлер подыскивал кандидатов для России, были Лейпциг, Виттенберг и Гёттинген; однако в переписке упоминаются также Гиссен и другие немецкие университетские города. Когда в 1755 г. открыл свои двери Московский университет, Эйлер занялся подбором квалифицированных профессоров также для него. Петербургская академия хотела иметь в своем составе только первоклассные силы. В письме от 11.IX (31.VIII) 1756 г. Эйлер пишет: «Иногда можно легко приобрести имя в немецком университете и все же далеко не удовлетворять намерениям императорской Академии.» Привлечению хороших ученых должно было способствовать также великодушное отношение к требованиям приглашаемых лиц, как выразительно подчеркивает Миллер в письме от 10.VIII (30.VII) 1754 г. Действительно, в своем великодушии в этих делах Петербургская академия идет столь далеко, что не имеет претензий, если, ссылаясь на такие приглашения и вместе с тем отклоняя их, приглашаемые лица могут сколько-нибудь улучшить свое бедственное положение в Германии [письмо Миллера от 7.I 1755 г. (27.XII 1754 г.)].

Когда в начале Семилетней войны Петербургской академии крайне понадобился астроном, Эйлер пытался в отсутствие президента Мопертюи, как он выражается, «исхлопотать» (auszuwirken) у короля разрешение уехать талантливому Эпинусу [письмо от 9.X (28.IX) 1756 г.]; это вскоре удалось. Успешные приглашения горного советника И.-Г. Лемана, астронома Г.-М. Ловица, физиолога К.-Ф. Вольфа, который и сейчас высоко ценится в истории науки, — проходили через Эйлера [ср. его письма соответственно от 30 (19).V 1761 г.; 11.IX(31.VIII) 1760 г. и 17 (6).II 1761 г.; 15 (4).XII 1760 г., 17 (6).II 1761 г. и 30 (19).V 1761 г.]. Были, естественно, и неудачи, как с У. Х. Сальховым, приглашение которого, однако, произошло не по инициативе Эйлера. Дело получило толчок из Петербурга в связи с успехом Сальхова на конкурсе Петербургской академии 1754 г. Правда, Эйлер принял в приглашении Сальхова большое участие и проявил о нем большую заботу (ср. письма Эйлера от 7.X (26.IX) 1755 г. и 28 (17).II 1756 г.). Позднее Эйлер отзывается об этом ученом, который должен был покинуть Петербургскую академию, будучи уличенным в плагиате, весьма нелестно [письмо от 15 (4).VII 1760 г. в ответ на письмо Миллера от июня 1760 г.] и, так сказать, задним числом умывает руки в этом деле (ср. [22, стр. 7 и сл.]).

В некоторых случаях Эйлер бывает не вполне искренен и, по существу, дразнит Миллера, не раскрывая перед ним карты, как в случае с приглашением Я.-А. Сегнера, который при поддержке Эйлера стал в Галле преемником Х. Вольфа[11]. В предполагавшемся приглашении И.-Г. Ламберта в Петербург Эйлер также занял двусмысленную позицию, ибо готов был тогда порвать с Берлином и не хотел оставить этого выдающегося ученого Берлинской академии. Заметим, что Эйлер вообще принимал живейшее участие в эльзасце Ламберте [письмо от 16 (5).II 1765 г.].

В связи со всеми этими поручениями и переговорами в переписке содержится ряд отзывов Эйлера о его ученых-современниках. В письме от 27 (16).VIII 1754 г. Эйлер дает весьма нелестную характеристику

[11] Из письма Миллера от 7.XII (26.XI) 1754 г. видно, что он был удивлен, узнав о приглашении Сегнера в Галле (в чем принял участие Эйлер).

немецким математиком М.-Х. Ганау (Ганов), Г.-В. Клемму, Г. Кюну, противопоставляя им своих учеников, прежде всего С. К. Котельникова, а также С. Я. Румовского. В письме сказано: «Эти люди [т. е. Ганау, Клемм и Кюн] из-за своего неутомимого усердия, видимо, потеряли здравый смысл, и по сравнению с ними я с правом могу считать г. Котельникова Архимедом и Ньютоном. Во всяком случае несомненно, что во всей Германии не найдется более трех человек, которые в математике заслуживали бы предпочтения перед г. Котельниковым, а я надеюсь, что в течение года помогу ему продвинуться настолько далее, что он превзойдет и этих. Судя по всему, толк выйдет также из г. Румовского...» Котельникова Эйлер вообще весьма ценил, и в другом месте ставит его выше Дж.-Ф. Кастилльона и Кестнера [письмо 24 (13). XII 1754 г.]. Впрочем, к профессору Кестнеру, как говорилось, Эйлер питал особую антипатию, вообще же это был эрудированный, хотя и мало творческий математик. Румовский в то время только начинал занятия с Эйлером; позднее, 16 (5). II 1765 г., Эйлер о нем писал: «Несомненно, что Румовский — великолепный талант (Genie), который может принести очень много чести русскому народу...»

Чрезвычайно высоко ставил Эйлер как ученого и организатора И.-Г. Ламберта, о котором 21 (10).IV 1764 г. писал: «Здесь находится теперь человек, возвышенная ученость которого меня уже давно поражала: это г. Ламберт, который уже прославился своей фотометрией и другими сочинениями и более всего способствовал учреждению новой Баварской академии... Это во всех отношениях человек, обладающий дарованием доставить известность целой Академии.»

Отметим еще хорошие отзывы об астрономах Т. Майере, Г.-М. Ловице и ученике Эйлера Ж.-Ж. Лаланде. Особенно ценил Эйлер Майера, который на основе его работ вычислил известные таблицы движения Луны: «Лучший астроном в Европе есть сейчас без сомнения г. проф. Майер из Гёттингена» [письмо от 15 (4).VII 1760 г.]. О Ловице Эйлер писал 11.IX (31.VIII) 1760 г.: «... после г. проф. Майера я не мог бы найти более искусного человека»; о Лаланде: «Этот человек благодаря своему неустанному прилежанию за короткое время сделал в астрономии такие успехи, что вскоре превзойдет всех прочих астрономов как во Франции, так и в других местах» [письмо от 17 (6).V 1763 г.].

Оставляя в стороне высказывания о Даламбере, тон которых, как известно, со временем менялся, укажем еще на два письма, где говорится о выдающемся физиологе, докторе медицины К.-Ф. Вольфе. 15 (4).XII 1760 г. Эйлер рекомендовал Миллеру Вольфа как ученого, «который превосходно подойдет имп. Академии. Он прежде всего не имеет никакой склонности к врачебному делу, но налегает исключительно на исследование и экспериментирование. Он мог бы с равной пользой работать по анатомии, ботанике и химии. Он защитил в Галле диссертацию «De vegetatione et generatione plantarum et animalium» («О произрастании и зарождении растений и животных»), это учение строится здесь на совершенно новых основаниях и опытах и вызывает восхищение всех знатоков.» В письме от 17 (6).II 1761 г. Эйлер добавляет, что Вольфу можно предложить весьма скромные условия, поясняя: «Внешний облик его совсем невзрачный и литературный стиль весьма скверный, хотя его идеи и бесподобны.»

Не менее деятельным, чем в вербовке видных иностранных ученых в Петербургскую академию, было участие Эйлера в подготовке национальных русских научных кадров. Об этом постоянно говорит переписка. Эйлер правильно понял поставленную Петром I перед Академией задачу воспитывать русских ученых. Великий математик не боялся конкуренции со стороны русских, которой так опасались бюрократы вроде Шумахера, да и многие иностранные ученые в Академии.

В начале 50-х годов Эйлер устроил в своем берлинском доме пансион для подготовки к научной работе молодых людей. Это представляло для него и материальный интерес. Как раз в то время он занимался математическими науками и со своим старшим сыном Иоганном-Альбрехтом. В Петербургской академии наук тогда не было ни одного квалифицированного математика, и ее руководство решило направить к Эйлеру для завершения образования наиболее способных воспитанников Академического университета. О предполагаемой посылке двух молодых людей Шумахер писал Эйлеру 20 (9).II 1751 г., прося вместе с тем дать отзыв о прилагаемом сочинении одного из них — С. К. Котельникова. В ответном письме от 9.III (26.II) 1751 г. Эйлер очень одобрительно отозвался об этом сочинении, содержавшем оригинальный способ квадратуры и спрямления конхоиды, и выразил надежду, что при хорошем руководстве Котельников вскоре сможет с правом занять вакантную кафедру высшей математики. С лета следующего 1752 г. Котельников жил и занимался у Эйлера вместе с сыном Эйлера и швейцарцем Л. Бертраном, известным впоследствии математиком (оба проучились у Эйлера четыре года). Через два года к Котельникову присоединились С. Я. Румовский и М. Софронов. Софронов пробыл у Эйлера 9 месяцев и уехал в апреле 1755 г.; Котельников и Румовский оставались в Берлине до лета 1756 г.

Письма Эйлера к Миллеру за 1754—1756 г. характеризуют его внимательное отношение к ученикам. Эйлер заботился не только об их научных успехах, но и об общих условиях жизни, поведении и пр. Он регулярно информировал Миллера и Шумахера о ходе занятий и достигнутых результатах. Как видно из писем к Шумахеру, с Котельниковым Эйлер занимался по два часа ежедневно, последовательно проходя математику, механику, гидромеханику и астрономию [письма Эйлера от 26 (15).IX 1752, 24 (13).II 1753 и 5.II (25.I) 1754 г.], важное место занимало решение задач. Интересно письмо к Миллеру от 27 (16).IV 1754 г., в котором Эйлер, в ответ на запрос Миллера, высказывается о дальнейшем использовании Котельникова. Эйлер рекомендует сперва поручить начинающему ученому преподавание в Университете и не требовать от него особенно большой продукции: «Когда не торопят, всегда можно сделать лучше, и прежде чем оказываются в состоянии интенсивно работать в какой-либо науке, необходимо предварительно некоторое время работать, так сказать, только для себя и накопить запас идей и открытий, после чего нужно лишь развивать их одни за другими далее и доводить до совершенства» [12].

Миллер не мог до конца понять неутомимых усилий Эйлера в этом направлении, хотя сам он и в этом деле всегда старался послушно выполнять поручения президента. Запрашивая в первом письме, которое он направил Эйлеру по поручению президента, когда приступил к своим новым обязанностям непременного секретаря Петербургской академии, о возможности назначения Котельникова на вакансии по математике, физике и механике, Миллер явно силится показать свою беспристрастность к русскому ученому, Эйлер же энергично выступает в пользу молодых русских сил, и, как мы уже говорили, особо подчеркивает в своих письмах, что Котельников мог бы конкурировать с лучшими математиками Германии. Мы приводили некоторые отзывы Эйлера о Котельникове и Румовском. Добавим к ним слова, написанные Эйлером уже после их отъезда 25 (14).IX 1756 г.: «Все время своего пребывания здесь они вели себя так, что я постоянно мог их ставить в пример своим детям, и в изучении наук они всегда показывали такое усердие, что несомненно принесут имп. Академии пользу и честь.»

Высокого мнения был Эйлер и о даровании Софронова [ср. письмо от 21 (10).IX 1754 г.]. Как раз Софронов, однако, причинял ему своим поведением много беспокойства. О поведении Софронова не раз говорится в переписке, и оно-то явилось причиной преждевременного вызова этого

[12] О занятиях Эйлера математикой с молодыми русскими учеными и их последующей деятельности см. [23, 24].

талантливого человека в Петербург, а позднее его ранней кончины. Следует заметить, что Эйлер проявил в этом деле большое терпение [письма от 24 (13).IX 1754, 18 (7).III 1755 г. и др.]. С огорчением взирал он на то, что его ученики летом 1756 г. были отозваны в Петербург. В защиту своих учеников, например, в защиту Румовского, Эйлер выступил даже против Ломоносова.

В переписке с Миллером Эйлер часто жалуется на задержки с платежами за содержание и обучение русских учеников, на неточность в расчетах и пр. Создается впечатление, что Котельников и Румовский были отозваны из-за денежных споров [6, стр. 276]. Быть может, денежные конфликты играли некоторую роль в этом решении, но прежде всего руководство Петербургской академии приняло во внимание возможное ухудшение отношений между правительствами Пруссии и России. Русские адъюнкты покинули Берлин 30 (19).VII 1756 г., а уже в декабре того же года Россия выступила на стороне Австрии и Франции против Пруссии. О подлинной причине отзыва Котельникова и Румовского можно судить по письму Миллера от 13 (2).VII 1756 г., где говорится о возвращении в Россию всех учащихся из других городов — Лейпцига, Лейдена, Страсбурга.

В переписке часто упоминаются и другие денежные расчеты. Эйлер весьма чувствительно относился к задержкам с выплатой пенсии, а особенно понесенных им расходов по печатанию «Institutiones calculi differentialis» [см. например, письмо 29. (18)IX 1761 г.]; позднее он долго хлопотал о компенсации военной контрибуции и ущерба, нанесенного войсками его имению в Шарлоттенбурге [ср. письмо Миллера от 10.V (29.IV) 1763 г. и благодарственное письмо Эйлера от 28 (17).V 1763 г.]. Не следует, однако, забывать, что Эйлер жил на жалование, которое обе Академии не всегда платили аккуратно. Так 1.V (20.IV) 1762 г. Эйлер писал Миллеру, что несколько лет в силу обесценения валюты он фактически получал от Берлинской академии едва половину оклада. Литературных гонораров у Эйлера не было; некоторое значение в его бюджете имели конкурсные премии,— недаром Эйлер так живо интересовался конкурсами Академий.

Между тем расходы Эйлера были велики: семья его в 50-е годы составляла восемь человек, не считая часто живущих с ним родных, да и жил Эйлер на довольно широкую ногу. В 1753 г. он приобрел в Шарлоттенбурге упоминавшееся уже имение, о котором писал К. Ветштейну 27 (16).X 1753 г., что там есть красивый дом с садом и большим количеством пахотной земли и лугов, что в усадьбе 6 лошадей и 10 коров. В военные годы Эйлер несомненно испытывал материальные затруднения. Любопытно в этом отношении письмо от 1.V (20.IV) 1762 г. к Миллеру, в котором Эйлер просит выслать с оказией через Штеттин «примерно 3 центнера (8 или 9 пудов) русского масла, 1 центнер (3 пуда) хорошего белого меда, несколько пудов (ящик) вологодских свечей, 3 пуда манной крупы, 6 пудов белой муки, 3 пуда мыла, 3 пуда сала, 20 штук простого русского полотна. Эти вещи здесь ужасно дороги и достать их почти невозможно». Просьбу эту выполнить не удалось.

Переписка с Миллером содержит ряд других ценных сведений по истории Петербургской академии и биографиям ее членов. Приведем два примера. Сотрудничество Эйлера с Петербургской академией долгое время заставляло его регулярно переписываться с Шумахером, соблюдая, иногда с избытком, все правила вежливого обхождения. Подлинное свое отношение к главе академической канцелярии Эйлер проявил уже после его смерти. Узнав от жены Шумахера о его смерти, Эйлер 11.VIII (31.VII) 1761 г. весьма сухо просил Миллера выразить его соболезнование вдове или Тауберту, зятю Шумахера, указывая на неудобство по тому времени посылать в Петербург много писем. Когда жена Тауберта, занимавшего влиятельный пост в академической канцелярии, выразила обиду, заявив, что Эйлер мог бы прислать личное письмо вдове [см. письмо Миллера от 15 (4).IX 1761 г.], Эйлер 11.XI (31.X) 1761 г. ответил Миллеру не очень убедительной ссылкой на только что отмеченное обстоятельство и просил передать советнице Шумахер его извинения.

Заслуживают внимания письма Миллера от 14 (3).XII и 18 (7).XII 1764 г., в которых подробно описаны смерть и похороны Хр. Гольдбаха; эти письма уточняют дату и место кончины Гольдбаха, который умер 1.XII (20.XI) 1764 г., а не 20 (9).XI 1764 г., и в Петербурге, а не в Москве.

Итак, настоящая переписка глубоко вводит нас во внутренние дела Петербургской академии. Немало узнаем мы из нее и о Берлинской академии. В частности, переписка явно показывает, какие затруднения влекла за собой для обеих академий Семилетняя война.

Переписка Эйлера с Миллером постоянно подтверждает тот печальный факт, что в Берлинской академии было очень мало места для немецких ученых. Эйлер, который чувствовал себя ответственным за научное развитие Берлинской академии, должен был с сожалением видеть, как хорошие ученые при его посредстве направляются через Берлин в Петербург, например, лейпцигский ботаник И.-Х. Гебенштрейт, которого он мог бы использовать и в Берлине [ср. письмо от 27 (16).III 1756 г.]. Но к немецким ученым король не проявлял никакого интереса.

Истории Берлинской академии касается письмо от 26 (15).VI 1762 г. С 1757 г., как сообщает Эйлер, не удалось издать ни одного тома ее «Мемуаров», так как в Пруссии все было поставлено на службу войне. «Хотя,— пишет Эйлер,— мы нашли нового издателя, но нигде нельзя достать бумаги, и потому печатанье не удастся возобновить до конца будущего года.» Далее Эйлер говорит, что сильно отстало также издание «Мемуаров» Парижской академии. В Париже предполагают ежегодно печатать по два тома, один очередной и один за прежние годы, чтобы наверстать упущенное. Издание «Новых комментариев» Петербургской академии продолжалось, хотя и с большими трудностями.

Семилетняя война лежит черной тенью на рассматриваемой переписке. Эйлер очень страдал от войны. 29 (18).I 1760 г. он пишет Миллеру: «В особенности же я желаю скорейшей перемены предшествующих обстоятельств, чтобы я мог спокойно продолжать с Ваш. Высокобл. прежнюю переписку и на деле доказывать свое усердие имп. Академии.»

В 1758 и 1759 гг. из-за войны удалось обменяться лишь несколькими письмами, так что Эйлер мог не без основания успокаивать президента Берлинской академии, говоря, что он теперь не связан с Россией. Но уже 5.VI (25.V) 1759 г. Миллер первый высказал сердечное желание, чтобы можно было вскоре возобновить временно прервавшуюся переписку.

С 1760 г. переписка вновь оживляется. Наряду с темами, о которых уже говорилось выше, в письмах Эйлера 60-х годов особый интерес представляют его высказывания о задачах академий наук вообще и Петербургской академии в частности, и долгие переговоры о возвращении в Петербург. В переписке, естественно, большое место занимает вопрос о возмещении Эйлеру убытков, которые он потерпел при завоевании Берлина.

До сих пор мало известно, что Эйлер и Ламберт в 1765 г. оживленно обсуждали с канцлером М. И. Воронцовым, находившимся в Берлине по делам русско-прусских отношений, вопрос о реорганизации Петербургской академии [25; 6, стр. 292]. Таким образом, переговоры Эйлера о переустройстве Петербургской академии, которые приобрели после его возвращения в Петербург особое значение, начались еще раньше.

В это время русское правительство занималось вопросом о лучшей организации работы Петербургской академии и поручило послу в Берлине В. С. Долгорукову доложить об устройстве Берлинской академии. Как пишет Эйлер 10.XI (30.X) 1764 г., он дал об этом послу исчерпывающие сведения и вместе с Ламбертом, который был организатором Баварской академии, обсуждал вопрос с послом и канцлером Воронцовым. Ламберт разъяснял при этом «все выгоды, каких может ожидать государство от хорошо устроенной академии, и как члены могут объединять свои усилия для общей пользы: такое объединение отсутствует почти во всех академиях и обычно достигают не более того, что может сделать каждый сам по себе». Через месяц 11.XII (30.XI) 1764 г. Эйлер пишет, что почти ежедневно бывает у Воронцова, причем всякий раз очень много говорится об Академии. И в первом же письме от 20 (9).VIII 1766 г. из Петербурга в Москву, куда переехал Миллер, Эйлер вновь возвращается к той же теме: «Я представлял ее имп. величеству, что ни в одной академии члены не содержатся единственно лишь для академических исследований, что было бы конечно тяжким бременем для государства, но что каждый, не нанося заметного ущерба целям академии, может исполнять также обязанности, полезные для общего блага, как это доказывается примерами Ваш. благор. и г. г. Штелина и Эпинуса.» Эйлер приехал в Петербург 28(17).VII 1766 г. и немедленно занялся вопросом о реформе Академии. Уже в первом Собрании Академии 15 (4).VIII 1766 г., на котором он присутствовал, он выступил с большой речью, в которой изложил проект, представленный им императрице [9, стр. 566]. В этом «Plan d'un rétablissement de l'Académie Impériale des Sciences» нашли отражение приведенные мысли Эйлера [6, стр. 303—308][13]. Между прочим, Эйлер предлагал не ограничивать раз навсегда число академиков, чтобы постоянно можно было привлекать новых талантливых людей, а, с другой стороны, необходимость заполнения вакантных мест не открывала доступ посредственностям.

Письмо Эйлера от 20 (9).VIII 1766 г.— одно из последних в переписке с Миллером. После возвращения в Петербург друзья меняются ролями: теперь от лица Петербургской академии выступает Эйлер. В письмах идет речь о планах издания работ по географии [например, письма Миллера от 20(9).X и Эйлера 26 (15).X 1766 г.] и некоторых других вопросах.

В самом конце августа и начале сентября 1766 г. Эйлер болел какой-то лихорадкой — о его болезни и отсутствии говорится в протоколах Собрания 1.IX (21.VIII) и 12 (1).IX этого года[14]. В письме от 26 (15).X 1766 г. Эйлер сообщает, что нездоровье продолжалось лишь несколько дней, но он неожиданно потерял в течение немногих часов зрение в оставшемся здоровым левом глазу. Впрочем, добавляет Эйлер, это не мешает ему заниматься делами (ему читают, а он диктует, что́ надо) и посещать Собрания Академии; он производит также в уме довольно сложные вычисления, ко-

[13] О судьбе проекта Эйлера см. статью С. Н. Чернова [26].

[14] 29 (18). VIII Эйлер присутствовал на заседании и, значит, заболел между 29.VIII и 1.IX 1766 г. В следующий раз Эйлер пришел в Собрание 22 (11).IX [9, стр. 568—571].

торые сын затем наносит на бумагу. Письмо уже написано чужой рукой, хотя еще подписано самим Эйлером, как и следующие его два письма, последние в переписке с Миллером.

Для истории возвращения Эйлера в Россию переписка с Мюллером является весьма важным источником, хотя последние переговоры велись не через Миллера и не через его преемника, непременного секретаря Академии Штелина, а непосредственно с канцлером Воронцовым через русского посланника в Берлине. Но только в этой переписке мы можем, как нигде более ясно,проследить, как постепенно зреет, затем отпадает и снова созревает у Эйлера план возвращения в Россию. Эти колебания, естественно, отражают положение дел в обеих академиях и описаны в литературе достаточно подробно [6, стр. 285 и сл.]. Переговоры с Миллером Эйлер вел с мая 1763 г. по февраль 1764 г. В то время вопрос о его уходе из Берлинской академии не получил окончательного решения, но он вновь встал со всей остротой в 1765 г. Эйлер вел тогда беседы с канцлером Воронцовым не только о реформе Петербургской академии, но и о своем возвращении в Россию. На этот раз все действовало в одном направлении и 9.VI (29.V) 1766 г. Эйлер покинул Берлин.

Почему же столь крупный ученый, который, как он сам определенно подчеркивает, охотно остался бы в Берлине, возвращается в Петербург? Это вопрос, решение которого проливает яркий свет на историю науки в Германии и в России в их тесной связи, в их взаимозависимости, но также и в их большом различии. В конечном счете Эйлер уехал потому, что ему стал невыносим деспотизм Фридриха II, проявлявшийся в полной мере именно в Академии, особенно после окончания Семилетней войны. Борьба буржуазно-республиканского ученого за автономию науки закончилась полной неудачей. Король самовластно распоряжался назначением действительных и иностранных членов, в число которых приглашались главным образом французы, даже после смерти Мопертюи и после войны. В то время как в Петербурге Эйлер, будучи лишь иностранным членом, имел существенное влияние на избрание действительных и иностранных членов, в Берлине он не имел в этом вопросе никакого влияния, хотя временно замещал президента. Это видно из многих писем к Миллеру. Укажем хотя бы на положительную позицию, которую Эйлер занял по отношению к избранию Даламбера в Петербургскую академию [9, стр. 512] и которая отражена в письме к Миллеру от 21 (10).IV 1764 г. В Берлине Эйлер, будучи действительным членом, директором математического класса, в сущности духовным главой Академии, не играл никакой роли при назначении академиков. К указанной причине присоединялось все возраставшее влияние в Берлинской академии представителей радикального просвещения, которое прочно укоренялось благодаря назначению в нее его сторонников-французов, и которое было глубоко антипатично Эйлеру; Эйлер вел с ним скрытую, но упорную борьбу [15, стр. 80—91]. Здесь король был его решительным противником. Между тем король был в Берлинской академии всем, что же оставалось там делать Эйлеру?

Петербургскую академию Эйлер всегда считал своей alma mater. О своей признательности Петербургской академии Эйлер говорит в письме от 18(7). XI 1749 г. к Шумахеру следующее: «Такой подходящей возможности (работать в Академии. — *Э. В.* и *А. Ю.*) обязан всем, благодаря чему приобрел имя, не только г. д-р Гмелин, но также я и все прочие, имевшие счастье некоторое время состоять при русской императорской Академии, должны признать, что всем, что собой представляем, обязаны благоприятным условиям, в которых мы там находились.» О себе Эйлер сообщает далее, что, не будь этой «великолепной возможности», ему пришлось бы взяться за другое дело, в котором он, однако, мог бы заниматься только крохоборством, и продолжает: «Когда его королевское величество [Фридрих II] меня недавно спросил, где я изучил то, что знаю, я, согласно истине, ответил, что всем обязан своему пребыванию в Петербургской академии.»

Это признание Эйлера выявляет значение Петербургской академии для всего развития немецкой науки, до сих пор оцененное далеко не в полной мере.

Таким образом, переписка Эйлера с Миллером равным образом касается истории науки в России и в Германии. И несмотря на проявляющиеся в переписке индивидуальные особенности, взаимные научные связи России и Германии в середине XVIII в. выступают в ней так, что можно говорить об общем стремлении их Академий совместно работать для прогресса человечества.

Литература

1. Архив АН СССР, ф. 21, оп. 3
2. Briefwechsel Friedrich des Großen mit seinem Bruder Prinz August Wilhelm, hrg. v. G. B. Volz, Leipzig, o. J., стр. 95
3. М. В. Ломоносов, Полное собрание сочинений, т. 6. М., Изд-во АН СССР, 1952, стр. 17—80
4. Л. В. Черепнин, Русская историография до XIX века, М., 1957, стр. 187—217
5. М. О. Косвен, Г. Ф. Миллер; к 250-летию со дня рождения. «Советская этнография», 1956, № 1, стр. 72—76

6. П. Пекарский, История императорской Академии наук в Петербурге, т. I, СПб., 1870
7. М. В. Ломоносов, Полное собрание сочинений, т. 3, Изд-во АН СССР, 1952
8. М. В. Ломоносов, Сочинения, т. IV, СПб., 1898
9. Протоколы заседаний конференции императорской Академии наук, т. II, СПб., 1899
10. Б. Г. Кузнецов, Развитие учения об электричестве в русской науке XVIII в. Тр. Ин-та истории естествознания и техники, т. 19, М., 1957
11. Ф. Розенбергер, История физики, ч. 2, М.— Л., 1933
12. История естествознания в России, т. 1, ч. 1, М., 1957, стр. 333—348 (текст О. А. Лежневой)
13. Л. С. Минченко, Физика Эйлера. Тр. Ин-та истории естествознания и техники, т. 19, 1957
14. Я. Г. Дорфман и М. И. Радовский, В. Франклин и русские электрики XVIII в., Труды Ин-та истории естествознания и техники, т. 19, М., 1957.
15. E. Winter und M. Winter, Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1746—1766, Berlin, 1957
16. С. Л. Соболь, История микроскопа и микроскопических исследований в России в XVIII веке, М.— Л., 1949
17. A. F. Büsching, Neue Erdbeschreibung, I. Teil. Hamburg 1754 (8-е изд. в 4 томах вышло в 1788 г.)
18. М. В. Ломоносов, Сочинения, т. VIII, М.—Л., 1948
19. М. В. Ломоносов, Полное собрание сочинений, т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1951, стр. 7—55.
20. Peter Hoffmann, Zur Verbindung Eulers mit der Petersburger Akademie der Wissenschaften während seiner Berliner Zeit. В кн.: Die deutsch-russische Begegnung, und Leonhard Euler, hrsg. von E. Winter (Quellen und Studien zur Geschichte Osteuropas, Bd. I, Berlin, 1958)
21. A. Harnack, Geschichte der königlich preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Bd. I, Teil I, Berlin, 1900
22. Н. М. Раскин, Рукописные материалы химиков второй половины XVIII в., М.— Л., 1957
23. А. П. Юшкевич, Эйлер и русская математика в XVIII в. (из истории первой петербургской математической школы). Тр. Ин-та истории естествознания, т. III, М.—Л., 1949
24. В. И. Смирнов и Е. С. Кулябко, Михаил Софронов, русский математик середины XVIII века, М.— Л., 1954
25. А. П. Юшкевич, Леонард Эйлер. Успехи математических наук, XII, 4 (76) (1957)
26. С. Н. Чернов, Леонард Эйлер и Академия наук. В кн.: Леонард Эйлер. 1707—1783. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти, М.— Л., 1935, стр. 205 и сл.
27. История Академии наук СССР, т. I, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1958

32 Зак. № 988

E. WINTER und A. P. JUSCHKEWITSCH

ÜBER DEN BRIEFWECHSEL LEONHARD EULERS MIT G. F. MÜLLER

(Zusammenfassung)

Die vorliegende Arbeit wurde als Einleitung zur Herausgabe des insgesamt 208 Nummern umfassenden Briefwechsels zwischen L. Euler und G. F. Müller verfaßt, der am Anfang 1959 unter dem Titel: Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers, Teil I. als Band 3 der «Quellen und Studien zur Geschichte Osteuropas» in Berlin erscheinen wird.

Kernstück dieses Briefwechsels des genialen Mathematikers Leonhard Euler mit dem Historiker und Geographen Gerhard Friedrich Müller sind die 187 zwischen 1754 und 1765 gewechselten Briefe, die eine besondere Bedeutung dadurch haben, daß Euler als Direktor der mathematischen Klasse der Berliner Akademie und Auswärtiges Mitglied der Petersburger Akademie und auch Müller als ständiger Konferenz-Sekretär der Petersburger Akademie an zentralen Stellen stehen. Die Bedeutung dieses Briefwechsels als Quelle sowohl für die Geschichte der Petersburger als auch der Berliner Akademie wird herausgearbeitet. Die vielseitigen wissenschaftlichen Probleme, die in diesem Briefwechsel immer wieder berührt werden, z. B. Fragen der Optik, besonders der Anfertigung achromatischer Objektive, Fragen der Elektrizität, der Astronomie usw., aber auch, wenn auch seltener, Fragen der Geographie und Geschichte, machen diesen Briefwechsel zu einer wichtigen Quelle für die Wissenschaftsgeschichte des 18. Jh. ganz allgemein. Die Bedeutung Lomonossows im europäischen Geistesleben tritt in diesem Briefwechsel, in dem oft von wissenschaftlichen Auseinandersetzungen Lomonossows mit seinen Fachkollegen, besonders in Deutschland, die Rede ist, klar hervor.

Bemerkenswert sind die Urteile Eulers über verschiedene Zeitgenossen, z. B. Lambert, K. F. Wolf, Tobias Mayer, Lalande u. a. In den Beziehungen Eulers zu seinen bei ihm in Berlin wohnenden russischen Schülern Rumowskij, Kotelnikow und Sofronow gewinnt die Persönlichkeit L. Eulers und seine Stellung zu Rußland eine klare Profilierung. Für die Biographie Eulers werden viele wichtige Angaben gewonnen.

Н. М. РАСКИН

ВОПРОСЫ ТЕХНИКИ У ЭЙЛЕРА[1]

Жизнь и творчество замечательного математика и механика XVIII в. Леонарда Эйлера изучены еще далеко не полностью. В частности, внимание исследователей почти не привлекала важная сторона его творческой деятельности — участие Эйлера в решении ряда технических проблем.

Круг интересов Леонарда Эйлера в области техники был исключительно широким. Кроме теоретических исследований о трении и по теории прочности, а также работ в области кораблестроения, Эйлер опубликовал несколько статей по теории машин, в которых применил законы динамики к изучению машин. Эти сочинения представляли собой очень простое и ясное введение в теорию машин.

Очень большое внимание Эйлер уделил теории гидравлического двигателя.

Подробному изучению Эйлер подверг различные водоподъемные устройства, начиная с обычных насосов и до Архимедова винта. В целом мемуары Эйлера по теории водоподъемных устройств представляют собой очень полную и для его времени единственную математически разработанную теорию подъема воды с помощью насоса.

Много внимания Эйлер уделил изучению старых корабельных движителей и конструированию новых. Создав математическую теорию действия весел и парусов, он разрабатывал теорию новых корабельных движителей (колесных и гребных). Эйлер также работал и над теорией водометных движителей. В 1775 г. он опубликовал небольшое исследование о применении энергии речного потока для движения корабля.

Некоторое внимание он уделил также вопросу о сооружении плотин.

Два исследования Эйлера, посвященные теории ветряных мельниц,

[1] По материалам Архива Академии наук СССР.

были весьма значительными и, насколько известно, единственными работами по этому вопросу в XVIII в.

Большой след в технике оставили теоретические статьи Эйлера о профилировании зубчатых колес, о весах, о действии пилы, обработке оптических линз, о сваебойных копрах и т. д. [1—4].

Изучение рукописей, писем и других документальных материалов, хранящихся в Архиве Академии наук СССР, показывает, что Эйлер не только публиковал общетеоретические работы по вопросам техники [1—8], но немало внимания уделял также решению практических технических задач. Среди неопубликованных документов Эйлера в Архиве Академии наук СССР сохранились его отзывы о технических проектах, изобретениях и книгах по технике, представленных в Академию; записки с соображениями ученого о развитии некоторых областей техники и результатами технических экспертиз, проведенных при его участии; протокольные записи, в которых зафиксированы выступления Эйлера при обсуждении в Академии наук технических вопросов; переписка с изобретателями и многие другие документы. Эти материалы существенно пополняют наши знания о биографии и творчестве Эйлера.

Важно отметить, что в отдельных случаях обращение к практике служило Эйлеру отправной точкой теоретических исследований.

I. ПРОБЛЕМА ВЕЧНОГО ДВИЖЕНИЯ

Интерес к практическим техническим вопросам проявился у Эйлера очень рано. Еще в 1726 г., девятнадцатилетним юношей, он принял участие в конкурсе, объявленном Парижской академией на составление сочинения о лучшем расположении мачт на корабле. Диссертация Эйлера, представленная на этот конкурс, получила похвальный отзыв Парижской академии и была опубликована во Франции [9].

Сразу после приезда в Петербург, в мае 1727 г. Эйлер принял участие в работах Академического собрания (Конференции). Среди вопросов, которые рассматривались и обсуждались в Собрании, было много различных поручений правительственных учреждений, а среди них технических экспертиз и составлений отзывов об изобретениях. Иногда в Академии обсуждались некоторые принципиальные вопросы прикладной механики.

Одним из больших вопросов современной Эйлеру техники был вопрос о проблеме вечного двигателя.

Обсуждением вопроса об осуществимости различных проектов вечного двигателя в Петербургской академии в XVIII в. занимались сравнительно часто. Несмотря на отрицательный ответ на этот вопрос, данный рядом выдающихся ученых и изобретателей еще в XVI и XVII вв.[2] и подтвержденный многими авторитетными учеными в начале XVIII в., среди ученых и техников и в XVIII в. осталось еще немало сторонников осуществимости вечного движения[3].

Вскоре после приезда Эйлера в Петербург в «Исторических генеалогических и географических примечаниях к Санкт-Петербургским ведомостям» за 1729 г.[4] появились две статьи, посвященные вечному движению. В первой из этих статей [17][5] путем детального разбора ряда конструкций вечных двигателей и ссылками на специальные работы, посвященные этой проблеме, автор доказывал неосуществимость мечтаний многих механиков того времени.

Вторая статья, посвященная, как указывалось, специально критике вечного двигателя, будто бы изобретенного Орфиреусом (Бесслером), содержала также утверждение о невозможности осуществления вечного движения вообще [11, стр. 225—228][6].

---

[2] К ним относились, например, Леонардо да Винчи, Дон-Кардано, Г. Галилей, С. Стевин, Р. Декарт, Х. Гюйгенс, Г.-В. Лейбниц.

[3] Во время переговоров академического библиотекаря И.-Д. Шумахера, командированного за границу Петром I в начале 1721 г., был затронут и вопрос о вечном двигателе, будто бы изобретенном Иоганном-Эрнестом Орфиреусом (Бесслером) [10]. Для проверки этого изобретения, которое наделало в свое время много шума в Европе, Шумахер привлек Х. Вольфа. Вольф убедительно критиковал машину Орфиреуса [11, стр. 225—227; 12, стр. 34—35, 50—52, 539—541; 13, стр. 4—5; 14, л. 11—12]. Однако тот же Х. Вольф, как писал Шумахер в своем отчете Петру I, «Обещается перпетуум мобиле, ежели возможно будет, совершить...» [12, стр. 539]. В этом же документе Шумахер приводит мнения некоторых европейских ученых (в том числе известного голландского физика В. Я. Гравезанда (1688—1742), которые считали, что осуществление вечного движения «по обычаю математиков не противно есть принципиям математическим...» [12, стр. 540]. Одновременно Шумахер писал Петру I, что «Французские и английские математики ни во что почитают все оныя перепетуи мобилес и сказывают, яко оное против принципиев математических» [12, стр. 541]. Богатый материал по истории вечного двигателя собран в книге Диркса [15].

[4] Эти «Примечания» к газете, издававшейся Петербургской академией, скоро превратились в «первый русский научно-популярный журнал...» [16, стр. 19].

[5] В статье приводится цитата из книги видного инженера того времени Б. Лоринуса «О крепостном строении», в которой автор так отзывается об изобретателях вечного двигателя: «Не диво, что тот, который о вечном движении трудится, вечным дураком будет».

[6] В этой статье, между прочим, говорится: «2. Понеже по доказательствам математиков невозможно есть, чтоб такая машина собственною своею силой в своем дви-

В отличие от Парижской академии и Лондонского королевского общества[7] Петербургская академия ни в XVIII в., ни позже не декларировала официально своего отношения к проблеме вечного движения. В литературе нет никаких данных о рассмотрении этого вопроса в Петербургской академии. Между тем для истории механики и технических наук было бы важно выяснить мнение Петербургской академии по этому вопросу. Особенный интерес этот вопрос представляет и потому, что в некоторых работах приводится неправильное мнение о взглядах Эйлера на него. Такое неверное представление возникло в связи с высказываниями по данному вопросу выдающегося изобретателя и механика И. П. Кулибина, служившего одновременно с Эйлером в Петербургской академии[8]. Эйлер с вниманием и покровительством относился к Кулибину, а последний платил ему глубоким уважением. Поэтому нет никаких оснований предполагать, что в своих высказываниях об Эйлере Кулибин руководствовался чувством личной неприязни или какими-либо другими неделовыми соображениями. Изобретатель в ряде документов, относящихся к последним годам его жизни, писал, что уже с момента поступления на службу в Петербургскую академию он занимался конструированием и постройкой различных «самодвижимых машин» [19, л. 2; 20, л. 1—2; 21, л. 2—3; 22, л. 3—4; 23, л. 2—4]. Всего Кулибин посвятил этому делу (с перерывами) около сорока лет. В составленных им документах академический механик утверждал, что в 1776 г. он консультировался по этому вопросу с Эйлером, и последний ответил ему, что «... он сего мнения о произведении таковые машины в действо никак не

жении непрерывно пребывать могла, то дается к сему движению некоторая помощь конечно от какой-нибудь материи и снаружи...»

[7] Парижская академия в 1775 г. объявила о своем отказе принимать к рассмотрению проекты вечного двигателя. Вслед за Парижской академией подобное решение было принято и Лондонским королевским обществом.

[8] Первый биограф И. П. Кулибина — П. П. Свиньин, который лично знал изобретателя и его семью, а также пользовался при составлении биографии Кулибина его документальными материалами, писал [18]: «Жаль, что не удалось ему (Кулибину.— *Н. Р.*) кончить сего важного изобретения (вечного двигателя.— *Н. Р.*). Может быть он был бы счастливее своих предшественников, останавливавшихся на сем камне преткновения; может быть, он доказал бы, что вечное движение не есть химера механики, как утверждал Даламберт, подобно философскому камню — в химии, бескорыстной любви — в нравственности. Любопытно заметить, что Кулибин поощрен был к сему открытию знаменитым математиком Эйлером, который на вопрос его, какого он мнения насчет вечного движения, отвечал, что он почитает его существующим в природе, и думает, что оно обретется каким-нибудь счастливым образом, подобно откровениям, почитаемым до того невозможными.»

опровергает, а сказал мне (И. П. Кулибину.— *Н. Р.*), что может де быть в свое время какому щастливому сделать таковую машину и откроется. Сей же муж тогда почитался ученостью во всей Европе первым» [19, л. 2].

Автор статьи о вечном двигателе И. П. Кулибина — проф. Д. И. Каргин писал [24]: «На основании этого указания на Эйлера стали ссылаться как на вдохновителя стремлений Кулибина к изобретению perpetuum mobile. Этот туманный факт следовало бы проверить еще раз по документам Эйлера.»

В фондах Архива Академии наук СССР хранятся документы, содержащие полный ответ на поставленные вопросы.

* * *

Отмеченные выше колебания в вопросе о возможности осуществления вечного движения, существовавшие в ученой среде в начале XVIII в., нашли свое отражение в мнениях некоторых членов Петербургской академии. Свидетельством этих колебаний может служить заявление члена Академии Христиана Мартини (1699 — ум. после 1739), профессора физики, а затем логики и метафизики, на заседании Академического собрания в ноябре 1725 г. о том, что им открыт метод получения вечного движения [25, стр. 2]. Это же заявление было сделано им в «приватных собраниях» [26, стр. 283][9]. По-видимому, уже тогда в Академическом собрании не считали возможным рассматривать это заявление Мартини, так как в бумагах Собрания нет никаких документальных материалов о рассмотрении этого заявления.

В сентябре 1738 г. профессора Петербургской академии физик Г.-В. Крафт и астрономы Х.-Н. Винсгейм и Г. Гейнзиус рассматривали (по предложению Канцелярии Академии) присланную из «Канцелярии монетного правления» модель машины, изобретенной московским купцом Ларионом Лаврентьевым. В своем отзыве от 13 сентября 1738 г. они отрицательно высказались о возможности осуществления машины Лаврентьева, исходя, главным образом, из того, что «... принятого при том наме-

[9] Мартини при этом делал «Предложение махины, которую через немалое время движение округлое, оризонтальное, без всякого наружного двигателя сохраняется». Мартини, рекомендованный первому президенту Академии наук Л. Л. Блюментросту Х. Вольфом, ничем себя не зарекомендовал как ученый (о нем очень плохо отзывались Г. Ф. Миллер и Г. Б. Бюльфингер) и был вынужден вскоре (в 1729 г.) уйти из Академии и уехать из России [27, стр. 10; 26, стр. 454, 485, 486].

рения о сочинении чрез сие вечного движения никогда получить не можно, ибо мы немедленно узнали, что одно у сея машины, которое нечто особливого и к непрестанному движению способного имеет,— есть карамысл, или подъем, у которого одна ручка короче, а другая всегда долее становится, уже давно и от многих к такому намерению употреблен; однакож всегда фальшив и к сему делу неспособным найден, как сие не только одним механическим пробованием усмотрели, но и от самого искусства довольно узнали» [28, л, 566—566 об.; 574—574 об.; 29, стр. 798].

Таким образом, уже в 1738 г. три члена Академии решительно отвергли возможность осуществления принципа вечного движения и считали постройку машины на его основе невозможной.

Через некоторое время на заседании Академического собрания 23 февраля 1739 г. произошла дискуссия о возможности осуществить вечное движение [25, стр. 537]. С утверждением о возможности осуществления вечного двигателя на основе использования магнитов выступил академический механик и «мастер математических инструментов» Исаак Брукнер. Ему возражали присутствовавшие на заседании ученые, так как в протоколе указано, что «некоторое время происходила дискуссия о возможности изобрести вечное движение...». Но кто именно из членов Академии выступил против утверждения Брукнера, в протоколе не указано. Никаких дальнейших шагов по этому вопросу предпринято не было. Так как кроме трех членов Академического собрания (Г.-В. Крафта, Х.-Н. Винсгейма и Г. Гейнзиуса), точка зрения которых нам уже известна, на этом заседании присутствовали еще профессора Л. Эйлер, Х. Гольдбах, Ж.-Н. Делиль, И. Вейтбрехт, И. Амман, Ф.-Г. Штрубе де Пирмонт, И.-Х. Вильде и адъюнкт Бремер, можно предполагать, что это мнение разделялось всеми или по крайней мере подавляющим большинством присутствовавших.

О том, что в числе противников возможности осуществления вечного движения был и Эйлер, свидетельствует его ответ на запрос Х. Гольдбаха. Этот последний в своем письме от 2 июня 1747 г. [30, стр. 422] из Петербурга в Берлин, где жил в это время Эйлер, запрашивал его мнение об известном уже нам вечном двигателе Орфиреуса: «С того времени, как появилось сообщение о perpetuum mobile Орфирея, в котором указывалось на шестинедельное вращение колеса, никто, сколько мне помнится, не отмечал публично, что эта машина допускает дальнейшие усовершенствования и может быть применена на практике; это тем более наводит на размышления, что автор машины был жив еще много лет после того и может быть жив и сейчас. Главный архитектор Вены, г. Фишер фон Эрлах, который вместе с Гравезандом осматривали эту машину в присутствии г. ландграфа Гессенского, тогда отзывался мне о ней с большой похвалой и при этом указывал, что когда колесо стояло, он со вниманием сообщил ему совсем слабый толчок, после чего оно начало само вращаться все быстрее и быстрее, пока не достигло известной степени скорости, с которой и продолжало равномерно вращаться...»

Эйлер ответил Гольдбаху в письме от 4. VII 1747 г. [30, стр. 428]. Его письмо рассеивает все сомнения X. Гольдбаха по поводу машины Орфиреуса и дает ясный ответ о представлениях самого Эйлера. «Я полагаю,— писал Л. Эйлер,— что Орфирé еще жив, так как некоторое время назад он еще утверждал, что изобрел корабль, движущийся под водой. Свой perpetuum mobile он разбил в куски, а потом уже не желал восстанавливать, что делает изобретение довольно подозрительным. Приведенное Вами обстоятельство, что эта машина, будучи слегка приведена в движение, движется затем все быстрее до определенной скорости, с которой и шла дальше,— обнаруживается в любом маятнике. Ибо если часы заведены, но маятник стоит на месте, то и часы не идут. Но если дать маятнику малейший толчок, то груз может оказать действие и движение идет своим нормальным ходом. Вместо груза, в машине Орфирé можно было бы применить и пружину, она могла бы быть и такой, что движение продолжалось бы целый год без нового ее завода. Именно таким путем и можно объяснить все упомянутые свойства машины, кроме того, которое также часто приводят,— что Орфирé открыл весь секрет покойному ландграфу, и тот будто бы признал эту машину за настоящий perpetuum mobile, чего нельзя было бы предполагать, если бы движение имело такую причину. Я не знаю, однако, вполне ли правильно это последнее обстоятельство...»

В своем письме из Берлина в Петербургскую академию от 25. IV 1750 г. [31, л. 136—137] Эйлер давал отзыв о посланных ему в Берлин технических проектах: самозаводящихся часах и о новой системе гребли. В этом письме Эйлер писал: «Ваше превосходительство г. Президент делаете мне большую честь, спрашивая мое мнение о двух работах, которые Вы изволили мне послать. Я прочел и ту, и другую с удовольствием, и если Вы хотите знать мое суждение, то я нахожу, что та, где идет речь о часах, которые заводятся сами собою, в большей мере заслуживает предпочтения перед той, где автор предлагает новый и более выгодный способ грести. Ибо, что касается первой, то и у меня уже была та же мысль — применить пирометр к маятнику так, чтобы все изменения, производимые в нем различной степенью теплоты, могли служить для завода машины, и таким образом казалось бы, что маятник заводится сам собой, однако сила является для него посторонней; и вот причина, почему такая машина не может быть названа вечным движением, поскольку изменения теплоты лишь случайные, так как, если бы температура оставалась неизменной в течение достаточно долгого времени, машина вынуждена была бы остановиться...»

В записной книжке Эйлера находится заметка «Водяное колесо славного Сегнера», относящаяся к началу 50-х годов [32, л. 58]. В ней Эйлер, рассматривая характер действия сил, которые приводят во вращение колесо Сегнера, между прочим писал: «Итак, видно, что при $g = a$ или $g > a$ в канал qR может быть поднято больше воды, чем требуется для приведения машины в движение, то, что доказывало бы perpetuum mobile.» Как видно из контекста, автор заметки пользуется приведением к вечному движению так же, как математики пользуются приведением к абсурду. Таким образом, эта черновая заметка также подтверждает отрицательное отношение Эйлера к возможности осуществления вечного двигателя.

Дальнейшее рассмотрение этого вопроса производилось в Петербургской академии и после возвращения Эйлера из Берлина. Так, 11 апреля 1766 г. Академическое собрание обсуждало письмо «секретаря областной канцелярии на острове Эзеле» Неймана [33, стр. 561—562][10], в котором Нейман высказал «... убеждение в том, что им открыт расчет для конструкции машины, которую он гордо назвал вечным двигателем, сама машина может быть теперь закончена без затруднений. Профессора постановили: относительно подобного напрасного труда, до сих пор предпринимаемого столькими людьми, указать ему (Нейману.— *Н. Р.*) в ответном письме, чтобы он перестал им заниматься...»

Однако решительный ответ Академии не остановил Неймана, и 4 сентября 1766 г. Академическое собрание [33, стр. 571][11] рассматривало второе письмо Неймана, в котором он «... просил предоставить ему какое-либо место в Академии... Вместе с тем была просмотрена для примера его попытка (как он полагает новая) построения теории вечного движения. Профессора постановили ответить ему письменно: так как он, как было замечено профессорами, допустил ошибки уже в самом начале (в методе) и при трактовке этого вопроса (он не придал значения трению и другим неизбежным препятствиям), то профессора вынуждены пожалеть о том,

[10] На этом заседании присутствовали: Я. Я. Штелин, И.-А.Браун, Н. Попов, И.-Г. Леман, А. П. Протасов, С. Я. Румовский.

[11] На этом заседании присутствовали Л. Эйлер, Я. Я. Штелин, И.-А. Браун, А. П. Протасов.

что он принял на себя столь большой и напрасный труд, который не увенчался и для него бо́льшим успехом, чем для многих других, которые потратили так много труда для изобретения той же машины... следует ему по дружески указать, чтобы он свои физико-математические занятия... направил бы на другие доказательства, в которых бы открылась более верная надежда достигнуть цели, чем в занятиях по отысканию вечного движения.»

Таким образом, в это время Петербургская академия, хотя и была единодушна в отрицательной оценке самого принципа вечного движения, еще отвечала авторам проектов вечного двигателя. Через некоторое время стали поступать иначе.

21 июня 1770 г. на заседании Академического собрания [33, стр. 751] было зачитано анонимное письмо, полученное Академией из Москвы. В этом письме «некое общество» сообщало о постройке им вечного двигателя и обещало в ближайшее время выслать машину. Ни в Протоколах Академического собрания, ни в других документальных материалах не сохранилось никаких сведений о реакции Академии на это предложение.

29 ноября 1773 г. на заседании Академического собрания [34, стр. 109][12] А.-И. Лексель зачитал письмо, которое Эйлер получил из Цюриха от некоего Жана Конрада Боллер Д'Эгг. Автор сообщал, что он претендует на открытие вечного движения и просил известить его о возможности «повергнуть к стопам ее величества свою машину, которую он собирается сконструировать, основываясь на этом принципе, и которая, как он уверен, сохранит свое движение навсегда». На этот раз Академическое собрание высказалось совершенно прямо и недвусмысленно. В том же протоколе указывалось, что: «Так как Академия наук придерживается противоположного мнения, то она отказывается предпринять какие-либо шаги для получения того, о чем просит указанный Боллер.» Совершенно ясно, что и Эйлер, передавший это письмо на рассмотрение Академического собрания и присутствовавший на этом заседании, полностью разделял точку зрения своих коллег.

Ученые — члены Петербургской академии выразили свою точку зрения на возможность осуществления вечного движения и в статье «О беспрерывном движении», опубликованной в Месяцеслове (календари, издававшиеся Академией с целью популяризации научных знаний) за

[12] На этом заседании присутствовали Л. Эйлер, Я. Я. Штелин, И.-А. Эйлер, С. К. Котельников, С. Я. Румовский, К.-Ф. Вольф, А. П. Протасов, Л. Ю. Крафт, А.-И. Лексель.

1773 г.[13]. Эта статья заканчивалась следующим абзацем: «Сего, кажется, довольно, чтобы тех, кои некоторое о философии имеют сведение, уверить о невозможности беспрерывного движения. А те, кои не имеют, вероятно искать оного никогда не перестанут: но большего вреда от этого не последует.»

В 1775 г., как указывалось выше, Парижская академия приняла решение не рассматривать проектов вечного двигателя. Петербургская академия, очевидно, солидаризируясь с этим мнением, опубликовала в журнале «Академические известия на 1780 год...», издававшемся на русском языке, статью, переведенную с французского языка под заглавием: «Совет мечтающим о изобретении вечного или бесконечного движения» [35, стр. 423—425]. В этой статье, между прочим, говорилось: «Задача о вечном или бесконечном движении есть такая, в решении которой упражняются весьма многие, отчасти не разумея оной, а отчасти не имея нужных знаний к ее решению и удаляясь от полезнейших своих упражнений... Изобресть вечное непрерывное движение совсем невозможно... Из всего сего довольно явствует, что иметь непрерывное движение такое, какого желают, есть дело невозможное. Всякая движущая сила производит только равное побуждению действие... Сии бесполезные исследования крайне вредны потому наипаче, что от них многие семейства разорились, и многие искусные механики, которые могли бы оказывать обществу знанием своим великие услуги, потеряли, достигая до решения сей задачи, все свое имение, время и труды.»

После этого Петербургская академия так же, как и другие европейские научные корпорации, не только перестала рассматривать вопрос о поддержке проектов вечного двигателя, но и прекратила принимать их к рассмотрению и оставляла без ответа[14].

---

[13] Собрание сочинений, выбранных из Месяцесловов (ч. VIII, СПб., 1792, стр. 18—25). Статья эта была помещена в Месяцеслове наряду со статьями «О философском камне» и «О квадратуре круга», авторы которых также рассматривали эти вопросы с точки зрения научных знаний своего времени, предостерегая своих читателей от занятий этими вопросами.

[14] Так, на заседании Академического собрания 15 ноября 1784 было оставлено без ответа письмо неизвестного автора, который сообщал, что он претендует на открытие вечного двигателя [34, стр. 780]. То же относится к письму музыкального мастера Комба из Берлина, предложившего проект самозаводящихся часов [36, стр. 951].

Когда же в Академическое собрание поступил 19 мая 1791 г. проект вечного двигателя немецкого механика И.- Ф. Гейнле, рассмотреть который Академию обязывал указ Екатерины II, собрание начинало свое решение словами: «Так как вечное движение по своей природе является невозможным и тот, кто претендует на изобретение та-

Созданная Эйлером петербургская математическая школа занимала ведущее положение в Академии наук в XVIII в. Невозможно представить себе, что публиковавшиеся в академических изданиях статьи по вопросам математики и механики не отражали точки зрения Эйлера и его учеников. Поэтому можно с уверенностью сказать, что и сам глава школы был несомненным противником возможности осуществления вечного движения. Он, конечно, считал невозможным для себя (и для Академии) поддерживать какие-либо работы, ведущиеся в этом направлении, рассматривая их как совершенно бесполезные. Однако Эйлер, по-видимому, считал эти работы частным делом изобретателей, не имеющих достаточной научной подготовки: он не видел в их деятельности большого ущерба для общества. Отсюда уклончивый характер его ответа Кулибину и выводов статьи «О беспрерывном движении», которая была несомненно написана одним из близких к нему ученых. Кроме того, известная уклончивость самого Эйлера в этом вопросе была связана с отсутствием строго доказательного вывода невозможности вечного двигателя[15]. Здесь же, по нашему мнению, заключена и причина того, что Петербургская академия официально не декларировала своего отношения к этой проблеме.

II. К ИСТОРИИ ИЗОБРЕТЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ТУРБИНЫ в XVIII в.

Одной из важнейших технических проблем в XVIII в. было создание нового, дешевого и мощного двигателя для зарождавшейся крупной промышленности. Мысль многих изобретателей и ученых была направлена на решение этой проблемы. При этом, наряду с созданием двигателей принципиально нового типа — паровых машин, техническая мысль не оставляла без внимания и старые двигатели — водяное колесо и ветряные мельницы.

К XVIII в. водяные колеса получили чрезвычайно широкое применение на многих промышленных предприятиях. Водяные колеса всех применявшихся тогда типов (наливного или верхнебойного, среднебойного и нижнебойного) имели ряд существенных недостатков, к которым в первую очередь нужно отнести малую мощность, небольшое число оборотов и относительно невысокий коэффициент полезного действия. Кроме

ковой машины, должен считаться не имеющим правильных представлений о механике...» [36, стр. 501]. Вскоре этот проект Гейнле попал к Кулибину, который нашел его неосуществимым [20, л. 2].

[15] Уклончивость Эйлера в этом вопросе можно усмотреть также и в его письме к А. К. Клеро (1742 г.) [45—46, л. 209], указанном автору Л. С. Минченко.

того, крупнейшим из недостатков водяного колеса была привязанность его к берегам водоемов. Одно это обстоятельство часто не давало возможности использовать водяные колеса на промышленных предприятиях, строившихся в большом числе в XVIII в. Карл Маркс писал: «... употребление водяной силы, как преобладающей двигательной силы, было связано с различными затруднениями. Ее нельзя было повышать до произвольного уровня, ее недостаток нельзя было восполнить; иногда она истощалась и, главное, имела чисто локальный характер» («Капитал», т. I, 1950, стр. 383).

Не имея возможности устранить этот основной недостаток, многие изобретатели и ученые в XVIII в. пытались улучшить конструкцию водяных колес, при этом они пришли к созданию принципиально нового водяного двигателя — гидравлической турбины. Большой вклад в эту работу внес и Эйлер, перу которого принадлежат четыре сочинения [16], из которых три посвящены рассмотрению теории реактивного водяного колеса, изобретенного уроженцем Венгрии профессором университетов в Иене, Гёттингене и Галле Яношом-Андрашом Сегнером (1704—1777)[17]. Четвертое сочинение было посвящено разработке теории реактивной гидравлической турбины и описанию турбины, сконструированной Эйлером.

В целом эти четыре работы явились первым опытом создания научной теории гидравлических реактивных турбин и составляют важный момент в истории развития теории машиностроения.

Несмотря на двести лет, прошедших со времени опубликования этих статей, результаты, полученные Эйлером, представляют интерес и в настоящее время. Однако эта очень интересная и важная сторона деятельности великого ученого XVIII в. изучена совершенно недостаточно. Между тем в Архиве Академии наук СССР хранятся документы, проливающие свет на работу Эйлера в этом направлении.

Первой группой документальных материалов, содержащих много све-

---

[16] На содержании каждой из этих четырех работ мы остановимся ниже.

[17] Я.-А. Сегнер учился в Иенском университете, по окончании которого он получил звание доктора медицины и практиковал в Братиславе и Дебрецене. С 1733 г. он профессор Иенского, с 1735 — Гёттингенского университета, а с 1755 г.— университета в Галле. Сегнер был избран в число иностранных членов Петербургской академии наук 18 августа 1754 г. [33, стр. 309, 311]. Среди трудов Сегнера получили известность «Введение в анализ бесконечно малых» (1748), «Курс математики» (5 частей, 1756). Сегнер занимался также вопросами гидростатики. Среди многочисленных приборов, над улучшением или изобретением которых трудился этот ученый, было так называемое сегнерово колесо — прообраз первой реактивной гидравлической турбины [37, стр. 318—320].

дений по интересующему нас вопросу, являются письма Я.-А. Сегнера к Эйлеру[18]. Эта переписка охватывала период с 1741 по 1771 г. и носила неофициальный, дружественный характер. Часть переписки Сегнера с Эйлером посвящена истории создания гидравлических турбин.

К сожалению, ответные письма Эйлера к Сегнеру не обнаружены, однако сведения, содержащиеся в неопубликованных записных книжках и заметках Эйлера, а также в его статьях, сопоставленные с ответами Сегнера, позволяют получить довольно ясное представление о характере обсуждавшихся вопросов, в том числе связанных с конструированием и постройкой реактивной турбины.

В своих письмах к Эйлеру, помимо обмена мнениями по личным и общественным вопросам, Сегнер обсуждал самые различные научные и научно-технические проблемы. В частности, из этой переписки ясно, что Сегнер много работал над улучшением и изобретением большого числа научных приборов (логарифмической линейки, морской зрительной трубы, угломера, машины для метания твердых тел, полевого измерительного инструмента, часов с маятником, приборов для изучения трения, прибора для вычисления пути комет, «бездымной печи», водяных часов, маятниковых астрономических часов и т. д.). Именно к этому направлению работ Сегнера относилось изобретенное им так называемое сегнерово колесо, приводимое в движение под воздействием реакции воды. В письме к Эйлеру от 11 января 1750 г. Сегнер извещал об изобретении «безделицы... для объяснения некоторых механических законов» [38, л. 97 об.][19]. Позднее в других письмах Сегнер сообщал Эйлеру ряд дополнительных сведений о своем изобретении — прообразе гидравлической турбины — и о своих попытках усовершенствовать и применить его на практике. Эти письма Сегнера представляют большой интерес, так как именно работа по изучению и улучшению действия сегнерова колеса привела Эйлера к его последующим исследованиям в этой области и созданию турбины своей конструкции.

Второй (относительно немногочисленной) группой материалов, проливающих свет на работу Эйлера по созданию гидравлической турбины, являются заметки в записных книжках [32, л. 58—58 об., 105; 39, л. 40] и содержание некоторых других документов из рукописного наследия Эйлера, хранящегося в Архиве Академии наук СССР [38, 117—121].

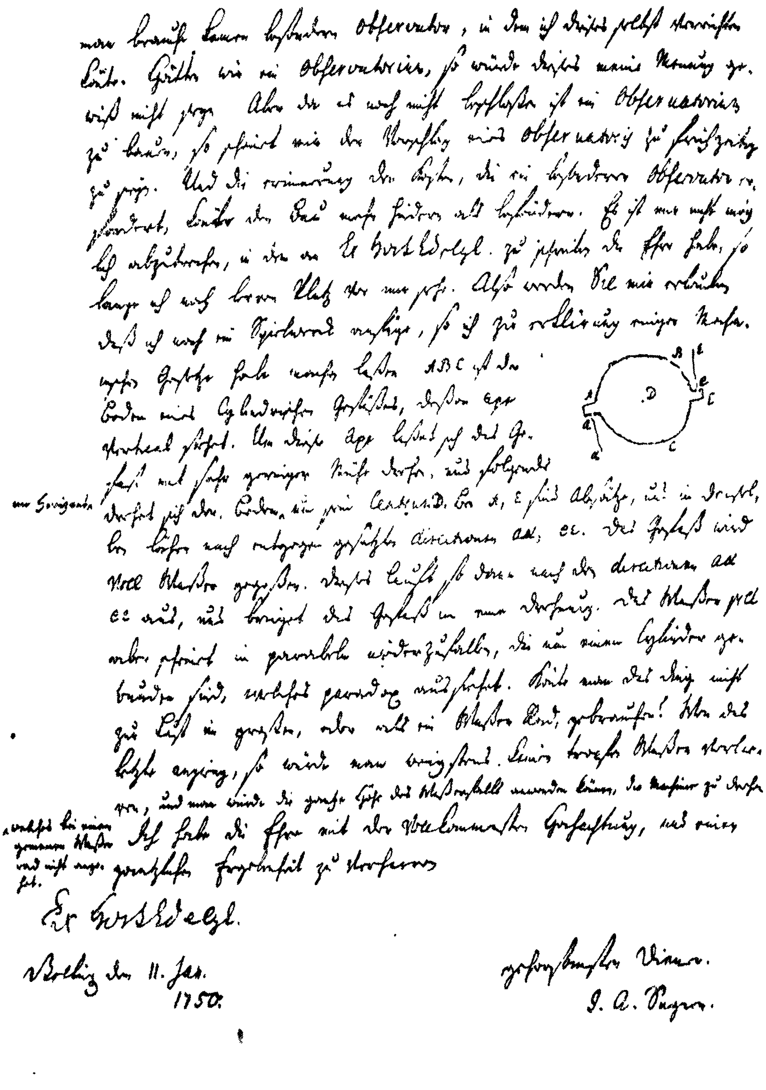
[18] В Архиве, в фонде Леонарда Эйлера (ф. 136, оп. 2) сохранилось всего около 160 писем Я.-А. Сегнера к Эйлеру.

[19] Таким образом, очевидно, что это изобретение, которое обычно датируется 1750 г., было сделано Сегнером раньше, по крайней мере, в конце 1749 г.

Первое сообщение о своей идее использования реакции воды в механизме, называемом теперь сегнеровым колесом, Я.-А. Сегнер сделал в письме Эйлеру из Гёттингена от 11 января 1750 г. [38, л. 92—97об.]. В этом письме Сегнер указывал (фиг. 1): «... Итак, позвольте мне добавить одну безделицу, которую я соорудил для объяснения некоторых механических законов. *ABC* — есть дно цилиндрического сосуда, ось которого установлена вертикально. Сосуд можно вращать вокруг этой оси, прилагая к тому очень небольшое усилие, и тогда дно его будет вращаться вокруг своего центра *D*. У *AE* имеются выступы и в них отверстия в противоположных направлениях *aa* и *eE*. Сосуд наполняется водой, которая вытекает в направлениях *aa* и *eE* и приводит сосуд во вращение. Струя воды, однако, как это кажется, образует параболы, которые огибают цилиндр, что выглядит весьма любопытно. Нельзя ли эту вещь употребить в больших размерах для забавы или, например, в водяном колесе? Если бы последнее удалось, то по крайней мере не потерялось бы ни капли воды и можно было бы использовать всю высоту водопада для вращения машины, что при обыкновенном водяном колесе не удается» [38, л. 97 об.].

Как видно, Сегнер, объясняя устройство своего прибора, высказал и мысль о возможности его практического применения. Изобретатель отметил при этом и некоторые из вероятных выгод, которые можно было бы, по его мнению, извлечь из применения машины, действующей по этому принципу, сравнительно с обычными вододействующими установками.

Эйлер, по-видимому, не сразу понял довольно краткие объяснения Сегнера. Поэтому последний в письме к Эйлеру из Гёттингена от 20 марта 1750 г. [38, л. 129—130 об.] подробно объяснил устройство своего колеса и снабдил это описание хорошо выполненным чертежом мукомольной мельницы, приводимой в действие этой машиной (фиг. 2). При этом Сегнер писал: «В том, что Вы не сразу поняли, каким образом вытекающая вода может приводить в движение мельницу, виновато, конечно, мое выражение, в котором я упомянул о водяном колесе. Но я называю применяемую при этом машину водяным колесом не по виду, а по действию. Здесь представлена основная часть конструкции такой мельницы: *ab* — воронка,— или ее можно назвать как-нибудь иначе,— в которую поступает вода из жёлоба. Отсюда она течет через обозначенные отверстия в в трубу *cd* и из нее в полые колена (трубки.— *Н. Р.*) *de*, *df*; их может быть два, четыре или больше. Все эти колена имеют отверстия, как это видно у *e*, через которые вода вытекает в горизонтальной плоскости. От этого вращается труба *cd*, которая в *G* покоится в некоей точке; *hi* — почва,



Berlin den 11. Jan. 1750.

J. A. Segner.

Фиг. 1. Последняя страница письма Я.-А. Сегнера Эйлеру от 11 января 1750 г.

дающая свободный сток воде. Сверху труба прикреплена осью *ck* к балке *lm* и с этой осью соединено зубчатое колесо *no*, которое вращает шестерню *o*, вал *op* и с его помощью верхний жёрнов *p*, в то время как нижний жёрнов *q* неподвижно покоится на балке *rs*. Вы легко можете видеть, что самое помещение для такой мельницы должно быть построено несколько иначе, чем для обыкновенной мельницы...»

Некоторые дополнительные сведения о машине Сегнера Эйлер мог почерпнуть из статьи изобретателя, опубликованной в 1750 г. под названием «Описание изобретенной профессором Сегнером из Гёттингена гидравлической машины» [40, стр. 136—140][20]. В статье Сегнер подробно разбирал принцип действия своей машины. При этом, вероятно, путем наблюдений за действием модели [21] и теоретических исследований он пришел к мысли о том, что центробежная сила, возникающая при вращении его машины, оказывает значительное влияние на величину силы реакции. Сегнер писал, что «вода, приведенная во вращательное движение, пытается удалиться от средней точки C и оказывает большее давление в трубке EF, чем оказывалось бы в противном случае...» [40, стр. 139].

В своей статье Сегнер привел также описание и чертеж мукомольной мельницы своей конструкции, приводимой в действие его машиной. Такая мельница представляла собой агрегат, в котором мукомольные жернова были помещены непосредственно на вал двигателя; в ней совершенно не было громоздких и сложных цевочно-зубчатых передач, обязательных для обычных водяных мельниц.[22] При этом Сегнер придал своей машине новые конструктивные формы. Машина Сегнера в ее новом виде с небольшими изменениями была воспроизведена в статьях Эйлера.

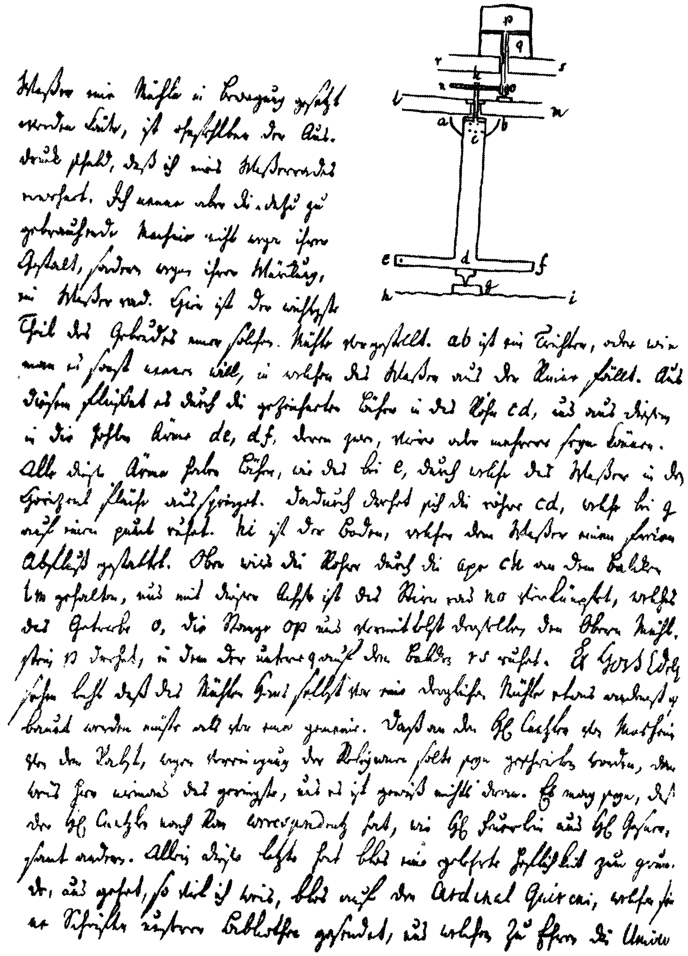
Через короткое время в том же ганноверском журнале появилась вторая заметка Сегнера «Некоторые замечания к описанию гидравлической машины, помещенному в 35 номере этих известий» [41, стр. 149—150]. В этой заметке Сегнер (очевидно, под влиянием критики) вносил

---

[20] В дальнейшем Сегнер послал Эйлеру специальное «Пояснение», содержащее подробное описание турбины, которое дополняло его статью [40, л. 139, 151]. К этому пояснению был приложен раскрашенный чертеж (он не сохранился). В этом документе автор ссылается и на чертежи, приложенные к опубликованной статье.

[21] В примечании от редакции к статье Сегнера указано, что «здешний умелый механик Зик...изготовил на основании этого описания несколько моделей, которые в небольшом масштабе демонстрируют действия этих машин...» [40, стр. 140].

[22] Необходимо отметить, что в своей статье Сегнер пытается упростить конструкцию мукомольной мельницы, отказываясь от применения цевочно-зубчатой передачи, применение которой предусматривается в более раннем проекте, приведенном в письме к Эйлеру от 20. III 1750 г. (фиг. 3).



Фиг. 2. Страница из письма Я.-А. Сегнера Эйлеру от 20 марта 1750 г.

ряд изменений в конструкцию своей машины. Правда, эти изменения были не принципиального порядка, а имели задачей устранение очевидных недочетов его конструкции. Некоторые изменения, внесенные Сегнером, например, должны были уменьшить бесполезные потери воды в рабочем аппарате машины. Они, однако, серьезно утяжелили конструкцию. Об этих изменениях в конструкции Сегнер позже сообщил Эйлеру.

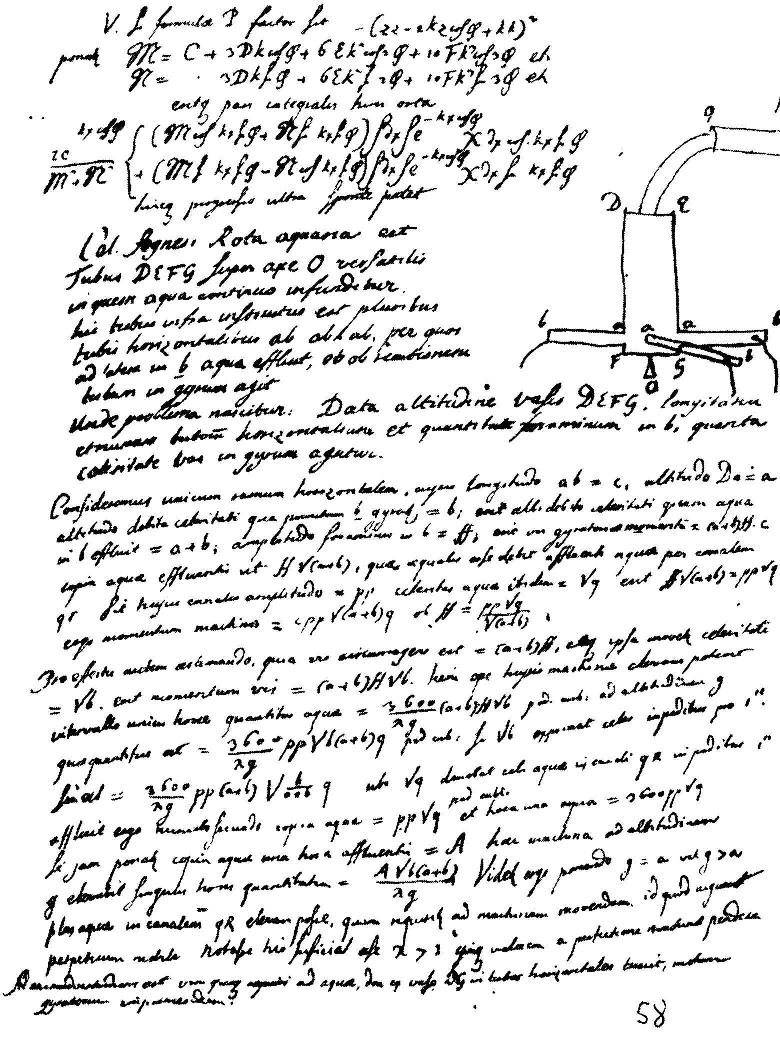
Очень важно отметить сделанное Сегнером в заметке сообщение о том, что материалы его расчетов были предметом диспута при защите двух докторских диссертаций, очевидно, в Гёттингенском университете.

Письма Сегнера и его статьи, опубликованные в 1750 г., послужили отправной точкой для работ Эйлера по изучению действия сегнерова колеса. Свидетельством этой работы Эйлера является заметка в одной из его записных книжек под заглавием «Водяное колесо славного Сегнера» [32, л. 58—58 об.] (фиг. 3), которую также надо отнести к 1750 г. В этой заметке Л. Эйлер пытается решить следующую задачу: «... Исходя из заданной высоты сосуда $DEFG$, из данной длины и числа горизонтальных трубок и данного количества отверстий b, определить, с какой скоростью сосуд будет вращаться» [32, л. 58].

В этой заметке Эйлер исследовал характер действия сил, приводящих в действие машину Сегнера, и попытался вычислить их величину. При этом он приходил к выводу, что «эти силы являются, во-первых, результатом силы давления воды спереди и сзади капли в трубе, затем результатом сил, которые оказывают давление на стороны (стенки.— *Н. Р.*) трубы со всех сторон вокруг капли...»

При решении этого вопроса Эйлеру пришлось сформулировать и разрешить следующую задачу: «Если под воздействием каких-либо сил вода движется через какой-либо канал, найти силы, которые оказывают при этом давление на канал, или те, которые канал испытывает под воздействием воды.» Решению этой задачи посвящена одна из заметок Эйлера в той же записной книжке [32, л. 105] (фиг. 4).

Первые результаты своих наблюдений и расчетов Эйлер изложил в статье «Исследование о действии гидравлической машины, предложенной г. Сегнером профессором в Гёттингене» [42, стр. 311—354], которая была доложена им Берлинской академии 2 сентября 1751 г. и опубликована в 1752 г. [43, стр. 57]. В этом сочинении Эйлер «... исследует вопрос о том, каково соотношение давления и скорости в трубке, если она вращается вокруг вертикальной оси, через которую протекает вода при постоянной высоте напора, в то время, когда вода горизонтально вытекает в нижней части трубок через боковое отверстие. Вывод распространяется



Cel. Segner. Rota aquaria est Tubus DEFG super axe O versatilis in quem aqua continuo infunditur. hic tubus infra instructus est pluribus tubis horizontalibus ab ab ab, per quos ad latera in b aqua effluit, et ob reactionem tubum in gyrum agit. Unde problema nascitur: Data altitudine vasis DEFG, longitudine et numero tuborum horizontalium et quantitate foraminum in b, quanta celeritate hic in gyrum agetur.

58

Фиг. 3. Начало заметки Эйлера о водяном колесе Я.-А. Сегнера

(из записных книжек Эйлера)

на систему таких трубок, симметрично расположенных вокруг оси вращения, и вычисляется мощность такой машины с учетом данного имеющегося в распоряжении количества воды... Исследование заканчивается чрезвычайно остроумным решением 7 основных задач» [1, стр. XVII—XXII]. В этой же статье содержится первая попытка теоретического определения действия трения жидкости на стенку трубки.

В своей статье Эйлер, на основании своих теоретических расчетов, вносил ряд предложений, направленных на улучшение машины Сегнера. Он указывал:

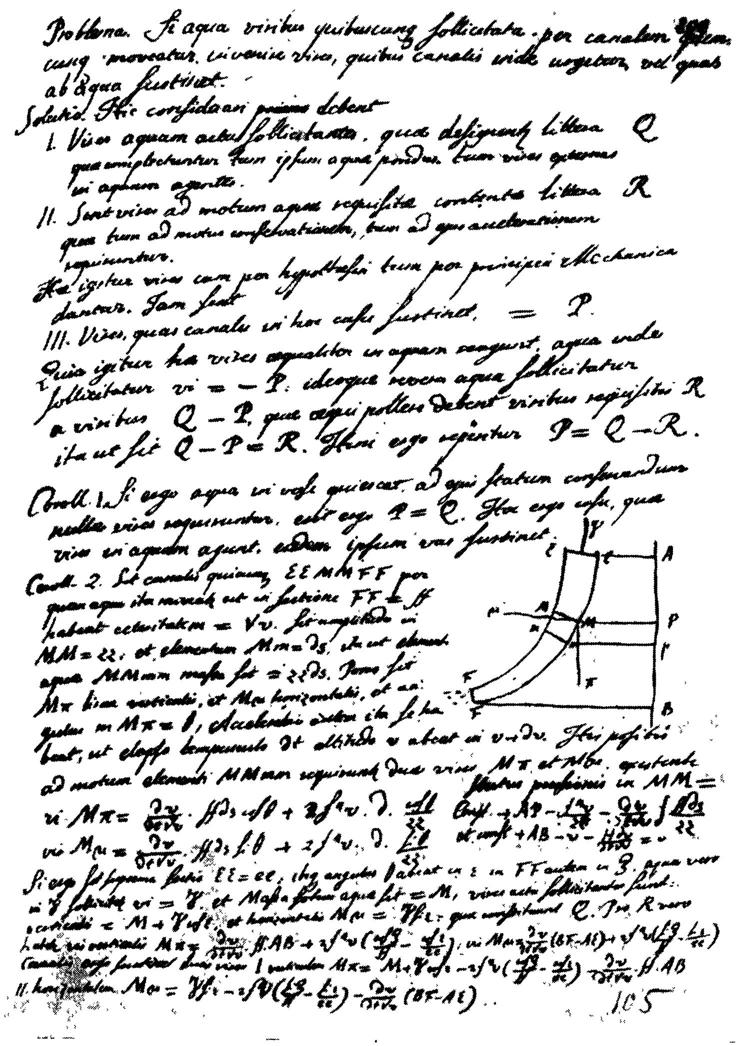
«1. Что касается горизонтальных трубок, которые присоединены к большому сосуду и которые г. Сегнер предполагает прямыми, то я придал им некоторую искривленную форму, однако таким образом, чтобы они не отклонялись от горизонтальной плоскости, в которой они первоначально были установлены.

2. В отношении ширины (сечения.— *Н. Р.*) труб, я предложу сделать ее переменной, так, чтобы число, выражающее ширину в каком-нибудь месте, было бы величиной переменной, зависящей от этого места.

3. Вместо того, чтобы делать у труб отверстия для истечения воды сбоку, как это предложил г. Сегнер, я предложу делать трубы в конце искривленными, чтобы не нарушать непрерывность и чтобы я мог включить в расчет не только движение воды в трубах, но также и выход ее в конце труб» [42, стр. 312—313].

Таким образом ясно, что Эйлер уже в начале своей работы по изучению нового гидравлического двигателя внес в его конструкцию ряд изменений. Эйлер пришел к мысли о необходимости проверить действие машины Сегнера путем определения груза, «...какой она должна поднять при своем вращательном движении...» [42, стр. 312] за данный промежуток времени.

О том, как Эйлер представлял себе действие реактивного гидравлического двигателя, дает ясное представление следующая выдержка из этой его статьи. «Поскольку речь идет теперь об определении действия, которое способна производить такая машина, следует отметить, что это действие происходит от действий, которые производит вода, проходя через трубы. Прежде всего, известно, что вода, выходя из сосуда, отталкивает его назад с силой, которую называют реакцией; следовательно, если сосуды (трубки.— *Н. Р.*) будут кривыми, так что вода будет вынуждена менять свои направления, здесь появится центробежная сила, от которой трубы будут испытывать давление. Легко понять, что силы должны быть весьма различны, когда машина будет уже приведена во вращательное движение и когда она находится в покое» [42, стр. 312].



Problema. Si aqua viribus quibuscunque sollicitata per canalem quemcunque moveatur, invenire vires, quibus canalis inde urgetur, vel quas ab aqua sustinet.

Solutio. Hic considerari primum debent

I. Vires aquam actu sollicitantes, quas designet littera Q quae complectuntur tum ipsum aquae pondus tum vires externas in aquam agentes.

II. Sunt vires ad motum aquae requisitae contenta littera R quae tum ad motus conservationem, tum ad ejus accelerationem requiruntur.

Hae igitur vires cum per hypothesin tum per principia Mechanica dantur. Jam sint

III. Vires, quas canalis in hoc casu sustinet, $= P$.

Фиг. 4. Решение задачи об определении сил, действующих на канал при протекании через него воды

(из записных книжек Эйлера)

После окончания своей первой статьи Эйлер, по-видимому, в начале 1751 г. приступил к изучению эффекта действия машины Сегнера, который он предполагал исследовать, «определяя груз, какой она должна поднять при своем вращательном движении» [42, стр. 313].

Эйлер, вероятно, поручил опытное изучение этого вопроса одному из своих помощников по работам на нивелировке Финовского канала между Гавелем и Одером. Этот исследователь изложил результаты своих опытов в специальном отчете, копия которого на французском языке под названием «Опыты, произведенные с машиной Сегнера» хранится в Архиве Академии наук СССР в фонде Эйлера, среди писем Сегнера и других лиц к Эйлеру [38, л. 117—121 об.] [23].

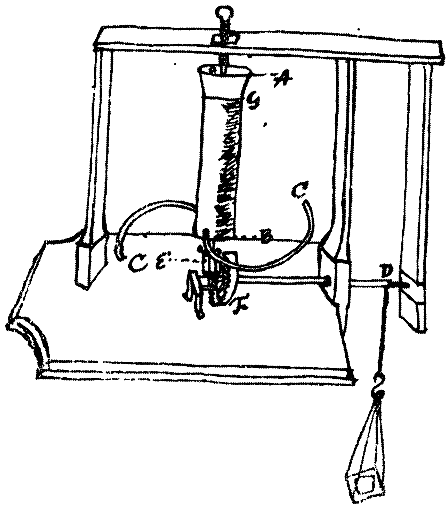
В результате опытов исследователь пришел к выводу, что предложенная Эйлером замена прямолинейных труб криволинейными дает значительный эффект, который, правда, был не полностью использован в опытах [38, л. 119]. В отчете указывалось: «Кроме этого, следует отметить, что трубы, которые по определению г-на Эйлера должны иметь форму кривой, описанной путем развертывания круга, составляющего основание цилиндра,— эти трубы имеют только половину той длины, которую им можно придать, а это значительно увеличило бы действие машины» [38, л. 120 об.].

В отчете также приводилось описание интересного опыта по определению вредных сопротивлений в машине. «Я пытался определить,— писал автор отчета,— трение машины. Для этой цели я наполнил цилиндр, закрыв отверстия *ce* (фиг. 5), после чего я подвесил груз в 6 унций 1 драхму 12 гранн [около 185 г.— *Н. Р.*] в обычной точке *D*. Тогда этот груз своей тяжестью привел цилиндр в очень медленное движение. Когда я уменьшил упомянутый груз на одну драхму (на 3,72 г.— *Н. Р.*), цилиндр остановился и не продолжал движения даже тогда, когда я подтолкнул его рукой. Из этого видно, что когда машина испытывает нагрузку такую, как в опыте втором, трение составляет, по меньшей мере, 6 унций (около 180 г.— *Н. Р.*), то есть, кроме груза, который машина действительно поднимает, нужно еще присчитать по крайней мере 6 унций, необходимых для преодоления сопротивления, происходящего от трения машины» [38, л. 118—118 об.].

Результаты этих опытов и дальнейших теоретических исследований

---

[23] Кем-то из работавших над материалами Л. Эйлера этот документ был ошибочно приписан великому математику. Об этом свидетельствует надпись на немецком языке чужой рукой после заглавия —«Von Euler». Между тем из содержания документа видно, что эта записка не могла принадлежать Эйлеру. Так, например, автор заметки пишет: «...кроме этого следует отметить, что трубы, которые по определению г. Эйлера должны иметь форму кривой, описанной путем развертывания круга ..».

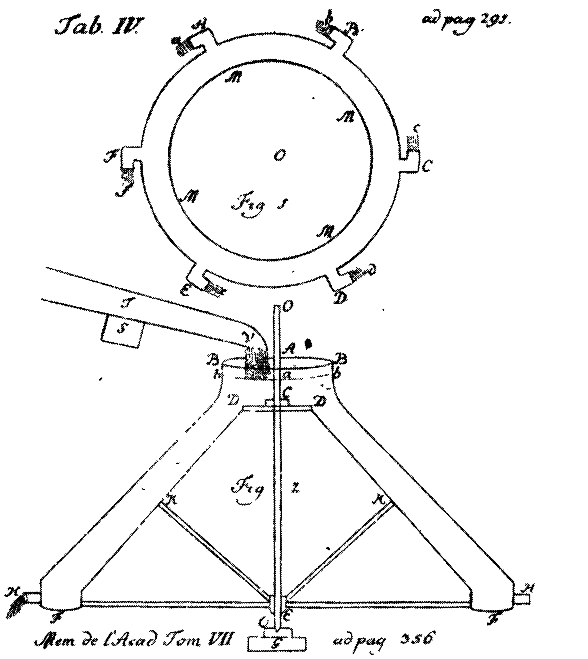


Фиг. 5. Чертеж модели сегнерова колеса в отчете об «Опытах, произведенных с машиной Сегнера»

Эйлера подтвердили, что машина Сегнера, несколько конструктивно улучшенная Эйлером, имела значительные преимущества перед обычными водяными колесами. Эйлер изложил свои соображения по этому поводу в новой статье «Применение гидравлической машины г. Сегнера ко всевозможным работам, и о ее преимуществах перед другими гидравлическими машинами, которыми обычно пользуются» [44, стр. 271—304][24].

[24] Чертежи, приложенные к этой статье (фиг. 6 и 7), отличаются от чертежей, приложенных Сегнером к его первой статье, лишь конструктивными деталями. В частности, Эйлер отказался от объединения в одном агрегате двигателя и мукомольного постава, как это предполагал сделать Сегнер.

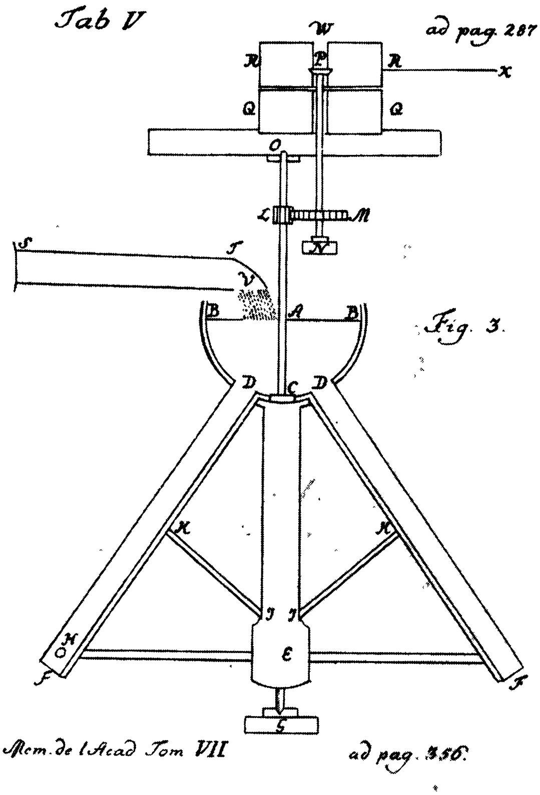
Отметим, что в этой статье Эйлер привел свои мысли о возможности осуществления активной турбины, принцип которой он изложил в самой общей форме. Он писал: «Но перед тем как изучать с этой точки зрения новую машину г. Сегнера, я хочу пред-



Фиг. 6. Чертеж турбины Сегнера, улучшенной Эйлером

Это сочинение было доложено Берлинской академии одновременно с первым 2 сентября 1751 г. [43, стр. 57] и опубликовано с рядом дополнений в 1753 г. Эйлер писал: «Поскольку я уже дал теорию этой машины (тут следует ссылка на первую статью Эйлера [42].—*Н. Р.*), я изложу здесь более подробно, каким образом всего удобнее ею пользоваться во всех тех случаях, когда применяются обыкновенные машины, приводимые в движение давлением воды на лопасти колеса. В то же время я произведу равнение этой новой машины с обычными машинами, чтобы показать те

ложить еще один способ привести в действие машину с помощью удара воды. Поместить горизонтальное колесо с наклонными лопатками в поток воды. Ударяя наискось в лопатки, вода производит действие, сходное с тем, которое производит ветер на ветряную мельницу» [44, стр. 276].



Фиг. 7. Чертеж турбины Сегнера, объединенной с мельничным поставом

преимущества, которые она может дать предпочтительно перед другими. Ибо, расходуя то же количество воды и используя то же падение, мы получаем от этой машины эффект, почти в четыре раза больший, чем от обыкновенных машин[25], даже если они применены наивыгоднейшим образом» [44, стр. 271].

О некоторых своих результатах Эйлер (еще до опубликования второй статьи) сообщил Сегнеру. Это видно из ответного письма последнего от 5. X 1751 г. из Гёттингена [38, л. 222—224]. Сегнер писал: «...Затем,

[25] Этот результат Эйлер заимствует из отчета «Об опытах, произведенных с машиной Сегнера».

я хотел дождаться, пока будут готовы несколько страниц, которые я написал о машине, приводимой в движение вытекающей водой[26]. Эта теория полностью соответствует той, которую Вы изложили в Вашем милостивейшем письме. Все это дело, освещение которого стоило мне многих усилий, Вы охватили одним взглядом. Я же пошел в этом деле не далее, чем до показа внутреннего устройства машины. Осталось только исследовать, имеет ли эта машина преимущество перед другими водяными колесами и в чем состоит это преимущество[27]. Эти страницы я хотел бы подвергнуть Вашему милостивому суду. Выступить с этой работой побуждает меня то, что я, не взирая на мои протесты, был вынужден написать кое-что об этой машине и ее применении раньше, чем я сам сумел достаточно хорошо ее разработать и рассчитать; поэтому мне были высказаны упреки некоторыми мельниками и метафизиками, от которых я не могу уклониться иначе, чем если я дам им на некоторое время успокоиться...»

Очевидно, в ответ на это письмо Эйлер дополнительно сообщил Сегнеру ряд своих соображений, в частности о сравнении эффекта действия машины Сегнера с водяными колесами старых типов.

Дальнейшие письма Сегнера позволяют установить некоторые моменты, связанные с попытками применения на практике его машины.

В письме к Эйлеру от 12. XII 1751 г. [38, л. 226—227] из Гёттингена Сегнер благодарил его за сообщенные ему сведения об исследованиях своего колеса и выражал надежду на то, что его основные положения не расходятся с положениями Эйлера. Далее Сегнер писал: «...хотя я вижу, что Вы впоследствии избрали несколько иной путь и дошли даже до сравнения этой водяной машины с другими, чего у меня нет. Я хотел основать такое сравнение на количестве воды, как на чем-то вполне ощутимом, и при этом положить в основу реальные опыты на хороших мельницах...» В этом же письме Сегнер сообщал Эйлеру, что фон Гарденберг[28] принял

[26] Несколько позже Сегнер осуществил свое намерение. 31 октября 1751 г. он переслал Л. Эйлеру новую статью — описание своей машины. К этому описанию был приложен чертеж из первой статьи Сегнера [40]. В письме изобретатель просил Эйлера указать на ошибки, так как, писал он, «...статья весьма несовершенна. Я вынужден был написать ее, когда еще не познал теорию, т. е. на чистых предположениях, и я не знаю, нужно ли ее печатать» [38, л. 139, 151 (описание машин), л. 225 (препроводительное письмо)].

[27] Из этой фразы Сегнера видно, что Эйлер пока еще не сообщил ему результатов исследований по сравнению нового водяного двигателя со старыми колесами.

[28] Гарденберг — ганноверский землевладелец, возможно родственник прусского государственного деятеля К.-А. Гарденберга и поэта Г.-Ф.-Ф. Гарденберга (Новалиса).

решение построить мельницу, приводимую в действие изобретенной им гидравлической машиной, и предложил Сегнеру узнать «основательное мнение» Эйлера по этому вопросу. Затем Сегнер писал, что хотя он еще не имеет необходимых данных для проектирования подобной установки, но готов отказаться от мысли объединить в один агрегат мельничный постав и двигатель[29], а также сообщает, что, по его мнению, следовало бы трубки, по которым проходит вода, «на некоторую длину вести на самой оси прямо вниз, и только потом отвести их косо в стороны — примерно так, как на этом рисунке...» (фиг. 8). Затем он высказывает ряд соображений о сопротивлении воздушной среды и способах ослабить это вредное явление. Сегнер писал дальше: «...Ваша конструкция сильно отличается от этой. Она бесспорно лучше достигает цели, чем моя, и в умеренных размерах ее гораздо легче осуществить. Я прошу только взвесить, можно ли в большой машине сделать эту конструкцию достаточно прочной, ибо днище барабанного колеса испытывает такое сильное давление.» После рассмотрения вопроса о наиболее выгодном режиме работы установки Сегнер заканчивал письмо так: «...я хотел бы применить Вашу конструкцию, если машина не будет слишком большая, в противном случае нам придется или придерживаться моей конструкции, или придумать что-нибудь другое...»

Таким образом, в этом письме Сегнер поднял несколько важных вопросов, вытекающих из попыток практического осуществления своего изобретения. Вопросы, поднятые Сегнером, касались не только условий, обеспечивающих лучшее действие его двигателя и связанных с этим конструктивных изменений, но и режима работы турбины, а также вопроса о прочности всей конструкции, что при уровне технических знаний того времени имело первостепенное значение. Как мы увидим ниже, эти вопросы, как и все другие, поставленные Сегнером перед Эйлером, не остались без ответа.

В следующем сохранившемся письме Сегнера к Эйлеру от 21.III 1752 г. из Гёттингена [38, л. 251—252] сообщалось, что Гарденберг предложил Сегнеру подвергнуть экспертизе Эйлера свой проект, а также следующее: «...вычисления я основывал на Белидоре[30], ибо я не имел еще

[29] Можно думать, что Эйлер критиковал эту конструкцию, так как в своих статьях, посвященных машине Сегнера, он нигде не приводил ее, всегда заменяя прямую передачу от вала к жерновам обычной цевочно-зубчатой (фиг. 8).

[30] Белидор (de Belidor) Бернар Форест (1697—1761)— французский военный инженер. Автор ряда трудов по военно-инженерному, артиллерийскому и инженерному делу. Сегнер, вероятно, ссылается на известный труд Белидора «Architecture hydraulique» (4 тома), Париж, 1737—1751.

случая провести собственные опыты на мельницах, как Вы это мне предложили...» Затем Сегнер указывает, что ему пришлось сделать свою машину «более прочной, чем та, которую Вы рассчитали и мне любезно сообщили. В остальном же я полностью сознаю, что в отношении теории я погрешил там, где Вы указали мне на мою ошибку». Далее излагались соображения о принципах сооружения нового гидравлического двигателя. При этом Сегнер высказывал мысль о необходимости регулирования размеров отверстий, через которые вытекает вода, и сообщал свой способ осуществить это устройство: «Было бы неплохо также, если бы нижние отверстия, через которые должна вытекать вода, могли бы меняться в размерах, а это тоже может быть достигнуто легко и с малыми затратами...»

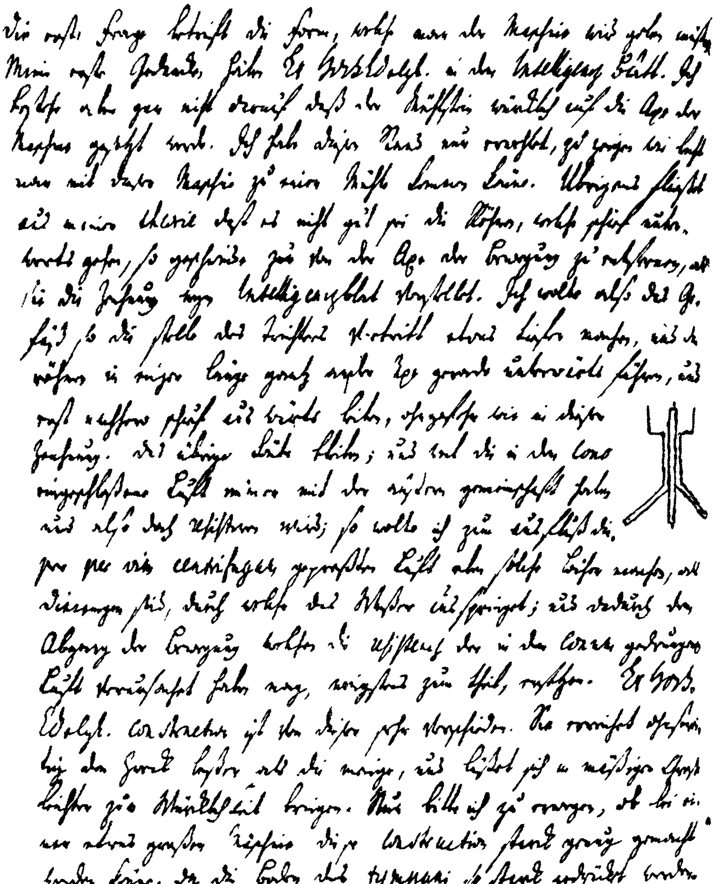
В письме от 17.VI 1752 г. из Гёттингена [38, л. 245—246] Сегнер, благодаря Эйлера «за прекрасные замечания об известной машине», сообщил, что Гарденберг принял твердое решение построить мельницу с новым гидравлическим двигателем не только в одном из принадлежащих ему имений, но и в Ганновере, несмотря на критику, которой подверг его проект один из известных мельничных мастеров.

В важном письме от 24. VI 1752 г. из Гербергаузена [38, л. 275—276] Сегнер сообщил Эйлеру результаты своих опытов по изучению «эффекта действия» обычного водяного колеса (наливного), которые он произвел на тамошней мельнице. Их итоги он выразил так: «...следовательно, отношение воды, потребляемой машиной, к той, которую потребляют (для помола.— *Н. Р.*) ржи, если действие с обеих сторон одинаковое, будет как $^2/_5$ к $^5/_2$, или как 4 к $25 = 1 : 6$, и это полностью подтверждает то, что Вы писали в прибавлении к своему последнему письму».

Эти опыты, как и предполагал Сегнер, действительно оказались очень полезными для Эйлера, так как подтвердили его теоретические выводы и совпали с результатами опытов над моделью машины Сегнера (о которых Эйлер, возможно, и сообщил изобретателю). Эйлер полностью перенес результаты, полученные Сегнером, в свою записную книжку [39, л. 40 об.] и затем поместил их (с указанием источника), как, впрочем, и ряд других мыслей и сведений, сообщенных ему Сегнером, в свою вторую статью о турбине Сегнера [44][31].

---

[31] Данные опытов Сегнера приведены в самом конце статьи Л. Эйлера [44], которая, как указывалось, была доложена Берлинской академии 2 сентября 1751 г., а опубликована в 1753 г. Эти обстоятельства дают основания предполагать, что Эйлер присоединил данные Сегнера (которые он сам получил в июне—июле 1752 г.) к своей статье уже во время ее печатания.



Фиг. 8. Страница из письма Сегнера Эйлеру от 12 декабря 1751 г.

В письме Эйлеру от 17 августа 1752 г. из Гёттингена [45, л. 162—165] Сегнер писал: «... с нашей машиной за это время произошло много событий...». Он сообщал, что началось строительство машины по его проекту, о ее размерах и о том, что ее предполагают установить на маслобойне в деревне Нортен, на мельнице, принадлежащей Гарденбергу. При этом Сегнер высказывал сожаление, что он с самого начала не применил свой механизм на маслобойне или какой-либо другой пестовой установке, так как у подобных «мельниц» легко определить «сопротивление», которое остается «всегда одинаковым»; было бы полезно устроить небольшую пестовую маслобойню, на которой следовало бы проверить все теоретические расчеты, однако для публичных демонстраций следовало бы устроить большую машину. Затем Сегнер указывал: «...в этом письме я коснусь главным образом преимуществ, которые Вы усматриваете в новой машине по сравнению со всеми водяными колесами». Далее Сегнер писал, что он посвятил некоторое время изучению этого вопроса, и сообщал о возникших у него сомнениях по поводу преимуществ его машины. «...Наибольший эффект колеса, движимого толчком воды, относится к наибольшему эффекту новой машины, как 27 к 8, в то время как Вы предполагали 27 к 4. (Я вижу, что создаю путаницу в обозначениях: числа поставлены наоборот, так что следует читать 8 : 27, 4 : 27.) Что же касается наливного колеса, то я не вижу никакого преимущества в отношении эффекта, кроме разве того, что водяное колесо нелегко построить в точном соответствии с теорией. И на этом основании я предполагаю, что наибольший эффект наливного колеса относится к наибольшему эффекту этой машины, примерно как 2 : 3 или, по крайней мере, как 1 : 2. Позвольте мне кратко изложить Вам те доводы, на основании которых я пришел к этому выводу, столь неблагоприятному для машины.» Сегнер обосновывал это положение путем расчета действия наливного колеса и сравнения его с действием своей машины. Далее он писал: «...в этих вычислениях для меня было счастьем, что мне пришлось сначала строить пестовую мельницу, а не мукомольную, ибо я в первый раз наверняка бы ошибся, если бы основывался на опытах в Гербергаузене».

Как видно из сказанного выше, у Сегнера возникли сомнения относительно возможностей своей машины, которые теоретически вывел Эйлер и которые он сам подтвердил опытами в Гербергаузене.

Тем не менее конструирование маслобойни, приводимой в действие двигателем Сегнера, и выбор места для ее постройки продолжался. Свидетельством этого является письмо Сегнера к Эйлеру от 19.XI 1752 г. из Гёттингена [38, л. 296—299]. Сегнер сообщает, что опыты с турбиной дали хорошие результаты, хотя он еще не вполне доволен конструкцией. Машина, предназначавшаяся для приведения в действие пестовой установки, была построена наспех, и некоторые ее части пришлось менять. Изобретатель писал далее, что после его вмешательства и устранения ряда помех машина стала делать примерно 50 оборотов в минуту вместо первоначальных 40, а после некоторых незначительных изменений — от 80 до 90. Сообщая об этом Эйлеру и будучи вполне удовлетворен результатами испытаний, Сегнер отмечал и наблюденное им явление, которое мешало, по его мнению, работе машины. Этим явлением было разбивание потока воды, вытекающего из сопла одной трубки в следующую.

Анализируя работу этой первой установки, Сегнер приходил к выводу, что одной из причин недостаточной эффективности действия машины являются потери, происходящие от общей тяжести машины. «...Трение на железной цапфе,— писал он,— уменьшено, но не устранено (поскольку машина, когда она наполнена водой, весит больше 20 центнеров)...»[32] Тем не менее, заканчивая письмо, Сегнер выражал уверенность, что после внесения ряда изменений «машина будет исполнять все, чего от нее можно ожидать».

В следующем письме Эйлеру от 22.XII 1752 г. из Гёттингена [38, л. 294—295] Сегнер сообщал, что Гарденберг был на месте установки машины, по-видимому, остался доволен ходом дела и выразил желание, чтобы весной, когда он снова приедет, маслобойная машина была собрана в его присутствии. В этом же письме Сегнер уточняет данные о числе оборотов своей машины, которая «делает в лучшем случае 50 оборотов в минуту». Сегнер, однако, утверждает, что это обстоятельство его не огорчает, так как, по его мнению, машина при пуске ее в ход должна работать значительно медленнее, чем при обычной эксплуатации.

В письме без даты, также относящемся, по-видимому, к концу 1752 г. [47, л. 149—149 об.], Сегнер благодарил Эйлера за замечания последнего о толчке воды и посланные ему расчеты наливного колеса, которые «полностью совпадают с результатом моих заключений». Далее Сегнер писал, что его машина уже «изготовлена и работает», и сообщал некоторые новые данные.

В другом письме без даты, которое, вероятно, нужно отнести к весне или лету 1753 г. [47, л. 150—152], Сегнер писал Эйлеру о том, что турбина,

---

[32] Центнер (квинтал)— единица торгового веса в Германии, Швейцарии и Дании, равная 100 фунтам, или 50 кг. В других странах несколько меньше (во Франции — 48,9 кг, в Испании — 46 кг). До 1840 г. в Германии в разных местах действовали центнеры разного веса. Таким образом, машина Сегнера весила около одной тонны.

установленная в Нортене, применяется для приведения в действие маслобойни и ее персонал должен сообщать Сегнеру и Гарденбергу о результатах работы. Сегнер сообщает, что имел возможность сравнить работу своей маслобойни со старой (работавшей более 10 лет), приводимой в действие наливным колесом, и установил, что «для изготовления определенного количества масла она (машина.— *Н. Р.*) требует примерно $^1/_6$ времени, нужного хорошей маслобойне в Верхнем Гарденберге, с которой я ее сравнивал...» В заключение письма Сегнер писал: «Итак, эта машина не причиняет мне огорчения, а наоборот — делает большую честь. Многие поздравляют меня как создателя чего-то такого, что удостоено Вашего рассмотрения; эти мои друзья правы, а моя благодарность Вам также и за это не имеет границ.»

Дальше в письмах Сегнера к Эйлеру о его машине упоминается всего один раз, хотя переписка ученых длилась до 1771 г. Это упоминание содержится в письме от 10.III 1754 г. из Гёттингена [38, л. 363—364]: «...несколько дней тому назад я снова видел машину. Она работала хуже, чем обычно». Далее приводятся причины временного и постоянного порядка, которые вызывали плохую работу машины.

Впоследствии, видимо, занятый своим переездом в Галле и увлеченный другими делами, Сегнер больше не возвращался в переписке с Эйлером к вопросу об установке и улучшении своей машины.

В годы переписки с Сегнером о его машине Эйлер продолжал работу по теоретическому изучению нового водяного двигателя и его конструктивному улучшению. Свидетельством этого является его посмертно опубликованная в 1862 г. статья «Определение эффекта действия гидравлической машины, изобретенной г. Сегнером, профессором из Гёттингена» [48, стр. 146—173][33], которую он доложил Берлинской академии 28 сентября 1752 г. [43, стр. 32]. Это сочинение явно является обработкой двух предшествующих статей Эйлера, посвященных машине Сегнера. В шести подробно разбираемых задачах вновь разъясняются вопросы, рассмотренные в предыдущих сочинениях. Эйлер писал: «...но, чтобы определить полезное действие такой машины, нужно найти силу, с которой струи воды, выходящие из отверстия α, β, γ, δ и т. д., вращают машину; тогда мы выясним, какие препятствия она сможет преодолеть. Это исследование будет не только весьма любопытно, но может быть весьма полезно для практики; природа этого явления такова, что известные принципы

[33] Об этой важной статье нередко забывают историки турбины Эйлера. Например, она не упомянута в статье Брауера [5].

гидравлики не могут оказать в этом случае никакой помощи. Теория движения воды в трубопроводах, очень тщательно разработанная в последнее время, также недостаточна для выяснения этого вопроса, потому что трубки, в которых протекает вода (в этой машине — *Н. Р.*), не находятся в покое, а находятся в движении, вызываемом силою самой воды. Итак, мы имеем здесь совершенно новую задачу, именно, определить движение воды в подвижных трубках и указать давление, испытываемое трубками в каждом месте. Это обстоятельство требует гораздо более глубоких исследований, чем другие рассмотренные до сих пор задачи гидравлики; но как раз таким путем эта наука придет к более высокой степени совершенства и сможет решать множество других задач, имеющих первостепенное значение для многих других машин.»

Это свидетельство Эйлера ясно указывает, что некоторые его теоретические исследования родились из практических запросов и путь к созданию этих работ лежал через область решения практических задач.

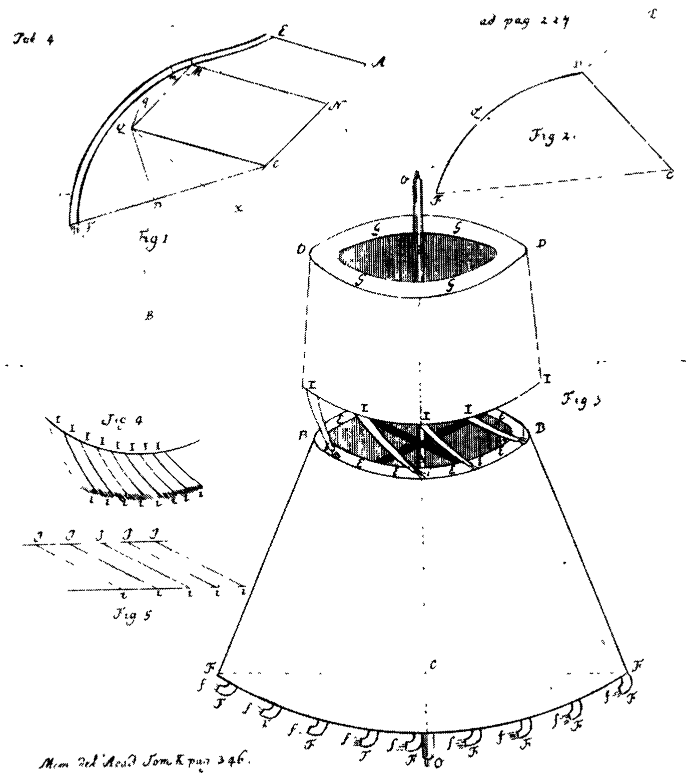
* * *

В то время как Сегнер занимался почти исключительно инженерными вопросами, связанными с практическим осуществлением своего изобретения, Эйлер продолжал теоретические исследования по разработке теории реактивных гидравлических турбин. Свидетельством его работы в этом направлении служит исследование, доложенное им 13 сентября 1753 г. Берлинской академии [43, стр. 32] и опубликованное в 1756 г. под названием «Более полная теория машин, приводимых в движение посредством реакции воды» [49, стр. 227—295]. В своем исследовании Эйлер подвергает новой основательной проверке все вопросы, затронутые в прежних своих сочинениях, при этом некоторые из них рассматриваются более широко.

В этой работе Эйлер привел не только описание и чертежи своей принципиально новой гидравлической реактивной турбины, сконструированной на основе полного учета достижений и недостатков машины Сегнера, но и дал первую разработанную теорию гидравлической турбины.

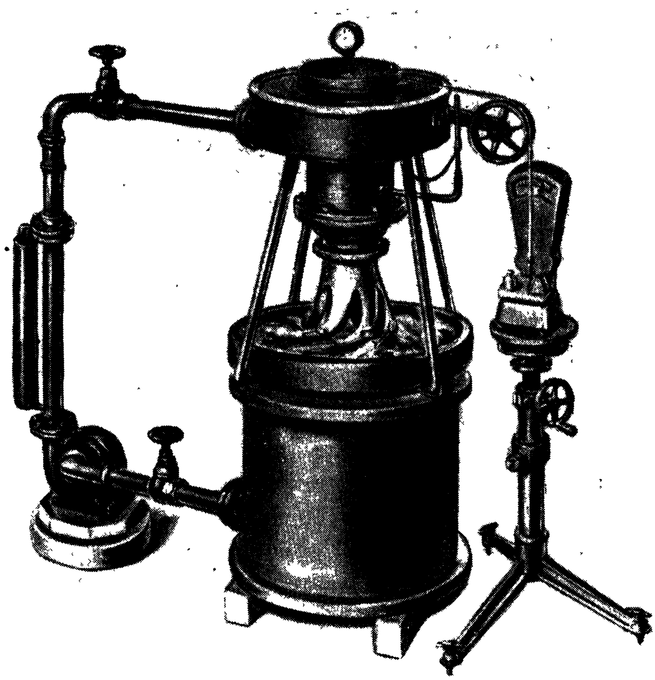
Что же представляла собой турбина Эйлера? Чертежи (фиг. 9), приложенные Эйлером к статье, показывают, что в своем проекте великий ученый впервые осуществил замечательную идею разделения турбины на две части — неподвижный направляющий аппарат *DD* и рабочее колесо *BB*.

Основными частями турбины Эйлера были: *OO* — вертикальный вал, на котором вращалось рабочее колесо *BB* — *FF*; *DD* — неподвижный



Фиг. 9. Чертеж турбины Эйлера

направляющий аппарат в виде цилиндра с двойными стенками, нижняя часть которого заканчивалась сплошным рядом трубок *Ii*, расположенных под определенным углом. Вода из этих трубок поступала в рабочее колесо турбины; *BBFF*— рабочее колесо, представлявшее собой усеченный конус с двойными стенками, между которыми расположена «система лопаток»— в форме усеченных эллиптических трубок, конструкция которых возникла, вероятно, под влиянием сегнеровского водяного колеса.



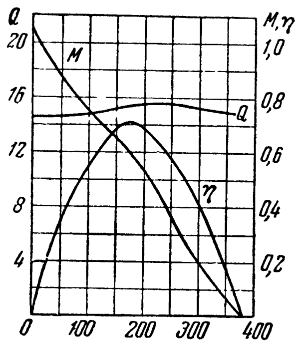
Фиг. 10. Рисунок установки для испытания модели турбины Эйлера (по Аккерету).

(Из музея М. В. Ломоносова Института истории естествознания и техники Академии наук СССР)

Ударяясь в них, вода меняла направление движения и вытекала из рабочего колеса по трубкам Ff. С современной точки зрения турбина Эйлера имеет ряд недостатков, вполне объяснимых, с одной стороны, предварительным характером его проекта, с другой — недостаточным развитием машиностроительной техники того времени [8, стр. 107].

Особого внимания заслуживает приведенная в статье Эйлера теория турбин. Эта теория, как указывалось, в известной степени не утратила своего значения и в настоящее время. В своих работах по теории гидравлических турбин «Л. Эйлер выступил как творец одномерной теории турбомашин, за которой укоренилось название «струйной». Эйлер впервые создал полную теорию движения идеальной несжимаемой жидкости в изогнутом канале небольшого сечения, вращающемся вокруг оси. Он вывел уравнение момента сил реакции воды и развиваемой мощности в зависимости от скорости жидкости, а также указал оптимальную скорость вращения трубок» [7, стр. 3].

Расчеты Эйлера были настолько точными и исчерпывающими, что ими можно было руководствоваться при постройке турбины. Однако занятый потоком новых идей, задач и мыслей, великий математик не смог принять участия в ее практическом осуществлении, да и общественные условия феодально-крепостнической Германии середины XVIII в. с ее слабо развитой промышленностью не содействовали претворению изобретения Эйлера в практику. Гидравлические турбины были введены в практику более чем через 75 лет во Франции, развивающаяся промышленность которой остро нуждалась в замене невыгодных (во французских условиях)[34] паровых машин другим, более дешевым двигателем.



Фиг. 11. Турбинная характеристика модели турбины Эйлера (по Аккерету)

η — коэффициент полезного действия в %; Q — расход в *л/сек*; M — момент в *кгм* в функции от скорости вращения *n* об/мин.

Известный специалист по гидромашинам профессор Я. Аккерет сделал интересную попытку исследовать модель турбины Эйлера, построенную фирмой Эшер-Висс в 1943 г. в точности по описанию Эйлера (фиг. 10) [50, стр. 2—4]. Модель имела входной диаметр 200 мм и была рассчитана на напор 1 м при 300 об/мин и расходе 19,78 л/с. Модель показала максимальный коэффициент полезного действия 71,2%, который имел место при скорости вращения около 180 об/мин. (фиг. 11)[35].

Любопытно отметить, что специалисты по турбомашинам, изучавшие труды Эйлера по теории турбин, обращают внимание инженерных работ-

[34] Во Франции отсутствовали крупные залежи каменного угля, и поэтому эксплуатация паровых машин обходилась очень дорого. Да и сама французская промышленность того времени, по преимуществу мелкая, требовала небольшого, дешевого двигателя. Этим требованиям в полной мере отвечали гидравлические турбины.

[35] Проф. Аккерет считает эти результаты вполне удовлетворительными, даже по современным представлениям, если учесть весьма малую мощность модели =0,15 л.с., так как у новых современных колес Френсиса с подобными малыми мощностями и высотой напора порядка 1 м кпд изменяется от 0,78 до 0,82 (см. фиг. 11).

ников на ряд замечательных мыслей великого ученого, высказанных двести лет назад. Эти мысли, по мнению специалистов, могли бы оказать известную помощь инженерным и научным работникам при проектировании и исследовании и в наше время[36].

* * *

Переписка между Сегнером и Эйлером, сопоставленная с другими архивными материалами и опубликованными работами этих авторов, позволяет осветить ряд аспектов работы Эйлера по созданию реактивной гидравлической турбины.

Эйлер не только дал первую научно обоснованную теорию гидравлической реактивной турбины (превосходство которой, как это видно из писем Сегнера, быстро признал и сам изобретатель), но принимал самое непосредственное участие в проектировании и сооружении первой машины Сегнера[37]. Сегнер сообщал Эйлеру много сведений о работах, которые велись при постройке турбины, результаты своих и чужих наблюдений, свои сомнения. Учитывая также большую самокритичность Сегнера, который постоянно обращал внимание Эйлера на слабые стороны своей машины, нельзя не признать, что в письмах Сегнера к Эйлеру содержался большой материал для размышлений и поисков более рациональных решений. Нет нужды говорить о том, что решения, принятые Эйлером, играли в свою очередь важную роль (как об этом пишет и сам Сегнер) в работах изобретателя.

Какие же вопросы, поднимавшиеся в переписке Сегнера с Эйлером, содействовали работам последнего в области конструирования гидравлических турбин? Мы можем остановиться здесь только на некоторых из них.

Прежде всего следует считать документально установленным, что именно исследование машины Сегнера и изучение вопросов, возникших

---

[36] Так, проф. И. И. Кириллов [7, стр. 4] пишет: «Заслуживает внимания, что в разобранном Эйлером примере отношение высоты канала к среднему диаметру рабочего колеса составляет 1/12. Если бы двести лет спустя конструкторы паровых турбин всегда следовали этому мудрому указанию Эйлера при проектировании цилиндрических лопаток, то их машины отличались бы большим совершенством, чем сейчас». Проф. Я. Аккерет писал [50, стр. 4]: «Быть может, многим нашим современным инженерам стоило бы труда вычислить давление во время разбега машины. Л. Эйлер сумел сделать это важное открытие еще в 1754 г.»

[37] Это, между прочим, опровергает мнение Брауера [5, стр. 46], что теорию турбины и ее конструкцию Эйлер разработал только теоретическим «внутренне-умственным» путем.

в связи с попытками ее применения на практике, явились отправными точками работ Эйлера в этой области. При этом Эйлер участвовал в разработке конструкции турбины, идя путем устранения конструктивных недочетов и потерь в машине Сегнера, выявленных при ее постройке и эксплуатации[38].

Большой интерес представляло бы, по нашему мнению, обнаружение в переписке Эйлера с Сегнером отправных точек, которые привели Эйлера к основной идее его изобретения — разделению машины Сегнера на две части (направляющий аппарат и рабочее колесо). Как нам кажется, эта мысль могла прийти Эйлеру в результате размышлений над поднятыми Сегнером вопросами о тяжести и недостаточной прочности его двигателя.

Сегнер все время обращал внимание Эйлера на недостаточную прочность и большой вес своей машины (см. выше), а также первой улучшенной Эйлером конструкции.

Нужно признать эти опасения Сегнера обоснованными, так как по его проекту все основные части турбины должны были изготовляться из дерева, обшитого жестью или латунью. Только ось машины и поддерживающие ее цапфы были металлическими. Как указывалось выше, общий вес турбины Сегнера (с наполненным водой цилиндром) превышал одну тонну. Вращаясь со скоростями порядка 50—70 об/мин. (что было очень большой скоростью для эпохи медлительных водяных двигателей), большой и тяжелый резервуар с водой не мог не вызвать серьезных опасений конструктора.

Таким образом, кажется очевидным, что именно эти сомнения Сегнера были одним из существенных обстоятельств, заставивших Эйлера разделить свою турбину на неподвижный направляющий аппарат (тяжелый неподвижный резервуар с водой) и сравнительно легкое рабочее колесо.

Другим обстоятельством, которое содействовало разделению турбины Эйлера на две части, было стремление конструктора полнее использовать энергию потока воды. С этой целью Эйлер в своей турбине заставлял воду, истекающую из направляющего аппарата, воздействовать на «систему лопаток» рабочего колеса, а затем при вытекании ее из этой «системы» использовал реакцию воды. Таким образом, энергия потока воды в турбине Эйлера использовалась значительно полнее, чем во всех предшествующих гидроустановках.

---

[38] Как справедливо писал проф. Я. Аккерет, «это изобретение является результатом точного анализа потерь в так называемом водяном колесе Сегнера» [50, стр. 2].

III. ПРОЕКТЫ ПОСТОЯННОГО МОСТА ЧЕРЕЗ НЕВУ

Насущной технической задачей, которая стояла перед представителями технической мысли во второй половине XVIII в., была постройка постоянных мостов. Решением этой задачи занимались инженеры и изобретатели в ряде европейских стран[39]. Лондонское королевское общество в 70-х годах XVIII в. объявило конкурс на лучший проект одноарочного моста через Темзу[40].

Необходимость постройки постоянного моста особенно остро ощущалась в Петербурге. Большой город, расположенный на островах дельты Невы, требовал для обслуживания своего все растущего населения новых, более совершенных мостов, чем существовавшие наплавные[41].

Инженеры и изобретатели, составлявшие проекты этих мостов, передавали их, по предложению правительственных учреждений, для экспертизы и утверждения в Петербургскую академию, которая была главным научно-техническим центром страны. Так как в составе Академии не было специалистов-инженеров, то обычно экспертиза этих проектов поручалась Эйлеру и его ученикам.

Занимаясь изучением, проверкой и составлением заключений об этих проектах, члены Академии помогали авторам проектов в доработке их предложений. При этом Эйлер и его ученики вносили в эти проекты новые научные идеи, которые давали возможность делать довольно широкие научно-технические обобщения.

Эта важная и интересная сторона деятельности Эйлера и его учеников изучена далеко не полностью. Исследователи оставили без внимания не только статьи, отзывы и высказывания Эйлера и его учеников по

---

[39] В письме Д. Бернулли к адъюнкту Петербургской академии Н. И. Фусу от 7 июня 1777 г. сообщалось о работах, которые велись в этом направлении в Швейцарии [51, стр. 118—120; 52, стр. 671].

[40] В газете «Санкт-Петербургские ведомости» (№ 36 от 4 мая 1772 г.) в заметке из Мангейма от 16 апреля сообщалось, что Лондонское королевское общество премировало швейцарца Конрада Альтера за проект однопролетного моста длиной до 900 футов. По этому проекту автор построил модель в 1/48 натуральной величины.

[41] Первый мост (наплавной) через Неву был наведен в конце июля 1727 г. Этот мост соединил Васильевский остров с центральной (Адмиралтейской) частью города. С тех пор на Неве ежегодно наводились наплавные мосты. Эти мосты представляли собой довольно сложные технические сооружения: разводка их требовала двух часов, а наводка от четырех до шести дней [53, стр. 44]. Конечно, такие мосты, обладавшие еще рядом других технических недостатков [53, стр. 45], не могли обеспечить растущие потребности населения столицы.

поводу различных проектов постоянных мостов через Неву, но и некоторые из рассматривавшихся проектов, в частности два проекта моста через Неву, составленные И. де Рибасом.

* * *

Состояние инженерных знаний в XVIII в. не позволяло произвести надежный расчет такого сложного сооружения, как постоянный мост через широкую и полноводную Неву. Поэтому изобретатели, работавшие над проектами моста через Неву, предварительно сооружали модель, которую обычно подвергали испытаниям (как правило статической нагрузкой) и по результатам этих испытаний делали заключение о прочности и грузоподъемности натурального моста. Однако отсутствие научной методики, которая позволила бы перевести данные испытаний модели на натуральный мост, не давало возможности судить о грузоподъемности (и других качествах) будущего моста. Поэтому И. П. Кулибин — академический механик и выдающийся изобретатель, автор ряда проектов мостов через Неву, должен был заняться разработкой правила, которое дало бы возможность производить этот пересчет.

К мысли о работе в этом направлении Кулибин пришел в результате рассмотрения в Академии наук его первого проекта одноарочного деревянного моста через Неву. По этому проекту изобретатель, после нескольких неудачных попыток, в 1771 г. изготовил модель моста в 1/40 натуральной величины. При испытании на модель (на середину пролета арки) помещали сосредоточенную нагрузку, которая равнялась пятнадцати собственным весам модели. Эту нагрузку модель выдержала, тем не менее, ее, как писал Кулибин, «со описанием при ней в 1771 году господа академики рассматривали и по рассуждению их признавали сумнительной» [54, л. 2]. При этом, как писал Кулибин, «главная же причина сумнительства та, что я не мог чрез ее доходить к тяжести настоящего моста, а ныне помощью Всевышнего Творца чрез опыты несколько дошел, что чрез малую модель можно познать настоящему мосту тяжесть...» [54, л. 5].

Как ясно из слов Кулибина, он путем рассуждений и ряда опытов сумел найти правило пересчета данных испытания модели на натуральное сооружение.

О рассуждениях и опытах И. П. Кулибина можно судить по приводимому ниже отрывку из его записки об изготовлении модели деревянного арочного моста, приложенной к прошению на имя вице-директора Академии наук А. А. Ржевского от 9 декабря 1772 г. [54, л. 5 —5об.]:

«Настоящему мосту должно быть мерою на 140 саженях,а весу в нем по счислению выходит 237 568 пудов. Взять от него для делания модели по мачтабу равную какую-нибудь из нижеписанных одну долю, например: пускай будет модель сделана против настоящего на 16-й доле мерою на 8 саженях и $2^1/_4$ аршинах; весу в ней против настоящего выйдет 58 пудов. Ей дóлжно поднять на себе тяжести, сколько в ней есть против того в 16 раз больше, то есть 928 пудов$^{-1}$. Если сделать модель на 8-й доле мерою на $17^1/_2$ саженях, весу в ней выйдет 464 пуда, она должна на себе поднять по реченной пропорции против своей тяжести в осьмеро больше, то есть 3712 пудов, ежели модель или мост сделать на четвертой доле мерою на 35 саженях весу, в нем выйдет 3712 пудов, он на себе поднять должен против своей тяжести вчетверо больше, то есть 14 848 пуд$^{-1}$. Если же сделать мост мерою на семидесяти саженях,весу в нем выйдет 29 696 пуд, он должен поднять на себе против своей тяжести вдвое больше, т. е. 59 392 пуд, а если сделать настоящий мост мерою на 140 саженях, весу в нем выйдет 237 568 пудов, он должен поднять одну только свою собственную тяжесть, без накладной тяжести. И по сему расположению выходит, если первая модель мерою на 8 саженях и $2^1/_4$ аршинах показанной против себя в 16 раз тяжести 928 пудов больше ничего не поднимет, то настоящему мосту стоять сумнительно, потому что будет держать свою только собственную тяжесть без накладной тяжести, а ежели первая модель поднимет против показанной в 16 раз больше тяжести, например в 32 раза против своей, то настоящему мосту должно поднять на себе еще такую же тяжесть, сколько в нем есть собственной тяжести. Предписанное ж расположение выкладывал я из следующих обстоятельств: обыкновенно делаются модели чему-нибудь, берется малая пропорциональная часть; в настоящем мосте в решетке брус длиною 7 сажен, толщиною и шириною по 5 вершков, а в моделе, делаемой на 16 доле, вместо того должен быть длиною 1 аршин 5 вершков, толщиною и шириною $^5/_{16}$ вершка, такою пропорцией сделается первая модель, мерою на 8 саженях и $2^1/_4$ аршинах, весу в ней 58 пудов. Она должна поднять на себе тяжести по первому счислению против своей в 16 раз больше, а вторая модель, если соберется из брусков вдвое доле, толще и шире первых же, то есть в осьмеро тяжелее, и сама модель собою вдвое ж доле, толще и шире первыя и в осьмеро ж тяжелее. Первая имеет толстоты одну меру, а другая имеет толстоты такие ж 4 меры да прибавки в длине 4 ж меры, которые прибавочные по длине 4 меры присовокупить. Такую ж в ней тяжесть и занятием себя тою присовокупленною тяжестью убавит несением на себе накладной тяжести против пропорции первыя модели вполы, оттого она должна против своей тяжести на себе поднять в 8-мь, а не в 16 раз больше своей. И из того видится, ежели модель модели вдвое по расстоянию больше, то будет поднимать на себе тяжести показанною пропорцией вполы меньше, а собственной в них тяжести от первой до другой будет распространяться в осьмеро больше. Ежели бы вторая модель против первые сделана была вдвое толще и шире, а длины такой как первая, то б она на себе подняла против всей своей тяжести в 16 раз больше, потому что такие четыре крепости, что вчетверо толще и шире первыя без занятия такой же по длине меры и тяжести, совокупятся вместе пребудут в поднятии против своей тяжести в 16 раз больше.» К отмеченному тексту (—1—1) на полях пометка: «В том количестве и вес модели заключается.»

Эйлер, которому также приходилось по поручению Академического собрания заниматься испытанием моделей и давать заключения о проектах мостов, столкнулся с необходимостью разработать методы пересчета результатов испытаний модели на натуру. Результаты своей работы он изложил в статье под названием «Простое правило определения прочности моста, или другого подобного тела, исходя из прочности модели» [55, стр. 271—285][42]. В этой статье Эйлер писал: «§ 1. Эта проблема возникла недавно, по случаю постройки прочного моста через реку Неву. Многие попытались приступить к этому делу и для этой цели изготовили модели, подобием которых мог быть сам мост. Большинство при этом полагало, что мост будет достаточно прочным, если только модель будет иметь определенную степень прочности. Они считали, что если модель сможет выдержать тяжесть, подобную той, которую должен выдержать мост, то тогда нет сомнения в том, что сам мост, построенный в соответствии с этой моделью, будет достаточно прочным. Однако этот вывод является ложным, как это становится совершенно ясным из того, что такой мост, конечно, не может быть протянут на сколь угодно большое расстояние, например одной или многих миль, не подвергаясь искривлению под влиянием собственного веса, какой бы прочной ни казалась модель. Отсюда становится ясным, что о прочности моста отнюдь нельзя судить по прочности модели на основании принципа подобия. Поэтому я попытаюсь здесь точно исследовать, каким образом, исходя из прочности модели, можно судить о прочности самого моста какой угодно величины...» [55, стр. 271—272].

Далее Эйлер, используя математический аппарат, с присущей ему

[42] Эта статья была 25 сентября 1775 г. доложена Эйлером Академическому собранию [34, стр. 205].

ясностью изложил основы моделирования мостов и вывел, в частности, правило, эмпирически найденное И. П. Кулибиным. Краткое и общедоступное изложение результатов расчетов Эйлера было опубликовано автором в другой статье, помещенной в Месяцеслове на 1776 г., издававшемся Академией наук на русском языке [56] [43]. Статьи, помещаемые в Месяцесловах, предназначались для относительно широкого круга читающей публики, поэтому излагались просто, без математических выкладок. В этой статье Эйлер отмечал, что испытуемая модель должна быть «во всех частях строющемуся мосту совершенно подобна». Затем он предлагал определить вес модели, взвесив ее. Тогда вес натурального моста может быть получен, если «вес модели умножить кубом содержания» (т. е. отношения — *Н. Р.*), что и дает «искомую тяжесть моста». Для определения несущей способности проектируемого моста предлагается «накласть... на модель столько тяжести, сколько она поднять может, то есть положи на оную вдоль и поперег столько весу, чтобы она напоследок едва не переломилась; после сего свесь все сии тяжести, и сложи оные вместе. Теперь, естьли сумма всех сих тяжестей не будет превышать тяжести модели, умноженной содержанием меньше 1 (т. е. в нагрузке Эйлер учитывал собственный вес модели.— *Н. Р.*), то заподлинно утвердить можно, что строющийся мост едва сам держаться будет, и обрушится от присоединения к его собственной тяжести малейшего постороннего бремени». Если же, «модель может,— писал дальше Эйлер,— действительно сдержать больше, то по сему легко вычислить можно, сколько самый мост кроме собственной своей тяжести в состоянии будет держать; а дабы сие найти, то надлежит только избыток тяжести, которую действительно держит модель, сверх той тяжести, которую бы по крайней мере держать ей надлежало, умножить квадратом содержания».

Изложенные Эйлером правила определения гузоподъемности моста становятся очевидными, если принять во внимание, что вес модели и кон-

---

[43] Принадлежность этой неподписанной автором статьи Эйлеру не вызывает сомнений. Газета «Санкт-Петербургские ведомости» (№ 12 за 10 февраля 1777 г., л. 2) в отчете об испытаниях модели моста И. П. Кулибина писала: «Оный Кулибин в 1773 году дошел сам собой до тех правил, чтоб узнавать по модели, может ли настоящий мост снести собственную свою тягость и сколько может понести построенного груза. Сии правила совершенно явились сходны с теми, кои после произвел из механических оснований славный г. Эйлер, здешний академик, и кои напечатаны в Календаре с наставлениями на 1776 год и внесены в Академические Комментарии.» Необходимо напомнить, что эта газета издавалась Петербургской академией и сведения, сообщаемые ею относительно событий, связанных с этим учреждением, были достоверными.

струкции, а следовательно, и усилия, возникающие в сечениях элементов модели и конструкции, относятся, как кубы линейных размеров (при одинаковых объемных весах материала модели и моделируемой конструкции), а площади поперечных сечений элементов относятся, как квадраты линейных размеров. Следовательно, напряжения в поперечных сечениях модели и моделируемой конструкции относятся, как линейные размеры.

Таким образом, по результатам испытаний модели, изготовленной в определенном масштабе, оказалось возможным определять несущую способность натурального моста. Основываясь на этих выводах, можно было быстро и надежно оценивать результаты экспериментов с моделями мостов и давать объективную оценку этим проектам.

* * *

22 февраля 1776 г. директор Академии наук С. Г. Домашнев объявил на заседании Академического собрания [34, стр. 228—229], что по повелению императрицы Екатерины II Академия наук должна произвести испытание модели моста, который предполагается построить на Большой Неве. Автором проекта этого моста был капитан Сухопутного шляхетского кадетского корпуса Иосиф де Рибас (1749—1800)[44]. Для испытания модели де Рибаса, которая до этого демонстрировалась Екатерине II, Домашнев назначил Комиссию, возглавляемую Эйлером, в состав которой вошли академики С. К. Котельников, И.-А. Эйлер, С. Я. Румовский и адъюнкты Н. И. Фус и М. Е. Головин [34, стр. 229].

Так как рассмотрение модели производилось на основании указа императрицы, назначенная Академией Комиссия Эйлера действовала очень быстро. Уже 4 марта 1776 г. Академическому собранию был представлен отчет Комиссии [58; 34, стр. 230—232], в котором сообщалось, что

[44] Иосиф де Рибас (1749—1800)— испанский дворянин, офицер неаполитанской армии, принимавший участие в похищении «княжны» Таракановой и приглашенный после этого графом А. Г. Орловым-Чесменским на русскую службу. В 1772 г. де Рибас прибыл в Петербург и поступил в чине капитана на службу в Сухопутный шляхетный кадетский корпус в качестве цензора. С 1780 г. и раньше де Рибас принимал участие в войнах с турками на море и суше и проявил себя как незаурядный военачальник. Он был, в частности, инициативным помощником А. В. Суворова при штурме Измаила. Великий полководец был очень хорошего о нем мнения. После окончания войны де Рибас был одним из первых строителей крепостей и городов (Одесса) на юге России. Де Рибас был близко связан с фаворитами Екатерины II и видными сановниками (Орловым, Потемкиным). Он был зятем видного государственного деятеля тех времен И. И. Бецкого. Участвовал в заговоре против Павла I [57, стр. 168—173].

27 февраля Комиссия рассматривала и испытывала в помещении Сухопутного кадетского корпуса модель деревянного одноарочного моста И. де Рибаса. Мост по его проекту должен был быть построен через Большую Неву, между Адмиралтейством и Сенатом и Васильевским островом. Автор проекта дал Комиссии все нужные объяснения о расчетах, которые были признаны вполне научно обоснованными. Затем при участии членов Комиссии были произведены некоторые опыты. При этом сам автор заранее отметил, что эта модель не вполне отвечала его первоначальным предположениям, и предложил Комиссии для рассмотрения чертежи другой модели, которая, как он заявил, будет обладать всеми нужными достоинствами, чтобы по ней можно было строить мост в натуральную величину.

3 марта 1776 г. Комиссия Эйлера собралась на специальное заседание и, обсудив результаты испытаний первой модели и новое предложение И. де Рибаса, вынесла свое решение. Суть его заключалась в следующем: «... механизм и вся совокупность частей модели являются новыми» и «нельзя отказать автору в справедливых похвалах». Однако «по этой модели нельзя строить мост на такой широкой реке, как Нева, так как... она (модель.— *Н. Р.*)... не выдержала и вчетверо меньшего веса, чем тот, который она должна была бы выдержать согласно принципам вычисления...» Комиссия Эйлера считала, что предлагаемое в новом проекте И. де Рибаса увеличение угла возвышения, а следовательно, и прочности модели позволит осуществить конструкцию, которая «возможно оправдает надежды изобретателя». Комиссия полагала, однако, что только после проведения испытаний новой модели можно будет окончательно решить вопрос о строительстве моста по второму проекту И. де Рибаса.

Из расчета, произведенного Эйлером и приложенного к отчету Комиссии, следовало, что относительно небольшая грузоподъемность модели моста И. де Рибаса по сравнению с собственным весом модели происходила из-за того, что материалом для постройки модели служил дуб вместо ели, предполагавшейся для сооружения моста и имеющей значительно меньший удельный вес[45].

К ноябрю 1776 г. И. де Рибас (ставший за это время майором) закончил изготовление второй модели деревянного одноарочного моста по своему новому проекту. Он вновь добился указа Екатерины II о рас-

[45] Очевидно, это обстоятельство заставило Эйлера в русском варианте своей статьи писать, «что оный (т. е. натуральный мост.— *Н. Р.*) должен быть во всем подобен модели и из такого же лесу построен» [59, стр. 138].

смотрении Академией наук своей новой модели[46], и 11 ноября 1776 г. в Академическом собрании была оглашена выдержка из протокола Академической комиссии (учреждения, управлявшего делами Академии наук) с сообщением об указе царицы относительно составления отзыва о второй модели де Рибаса [34, стр. 265—266]. На том же заседании была назначена Комиссия под руководством Эйлера для проведения этих испытаний. В ее состав входили академики С. К. Котельников, С. Я. Румовский, И.-А. Эйлер, Л. Ю. Крафт, А.-И. Лексель и адъюнкты Н. И. Фус и М. Е. Головин.

15 ноября 1776 г. Комиссия Эйлера провела испытания второй модели моста де Рибаса. 18 ноября секретарь Академического собрания И.-А. Эйлер [34, стр. 267] доложил собранию о результатах опытов. «Но так как г. г. академики,— писалось в протоколе,— сделали ряд замечаний, поскольку способ производства опытов, которым г. де Рибас пользовался при этом испытании, показался им несовершенным и даже сомнительным, то было решено отложить еще на некоторое время отсылку доклада и просить г. де Рибаса (разрешить.— *Н. Р.*) подвергнуть его модель второму испытанию, при котором г. г. академики оставляют за собой право применить для нагрузки модели метод, отличный от его метода» [34, стр. 267].

Как видно из сохранившихся документов, некоторые члены Комиссии Эйлера и Академического собрания высказывали довольно резкие суждения о модели де Рибаса и методах ее испытания. Между академиками возникло «несогласие в мнениях». Доклад не был послан. Тогда де Рибас прибег к прямому давлению на Академию наук с целью добиться ее положительного отзыва. В протокольных бумагах сохранилось письмо князя А. М. Голицына, полученное в Академии 22.XI 1776 г., в котором фельдмаршал требовал от Академии наук немедленного выполнения указа царицы [60, л. 10]. Сейчас же по получении этого требования секретарь Академического собрания и Комиссии И.-А. Эйлер обратился к академикам с письмом, в котором просил ознакомиться с прилагаемым проектом отчета об испытаниях второй модели де Рибаса и добавить к нему

[46] Упоминание об этом указе имеется в протокольных бумагах Академического собрания, где сохранилась переписка Академии наук и другие документы по вопросу о рассмотрении второй модели де Рибаса [60, л. 1—30]. Эта переписка показывает, что де Рибас заручился указом Екатерины II в Академию наук о составлении отзыва о своей второй модели и все дело шло через фельдмаршала А. М. Голицына, который довольно решительно требовал быстрейшего заключения Академии о второй модели де Рибаса.

те соображения, которые академики сочтут нужным сделать. И.-А. Эйлер писал дальше: «...это будет тогда все же доклад ad interim (на тот случай.— *Н. Р.*), если двор будет настойчиво его требовать...» [60, л. 11]. На этом письме сохранились пометы читавших его академиков. Академик С. Я. Румовский писал: «По причинам, высказанным Академическому собранию, прошу избавить меня от подписания этого доклада»[60, л. 12 об.]. Этот документ отчетливо свидетельствует о различных (в том числе и резко отрицательных) мнениях,имевшихся в Академии по поводу второй модели моста де Рибаса.

25 ноября 1776 г. в Академическом собрании было оглашено решение Академической комиссии, в котором сообщалось, что фельдмаршал князь Голицын вторично запрашивал отзыв Академии наук о модели де Рибаса. На том же заседании было решено, что Комиссия Эйлера должна на следующий день отправиться к И. де Рибасу для окончательных испытаний модели и составления отзыва [34, стр. 268]. Действительно, как видно из копии отзыва, Комиссия Эйлера 26 ноября произвела вторичные испытания [60, л. 20—21 об.].

Этот же документ дает возможность составить представление о второй модели моста И. де Рибаса [60, л. 20—21 и л. 6] и о первых и вторых испытаниях, проведенных Комиссией Эйлера. Модель была выполнена в 1/20 натуральной величины, и по ней имелось в виду построить мост через Неву, ширина которой была принята в 1050 футов (около 320 м). При этом в качестве необходимого условия принималось, что модель должна выдержать груз, равный, по крайней мере, ее девятнадцатикратному весу. После тщательного рассмотрения расчетов И. де Рибаса, Комиссия согласилась с его данными о весе модели (ее вес равнялся 383 фунтам). Таким образом была установлена и нагрузка, которую должна была выдержать модель — около 181,25 пуда. Испытания производились статической нагрузкой.

Для производства испытаний де Рибас опустил на свою модель на веревках «систему бревен», которая без связывающей ее оковки весила более 39 пудов. Затем на этот бревенчатый настил были нагружены кирпичи, число которых изобретатель увеличивал до тех пор, пока не появилась угроза прогиба модели. Вес этих кирпичей был равен почти 176 пудам, что вместе с бревнами составляло нагрузку около 216 пудов. Далее в отчете писалось: «Если считать, таким образом, что опыты, произведенные де Рибасом в присутствии профессоров и адъюнктов, не вызывают сомнения, то упомянутый вес является доказательством того, что его (де Рибаса.— *Н. Р.*) модель может выдержать нагрузку, превышающую в 23 раза вес модели, т. е. значительно больше, чем требуется расчетом, а потому не подлежит сомнению, что мост, построенный в точности по размерам этой модели с увеличением всех этих размеров в отношении 1:20, будет не только выдерживать собственную тяжесть, но еще и нагрузку, более чем достаточную в предположении самого быстрого движения...» Однако далее отмечалось, что так как в исследовании моделей таких больших сооружений необходимо быть очень придирчивым и поскольку Комиссии Эйлера «представилось», что система бревен и подвесов «могла также нести сама по себе часть нагрузки», академики сочли необходимым произвести вторичные испытания. Явившись с этой целью 26 ноября в помещение, где хранилась модель де Рибаса, Комиссия Эйлера предложила в его присутствии снять с модели бревенчатый настил и нагрузить ее досками, на которые изобретатель хотел положить еще два ряда других досок, весивших, по его мнению, более 70 пудов. Затем он намеревался догрузить модель кирпичами. Однако люди, которые под руководством де Рибаса нагружали модель, не соблюли, как писалось в отчете, «всех мер предосторожности», модель «получила боковой удар» и погнулась в нескольких местах. При попытке ее выправить она окончательно вышла из строя, прежде чем ее успели вновь нагрузить. Комиссия Эйлера должна была отметить, что «опыт потерпел неудачу и окончательно судить о доброкачественности модели пока еще невозможно» [60, л. 21].

Таким образом, Академия наук считала и этот проект де Рибаса неудовлетворительным и фактически забраковала его [47]. Дальнейшая судьба проекта моста де Рибаса не нашла отражения в бумагах Академии наук.

* * *

Покончив с очень сложным и щекотливым делом, которое в руках другого человека, обладавшего меньшими дипломатическими способностями, чем Эйлер, могло окончиться ссорой между Академией наук и

---

[47] Очевидно, опасаясь недовольства, которое могло возникнуть в связи со всем этим делом в придворных кругах (с которыми, как указывалось, де Рибас был тесно связан), члены Академического собрания, по-видимому, поручили академику Л. Ю. Крафту, близкому ко двору (он в дальнейшем был преподавателем математики у детей Павла I), составить письмо с объяснением причин решения Академии. Копия этого письма сохранилась [60, л. 29—30]. Крафт в дипломатических и осторожных выражениях убеждал своего адресата (оставшегося неизвестным) в правильности оценки, которую Академия наук дала второй модели моста де Рибаса, призывал этого последнего к благоразумию и дальнейшей работе.

придворными кругами, Комиссия Эйлера приступила к рассмотрению проекта И. П. Кулибина. Впрочем, Академия наук и Эйлер занимались проектами деревянного одноарочного моста Кулибина еще с 1771 г., но консультации, которые давались академическому механику, и испытания моделей, построенных по его проектам, проводились, можно думать, во внутреннем, так сказать, рабочем порядке. Только этим обстоятельством можно объяснить то положение, что об этих испытаниях (в том числе и об испытаниях модели по известному третьему проекту Кулибина) не упоминается в Протоколах Академического собрания; нет сведений об этом и в других официальных документах Академии. Лишь в 1776 г., когда работы по сооружению модели по третьему проекту И. П. Кулибина подходили к концу, о его работе встречается два упоминания в Протоколах Академического собрания. Первое из них содержится в Протоколе от 22 февраля 1776 г. [34, стр. 229][48]. После перечисления членов Комиссии Эйлера, которой поручалось рассмотреть проект и испытать первую модель И. де Рибаса, указывалось, что директор Академии наук С. Г. Домашнев поручил этой же Комиссии «рассмотреть... чертежи, описание и расчет другого моста, который проектировал механик-художник Академии Кулибин и модель которого должна быть закончена в скором времени». Второе упоминание содержится в протоколе от 18 апреля 1776 г., в котором указывается, что «г. адъюнкт Головин представил немецкий перевод мемуара механика Кулибина, содержащий описание деревянного одноарочного моста, который он проектировал для постройки на Неве и модель которого будет закончена в ближайшее время. Секретарь взял этот перевод для прочтения и чтобы сообщить свое мнение другим членам Комиссии, назначенным для проверки указанного проекта» [34, стр. 237].

Проект Кулибина рассматривали академики, назначенные директором Академии в Комиссию Эйлера, а также, очевидно, приглашенные им ученые[49]. Свидетельством этому служит отрывок документа с мнениями

---

[48] О том внимании, которое в Академии уделялось этой работе Кулибина, можно судить по тому, что директор Академии наук С. Г. Домашнев, уезжая осенью 1776 г. из Петербурга, предписал сообщить ему о результатах предполагаемого испытания кулибинской модели [61, л. 23].

[49] В состав Комиссии Эйлера, проводившей испытания модели моста, построенной по третьему проекту Кулибина, входили те же лица, что и в Комиссию по испытанию модели второго проекта де Рибаса. Таким образом, Эйлер, по-видимому, дополнительно привлек к участию в ее работе академиков А.- И. Лекселя, Л. Ю. Крафта и адъюнкта П. Б. Иноходцева, которые, как видно из последующего, рассматривали кулибинский проект с февраля 1776 г.

академиков А.-И. Лекселя, Л. Ю. Крафта и третьего ученого (судя по почерку. Н. И. Фуса), который не подписал свой отзыв. Так как этот документ, хранящийся в протокольных бумагах за февраль 1776 г., имеет важное значение и впервые вводится в оборот, приведем его здесь полностью в переводе. «Хотя мне весьма сомнительно, чтобы модель Кулибина могла выдержать нагрузку, в 12 раз превышающую ее собственный вес, однако я не знаю, удобно ли высказывать такое предположение, не проверив его; достаточно, если модель выдерживает на 485 пудов больше, чем она должна бы выдерживать, чтобы мост в натуральную величину мог выдерживать собственный вес; можно считать, что мост в натуральную величину мог бы быть перегружен почти на 50 000 пудов, не подвергаясь ни малейшему риску; это мне представляется наибольшей нагрузкой, которую он может вообще нести. Впрочем, я присоединяюсь к мнению г. Румовского. Лексель.»

«Чтобы быть в точности согласным с истиной, следовало бы, по-видимому, вместо слов «Взвесив...» поставить: «Вследствие составленного г. Кулибиным расчета, который не вполне точен, но не должен значительно отклоняться от требуемой точности, общий вес следует оценить в...» Крафт.»

«Ваш уважаемый отец (документ, по-видимому, адресован И.-А. Эйлеру.—*Н. Р.*) считает, что от этого наброска ничего нельзя отнять и ничего (к нему.— *Н. Р.*) прибавить, он находит его вполне отвечающим его собственным мыслям. Было ли что-нибудь решено относительно предложения г. Румовского — поручить некоторым членам Комиссии рассмотреть вес, указанный в этом докладе? Этот пункт слишком существенен, чтобы им можно было пренебречь» [Н. И. Фус] [62].

Этот документ отчетливо свидетельствует о той высокой оценке, которую давал Эйлер проекту И. П. Кулибина уже в начале 1776 г.

Кулибин, по его собственному свидетельству, начал работу над проектом деревянного одноарочного моста через Неву с момента переезда в Петербург в 1769 г.[50] В 1771 г. изобретатель построил модель моста по первому проекту, которая была забракована академиками. К концу 1772 г. академический механик закончил второй вариант проекта деревянного одноарочного моста. В описании этого проекта он дал экспериментальное

[50] В своем прошении на имя вице-директора Академии наук А. А. Ржевского, к которому было приложено описание второго проекта, Кулибин писал: «...сначала моего в Санкт-Петербург приезда еще прошлого 1769 года... начал искать способ о сделании моста...» [54, л. 2; 63, стр. 151].

и теоретическое обоснование принятой им схемы моста и размеров его отдельных элементов, а также эмпирический вывод правила пересчета грузоподъемности с модели на натуру.

К концу 1776 г. была закончена постройка модели моста по третьему проекту И. П. Кулибина. В это же время были произведены ее испытания.

Постройка модели моста по проекту И. П. Кулибина и успех ее испытаний были выдающимся событием в строительной технике тех дней. 26 декабря 1776 г. Комиссия Эйлера подвергла модель Кулибина испытанию статической нагрузкой. Первоначально по решению Комиссии на модель (которая была выполнена в 1/10 натуральной величины и весила 330 пудов) был уложен весь расчетный груз — 2970 пудов «полосного железа» (т. е. вместе с весом самой модели — 3300 пудов), который был пропорционально размещен по всей модели. Затем на модель было положено дополнительно еще 570 пудов сверх расчета. Комиссия Эйлера сверх того размещала на известный срок по всей длине модели моста 15 человек[51]. «... Стоявши под тем железным грузом оная модель,— писал Кулибин,— 28 дней не показала ни малейших знаков к повреждению...» [63, стр. 166].

Модель моста И. П. Кулибина, созданная им по проекту, разработанному в Петербургской академии, блестяще выдержала испытания. Комиссия Эйлера признала проект научно-обоснованным, расчеты Кулибина правильными и сооружение моста через Неву по этому проекту возможным [52].

Скоро известия об успехе испытаний модели Кулибина широко распространились в России. Проект И. П. Кулибина вызвал большой интерес в научных кругах за рубежом. Даниил Бернулли 7 июня 1777 г. писал Н. И. Фусу [51, стр. 118—120; 52, стр. 671]: «...то, что Вы сообщаете мне о Вашем врожденном механике г. Кулибине по поводу деревянного моста через Большую Неву, имеющую ширину в 1057 футов, внушает мне высокое мнение об этом талантливом строителе и искусном плотнике, воспитанном между простыми крестьянами и обязанном своими высшими познаниями только своего рода наитию... Вы, конечно, видели

---

[51] Интересно отметить, что, по всей вероятности, и Эйлер, и И. П. Кулибин имели в виду свойство древесины ползти под нагрузкой, в связи с чем испытания были сделаны не кратковременными. На это обстоятельство обратил наше внимание Л. П. Филин.

[52] Мост по проекту И. П. Кулибина через Неву не был осуществлен. Одной из причин этого обстоятельства явилось неудачное архитектурное оформление моста [64, стр. 45; 65, стр. 192]. Техническая характеристика проекта И. П. Кулибина дана в работе [66, стр. 191—252].

работу г. Андрее (Andreae), изданную в форме писем в Цюрихе в 1776 году; там Вы найдете очень подробное описание деревянного моста, построенного в Шафгаузене, длиной в 364 английских фута: но там воспользовались естественным устоем около середины реки так, что длиннейшая часть имеет только 200 футов, что значительно меньше, чем 1057. Эта ширина Невы мне кажется чрезмерной, и признаюсь, что я никогда не имел бы смелости одобрить постройку такого моста, разве только если бы между одним и другим берегом Невы было сооружено два или три свайных устоя, которые делили бы мост на три или четыре почти равные части. У меня составилось это мнение только после внимательного чтения всего описания г. Андрее. Я нимало не руковожусь простой теорией, которая приводится в такого рода работах, потому что невозможно перечислить все обстоятельства, которые непременно должны быть приняты в расчет, и приходится разрабатывать ощупью множество мелких деталей, не допускающих точного определения. Главный строитель чаще всего должен полагаться на свое собственное чутье. Здесь я и ощущаю всю выгоду иметь такого человека, как Кулибин, к которому я проникнут уважением; но не могу победить своего недоверия, когда дело идет о таком огромном мосте... Пожалуйста, сообщите мне, какова высота модели в ее середине по сравнению с концами и каким именно способом великий мастер распределяет те 3500 пудов, которыми он нагружает свою модель? Если она в состоянии выдержать еще 500 пудов, которые он предположил наложить на нее, то увеличение будет сильным доказательством самого счастливого успеха, какой только можно было обещать. В прежние времена я произвел много разысканий о силе и сопротивлении дерева, примененного разнообразными способами; эти разыскания всегда подтверждались на опыте, но я еще колеблюсь на счет сопротивления балки известной длины....»

Позже, когда проект Кулибина стал известен Д. Бернулли более детально, он в своем письме к Н. Фусу 18 марта 1778 г. писал: «...не могли бы Вы поручить г. Кулибину подтвердить теорию Эйлера подобными опытами, без чего его теория останется верной лишь гипотетически?» [52,стр. 677].

* * *

С начала января 1776 г. Эйлер перестал посещать заседания Академического собрания, однако он продолжал принимать активное участие в научных делах Академии. Поэтому у нас нет сомнения в том, что он принимал участие в обсуждении и проведении испытаний модели моста через Неву, построенной по проекту руководителя «часового класса» Академии художеств — Нордштерна [67, стр. 14—15; 68, стр. 224], хотя и не подписал акта об этих испытаниях.

3 декабря 1778 г. Академическое собрание обсуждало вопрос об испытаниях и составлении заключения об этой модели, которая была выставлена в Конференц-зале Академии наук. Для испытаний была назначена Комиссия в составе академиков: И.-А. Эйлера, С. К. Котельникова, С. Я. Румовского, Л. Ю. Крафта, А.-И. Лекселя и адъюнктов: П. Б. Иноходцева, Н. И. Фуса и М. Е. Головина [34, стр. 390]. Эта Комиссия 7 декабря 1778 г. провела испытания модели Нордштерна [53].

Из описания проекта моста Нордштерна видно, что это был наплавной мост, расположенный на понтонах, соединенных девятью пролетами. Средний пролет был разводным для пропуска судов. Конструкция моста была такова, что могла быть легко приспособлена к повышению и понижению уровня воды в реке, а понтоны были надежно защищены от воздействия льда. Мост, построенный по проекту Нордштерна, мог разводиться и наводиться меньшим числом рабочих, чем обычные наплавные мосты. Большое внимание конструктор обратил на архитектурное оформление моста, который был внешне похож на каменный.

Комиссия Академии наук отметила ряд положительных сторон проекта Нордштерна (красивое архитектурное оформление, меньшие эксплуатационные расходы, меньшее число понтонов — около половины против обычных мостов, лучшую способность к сопротивлению напору льда, чем у обычных наплавных мостов).

Характерно, однако, что Комиссия в своем заключении не обмолвилась ни одним словом о желательности осуществления этого проекта, отметив только, что «модель сделана красиво и исправно и стоит того, чтоб ее хранить» [70, стр. 88].

Нужно думать, что в это время в Академии наук были полностью убеждены в возможности и необходимости сооружения постоянного, а не наплавного моста через Неву.

* * *

Материалы, хранящиеся в Архиве Академии наук СССР, проливают дополнительный свет на ту сторону деятельности Эйлера, которая была связана с инженерной практикой его времени. Обращение к Эйлеру

[53] В протокольных бумагах Академического собрания [69, л. 1—9] есть группа материалов, подробно освещающих историю представления, рассмотрения и испытания модели моста Нордштедта. Кроме того подробные сведения об этом проекте опубликованы в академическом журнале [70, стр. 85—88].

за научной помощью ряда изобретателей приводило к тому, что великий математик не только отвечал на их запросы, но, глубоко осмысливая поставленные перед ним задачи, давал решения, которые обогащали инженерную теорию новыми разделами.

Считаю своим приятным долгом выразить признательность за помощь при работе над иностранными текстами Т. Н. Кладо, Ю. Х. Копелевич, И. А. Перельмутеру, а также Г. К. Михайлову и проф. А. П. Юшкевичу за ценные советы и указания.

Литература

1. E. Cherbuliez, L. Eulers Arbeiten auf dem Gebiete des Machinen und Ingenieur-Wesens, Vierteljahrschrift d. Naturf. Ges. in Zürich, 56 (1911), Zürich 1912. Zweiter Teil, Sitzungsberichte, Sitzung vom 27 Februar 1911
2. А. А. Дорогов, Учение о машинах в русской научно-технической литературе периода мануфактурной техники, Труды Ин-та истории естествознания и техники АН СССР, т. 8, М., 1956, стр. 111—117
3. Г. К. Михайлов, Леонард Эйлер, Известия АН СССР, Отделение технических наук, № 1, стр. 3—26 (1955)
4. И. В. Крагельский и В. С. Щедров, Развитие науки о трении. Сухое трение, М., 1956, стр. 22—33
5. E. Brauer, Eulers Turbinentheorie, Jahresber. d. deutschen Math.- Verein., 17, № 1, 1908, 1 Abt., SS. 39—46
6. J. Ackeret, Untersuchung einer nach den Eulerschen Vorschlägen (1754) gebauten Wasserturbine, Schweizerische Bauzeitung, Bd. 123, № 1, 1944, SS. 2—4
7. И. И. Кириллов, К 200-летию со времени выхода в свет трудов Эйлера по теории турбомашин, Бежицкий ин-т транспортного машиностроения, Турбостроение, Книга 1. Аэродинамика проточной части паровых турбин, М., 1955, вып. 15, стр. 3—4
8. J. Ackeret, 200 Jahre Turbinentheorie, Verein Deutscher Ingenieure. Berichte, Band 3, Düsseldorf, 1955, S. 107
9. Meditationes super problemate nautico, de implantatione malorum, quae proxime accessere ad praemium anno 1727, a Regia Scientiarum Academia promulgatum, Parisiis, 1728, pp. 1—48, 2 planches
10. J. A. Orfireus, Gründlicher Bericht von dem Glücklich inventirten Perpetuo per se mobili, Leipzig, 1715
11. Мнение о орфирейском перепетуо мобиле не в указ, Историч., генеалогические и географич. примечания к СПб. ведомостям, Июнь 1729 г., № 57 от 19 июля 1729
12. П. Пекарский, Наука и литература в России при Петре Великом, СПб., 1862
13. Материалы для Истории Академии наук, т. I (1716—1730), СПб., 1885
14. Архив АН СССР, ф. 3, оп. 1, № 1
15. Henry Dirks, Perpetuum Mobile: or History of the Search for Selfmotive Power During the 17-th, 18-th and 19-th Centuries; Illustrated from Various Sources in Papers, Essays, Letters, Paragraphs and Numerous Patent Specifications; with an Introductory Essay, London, 1861

16. В. П. Зубов, Историография естественных наук в России (XVIII в.— первая половина XIX в), М., 1956
17. Примечания к СПб. ведомостям, 15 июля 1729 г., стр. 221—224
18. Павел Свиньин, Жизнь русского механика Кулибина и его изобретения СПб., 1819, стр. 37
19. Архив АН СССР, ф. 296, оп. 1, № 5
20. Архив АН СССР, ф. 296, оп. 1, № 9
21. Архив АН СССР, ф. 296, оп. 1, № 35
22. Архив АН СССР, ф. 296, оп. 1. № 36
23. Архив АН СССР, ф. 196, оп. 1, 78
24. Д. И. Каргин, Perpetuum mobile И. П. Кулибина, Архив истории науки и техники, вып. 6, М.— Л., 1935, стр. 188
25. Протоколы заседаний Конференции имп. Академии наук с 1725 по 1803 г., т. I, 1725—1743, СПб., 1897
26. Материалы для истории имп. Академии наук, т. I (1716—1730), СПб., 1885
27. Б. М. Модзалевский, Список членов имп. Академии наук (1725—1907), СПб., 1908,
28. Архив АН СССР, ф. 3, оп. 1, № 40
29. Материалы для истории имп. Академии наук, т. III, СПб., 1886
30. Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII-ème siècle. Tome I, St.-Petersbourg, 1843
31. Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 39
32. Архив АН СССР, ф. 136, оп. 1, № 133
33. Протоколы заседаний Конференции имп. Академии наук, т. II, СПб., 1889.
34. Протоколы заседаний Конференции имп. Академии наук, т. III, СПб., 1900.
35. Академические известия на 1780 г., часть IV. Показание новейших трудов разных Академий и ученых обществ. Академия Парижская: История и сочинения Королевской Парижской Академии наук на 1775 г. V. Совет мечтающим о изобретении вечного или бесконечного движения
36. Протоколы заседаний Конференции имп. Академии наук, т. IV, СПб., 1911
37. Biographisches Lexikon des Kaiserthums Oesteıeichs, Wien, 1877, B. 33
38. Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 3
39. Архив АН СССР, оп. 1, № 134
40. Eine von dem H-r prof. Segner in Göttingen eingesandte Beschreibung der von ihm erfundenen hydraulischen Maschine. Hannoverische Gelehrte Anzeigen auf das Jahr 1750, 35 Stück
41. Einige Anmerkungen zu der im 35 Stücke dieser Anzeigen befindlichen Beschreibung einer hydraulischen Maschine. Hannoverische Gelehrte Anzeigen auf das Jahr 1750, 38, Stück
42. Recherches sur l'effet d'une machine hydraulique proposée par M. Segner professeur à Göttingen, par M. Euler. Histoire de l'Académie royale des Sciences et belles lettres, т. 6 (1750), Berlin, 1752
43. P. Stäckel und W. Ahrens, Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuss über die Herausgabe der Werke L. Eulers..., Leipzig, 1908
44. Application de la machine hydraulique de M. Segner à toutes sortes d'ouvrages et de ses avantages sur les autres machines hydrauliques dont on se sert ordinaire-

ment, par M. Euler. Histoire de l'Académie royale des Sciences et belles lettres (1751), т. 7, Berlin, 1753
45—46. Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 1
47. Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 4
48. Détermination de l'effet d'une machine hydraulique inventée par M. Segner, prof. à Gottingue. Opera postuma, t. 2, СПб., 1862
49. Théorie plus complètte des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau, par L. Euler. Histoire de l'Académie royale des Sciences et belles lettres (1754), т. 10, Berlin, 1756
50. J. Ackeret (Zürich), Untersuchung einer nach den Eulerschen Vorschlägen (1754) gebauten Wasserturbine. Schweizerische Bauzeitung, Bd. 123, № 1, 1944
51. П. Пекарский, История имп. Академии наук в Петербурге, т. I, СПб., 1870
52. Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle, т. II, СПб., 1843
53. И.-Г. Георги, Описание российского им. столичного города С.-Петербурга и достопамятностей в окрестностях оного, СПб., 1794
54. Архив АН СССР, ф. 296, оп. 1, № 38
55. L. Euler. Regula facilis pro dijudicanda firmitatae pontis aliusve corporis similis ex cognita tirmitate moduli. Novi Commentarii Academiae Scientiarum imp. Petropolitanae, т. XX, (1775) 1776
56. (Л. Эйлер), Легкое правило, каким образом из модели деревянного моста или подобной бременоносной машины познавать, можно ли то же сделать и в большом. Собрание сочинений выбранных из Месяцеслова, ч. VIII (1792), стр. 138—140
57. Русский биографический словарь, т. Рейтерн-Рольцберг, СПб., 1913
58. Архив АН СССР, ф. 1, оп. 2—1776, № 3
59. Собрание сочинений, выбранных из Месяцесловов на разные годы , ч. VIII, СПб, 1792
60. Архив АН СССР, ф. 1, оп. 2—1776, № 10
61. Архив АН СССР, ф. 3, оп. 7, № 28 (1776)
62. Архив АН СССР, ф. 1, оп. 2—1776, № 2
63. Рукописные материалы И. П. Кулибина в Архиве Академии наук СССР, Труды Архива, Выпуск 11, Составили Н. М. Раскин и Б. А. Малькевич. Редакционная коллегия: И. И. Артоболевский, Н. К. Дормидонтов, Г. А. Князев, П. Н. Корявов, Н. М. Раскин, М.— Л., 1953
64. Б. С. Уваров, Мост Кулибина, «Строительная промышленность», 1938, № 2
65. В. Кочедамов, Проекты первого постоянного моста на Неве, «Архитектурное наследство», № 4, Л., 1953
66. Б. В. Якубовский, Проекты мостов И. П. Кулибина, «Архив истории науки и техники», вып. VIII, М.— Л., 1936
67. Юбилейный справочник имп. Академии художеств (1764— 1914), т. I, Составил С. Н. Кондаков
68. Сборник материалов для истории имп. С.-Петербургской Академии художеств за сто лет ее существования, Часть I, Под редакцией П. И. Петрова, СПб., 1864
69. Архив АН СССР, ф. 1, оп. 2—1778, № 10
70. Acta Acad. Petropolitanae. Pro anno 1778. Pars posterior (1781).

N. M. RASKIN

EULER UND DIE FRAGEN DER TECHNIK

Nach unveröffentlichten Materialien des Archivs der Akademie der Wissenschaften der UdSSR

(Zusammenfassung)

Beim Studium des im Archiv der Akademie der Wissenschaften der UdSSR aufbewahrten handschriftlichen Erbes L. Eulers wurde umfangreiches, bisher unbekanntes Material entdeckt, das auf einzelne Seiten seiner Tätigkeit auf dem Gebiet der Technik Licht wirft.

Da Euler großes Interesse für praktische technische Probleme bekundete, nahm er nicht selten an Kommissionen teil, die die Konferenz der Petersburger Akademie der Wissenschaften mit der Begutachtung verschiedener technischer Erfindungen, Entwürfe u. s.w. beauftragte. Außerdem beteiligte er sich an der Untersuchung einiger theoretischer Fragen der Technik, mit denen sich die Petersburger Akademie der Wissenschaften ebenfalls befaßte. Dasselbe geschah auch während Eulers Aufenthalt in Berlin.

Das neue Material gestattet die Feststellung, daß Euler die Verwirklichung des Perpetuum mobile, die viele Gelehrte der damaligen Zeit, wie z. B. Chr. Wolff oder W. J. vans' Gravesande für möglich hielten, als unmöglich betrachtete. Euler überzeugte schließlich die Petersburger Akademie der Wissenschaften, die Untersuchung von Projekten des Perpetuum mobile abzulehnen.

Im Artikel werden auch Fragen untersucht, die mit der von Euler ausgearbeiteten ersten Theorie der Wasser-Reaktionsturbine und ihrer ersten, von ihm geschaffenen Konstruktion zusammenhängen. Als Material dienten hier: 1) eine umfangreiche Sammlung von Briefen von J.-A. Segner an L. Euler, 2) Aufzeichnungen in den Arbeits-Tagebüchern des berühmten Gelehrten, 3) Materialien zum Studium der Wirkung von Modellen des Segnerschen Rades und andere Dokumente. Das Studium dieses Materials hat ergeben, daß hierbei neben den theoretischen Aspekten auch die ständigen Mitteilungen J.-A. Segners über die Ergebnisse der Wirkung seines «Rades» als ein wichtiger Ausgangspunkt für die Arbeiten Eulers gedient hatten. Diese Mitteilungen führten Euler zu einer der Hauptideen seiner Konstruktion der Wasser-Reaktionsturbine — der Trennung des Leitapparats vom Arbeitsrad.

Schließlich beleuchtet der Artikel eines der wichtigsten technischen Gutachten, das Euler in der Petersburger Akademie der Wissenschaften ausgearbeitet hat — die Untersuchung der Entwürfe von freitragenden Brücken über die Newa. Da in der gesamten Praxis der Welt keine Erfahrungen über die Errichtung solch großer Brückenkonstruktionen (von etwa 300 m Länge) vorlagen und die theoretischen Angaben nicht ausreichten, mußte Euler bei der Untersuchung der der Akademie vorgelegten Entwürfe besonders strenge Ansprüche stellen.

Im Ergebnis schuf Euler, ausgehend von den experimentellen Daten I. P. Kulibins — des Autors eines der Brückenprojekte — eine Regel für die Umrechnung der Prüfungsergebnisse eines Brückenmodells auf natürliche Verhältnisse. Durch die Erprobung der Brückenmodelle, die nach den Entwürfen von I. Deribas und I. P. Kulibin erbaut waren, konnte Eulers Kommission die Untauglichkeit der Berechnungen I. Deribas' und die vollkommene Stichhaltigkeit der Angaben I. P. Kulibins objektiv feststellen.

Е. С. КУЛЯБКО

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ВОЗЗРЕНИЯ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

В Архиве Академии наук СССР хранится большая неопубликованная собственноручная докладная записка Эйлера на немецком языке под заглавием: «Всенижайшее предложение об устройстве гимназии при императорской Академии наук в Петербурге» [1]. Эта рукопись, относящаяся к 1737 г., представляет большой интерес для уяснения педагогических воззрений выдающегося ученого, деятельно заботившегося о просвещении русского юношества. Основанная Петром I Петербургская академия в отличие от других европейских академий была не только научным, но и учебным учреждением. Первостепенные ученые, разрабатывавшие важные проблемы науки, занимались также преподаванием и читали лекции[1].

В первый период жизни в России (1727—1741) Эйлер читал публичные лекции по математике и руководил математическими занятиями отдельных академических студентов. У него обучались будущий адъюнкт Академии В. Е. Адодуров (1727), сын придворного священника Денис Надоржинский (1727), сын архангельского купца Мюкс (1727), сын лекаря Семеновского полка Энц (1729—1730) и немецкий студент Готфрид Клейнфельд (1730) [2, л. 63—66].

После отъезда в Германию Эйлер не прервал связей с Петербургской академией и вплоть до своего возвращения в Россию в 1766 г. продолжал проявлять большое внимание к русским студентам и адъюнктам. К Эйлеру часто посылались на отзыв работы академических студентов С. К. Котельникова, Б. А. Волкова, С. Я. Румовского и М. Софронова. В Архиве Академии наук сохранились отзывы Эйлера об этих юношеских работах и самые работы с собственноручными отметками о замеченных погрешностях [3; 4].

После производства в адъюнкты Румовский и Софронов были посланы

[1] До регламента 1747 г. действительные члены Академии наук официально именовались профессорами и чтение лекций входило в их обязанность.

для усовершенствования в математике к Эйлеру в Берлин, где уже жил и обучался адъюнкт Котельников. Эйлер считал, что профессорские вакансии в Петербургской академии должны замещаться по мере возможности уроженцами России, и писал непременному секретарю Академии наук Г.-Ф. Миллеру, что Котельников по своим знаниям и дарованиям гораздо выше Кюна, Кастильона и Кестнера, которых Академия хотела вызвать из Германии для замещения пустовавшей кафедры математики [5, л. 158].

Во второй период своей жизни в Петербурге (1766—1783) Эйлер попрежнему руководил математическими занятиями студентов. В то время у него обучались племянник Ломоносова М. Е. Головин [6][2] и Н. И. Фус[3], выполнявшие при нем также обязанностей секретарей.

Эйлер не оставлял вниманием и Академическую гимназию, написав для учащихся «Руководство к арифметике» [7]. Первая часть ее в русском переводе Адодурова появилась в 1740 г., вторая часть, переведенная студентом Василием Кузнецовым, была издана в 1760 г. Учебник Эйлера отличался ясностью и простотою изложения, воспитывал в учащихся стремление к пониманию арифметических действий. Для студентов Эйлер написал знаменитую алгебру «Универсальная арифметика», которая была переведена с немецкого на русский язык учениками М. В. Ломоносова студентами Петром Иноходцевым и Иваном Юдиным и издана в 1769 г. [8, л. 134].

В 1769 г. Эйлер принимал участие в рассмотрении проекта о лучшем устройстве школьной части в Российской империи и представил вместе со своим сыном Иоганном-Альбрехтом письменное мнение о нем [9, стр. 662][4].

Чтобы пояснить значение педагогического проекта Эйлера об устройстве гимназии при Академии наук, необходимо сказать, что представляла собой Академическая гимназия того времени. В проекте об основании Академии наук, утвержденном Петром I, Академическая гимназия рассматривалась как подготовительная школа, в которой обучали бы «первым фундаментам наук начинающих учиться», чтобы они со временем «учениями академическими пользоваться могли» [10, л. 133].

---

[2] Головин Михаил Евсеевич (1756—1790)— адъюнкт по математике. В списке членов имп. Академии наук 1725—1907 гг. Головин ошибочно упомянут в числе почетных членов АН (стр. 78). Почетным членом он не был, но при уходе из Академии в 1786 г. получил звание сверхштатного адъюнкта (adjoint externe) [6, стр. 10].

[3] Фус Николай Иванович (1755—1825)—академик высшей математики, непременный секретарь АН с 1800 г.

[4] Этот документ в Архиве Академии наук не сохранился.

Первое место в гимназии отводилось преподавателю латинского языка, как международного научного языка того времени. Вторым обязательным языком был немецкий. В последних классах вводились общеобразовательные предметы «история и первые математики начатки, также география с глобусом соединенная». Дополнительными предметами преподавания являлись: греческий, французский и итальянский языки. Проект не ставил никаких сословных ограничений для поступления в гимназию, но подчеркивал, что она предназначается лишь для тех, «которые ум свой к учению простирают и оному себя посвящают»; остальных, кто «в студенты произойти надежды не имел», предлагалось обучать разным «ремеслам и художествам» [11, л. 17—18]. Устройство гимназии и управление ею было поручено приглашенному из Пруссии профессору З.-Т. Байеру. Гимназия была разделена им на два отделения — немецкое, или приготовительное, состоящее из трех классов, и латинское — из двух классов . Такое устройство объяснялось тем, что первыми учителями гимназии были приехавшие из Германии немецкие студенты, не знавшие русского языка, и русские ученики не могли бы их понимать, не изучив немецкого языка. До регламента 1747 г. в Академическую гимназию был открыт доступ детям всех сословий. В рубриках об отцах учащихся упоминаются придворные, сенаторы, адмиралы, генералы, помещики, чиновники, представители духовенства и купечества, ремесленники, адмиралтейские рабочие, слуги и даже крепостные [12].

Академическое начальство пыталось заполнить гимназию дворянской молодежью. Для дворян создавались более благоприятные условия обучения, постоянно предлагалось привлекать к гимназическим занятиям воспитанников основанного в Петербурге в 1731 г. привилегированного дворянского учебного заведения — Шляхетного кадетского корпуса. В 1734 г. президент Академии И.-А. Корф отказал в приеме в гимназию четырем «ребятам», присланным из Адмиралтейства обучаться латинскому языку, на том основании, что гимназия «токмо для благородных и других знатных детей» учреждена и «для того ж она весьма в упадок пришла, что всех и каждого без различия сюда принимали» [13, стр. 531].

Первоначальное намерение придать Академической гимназии узкопрофессиональный характер не осуществилось вследствие различных интересов учащихся разных сословных групп. Полный гимназический курс стал обязательным лишь для тех, кто готовился к поступлению в университет, остальным ученикам было дозволено изучать те или иные предметы по собственному желанию или по выбору их родителей. Возраст учеников, принимаемых в гимназию, не был определен: наряду с пятилетними детьми принимали 20- и даже 25-летних юношей. Зрелым возрастом в особенности отличались ученики, присланные Адмиралтейством, бóльшая часть из них была 17, 18, 19 и 23 лет [14].

Установленного учебного года не было: ученики принимались «на пробу» в любое время. Несмотря на предусмотренное классное разделение, в Академической гимназии преобладало внеклассное обучение, так как большинство учеников поступало для изучения отдельных предметов, обычно новых языков. Занятия велись с каждым учеником отдельно, учитель указывал каждому, что учить и, убедившись, что тот или другой ученик достаточно изучил предмет, переводил его на изучение другого предмета. В силу этого не было одного срока для перевода из класса в класс, а поэтому и не было общих экзаменов, хотя в 1735 г. президент И.-А. Корф предписывал два раза в год производить «исследования» или «истязания» с целью убедить родителей в знаниях учащихся [2, л. 282].

По донесению ректора Гимназии Мартина Швановича, поданному в сентябре 1736 г. в Герольдмейстерскую контору, в Гимназии числилось 52 недоросля, большинство из них обучалось одному или двум иностранным языкам, танцам и рисованию, некоторые изучали еще арифметику и географию. Выбывших насчитывалось 23 человека; они учились по нескольку месяцев или недель языкам, рисованию, танцам, а затем «отставали» без позволения и «абшида» [15, л. 110—115]. Даже академические ученики на жалованьи не проходили полного гимназического курса, а обучались одному немецкому языку. Поэтому Гимназия не выполняла своего назначения и не выпускала учеников, прошедших полный гимназический курс. Дошедшие до нас списки учащихся показывают, что в год основания Гимназии, в 1726 г., в ней обучалось 112 человек, в следующем, 1727 г. — 58 человек, потом число поступающих резко падает. В 1736 г. в Гимназии было только 48 учеников, и многие из них не ходили в классы. В 1737 г. в Гимназии было всего 19 учащихся [12], и нужно было принимать меры, чтобы восстановить ее. С этой целью по предписанию президента И.-А. Корфа была организована комиссия из четырех лиц, проявивших себя на педагогическом поприще [10, стр. 470]. Кроме Эйлера в состав комиссии вошли: юстиц-советник Х. Гольдбах, имевший, в качестве бывшего воспитателя императора Петра II, репутацию опытного педагога, профессор З.-Т. Байер, бывший проректор Кенигсбергской кафедральной школы, автор положения об Академической гимназии под заглавием: «Gegenwärtige Einrichtung des Gymnasiums», и зарекомендовавший себя ранее профессор Г.-В. Крафт.

Проект Эйлера, представленный в 1737 г. в Комиссию, учрежденную для улучшения Академической гимназии [17][5], дает тщательно обдуманную и обоснованную систему обучения юношества. Эйлер предлагает прежде всего ввести в Академической гимназии единообразный, выдержанный в одном направлении и равно обязательный для всех учащихся учебный план.

«Главная задача Гимназии, — указывает он, — приготовлять университетских слушателей, и весь учебный план должен получить направленный к этой цели характер. Если преподавание будет построено таким образом, что мальчик с неплохими способностями еще до 16 лет сможет понять все то, что изучается в Гимназии, то тем, которые предназначены к какой-либо другой деятельности, будет вполне доступно в срок закончить полный курс Гимназии, что доставит им не малую пользу во всех их будущих предприятиях. Те же, которые не склонны продолжать свои занятия дальше, не терпят ущерба, так как они могут оставить Гимназию еще до окончания полного курса, как только их уровень подготовки окажется достаточным для их целей» [17, л. 4].

Установление такого порядка имело чрезвычайно важное принципиальное значение, так как помогало преодолеть ту неорганизованность преподавания, которая губила Академическую гимназию.

Эйлер указывает на необходимость и государственную пользу всесословного обучения, считая, что каждый человек способен к образованию. Он указывает, что Академическая гимназия открыта как для богатых, так и для бедных, и подчеркивает, что обучение в ней бесплатное.

Однако опасение испортить нравственность обучающихся в Гимназии «благородных» детей побуждает его считать необходимым обособить их от детей «подлых» и ввести раздельное обучение дворян и разночинцев. Это разделение было узаконено в 1750 г. определением Канцелярии Академии, подписанным президентом К. Г. Разумовским, И.-Д. Шумахером и Г. Н. Тепловым. Согласно определению обучающимся в Гимназии из шляхетства и других знатных чинов людей детям предписывалось «сидеть за особенным столом, а которые не знатных отцов дети, тех отделять особо» [18, л. 433].

Эйлер ограничивает возраст поступления в Гимназию. На необходимость этого указывал еще до него президент Академии И.-А. Корф. В своем представлении, поданном в 1735 г. в Сенат, он писал, что при при-

---

[5] Все цитаты из докладной записки Эйлера приводятся в переводе на русский язык. Начало записки дано в приложении к настоящей статье.

еме детей в низший класс Академической гимназии «больше осьми лет от рождения имети не надлежит, потому, что когда они старее, то об них так совершенно надеяться не можно, чтоб они свое учение в способных к тому летах окончили и потому основательное знание имели» [13, стр. 701]. Эйлер предлагает начинать обучение детей с 5 лет и считает, что в Гимназии не должно быть учеников старше 15 или, в крайнем случае, 16 лет. Вместе с тем он выдвинул требование принимать учащихся в Гимназию одновременно, раз в год, и осуществлять перевод из класса в класс также раз в год, после прохождения определенной программы и проведения испытаний.

Сохраняя пять установленных классов Гимназии, в которых «всякому ученику было позволено так долго обучаться, как он сам желает», Эйлер, исходя из способности средних учеников, предлагает установить 10-летний курс гимназического обучения при двухлетней продолжительности пребывания в одном классе. Вместе с тем он предоставляет возможность более способным ученикам ежегодно переходить из класса в класс и закончить гимназическое образование в 5 лет. «Благодаря этому, — указывает он, — в каждом классе всегда будут находиться два рода учеников: такие, которые в этом классе не пробыли еще целого года и называются младшими, и такие, которые находятся в этом классе уже более одного года и называются старшими. Занятия для этих обеих групп должны быть организованы таким образом, чтобы одна группа не мешала другой. Это может быть легко достигнуто, если старшие ученики будут только повторять и тверже усваивать то, что изучают младшие, так как они для этой цели и остаются еще один год» [17, л. 12]. Это предложение Эйлера сходно с взглядами З.-Т. Байера, который тоже предлагал установить 10-летний курс гимназического обучения, за исключением особо даровитых учеников.

Эйлер считал родной язык основным языком для усвоения знаний и указывал, что немецкий язык необходим до тех пор, пока русское юношество обучается у немецких учителей. «Поэтому,— пишет он, — нужно обратить большое внимание на обучение молодых русских немецкому языку.» Таким образом, он оставляет старую систему преподавания «с немецкого языка», с которой было покончено только при Ломоносове [19, стр. 871].

Интересен разработанный Эйлером план обязательных предметов гимназического курса. Он отводит важную роль преподаванию основ христианской религии, чтобы «чистая вера внедрялась в умы юности». Примечательно, что уроки закона божьего Эйлер признает обязательными только для русских учеников. Он допускает свободу вероисповедания и указывает, что из-за различия религий иностранцев можно не заниматься их религиозным воспитанием, потому что каждый отец семейства позаботится об этом сам.

Эйлер считает, что обучение в Гимназии не должно иметь филологического уклона; от этого, по его мнению, пострадает преподавание других необходимых предметов. «От оканчивающего Гимназию, — указывает он, — не надо требовать большего, чем понимания не очень трудного латинского автора и умения сносно выразить свои мысли на этом языке, ибо более глубокое изучение языка не дело каждого и часто требует всей жизни. Поэтому тот, кто хочет достичь большего в латинском языке и стиле — тот может посвятить этому больше времени, уже будучи в Академии под руководством профессора красноречия» [17, л. 6].

Исходя из того, что цели тех, кто посещает Гимназию, обычно бывают весьма различны, в соответствии с характером деятельности, которую каждый склонен выбрать, Эйлер вводит в гимназический курс широкий цикл образовательных предметов. Он придает большое значение изучению математики, истории, географии, логики, знакомству с генеалогией правящих династий, рисованию, каллиграфии и танцам.

Чрезвычайно интересно, что в учебном плане Эйлер рекомендует и методы наиболее легкого и быстрого усвоения предметов. Он указывает, например, как следует обучать учеников иностранным языкам. «Сообщая ученику название букв языка, который он должен изучить,— говорит Эйлер,— нужно указать ему те буквы его родного языка, с которыми данные буквы иностранного языка совпадут по произношению. После этого ученику будет не трудно читать по слогам и таким образом можно будет избежать отнимающего много времени чтения по буквам. При этом нужно обратить особое внимание на хорошее и правильное произношение» [17, л. 25].

При изучении арифметики следует не только сообщать простые правила арифметики, но в такой мере, в какой это возможно, приводить и обоснование этих правил. Таким образом ученики не только лучше запомнят правила, но также сумеют убедиться в их истинности и одновременно научатся глубокому изучению предмета.

Эйлер ставит перед Академической гимназией задачу учить всему по-новому, легко, доступно и наглядно. Учить только тому, что бесспорно полезно, избегая ненужного, начинать обучение с простейших основных начал, усложняя материал постепенно, изученное укреплять повторениями и упражнениями.

В соответствии со своими педагогическими воззрениями Эйлер рассматривает в своем проекте и школьные учебники, которые должны включать все необходимые сведения, требующиеся в данном классе. Учебники должны соответствовать возрасту и развитию учащихся и не должны быть перегружены деталями, которые только отвлекают учеников. В младших классах Эйлер рекомендует образцовый учебник известного чешского педагога Яна Коменского «Видимый мир в картинках» [20][6], построенный на основе наглядности. Пользуясь выдвинутыми педагогическими положениями, Эйлер написал и свое руководство к арифметике. В предисловии к этой книге он писал, что в большинстве учебников не заботятся о «тех способах, через которые счисление легче и короче учинить можно, но тем только удовольствуются, чтоб о всем основание в коротких словах показано было». В своем учебнике Эйлер действительно соединил простоту изложения правил и действий с основательностью объяснений.

Яркие, содержательные педагогические мысли Эйлера нашли отражение в уставе, составленном в 1738 г. для улучшения состояния гимназии [21]. Этот устав, однако, не получил практического применения, и Академическая гимназия была преобразована и улучшена только после передачи ее в ведение Ломоносова [19, стр. 437—610].

ПРИЛОЖЕНИЕ

НАЧАЛО ДОКЛАДНОЙ ЗАПИСКИ Л. ЭЙЛЕРА [17, л. 1.]

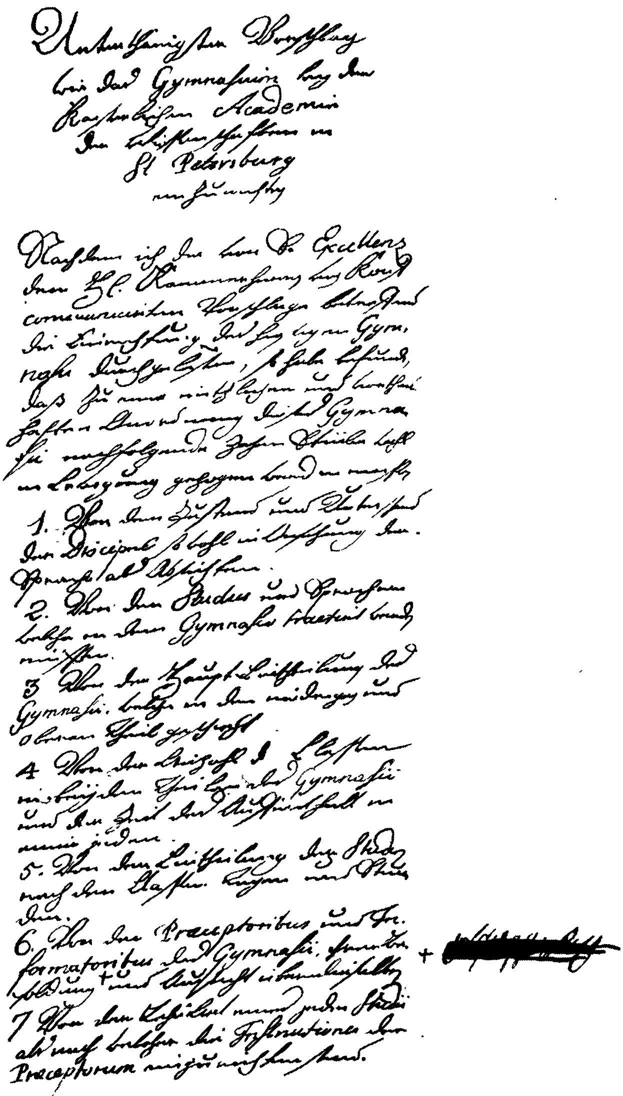
Всенижайшее предложение об устройстве гимназии при императорской Академии наук в С.-Петербурге

После того, как я прочел сообщенные мне его превосходительством господином камергером Корфом предложения относительно организации здешней гимназии, я нашел, что для того, чтобы устройство гимназии было наиболее выгодным, необходимо принять во внимание и подвергнуть рассмотрению десять следующих пунктов.

1. О состоянии и различии учеников как в отношении языка, так и цели обучения.
2. Об учебных предметах и языках, которые следует преподавать в гимназиях.
3. О главном делении гимназии на низшую и высшую часть.
4. О числе классов в общих частях гимназии и о времени пребывания в каждом классе.
5. О делении предметов по классам, дням и часам.

---

[6] Классический учебник латинского языка, основанный на принципе наглядности. Книга являлась как бы «энциклопедией видимого мира», написанной для детей. В качестве школьного пособия эту книгу рекомендовал и Ломоносов в своем регламенте Академической гимназии. Русский перевод под названием «Видимый свет» был издан в 1768 г.



Unterthänigster Vorschlag
wie das Gymnasium bey der
Kayserlichen Academie
der Wissenschaften in
St Petersburg
einzurichten

Nachdem ich die von Ew. Excellenz
dem Hl. Kammerherrn v. Korff
communicirten Vorschläge betreffend
die Einrichtung des hiesigen Gym-
nasii durchgelesen, so habe befunden,
daß zu einer nützlichen und vortheil-
haften Anordnung dieses Gymna-
sii nachfolgende Haupt Stücke [illegible]
in Erwägung gezogen werden müssen

1. Von dem Zustand und Unterschied
der Discipeln sowohl in Absicht der
Sprachen als Wissenschaften.
2. Von den Studiis und Sprachen
welche in dem Gymnasio tractiret werden
müssen.
3. Von der Haupt Eintheilung des
Gymnasii, welche in den niedrigen und
obern Theil geschieht
4. Von der Anzahl der Classen
in beyden Theilen des Gymnasii
und der Zeit des Aufenthalts in
einer jeden.
5. Von der Eintheilung der Studiorum
nach den Classen [illegible]
[illegible].
6. Von den Praeceptoribus und In-
formatoribus des Gymnasii, ihrer
Bestellung + und Aufsicht über dieselben. + [illegible]
7. Von dem [illegible] von jeden Studio
als auch welcher die Instructiones der
Praeceptorum einzurichten sind.

Первая страница докладной записки Леонарда Эйлера об устройстве Академической гимназии, 1737 г.

6. Об учителях и наставниках гимназии, их жаловании и контроле над ними.

7. О методе преподавания каждого предмета, в соответствии с которым должны быть составлены инструкции для учителей.

8. О принятии новых учеников, о публичных экзаменах и о продвижении учеников.

9. О долге и обязанности учеников, а также о школьной дисциплине.

10. О внешнем положении гимназии, а именно о здании, устройстве комнат и их оборудовании.

В этих пунктах, как кажется, содержится все то, что необходимо принять во внимание при организации гимназии. Поэтому если каждый из этих моментов будет подвергнут основательному рассмотрению, и если будут отданы соответствующие распоряжения, то можно не сомневаться, что таким образом будет получен полный проект организации гимназии.

Чтобы выполнить данное мне поручение, я подвергну разбору каждый из вышеприведенных пунктов и предложу мои мнения суждению организованной по высочайшему повелению комиссии.

Литература

1. Архив АН СССР, разряд I, оп. 70, № 23
2. Там же, ф. 3, оп. 1, № 791
3. А. П. Юшкевич, Эйлер и русская математика в XVIII в., Труды Ин-та истории естествознания, 3, 1949
4. В. И. Смирнов и Е. С. Кулябко, Михаил Софронов, русский математик середины XVIII века, М.—Л , 1954
5. Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 40
6. Протоколы заседаний Конференции имп. Академии наук, т. IV, СПб., 1911
7. Einleitung zur Rechenkunst, zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschafften in St.-Petersburg, 1738, 1740 (2 Theile)
8. Архив АН СССР, ф. 3, оп. 1, № 317
9. Протоколы заседаний Конференции имп. Академии наук, т. II, СПб., 1897
10. Архив АН СССР, ф. 3, оп. 1, № 1
11. Архив Н СССР, ф. 3, оп. 12, № 6
12. Генеральный список учеников, принятых в 1726 г. в Гимназию Санкт-Петербургской Академии наук по 1765 год, Архив АН СССР, разряд I, оп. 70, № 2
13. Материалы для истории императорской Академии наук, т. II, СПб., 1886
14. Архив АН СССР, разряд I, оп. 70, № 2
15. Архив АН СССР, ф. 3, оп. 1, № 24
16. Материалы для истории императорской Академии наук, т. III, СПб., 1886
17. Архив АН СССР, разряд I, оп. 70, № 23
18. Архив АН СССР, ф. 3, оп. 1, № 460
19. М. В. Ломоносов, Полное собрание сочинений, т. IX, М.— Л., 1955
20. Видимый мир в картинках (Orbis pictus), 1658
21. Reglement des Gymnasii bei der Kaiserlichen Academie der Wissenschafften in St Petersburg, Архив АН СССР, разряд I, оп. 70, № 8

E. S. KULJABKO

DIE PÄDAGOGISCHEN ANSCHAUUNGEN L. EULERS

(Zusammenfassung)

Im Archiv der Akademie der Wissenschaften der UdSSR wird ein noch unveröffentlichtes Manuskript L. Eulers aufbewahrt, betitelt «Unterthänigster Vorschlag wie das Gymnasium bey der Kaiserlichen Academie der Wissenschaften in St. Petersburg einzurichten». Dieses Manuskript wurde von L. Euler 1737 einer Komission überreicht, welche auf Befehl des Präsidenten der Akademie J. A. Korff zum Zweck der Reform des akademischen Gymnasiums ernannt worden war. Euler's Projekt ist sehr interessant vom Standpunkt der pädagogischen Ansichten des großen Gelehrten, welcher für die Bildung der russischen Jugend sehr besorgt war.

Die Hauptaufgabe des Gymnasiums nach Eulers Idee bestand darin, für die Universität Studenten vorzubereiten, und der ganze Lehrplan sollte demnach einen diesem Zweck angepaßten Charakter erhalten. Euler hebt die Notwendigkeit hervor alle Jünglinge ohne Standesunterschied zu unterrichten, da alle Menschen bildungsfähig sind; das wäre auch für den Staat von Nutzen. Von einer mittleren Begabung der Schüler ausgehend, schlägt er vor, einen 10-jährigen Kursus im Gymnasium einzuführen, wobei der Aufenthalt in einer Klasse 2 Jahre dauern soll. Gleichzeitig sieht er aber für begabte Schüler die Möglichkeit vor, ein jedes Jahr aus einer Klasse in die nächste überzugehen, so daß sie ihre Bildung im Gymnasium in 5 Jahren vollenden können.

Euler führt in das Gymnasialprogramm allgemeine Disziplinen in großem Umfange ein, und ist der Ansicht, daß der Gymnasialunterricht keinen philologischen Einschlag haben darf, denn das wäre für die anderen wichtigen Lehrfächer nachteilig.

Höchst interessant ist es, daß Euler in dem Lehrplan auch Methoden vorschlägt, die Gegenstände am leichtesten und schnellsten zu erlernen. Er stellt dem akademischen Gymnasium die Aufgabe, den Unterricht nach neuen Prinzipien zu führen, leicht, verständlich und anschaulich zu lehren, das Lernen mit den einfachsten Grundbegriffen anzufangen und nur allmählich zu einem komplizierteren Material überzugehen, die Kenntnisse durch Wiederholen und durch Übungen zu festigen. Auf Grund der von ihm geäußerten pädagogischen Ansichten hat Euler auch sein Lehrbuch der Arithmetik geschrieben.

Eulers hervorragende, inhaltsreiche pädagogische Ideen haben ihren Platz in dem Reglament gefunden, welches 1738 für das akademische Gymnasium verfaßt wurde.

М. Е. ГЛИНКА

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

(Опыт иконографии)

Многочисленные портреты Эйлера создавались как при его жизни, так и в последующие годы. Однако до сих пор на русском языке нет специального исследования о его изображениях. Только в общих работах по русской иконографии Д. А. Ровинского [1] и А. А. Васильчикова [2, стр. 366—369] есть подробное перечисление и описание его гравированных портретов. Некоторые данные о скульптурных портретах Эйлера имеются у П. П. Пекарского [3]. Из зарубежных изданий нам известны сообщения шведского ученого Энестрёма [4, стр. 372—374] и некоторые другие. Наиболее подробные и точные сведения почти о всей существующей иконографии Эйлера имеются в специальной работе Г. Тирша [5,6].

Настоящая статья основана как на указанных работах, так и на составленном автором анализе портретов ученого, хранящихся в русских собраниях.

Большинство изображений Эйлера принадлежит кисти или резцу его соотечественников, художников из Базеля, однако самым ранним из известных нам портретов является портрет, сделанный в Петербурге в 1737 г. Этот поясной портрет не сохранился до наших дней, но мы знаем о нем по гравюре, описанной у Ровинского (см. стр. 16). Автор этого портрета — художник И.-Г. Бруккер[1], работавший в России около двух лет.

На гравюре (исполненной в черной манере), заключенной в простую рамку в виде оконного наличника, тридцатилетний Эйлер изображен в парике, расстегнутом камзоле и кафтане, с плащем, спускающимся крупными складками с правого плеча. Высокий лоб, широко открытые глаза под густыми бровями и слегка улыбающийся рот создают, несмотря на некоторую условность в рисунке, живой и выразительный образ.

[1] Иоганн-Георг Бруккер (Brucker)—художник из Голштинии. Принят учителем рисования в Гимназию при Петербургской академии наук в октябре 1735 г. с обязательством делать рисунки по заданию профессоров анатомии. Уволенный в апреле 1737 г. из Академии, уехал на родину в Киль [7].

Под гравюрой имеется подпись: «Leonardus Euler qui cognitione sua naturae arcana reclusit. (J. de St.) Brucker pinxit. Petropoli. 1737». [«Леонард Эйлер, который познанием своим раскрыл тайны природы). (Я. д. Шт.) (Писал Бруккер в Петербурге 1737»].

Автором гравюры был Василий Соколов [2], работавший в 1760-х годах в Академии наук под руководством гравера Иоганна Штенглина. В Отделе эстампов Государственной публичной библиотеки им. М. Е. Салтыкова-Щедрина в Ленинграде имеется экземпляр этой гравюры, на котором к выгравированным справа внизу инициалам J. de St. приписано чернилами рукой профессора элоквенции Якова Штелина [3]: «In honorem amici [J. de St.] ehlin» («В честь друга. Я. де Штелин») и ниже: «Sokoloff fecit» (сделал Соколов), а под гравюрой написано карандашом «гридоровалъ Василей Соколовъ». К этой надписи можно отнестись с полным доверием. Работая в продолжение многих лет в Академии вместе с Эйлером, Штелин мог считать себя его другом. Являясь с 1765 г. конференц-секретарем, он активно участвовал в вызове Эйлера вторично в Россию. В последние годы жизни ученого он навещал его, а 11 сентября 1783 г. на первом после смерти Эйлера Академическом собрании сказал речь о покойном академике [8, стр. 696—697; 9, стр. 36—45]. И вторая приписка чернилами не вызывает сомнения, так как Штелин в 1757 г. был назначен директором «всех художеств» при Академии наук, и работавшие в России граверы и их произведения были, естественно, ему хорошо известны.

13 октября 1741 г. в своем письме к правителю академической Канцелярии Шумахеру Эйлер сообщал, что находящийся в его доме портрет он передает Академии наук [10, л. 527]. Возможно, что здесь речь идет о работе Бруккера. Но имеется еще одно упоминание о портрете Эйлера этого периода. В письме Даниила Бернулли к Эйлеру от 29.III 1738 г. сообщалось: «...Картины мы наконец получили. Присланное для передачи я немедленно передал Вашему отцу. Вашего высокородия и Вашей супруги портреты выглядят очень похожими. Портретом е. и. в. я тоже весьма доволен...» [11, л. 31]. Остается невыясненным, который из этих двух портретов принадлежит кисти Бруккера. Возможно, что при вторичном приезде в Россию Эйлер привез с собой полученный от отца свой портрет

---

[2] Василий Соколов — гравер черной манерой, ученик И. Штенглина. Работал при Аадемии наук в 1760-х годах. Гравировал главным образом исторические портреты.

[3] Яков Штелин (1709—1785). Работал при Академии наук с 1735 по 1785 гг. Им были выписаны многие иностранные художники для обучения русских учеников. Оставил огромное количество записок и заметок о художествах в России XVIII в.

и именно его гравировал Соколов. Во всяком случае, эта гравюра Соколова, воспроизводящая портрет, написанный Бруккером маслом, представляет особую ценность как единственное сохранившееся изображение Эйлера, дающее нам представление о внешнем облике великого ученого в годы его первого пребывания в России.

Известны три портрета Эйлера, сделанные в берлинский период его жизни (1741—1766) швейцарским портретистом Эмануэлем Хандманом[4], пользовавшимся большой известностью не только у себя на родине, но и в Германии и в других соседних странах. Наиболее ранним был портрет, исполненный пастелью в 1753 г.; он находится в настоящее время в Базеле, в «Открытом Художественном собрании». Цветная репродукция с него помещена в VIII томе книги «Leonhardi Euleri Opera omnia», Ser. I, t. VIII, Leipzig — Berlin, 1922. На этой пастели Эйлер изображен в домашнем голубом с черными полосами шелковом халате и белой рубашке. Голова обернута шелковым платком. Хандман живо передал характерные черты лица Эйлера, запечатлев ясный взгляд голубого здорового глаза на освещенной, левой стороне лица, четко выписав характерные складки кожи на лбу между бровей и у углов сжатых в полуулыбке губ. Полузакрытый правый больной глаз (Эйлер не видел им с конца 30-х годов) не нарушает общего впечатления жизненной энергии, которое производит лицо ученого (см. стр. 4).

Это погрудное изображение послужило как бы эскизом к следующим двум портретам, написанным маслом тем же художником в 1756 г. Один из них, находящийся в Базельском университете, поясной (см. стр. 17), размером 60×87 см, изображает Эйлера в парике, темном шелковом халате, из-под рукавов которого выпущены легкие манжеты. Ученый сидит перед столом с лежащей на нем книгой, придерживая правой рукой раскрытые страницы. Поворот головы, общий рисунок и выражение лица очень близки к пастельному портрету 1753 г.[5]

Другим написанным в 1756 г. (см. стр. 80) живописным изображением Эйлера является большой поколенный портрет (м/х, 138 × 104 см), исполненный Хандманом по двум предыдущим работам. Это одно из луч-

---

[4] Эмануэль Хандман (Handmann, 1718—1781)—родился и умер в Базеле. Художественное образование получил в Париже, у Ресту-младшего (1692—1768), а затем в Италии. Большую часть жизни провел в Берне, много путешествовал по Германии и работал в Берлине.

[5] Как сообщает в своей работе Тирш, на старой раме этого портрета имеется надпись «Leonh. Euler, Em. Handmann pinx. Berol. 1756. Ex dono amplissimi Senatus Basil. 1785» («Леонард Эйлер. Писал Эмануэль Хандман. Берлин. 1756. Из дара высокочтимого Сената Базеля 1785»).

ших его произведений; находится в настоящее время в Мюнхенском национальном музее. Сохраняя поворот головы и рисунок лица, художник дает новую, более богатую композицию. Ученый сидит с пером в руке, опираясь на черный с бронзовой отделкой стол. С большим мастерством переданы тяжелые складки шелкового халата, темно-зеленые полосы которого эффектно оттеняют белизну жабо и манжет. Отвороты рукавов и воротник халата темно-синие. На заднем плане, на полу, стоит светло-голубой небесный глобус, а за оливковыми драпировками видны желтые переплеты книг и справа — светлая ниша окна.

Благодаря подробным сведениям, имеющимся в специальной работе Тирша [12] и любезно присланной из Мюнхена великолепной репродукции портрета с подробной его аннотацией [13], история портрета нам стала известна во всех своих любопытных подробностях.

После смерти Эйлера в 1783 г. портрет перешел к его старшему сыну, математику Иоганну-Альбрехту Эйлеру, ученому секретарю Петербургской академии наук. Сыновья Иоганна-Альбрехта в начале XIX в. уехали в Германию и увезли портрет с собой. После разорения одного из внуков ученого портрет был продан с аукциона в 1840 г. старьевщице из Равенсбурга. Новая владелица не придавала ему большой цены и использовала этот ценнейший портрет для прикрытия других вещей в своем складе.

Любитель и коллекционер картин, гравюр и книг, главный советник строительства в Штутгарте Г.-В.-Х. Бюллер случайно обнаружил портрет у старьевщицы и, опознав по имеющемуся в своем собрании гравированному портрету Эйлера работы Мехеля (см. о нем ниже), приобрел его и отдал в реставрацию.

После смерти Бюллера портрет перешел к его родственнику архитектору У. Майру из Нейнбурга в Вюртемберге. В 1921 г. сын последнего, Э. Майр, передал его, в свою очередь, внучатной племяннице Бюллера — Анне Бем. Узнав о существовании портрета, Тирш в 1930 г. ездил в Нейнбург к Бем, где имел возможность подробно осмотреть портрет. Несмотря на тщательное изучение портрета ему не удалось обнаружить подписи Хандмана. Возможно, что она имелась на обратной стороне холста, а затем была скрыта при дублировке портрета. Но и без наличия подписи авторство художника было очевидно. Окончательно оно было установлено Тиршем при сравнении с гравюрой Штенглина, о которой будет сказано ниже.

Этот прекрасный портрет примерно в 1930 г. был приобретен Национальным музеем в Мюнхене.

Во второй половине XIX в. Петербургская академия, не имея никаких портретов ученого, кроме гравированных и мраморного бюста, заказала в Базеле копию с поясного портрета работы Хандмана. Эта копия, сделанная неизвестным художником, была передана в 1889 г. Пулковской обсерватории в день ее 50-летнего юбилея. Судьба копии неизвестна.

В Москве в одном из залов Президиума Академии наук СССР находится портрет Эйлера (см. стр. 81), написанный маслом и являющийся, несомненно, копией одной из работ Хандмана или гравюр с нее; происхождение портрета не установлено. На этом портрете художник сделал оба глаза одинаково ясными и открытыми. Черты лица Эйлера здесь очень близки к гравюре, сделанной Штенглиным с поколенного портрета 1756 г., так же, как и вся композиция фигуры ученого, одетого не в полосатый, а в темный халат.

Мировая слава Эйлера, естественно, вызвала широкий интерес к его изображениям. В XVIII в. при отсутствии других способов репродуцирования гравюра являлась единственным средством размножения произведений живописи. На протяжении конца XVIII в. и начала XIX в. в Швейцарии, Германии, России и в ряде других стран был выполнен ряд гравированных портретов ученого; в первую очередь рассмотрим гравюры, сделанные с работы Хандмана.

Гравюра резцом Мехеля[6] (см. стр. 144) передает поясной хандмановский портрет 1756 г. в зеркальном изображении. Под портретом помещены глобус, зрительная труба, чертежные инструменты и листы бумаги. Ниже, на картуше, герб Эйлера — лань[7] и надпись на латинском языке: «Леонард Эйлер. Родился в Базеле. 1707. Умер в Петербурге. 1783». Под гравюрой имеется другая надпись также на латинском языке: «По рукописному оригиналу художника Хандмана из Базеля, в честь величайшего мужа по приказу высокого базельского магистрата, установленному в Публичной библиотеке. Гравировал и отечеству посвятил Христиан Мехель из Базеля».

Эта гравюра была заказана в 1786 г. швейцарскому художнику Мехелю

[6] Христиан Мехель (Mechel)—швейцарский гравер резцом. Родился в Базеле в 1737 г., ум. в Берлине в 1818 г. Учился в Нюрнберге и Аусбурге. В 1758—1764 гг. имел в Париже свое художественное ателье, затем, вернувшись в Базель, открыл граверную мастерскую и вел торговлю художественными произведениями. В начале 1780г. работал в Вене. Гравюра Мехеля у Ровинского указана под № 7.

[7] Герб рода Эйлер из Базеля представляет собой: в лазоревом поле лань натурального цвета. Нашлемник — сова натурального цвета, прямо, с распущенными крыльями. Намет справа золотой и лазоревый, слева — золотой и червленный [14, стр. 633].

для базельского издания «Похвальной речи Леонарду Эйлеру», составленной в 1783 г. Николаем Фусом и прочитанной им в Академическом собрании в Петербурге 23 октября того же года.

Гравюра Мехеля сильно отличается от оригинала. Здесь черты лица Эйлера суше, резче обозначены складки и прищурены оба глаза. Репродукция гравюры помещена в I томе книги «Opera omnia» издания 1911 г.

Тирш сообщает, что с годами Мехель все больше внимания уделял коммерческим делам, а заказы на гравюры передавал ученикам и помощникам. Немецкие исследователи Х. Фольмер и Р. Ригенбах пришли к выводу, что автором гравированного портрета Эйлера был не Мехель, а его помощник — Бартоломей Хюбнер[8]. По-видимому Мехель позволял себе подписывать как эту, так и иные работы, выполненные другими граверами [6, стр. 237].

Ближе к оригиналу Хандмана стоит другая гравюра — Липса[9], хотя и здесь портрет дан в зеркальном изображении, вследствие чего вместо правого глаза больным представлен левый. Кроме отсутствия надписи на цоколе и фигуры единорога вместо лани[10] на щите, гравюра внешне повторяет предыдущую. Но выражение лица, благодаря открытому здоровому глазу под дугообразной бровью, другое, более свойственное Эйлеру, и, как говорит Тирш, «заслуживает предпочтения перед до сих пор всеми предпочитаемой гравюрой Мехеля» [6, стр. 237]. Над этой гравюрой Липс работал, так же как и Мехель-Хюбнер, около 1786 г.

На подобной же гравюре Кука[11], опубликованной в Лондоне в 1787 г., на цоколе отсутствует герб и имеется надпись латинскими буквами: «Леонард Эйлер». Эту гравюру нельзя назвать удачной. Лицо производит совершенно безжизненное впечатление, так как оба глаза тусклые под одинаково прикрытыми веками. На гравюре, внизу, подписи: «E. Handmann pinx», «T. Cook sculp.» («Э. Хандман писал», «Т. Кук гравировал»).

Аналогичный портрет гравирован Адамом[12] для фронтисписа

---

[8] Бартоломей Хюбнер (Hübner)—гравер резцом. В 1776—1795 гг. работал у Мехеля в Базеле.

[9] Иоганн-Генрих Липс (Lips, 1758—1817)—гравер резцом. Работал в Цюрихе и Веймаре. Эта гравюра не упоминается ни у Ровинского, ни у Васильчикова.

[10] Золотой единорог в лазоревом поле был гербом другой ветви рода Эйлер [14, стр. 639].

[11] Томас Кук (Cook, 1744—1818)—английский гравер резцом. Эта гравюра указана у Ровинского под № 6.

[12] Адам (Adam)—французский гравер нач. XIX в. у Ровинского эта гравюра указана под № 5.

к сочинению Эйлера «Письма к одной немецкой принцессе»[15], изданному в Париже в 1812 г. Адам, по сравнению с гравюрой Мехеля, изменил выражение лица Эйлера, подняв бровь над более открытым правым глазом. На нижней части рамы, под овалом, имеется другая надпись на французском языке: «Леонард Эйлер. Родился в Базеле 15 апреля 1707. Умер в Петербурге 7 сентября 1783». На щите герба, так же как у Липса, вместо лани изображен единорог. Под гравюрой справа, подпись: «Gravé par Adam» («Гравировал Адам»).

Гравюра базельского художника Вебера[13], сделанная в 1851 г. (см. стр. 145), наиболее точно воспроизводит портрет Хандмана. Под гравюрой надпись на латинском языке: «Писал Эм. Хандман из Базеля. Гравировал Фрид. Вебер из Базеля». И ниже: «Этот портрет Леонарда Эйлера из Базеля выгравирован на меди, по поручению благодарной городской общины. 1851 г.» Эта гравюра помещена в виде репродукции фронтисписом в «Opera omnia» издания 1912 г.

Напоминаем, что все описанные выше гравюры являются воспроизведениями поясного портрета работы Хандмана.

Второй портрет работы того же художника (поколенный) Эйлер привез, по-видимому, из Германии, так как в 1768 г. он был выгравирован в Петербурге академическим художником Иоганном Штенглином[14]. О Штенглине мы уже упоминали выше как об учителе В. Соколова, исполнившего также в 1760-х годах гравюру с наиболее раннего портрета Эйлера работы Бруккера.

Гравюра с поколенного портрета работы Хандмана (см. стр. 224) технически хорошо выполнена в обычной для Штенглина черной манере. Под гравюрой надписи на латинском языке «Леонард Эйлер, родился в Базеле в 1707 г.», ниже слева: «Писал Хандман. Берлин 1756 » и справа: «Гравировал И. Штенглин. Петербург 1768 г.». К сожалению, и этому граверу (как и Мехелю) не удалось передать характер лица Эйлера. Он изменил линию носа, расширил скулы, создав этим иной, менее одухотворенный облик ученого, чем на портрете Хандмана. Фактура ткани, детали обстановки и освещение исполнены точно и четко, с присущим

[13] Фридрих Вебер (Weber, 1813—1882), родился в Лиестале близ Базеля, умер в Базеле. Гравировал на меди и стали. Эта гравюра у Ровинского указана под № 4.

[14] Иоганн Штенглин (Stenglin)—гравер черной манерой. Родился в Данциге. Приглашен в Петербург Я. Штелиным по рекомендации Гриммеля. С 1741 по 1744 г. состоял при Академии наук. С 1750 г. работал в Москве. В 1765 г. возвратился в Петербург и снова исполнял заказы Академии. Им было выгравировано большое количество исторических портретов. Гравюра указана у Ровинского под № 3.

Штенглину техническим мастерством. Это наиболее распространенная гравюра.

К гравированным портретам, по всей видимости также имевшим своим источником живописные оригиналы Хандмана, относится ряд гравюр, сделанных в XIX в. Из числа их нам известна гравюра Ландона [15], исполненная очерком в начале XIX в.; по композиции она ближе всего к гравюре работы Мехеля и также дана в обратном изображении. Выражение лица с прищуренными глазами несколько высокомерное.

В книге Л. Фитье [16, стр. 337] помещен гравированный на дереве портрет Эйлера работы М. Руссо [16]. Совершенно очевидно, что он сделан по оригиналу одного из хандмановских портретов. В художественном отношении это мало удачная работа. Судя по обрамлению, гравюра датируется временем издания книги. На гравюре слева внизу подпись: «M. Rousseau».

Гравированный на дереве портрет Эйлера, исполнен Ф. Унвельманом по рисунку Менцеля[17]. Он является виньеткой к восьмой главе сочинений Фридриха II, которые иллюстрировал Менцель в 1843—49 гг. [17]. Виньетка изображает рядом с Эйлером портрет президента Берлинской академии Мопертюи.

Во второй петербургский период жизни Эйлера (1766—1783) был написан еще один его портрет с натуры [18] (см. стр. 225). Он исполнен художником-портретистом Жозефом Дарбесом [19], итальянцем по происхождению, работавшим в Курляндии и России с 1773 по 1785 гг.

На погрудном портрете работы Дарбеса, находящемся в настоящее время в Музее истории и искусств в Женеве (м/х, 62×45,5 см), Эйлер изображен уже в старости. Он одет в светло-коричневый кафтан с меховым

---

[15] Шарль-П. Ландон (1760—1826)—французский гравер, художник, историк искусства. В работе Тирша [12] есть сообщение о мнении некоторых немецких исследователей, что гравюра Ландона сделана одним из его учеников и изображает Эйлера-сына [12, стр. 240].

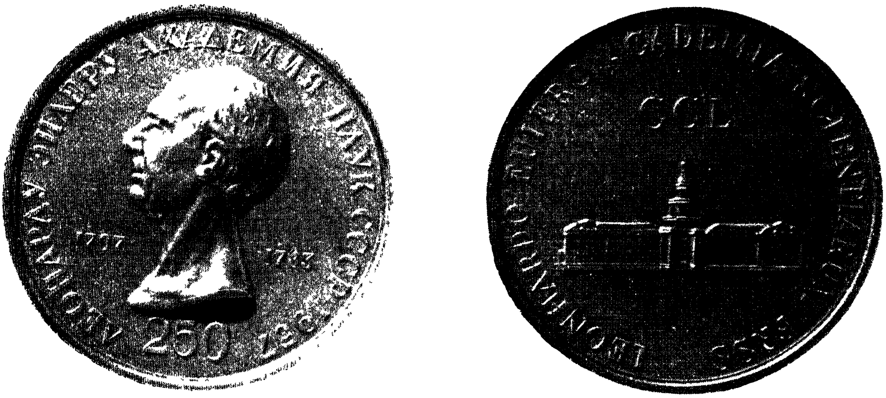
[16] Сведений о М. Руссо мы не нашли.

[17] Адольф Менцель (Menzel, 1815—1905), родился в Бреславле. Выдающийся немецкий художник-реалист главным образом исторической живописи. Почетный член Петербургской академии художеств.

[18] Портрет репродуцирован в книге «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle». St.-Pétersbourg, 1843, стр. XXV.

[19] Жозеф-Франсуа-Август Дарбес (Darbès, 1747—1810)— родился в Гамбурге. Получил образование в Копенгагене. В России Дарбес пользовался известной популярностью, исполняя заказы при русском дворе. Его специальностью были миниатюрные портреты, которые он рисовал серебряным карандашом и сангиной по пергаменту.

Гравюра С. Кютнера 1780 г. с портрета работы Ж. Дарбеса



Медаль Академии наук СССР в честь 250-летия со дня рождения Л. Эйлера

Медаль Германской Академии наук в Берлине в честь 250-летия со дня рождения Л. Эйлера воротником. Шея обернута фуляром, на голове надета теплая шапка, из под которой виднеются пряди седых волос. Правый глаз едва заметен в тени, а левый, к тому времени также больной, пристально обращен на зрителя. Высокий лоб, крупный нос, плотно сжатые губы и глубокие складки на лице и под подбородком очень лаконично и выразительно переданы художником, создавая убедительный образ старого ученого. Как сообщает Пекарский, академик Николай Фус, хорошо знавший Эйлера, находил, что этот портрет имел наибольшее сходство с оригиналом [3, стр. 301].

Портрет не подписан автором, но на задней стороне полотна имеется надпись: «Портрет великого Эйлера, написанный в Петербурге Дарбесом». Точная дата его создания неизвестна, но можно считать, что он написан в конце 1770-х годов. Иоганн Бернулли (внук И. Бернулли-старшего), совершивший путешествие в Россию в 1777—1778 гг., видел в Петербурге, как великий ученый позировал какому-то художнику, писавшему маслом его портрет. Возвращаясь из России, Бернулли посетил в Митаве гравера Кютнера, который сообщил ему, что собирается гравировать этот портрет Эйлера [18].

Свое намерение Кютнер[20] исполнил в 1780 г., сделав гравюру резцом в овале, увенчанном лавровой гирляндой (см. стр. 576). Эта гравюра почти так же известна, как гравюры Штенглина и Мехеля. Внизу, на картуше имеется надпись: «Leonhard Euler», ниже: «J. Darbes pinxit» и «S. Kütner sc. Mitau 1780». Передавая довольно точно в деталях живописный оригинал, Кютнер резче обозначил складки на лице Эйлера и придал ему более сухое выражение.

В конце XVIII в. известный мастер Франческо Бартолоцци[21] награвировал тот же портрет характерной для него пунктирной техникой. Лицо Эйлера на гравюре Бартолоцци, с заостренным профилем и глубокими тенями, так же, как и на гравюре Кютнера, лишено той подкупающей мягкости в передаче старческого лица ученого, которая присуща оригиналу Дарбеса. Над овалом гравюры имеются надписи: «Darbes pinxit» и «F. Bartalozzi sc.».

В противоположность Бартолоцци, на гравюре швейцарского мастера

---

[20] Самуил-Готтлиб Кютнер (Kütner, 1747—1828)—ученик Баузе в Лейпциге. Талантливый гравер, преподаватель рисования в Митаве. Эта гравюра у Ровинского указана под № 9.

[21] Франческо Бартолоцци (Bartolozzi, 1727—1815), родился в Италии, работал в Лондоне, где усвоил стиль английских граверов. Гравюра указана у Ровинского под № 13.

Генриха Пфенингера[22], выполненной пунктиром и резцом, лицо Эйлера, с тяжелым взглядом под нависшим веком, производит впечатление преувеличенной одутловатости. Эта гравюра учтена у Ровинского под № 10 с указанием на подпись к ней: «H. Pf. fec.» («Исполнил Г. Пф.»).

Совсем иное впечатление производит гравюра Риделя[23] с подписью под гравюрой «C. T. Riedel sc. Lips.» («Гравировал Ридель в Лейпциге»), выполненная в конце XVIII в.[24] Не будучи выдающимся гравером, Ридель, однако, очень тщательно работал пунктиром и довольно верно передал черты Эйлера. Его гравюра, по сравнению с предыдущими гравюрами, ближе к оригиналу Дарбеса.

Известны еще три гравированных портрета Эйлера с работы Дарбеса. Один из них Дархова[25], работавшего в Германии в конце XVIII в., исполненный в Берлине довольно слабой техникой в 1782 г. Другой — американского гравера XIX в. Д. Чепмена[26]. На последней гравюре под овалом, имеется виньетка, на которой изображен слепой Эйлер, сидящий за столом и диктующий ученику. Под гравюрой надпись: «J. Chapman sculpt.» Наконец, третий портрет — в овале пунктиром — был исполнен русским гравером Бекетовской школы Василием Храмцовым в 1820-х годах.

Большое количество однотипных, но совершенно различных по сходству и манере гравированных и литографированных портретов Эйлера с оригинала Дарбеса несомненно указывает на популярность этого одного из лучших изображений великого ученого. Один такой литографированный портрет сделан во Франции в первой половине XIX в. в литографии Сандрие, по рисунку художницы Формантэн. Последняя, в свою очередь, рисовала его по работе художницы Морис с портрета Дарбеса. Эта литография неудачна. Весь рисунок упрощен и искажен, лицо сделано толстым, с двойным подбородком, кончик носа вытянут, а слепой правый глаз обозначен одной чертой. Под портретом подписи: «d'après M^{lle} Morice. de M^{lle} Formentin». и «Imp. lith. Th. Sendrier» («с [работы] м-ль Морис, м-ль Формантэн», «в литографии Сандрие»).

---

[22] Генрих Пфенингер (Pfeninger,) родился в 1749 г. в Стефа, умер в 1815 г. в Цюрихе. Гравер и художник-миниатюрист маслом. Учитель Мехеля в Базеле.

[23] К.- Т. Ридель (Riedel, род. 1780)—гравер пунктиром из Лейпцига. Эта гравюра у Ровинского указана под № 15.

[24] Гравированный портрет работы Риделя был издан в Париже в книге J. B o y e r, Histoire des mathématiques, Paris, 1900, стр. 173.

[25] Гравюра Дархова (C. Darchow) у Ровинского указана под № 12.

[26] Д. Чепмен (Chapman, 1805—1889), в 1878 г. жил в Риме. Ровинский указывает на публикацию портрета Вилькинсом в Лондоне в «Oeconomische Encyclopädie».

Другая литография, сделанная в Брюсселе в 1839 г. в литографии М. Мадона [27] с оригинала Хандмана. Она помещена фронтисписом в издании сочинений Эйлера 1839 г. [19].

Тирш сообщает еще об одном живописном портрете Эйлера, находящемся в городской библиотеке Берна (в овале, м/х, 73×62 см). Профессор Отто Фишер, одно время заведывавший Открытым Художественным собранием в Базеле, высказал предположение, что это работа базельского художника И.-Р. Хубера [28]. На раме портрета имеется дата—1776 г.

О том, что на этом портрете изображен именно Эйлер, говорит запись на латинском языке в старой дарственной книге, которую Тирш обнаружил в архиве Берна: «Христиан Мехель из Базеля, приписанный к высочайшему Сенату, придворный гравер сиятельного курфюрста Перальцского, член имп. Венской Академии, убранство этой Библиотеки пополнил портретом Леонарда Эйлера, профессора математики в Петербурге, 1777 г.» Как было указано выше, Христиан Мехель занимался продажей художественных произведений, и, вероятно, имея в своем распоряжении данный портрет Эйлера, передал его библиотеке Берна.

Первым скульптурным портретом Эйлера был профильный барельеф работы русского скульптора Павлова [29], хранящийся в собрании Музея М. В. Ломоносова в Ленинграде (см. стр. 352). На овальном барельефе, отлитом в гипсе и тонированном, размером 50×41 см, голова Эйлера дана в профиль вправо. Но не только это отличает его от широко известного барельефа Рашетта, о котором речь будет ниже. Здесь лицо Эйлера моложе, острее и суше вылеплен профиль, не так резки и глубоки складки кожи. Густые еще волосы открывают высокий лоб.

В конце 1770-х годов Павловым были выполнены некоторые скульптурные работы для отделки внутренних помещений пострадавшей при пожаре 1747 г. Кунсткамеры [20]. Как руководившему в качестве архи-

---

[27] Профессор рисования в Военной школе в Брюсселе.

[28] Иоганн-Рудольф Хубер (Huber) младший (ум. 1779 г.), в 1745—1748 гг. учился у своего дяди Хубера-старшего. С 1759 г. принят в цех. В 1761 г. состоял в Большом совете цеха. В музее Базеля имеются еще два портретных этюда его работы.

[29] Михаил Иванович Павлов (род. 1733), работал в Академии наук с 1766 по 1784 г. Образование получил в Рисовальных палатах Академии наук. С 1747 г. обучался у Гриммеля, а с 1745 г. у резных дел мастера Дунклера. Получив звание подмастерья, в 1758—1761 гг. находился для усовершенствования во Франции и Италии. С 1766 г исполнял обязанности архитектора при Академии наук, а в 1778 г. произведен в архитекторы.

тектора восстановительными работами, ему было поручено 4 ноября 1777 г. «...в Библиотеке, в парадных сенях для барельефов четыре места выбить...» [21, л. 312]. В числе этих четырех барельефов был помещен и портрет Эйлера, выполненный Павловым. Год работ по отделке помещений барельефными портретами совпадает с 70-летним юбилеем Эйлера.

Вставленный в стену «парадных сеней библиотеки Кунсткамеры», которые теперь служат коридором второго этажа Института этнографии им. Н. Н. Миклухо-Маклая АН СССР, барельеф Эйлера находился там в течение 173 лет. В 1950 г. он был вынут из стены и реставрирован. Расчистка барельефа и его реставрация производились скульптором Г. Ф. Витютьевым на заводе Монументскульптура в Ленинграде. Там же с него была отлита гальванокопия, посланная Академией наук СССР в подарок Берлинской академии по случаю ее 250-летнего юбилея.

Другим профильным барельефом с портретом Эйлера (см. стр. 353) был исполненный Домиником Рашеттом[30] в Петербурге в 1781 г. Отлитый в гипсе, он был передан в дар Парижской академии, где и находится сейчас. Этот овальный барельеф, размером 50×40 см, сделанный за два года до смерти Эйлера, передает его старческие черты; левый глаз полуприкрыт. Оплечный бюст Эйлера повернут в профиль, влево. С большой мягкостью вылеплены Рашеттом складки на лице и шее. Тонко вырезаны легкие завитки волос [31].

Другой работой Рашетта, также выполненной в Петербурге, был мраморный бюст Эйлера 1784 г. (см. стр. 464). В настоящее время он находится в здании Президиума Академии наук СССР в Москве (56×26 см). Авторская копия с него 1788 г. (53×30 см) находится в Государственном Эрмитаже в экспозиции Французского искусства. Этот бюст укреплен на другой подставке. На задней стороне бюста по краю высечена надпись: «Rachette sc. 1788». На бюсте отчетливо обозначены густые брови

---

[30] Жан-Доминик Рашетт (Rachette, 1744—1809), француз по происхождению. Родился в Копенгагене, где получил художественное образование. С 1772 г. работал в Гамбурге, состоя членом Берлинской академии художеств. В 1779 г. приглашен модельером на имп. Фарфоровый завод в Петербурге. В 1782 г. работал в Академии художеств, получив в 1800 г. звание профессора.

[31] В собрании Музея М. В. Ломоносова Института истории естествознания и техники Академии наук СССР находятся две копии с бюста Эйлера работы Рашетта. Одна из них — гипс (отлита на Скульптурно-формовочной фабрике в Ленинграде в 1948 г., размером 56×19 см), а другая — гальванокопия (размером 50×25 см, время ее исполнения неизвестно).

над отекшими веками, вертикальные складки на лбу, жилистая шея и выдающиеся ключицы. Глаза полуприкрыты,на левом зрачок отсутствует, а на правом подведен к самому верхнему веку, что создает впечатление почти полной слепоты. В Музее М. В. Ломоносова АН СССР имеются две копии с этого бюста

Этот посмертный бюст Эйлера был создан по инициативе и на средства академиков и адъюнктов. На Академическом собрании, первом после смерти Эйлера, состоявшемся 11 сентября 1783 г., было единодушно постановлено увековечить его память мраморным монументом [8, стр. 697]. Директор Академии Е. Р. Дашкова утвердила это решение и приняла участие в расходах по его заказу. Кроме того позднее, 15 марта 1784 г., она прислала постамент под бюст в виде мраморной колонны.

Работа над созданием бюста была поручена Рашетту как скульптору, близко знавшему Эйлера, а также потому, что известный медальон его работы, выполненный с натуры в 1781 г., пользовался всеобщим одобрением. В течение 1784 г. Рашетт закончил бюст.Высеченный из мрамора, он, по отзывам всех знавших Эйлера, имел полное сходство с великим ученым.

Установка бюста в Большом конференц-зале происходила в торжественной обстановке. Для этой церемонии Дашкова назначила особое собрание, на которое были приглашены все академики и члены семьи Эйлера.Оно состоялось 14 января 1785 г.Произнеся краткую речь о заслугах Эйлера перед Академией, о значении его трудов и о редких личных качествах ученого, Дашкова поставила на колонну, стоявшую против кресла президента, поданный ей бюст [8, стр. 792].

В собрании Музея М. В. Ломоносова имеется еще скульптурный портрет Эйлера в виде мраморной гермы (см. стр. 465). Она крупнее описанного бюста. Ее размеры 57×34×25 см. Имея несколько иной контур головы и менее рельефную моделировку, герма почти повторяет бюст, созданный рукой Рашетта. Однако мы не имеем точных сведений, является ли она копией бюста и кто ее автор.

В Базеле открыт Музей, посвященный жизни и деятельности семьи крупнейших математиков XVIII в. Бернулли («Бернуллианум»). Среди экспонатов этого музея находятся мраморные бюсты Якова и Иоганна Бернулли работы скульптора Генриха Руфа[32], помещенные в музей в 1874 г. Там же позже поставлен выполненный Руфом погрудный бюст Леонарда Эйлера. По сравнению с мягким овалом лица на бюсте работы

[32] Генрих Руф (Ruf), умер в 1883 г. в Мюнхене.

Рашетта здесь лицо Эйлера кажется прямоугольным. Нос прямой и острый. Рот растянут, губы плотно сжаты. Правый глаз полузакрыт, а левый, под приподнятой бровью, смотрит в сторону, вверх. Несколько саркастическое выражение лица Эйлера на этом бюсте не свойственно ни одному из его предыдущих портретов. Какими материалами пользовался скульптор для создания этого портрета, мы не знаем. Общее впечатление от исполнения бюста таково, что его делал второстепенный мастер.

Переходя к обзору гравюр, сделанных со скульптурных изображений Эйлера, прежде всего надо остановиться на работах, воспроизведенных с барельефа Рашетта. В конце XVIII в. французским гравером Дюпеном[33] была выполнена гравюра резцом по рисунку французской художницы Дю-Пьери[34]. Под гравюрой подпись на французском языке: «Леонард Эйлер [член] Королевской Академии наук в Париже, Лондонской, Берлинской, Петербургской и пр. Родился в Базеле 15 апреля 1707 г. Умер в Петербурге 18 сентября 1783 г». Под гравюрой слева: «Рисовано г-жей Дю-Пьери с медальона, присланного Академии наук Петербургской Академией», и справа: «Гравировал Дюпен». При сравнении гравюры с барельефом Рашетта можно установить, что глаз гораздо шире открыт, губы сильнее вогнуты, линии носа и лба изменены, моделировка шеи расплывчата и лицо значительно моложе. Вероятно, отклонение от изображения на барельефе является следствием ошибок художницы, а не гравера.

Гравюра резцом англичанина Торнтуэйта[35] 1789 г. сделана очень тщательно, но выполнена, очевидно, не с оригинала, а по гравюре Дюпена. Под овалом подпись: «Thornthwaite sculp^{t}».

Своеобразным воспроизведением барельефа Рашетта является небольшой портрет, написанный в 1787 г., очевидно тоже по гравюре Дюпена, восковыми красками — энкаустикой[36]. Портрет, написанный

[33] Дюпен (Dupin),— французский гравер конца XVIII в. Гравюра указана у Ровинского под № 17.

[34] Дю-Пьери (Du Piery),— французская художница конца XVIII в. Известен портрет ее работы астронома Гершеля.

[35] Джон Торнтуэйт (Thorntwaite, 1740—1793),— ученик Мункаша в Будапеште. Эта гравюра указана у Ровинского под № 18.

[36] Энкаустика — известная в классической древности живопись цветным воском. Красочные вещества, смешанные с воском, накладываются сухой кистью на расписываемую поверхность. При сглаживании нагретым металлическим шпателем восковые краски распускаются и смешиваются. При другом способе писали кистью разогретым цветным воском как водяными красками, а затем сглаживали поверхность, как в первом случае.

итальянским художником и ученым Антонио Лорнья[37], хранится в Библиотеке Французского института Академии наук в Париже.

Портрет выполнен на грунтованной медной четырехугольной доске размером 260×205 мм. На темном фоне даны все оттенки розовой кожи с тенями, каштановые волосы с growing сединой, открывающие высокий крутой лоб и широко открытый голубой глаз. На несколько удлиненной шее четко выписаны мышцы. На обратной стороне картины имеется надпись красными чернилами на латинском языке: «Изображение Леонарда Эйлера пуническим воском с примесью красок нарисовал энкаустикой член Парижской академии, кавалер орденов св. Маврикия и Лазаря, Антонио-Мариус Лорнья». Ниже, черными чернилами приписано: «Упомянуто в протоколе заседания 19 мая 1787 г.» На черновике протокола заседания Академии, помеченном этой датой, есть запись, сделанная рукой непременного секретаря Французской академии Кондорсе (также по-французски): «Я преподнес от имени г-на Лорнья портрет г-на Эйлера, написанный энкаустикой».

С энкаустического портрета Лорнья английским художником Холлом[38] в первой половине XIX в. была сделана гравюра на стали. Под гравюрой имеется надпись: «Engraved by H. Holl» и ниже: «Euler». Можно сказать, что это уже целиком выдуманное изображение. Сделав портрет погрудным, Холл обернул обнаженную шею фуляром и одел Эйлера в темный простой кафтан. Но еще важнее, что он изменил линии носа и губ, еще вертикальнее сделал лоб, чем изменил самые черты Эйлера. Интересно проследить, как изменяется изображение Эйлера, проходя через ряд работ разных художников, копирующих один другого: от барельефа Рашетта к сделанным с него гравюрам, затем к работе Лорнья, выполненной по этим гравюрам, и, наконец, к гравированному портрету Холла, окончательно отошедшему от оригинального барельефа. Мы совсем не касаемся здесь известных силуэтов работы Антинга, которым в настоящем сборнике посвящена специальная статья Г. А. Князева, но должны еще оста-

[37] Антонио-Марио Лорнья (Lorgna, 1736—1796), родился и умер в Вероне. Полковник инженерных войск, автор многих трудов, преподаватель математики в Вероне. Основатель и президент итальянского Общества распространения наук. С 1771 г. член-корр. Парижской академии. Лорнья, путем многочисленных опытов разработал и возродил этот забытый способ.

[38] Генрих-Вильям Холл (Holl, 1808—1884) — английский гравер резцом. Эта гравюра указана у Ровинского под № 19. Ровинский говорит, что в каталоге Другулина упоминается еще гравированный портрет Эйлера с подписью: «Westermayr sc.», и дает его под № 20.

новиться на силуэтном рисунке художника Сидо[39]. Репродукция с него имеется среди других 188 силуэтов работы этого мастера в книге «Двор императрицы Екатерины II» [22], изданной в 1899 г. с подлинных силуэтов Сидо, из собрания, принадлежавшего первоначально Петру Кирилловичу Разумовскому [40].

Силуэт Эйлера в профиль влево, отпечатанный с деревянной доски, заключен в овал, вклеенный в четырехугольную гравированную рамку. Под овалом, на картуше имеется подпись пером: «Le professeur Euler». На силуэте голова Эйлера изображена без парика, с высоким лбом, крупным носом и выдающейся нижней губой над двойным подбородком. В указанном издании только небольшая часть силуэтов имеет под овалом, на пасс-парту, гравированную подпись: «Sideau» или надпись: «Fait par le silhouetteur». Под силуэтом Эйлера, как и под большинством других, таких подписей нет. Можно считать это силуэтное изображение одним из самых последних прижизненных портретов Эйлера, так как известно, что Сидо работал в Петербурге в 1782—1783 гг.

Наконец, к числу изображений великого математика относятся выбитые в честь него медали. Первая медаль с изображением Эйлера была сделана медальером Абрамзоном[41] в Берлине, где с 1780 г. им была выполнена серия медалей с портретами ученых. Среди них были медали в честь Эйлера, Бернулли, Мартини, Лессинга, Канта и др. В богатом собрании Отдела нумизматики Государственного эрмитажа хранятся три экземпляра этой медали в честь Эйлера. Две из них серебряные и одна железная, все три одинакового размера (диаметр 4,1 см).

На лицевой стороне медали имеется профильное изображение Эйлера влево, с открытой шеей. Под ним надпись: «Abramson». Вверху по кругу надпись: «Leonhard Euler». На обратной стороне изображены доска с математическими фигурами,подзорная труба,армиллярная сфера и циркуль. Вверху по кругу надпись: «Radio describit orbem» («Радиусом описывает круг», или «Лучом описывает мир»). Внизу подпись «Natus MDCCVII»,

[39] Сидо (F. F. Sideau) — художник-силуэтист. Родился в Женеве. Работал в СПб. и Митаве в 1782—84 гг. Силуэты большей частью вырезал из черной бумаги, а также выполнял тушью и изредка гравировал на дереве и меди.

[40] Силуэты Сидо, по сведениям, имеющимся в указанном выше издании, находились также в собраниях Гёттингенского университета, Московского исторического музея и Эрмитажа.

[41] Абрахам Абрамзон (Abramson, род. 1754) —ученик своего отца Якова Абрамзона. Польский еврей, профессор резьбы медалей в Берлинской академии художеств. Специалист по портретным медалям. Знаток древней нумизматики. Работал сначала по чужим, а затем и по своим эскизам.

т. е. «Родился в 1707». На портрете резко выступает очень длинный нос над слишком высокой верхней губой. Углы рта опущены, подбородок тверд. Лоб очень высок, череп наполовину гол и только на затылке волосы лежат крупными прядями. Абрамзон лично не знал Эйлера и портрет получился утрированным, почти карикатурным, однако нам кажется, что медальер мог пользоваться одной из известных нам гравюр, сделанных с барельефа Рашетта.

В 1957 г. исполнилось 250 лет со дня рождения Леонарда Эйлера. Ко дню празднования этого юбилея Берлинская академия выпустила в свет медаль (диаметром 66 мм), изготовленную на старейшей в Европе Мейссенской фабрике из так называемой «каменной массы» (см. стр. 577). Этот материал цвета темной меди, очень близкий по своим свойствам к фарфору, употреблялся на Мейссенской фабрике в ранние годы ее существования для различных изделий.

На лицевой стороне медали изображена голова ученого в парике, повернутая на $^3/_4$ вправо. Оригиналом для этого послужил портрет работы Хандмана, но с тем же поворотом головы, что и на гравюре Мехеля. Внизу, по обеим сторонам изображения, находятся две даты: «1707» и «1957». По кругу идет подпись «Leonhardus Euler. Academia Scientiarum Berolinensis» («Леонард Эйлер. Берлинская академия наук»). На оборотной стороне дана построчно надпись: «Memoriam insignis mathematici abhinc CCL annos nati colentibus»(«Чтущим память выдающегося математика, родившегося 250 лет назад»). Внизу, под надписью, фабричная марка — два скрещенных меча.

Третья медаль, являющаяся, как и предыдущая, тоже юбилейной, выбита по распоряжению Академии наук СССР весной 1957 г. Чеканка медали из меди была выполнена на Монетном дворе в Ленинграде по эскизу московского скульптора Г. С. Шкловского (см. стр. 577). На лицевой стороне медали (диаметром 60 мм и толщиной 6 мм) имеется оплечное изображение Эйлера в профиль влево. Совершенно очевидно, что автор воспользовался для модели работой Рашетта. Однако он несколько изменил очертание головы, слегка утяжелил нижнюю часть лица и удлинил шею. Ниже, по сторонам изображения, даны две даты: «1707» и «1783».

Внизу, под портретом, число «250» арабскими цифрами. По кругу идет надпись: «Леонарду Эйлеру Академия наук СССР 1957». На оборотной стороне медали находится изображение здания Кунсткамеры, а над ним число «250» римскими цифрами. По кругу идет надпись: «Leonhardo Eulero Academia Scientiarum FRSS» (Леонарду Эйлеру Академия наук СССР»).

Кроме того ко дню юбилея Эйлера по решению Исполкома Ленгорсовета была изготовлена мемориальная доска по проекту архитектора Н. Т. Эйсмонта. В верхней части белой мраморной плиты (70×122 см) вставлен овальный мраморный барельеф (39×49 см) с портретом Эйлера в профиль влево работы скульптора Ю. Г. Клюгге. Автор очень точно передал черты лица ученого, вылепленные по оригиналу, каким явился для него бюст работы Рашетта,а прекрасное выполнение в мраморе Н. С. Болотским помогло сохранить мягкость лепки на барельефе.

Под барельефом помещена гирлянда из лавровых листьев. Ниже высечена позолоченная надпись: «Здесь жил с 1766 по 1783 г. Леонард Эйлер, член Петербургской академии наук, крупнейший математик, механик и физик». Доска установлена на доме, стоящем на набережной Лейтенанта Шмидта, д. 15, угол 10 линии на Васильевском Острове[42].

Литература

1. Д. А. Ровинский, Подробный словарь русских гравированных портретов, т. III, СПб., 1889
2. A. A. Wassiltschikoff, Liste alphabétique de portraits russes, т. I, СПб., 1871
3. П. П. Пекарский, История имп. Академии наук в Петербурге, т. I, СПб., 1870
4. G. Eneström, Über Bildnisse von Leonhard Euler. Bibliotheca mathematica, Leipzig, 1906—1907
5. Hermann Thiersch, Zur Ikonographie Leonhard und Johann-Albrecht Euler's, Göttingen, 1929
6. Hermann Thiersch, Weitere Beiträge zur Ikonographie Leonhard und Johann-Albrecht Euler's, Berlin, 1930
7. Материалы для истории имп. Академии наук, т. II и III, СПб., 1886
8. Протоколы заседаний Конференции имп. Академии наук, т. III, 1897
9. Историко-математические исследования, Под ред. Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича, вып. X, М.— Л., 1957
10. Архив АН СССР, ф. 3, оп. 1, № 58
11. Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 7
12. H. Thiersch, Leonhard Euler's «verschollenes» Bildnis und sein Maler, Berlin, 1930
13. Ein Bildnis Leonhard Eulers von Emanuel Handmann in Deutschen Museum zu München, München, 1938
14. J. B. Rietstap, Armorial général, 2-nd èd. Gonda, ч. 1, 1884
15. Lettres sur quelques sujets de Physique et de Philosophie, t. 1, Paris, 1812

[42] См. в настоящем сборнике статью А. Н. Петрова о памятных Эйлеровских местах в Ленинграде.

16. Л. Фитье, Светила науки от древности до наших дней. Перевод с франц. под ред. Страхова, СПб.— М., 1869
17. Zweihundert Illustrationen zu den Werken Friedrichs des Großen, Berlin, 1882; Meister der Buchkunst Adolf Menzel, Berlin, 1956, стр. 58
18. Johann Bernoullis Reisen durch Brandenburg, Pommern, Preußen, Curland, Rußland und Pohlen in der Jahren 1777—1778, Leipzig, 1780
19. Euier, Oeuvres complètes publiées par Dubois, I, Bruxelles, 1839
20. Е. Суслова, Первый русский скульптор Академий наук и художеств М. Павлов, «Искусство», № 6. стр. 81—88 (1951)
21. Архив АН СССР, раздел V, оп. 3, № 4
22. Двор императрицы Екатерины II. Ее сотрудники и приближенные. Сто восемьдесят девять силуэтов, т. I и II, СПб., 1899. С предисл. А. Круглый (La cour de l'impératrice Cathérine II. Ses collaborateurs et son entourage. Cent quatre-vingt neuf silhouettes)

M. E. GLINKA

LEONHARD EULER
(Versuch einer Ikonographie)
(Zusammenfassung)

Der Artikel enthält eine Beschreibung von etwa 35 Abbildungen Leonhard Eulers. Zu ihnen gehören Ölgemälde, Stiche, Skulpturen und Abbildungen auf Gedenkmünzen. Alle diese Arbeiten wurden seit dem zweiten Viertel des 18. Jh. bis zu unseren Tagen von russischen, deutschen, schweizerischen, französischen und englischen Meistern ausgeführt, über welche kurze Angaben gemacht werden.

Beginnend mit dem frühesten Ölgemälde vom Jahre 1737 — es ist als Stich aus den 1760-er Jahren auf die Nachwelt gekommen — auf dem Euler noch als junger Mann abgebildet ist, und abschließend mit den posthumen Marmorbüsten kann man verfolgen, wie sich das Aussehen des Gelehrten im Laufe seines langen 76-jährigen Lebens veränderte.

Die Beschreibung der Bildnisse wird nach Möglichkeit in chronologischer Reihenfolge gegeben und gliedert sich nach drei Abteilungen:Gemälde und Stiche, Skulpturen, Gedenkmünzen.

Die Bildnisse der «Berliner Periode» aus den 1750-er Jahren von E. Handmann und das in Petersburg von J. Darbes in den 1770-er Jahren gemalte Porträt sind wegen ihrer Ausführung und Ähnlichkeit mit dem Original am interessantesten. Sie dienten im weiteren als Material für eine ganze Reihe von Stichen, die — in ihrer Komposition miteinander verwandt, in ihrer Manier jedoch verschieden—von erstklassigen Stechern des 18.und 19. Jh. ausgeführt sind.

Das Basrelief von D. Rachette, das sich in der Französischen Akademie der Wissenschaften befindet, vermittelt einen lebendigen Anblick des alternden Gelehrten. Es diente diesem Bildhauer bei einer anderen Arbeit als Vorlage, einer Marmorbüste, die im Auftrag der Petersburger Akademie der Wissenschaften für ihren Konferenzsaal im Jahre 1784 ausgeführt wurde.

Das Basrelief des russischen Bildhauers M. Pawlow weist eine andere Kopfhaltung und eine andere Behandlung als bei Rachette auf. Es wurde

1777 anläßlich der Ausstattung der Innenräume des Gebäudes der Kunstkammer in Petersburg, die mit den Bildnissen der russischen Akademiemitglieder geschmückt wurden, entworfen und ausgeführt. Sein Herstellungsjahr fällt mit Eulers siebzigsten Geburtstag zusammen.

Das Basrelief auf der Gedenktafel zum 250. Geburtstag Eulers ist von dem jungen sowjetischen Bildhauer J. Klügge hergestellt worden.

Г. А. КНЯЗЕВ

СИЛУЭТНЫЕ ПОРТРЕТЫ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА РАБОТЫ Ф. АНТИНГА

В Архиве Академии наук СССР хранятся силуэты академиков второй половины XVIII в., выполненные известным в то время портретистом-силуэтистом Ф. Антингом[1].

Некоторые из этих силуэтных портретов групповые и исполнены в оригинальном композиционном оформлении. На двух из них имеется изображение Леонарда Эйлера[2].

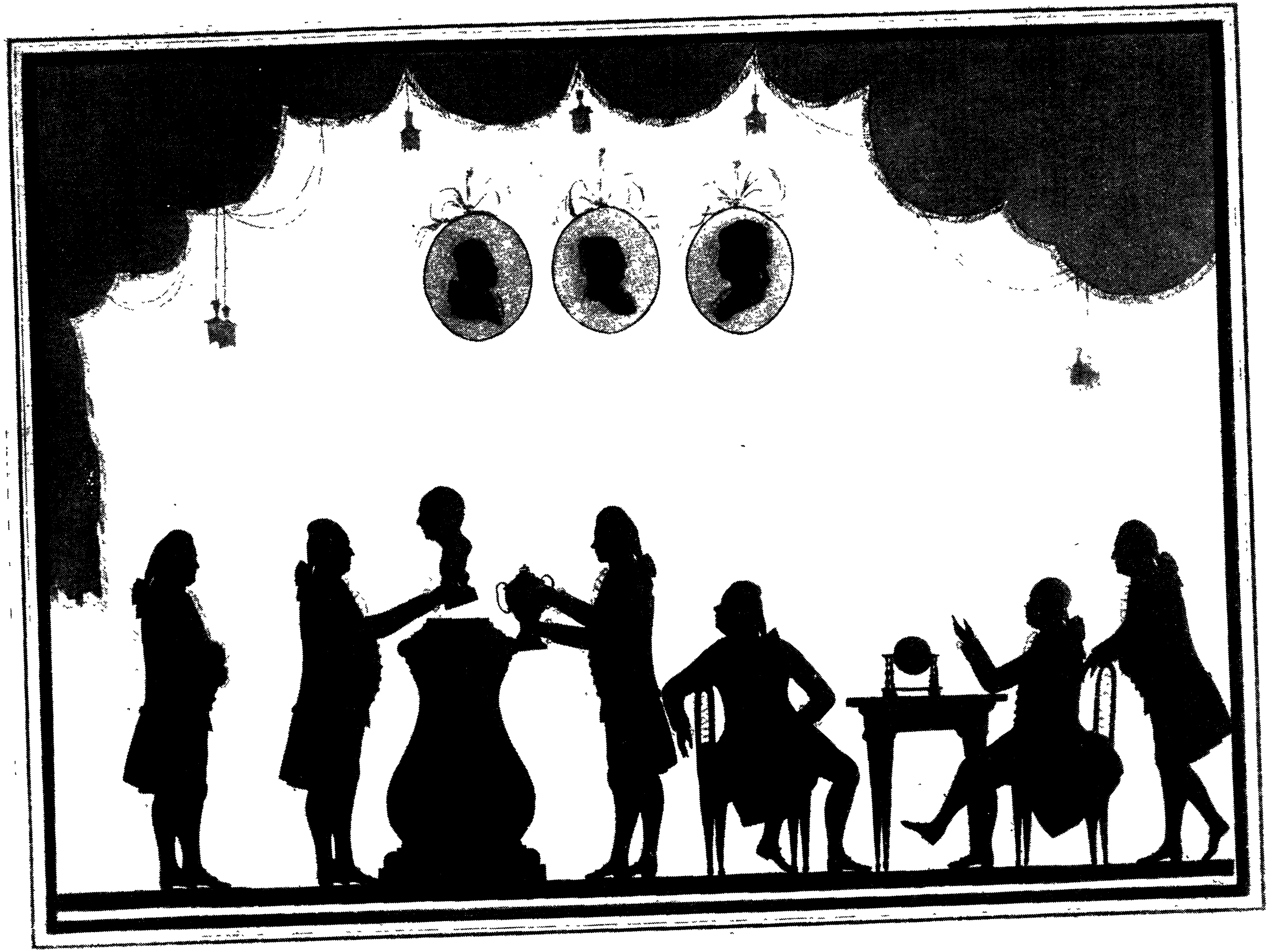
Антинг приехал в Петербург в 1784 г. и не застал в живых прославленного академика, с которого он намеревался сделать силуэтный портрет. Не имея возможности выполнить его с натуры, Антинг использовал весьма остроумный прием помещения портрета Эйлера среди академиков на двух групповых портретах.

На одном из них размером 45,5×62 см изображен сад и около сломанного дерева возвышается жертвенник, на стенке которого в синеватом медальоне помещен силуэтный нагрудный портрет Леонарда Эйлера. Ниже портрета — надпись по-латыни: «Леонарду Эйлеру». По обе стороны жертвенника стоят академики — Иоганн-Альбрехт Эйлер (справа) и за ним беседующие друг с другом Паллас (с веткой в руках) и Лепехин; далее — под большим деревом сидит на стуле академик Георги, он держит в руках большой развернутый лист, позади него стоит академик Л. Крафт.

---

[1] Фридрих Антинг (Anting, умер в 1805 г. в Петербурге), родом из Готы, был не только художником-силуэтистом, выполнявшим силуэты многих лиц, занимавших в его время то или иное выдающееся положение в обществе как в России, так и в других европейских странах,— он проявил себя весьма разносторонним деятелем в разных областях и некоторое время состоял даже полковником русской службы; будучи адъютантом (до 1796 г.) А. В. Суворова, участвовал с ним в боевых действиях и написал его биографию («Versuch einer Kriegsgeschichte Suworows», 1799; перевод на русский язык опубликован в 1804 г.), правда, по отзывам специалистов, мало удачную.

[2] Оригиналы силуэтов хранятся в Архиве АН СССР (разряд X, оп. 2, № 1, 2).



Группа академиков, устанавливающих бюст Леонарда Эйлера.
Силуэты работы Ф. Антинга, 1784 г.

По левую сторону жертвенника изображены два академика — Н. Фус и Лексель[3].

На другом групповом портрете размером $45{,}5 \times 62$ см изображено торжественное водружение бюста Леонарда Эйлера на пьедестал в присутствии академиков физико-математического класса. Бюст, изображенный силуэтной манерой, ставит на пьедестал сын Леонарда Эйлера Иоганн-Альбрехт Эйлер, позади него стоит Лексель; по другую сторону постамента помещен в торжественной позе с амфорой в руках Н. Фус, за ним за столом, на котором находится модель статической электрической машины, сидят Лепехин и Паллас. Позади них, облокотясь на стул, стоит Л. Крафт. Внимание всех изображенных на групповом портрете академиков обращено на торжественное водружение бюста.

Наверху картины раскинута драпировка с кистями и под нею в трех медальонах помещены силуэты — в середине Екатерина II и по бокам вел. кн. Павел Петрович[4] и его жена Мария Федоровна.

Для силуэтного изображения Эйлера на этом групповом портрете Антинг искусно использовал бюст великого ученого работы скульптора Рашетта[5]. Тот же бюст использовал Антинг и на предыдущем групповом портрете, рисуя профиль Эйлера в медальоне.

Этот бюст долгие годы украшал Большой конференц-зал в главном здании Академии наук в Петербурге, рядом с бюстом Ломоносова работы Шубина. В настоящее время оба эти бюста находятся в здании Президиума Академии наук СССР в Москве[6].

В протоколах Академии наук за 1785 г. имеется запись о торжественном водружении на постамент бюста Леонарда Эйлера работы Рашетта.

[3] Иоганн-Альбрехт Эйлер (сын Леонарда Эйлера; 1734—1800)—академик по физике с 1766 г., непременный секретарь Академии наук с 1769 г.; Петр Симонович (Петр-Симон) Паллас (1741—1811)—академик по естественной истории с 1767 г.; Иван Иванович Лепехин (1740—1802)—адъюнкт с 1768 г., академик по естественной истории с 1771 г.; Иван Иванович (Иоганн-Готлиб) Георги (1729—1802)—адъюнкт по химии с 1776 г., академик с 1783 г.; Логин Юрьевич (Вольфганг-Людвиг) Крафт (1743—1814)—адъюнкт по экспериментальной физике с 1768 г., академик с 1771 г.; Николай Иванович Фус (1755— 1825)—адъюнкт по высшей математике с 1776, академик с 1783 г. (впоследствии, после смерти И.- А. Эйлера в 1800 г.— непременный секретарь); Андрей-Иоанн Лексель (1740—1784)—адъюнкт по астрономии с 1769 г., академик с 1771 г.

[4] Состоял почетным членом Академии наук с 1776 г.

[5] Жан-Доминик Рашетт (1744—1809), работал в России с 1779 г. Мраморный бюст Л. Эйлера был им выполнен в 1784 г. Имеется авторское повторение этого бюста, изготовленное в 1788 и находящееся ныне в Эрмитаже.

[6] Бюст Эйлера работы Рашетта воспроизведен в Сборнике, посвященном Леонарду Эйлеру (Изд-во АН СССР, 1935).

Силуэтное изображение бюста Леонарда Эйлера, работы Рашетта (деталь)

Но в отличие от композиции Антинга там говорится об общеакадемическом торжестве, а не только среди академиков физико-математического класса. И бюст устанавливал на пьедестал, согласно записи в протоколе, не Иоганн-Альбрехт Эйлер, как изображено у Антинга, а княгиня Е. Р. Дашкова, бывшая тогда директором Академии наук[7].

Вот что записано в протоколах заседания Конференции Академии наук того времени (т. III, стр. 792) (оригинал написан по-французски):

«(1785)

14 января. Вторник. Экстраординарное собрание. Присутствуют: ее сиятельство г-жа княгиня Дашкова, директор; г-да академики: Румовский, Вольф, Протасов, Лепехин, Крафт, Озерецковский, Георги, Фус, Фербер. Секретарь И.-А. Эйлер.

Ее сиятельство госпожа княгиня директор явилась в 11 ч. утра в залу Конференции. После краткого изложения причины, побудившей ее созвать это экстраординарное собрание, чтобы выразить торжественное признание, какое она питает к заслугам покойного академика Леонарда Эйлера, ее сиятельство приблизилась к мраморной колонне, каковую она приказала поставить посредине залы, против кресла президента, и здесь она сама водрузила бюст великого геометра, выполненный из Каррарского мрамора г. Рашеттом, модельером Императорской фарфоровой фабрики в Петербурге и почетным профессором Королевской Академии живописи и скульптуры в Берлине. После этого акта княгиня Дашкова сказала: «Академия может гордиться тем, что имела в своем составе столь великого ученого, и для меня является честью и удовлетворением установить в вашем присутствии изображение славного своими заслугами ученого к вящему украшению этого зала.»

Этот бюст, красота и совершенное сходство которого делают честь резцу и гению артиста, был исполнен на средства господ академиков и адъюнктов, а ее сиятельство — их славный шеф сверх того способствовала в создании великолепной колонны, которая ему служит пьедесталом.

И.-А. Эйлер»

Как видим, Антинг изобразил не этот, а другой неизвестный нам момент торжественного водружения бюста Эйлера в ограниченном кругу академиков физико-математического класса. Свои групповые портреты Антинг создал в 1784 г. В протоколах заседания Конференции Академии наук от 9 сентября 1784 г. (т. III, стр. 762) имеется запись, что академик

[7] Президент Академии наук К. Разумовский не принимал в то время (с 1766 по 1798 г.) участия в управлении Академией, и его обязанности выполняли директора. Е. Р. Дашкова состояла в этой должности с 1783 по 1796 г.

Паллас представил для академической Библиотеки группу силуэтов разных академиков и адъюнктов физического класса. В Архиве Академии наук в настоящее время имеется четыре листа групповых силуэтных портретов академиков, на двух из них изображен и Эйлер, о чем говорилось выше. К тому же на всех четырех листах изображен и акад. Лексель, умерший в конце 1784 г., т. е. после представления Палласом в Конференцию силуэтных изображений академиков. Следовательно, силуэтная композиция с изображением водружения бюста Эйлера была изготовлена Антингом ранее, чем такое торжество произошло в Академическом собрании (Конференции), о чем повествует протокольная запись в январе 1785 г.

Можно предположить и то, что Антинг предвосхитил этот торжественный момент, но, создавая свою свободную композицию, ограничил число участников торжества только академиками физического класса, к которому принадлежал Леонард Эйлер, а честь водружения его бюста предоставил его сыну И.-А. Эйлеру, как непременному секретарю Академии наук.

G. A. KNJASEW

DIE SILHOUETTENBILDNISSE LEONHARD EULERS VON F. ANTING

(Zusammenfassung)

Im Archiv der Akademie der Wissenschaften der UdSSR werden zwei Silhouetten-Gruppenbildnisse von Akademiemitgliedern der zweiten Hälfte des 18. Jh. aufbewahrt, auf denen L. Euler abgebildet ist. Diese Bildnisse sind von dem bekannten Silhouetten-Porträtmaler Friedrich Anting (gestorben in Petersburg im Jahre 1805) ausgeführt.

Zur Zeit der Ankunft Antings in Petersburg im Jahre 1784 war L. Euler schon nicht mehr am Leben. Anting verfuhr in der Weise, daß er auf zwei Silhouetten-Gruppenbildnissen das Bildnis L. Eulers unter die Akademiemitglieder setzte. Auf dem ersten von ihnen befindet sich das Silhouettenporträt Eulers im Medaillon auf der Wand eines Opferaltars. Auf dem zweiten Gruppenbildnis, das die feierliche Aufstellung der Büste Eulers auf einem Postament in Gegenwart der Akademiemitglieder der physikalisch-mathematischen Abteilung wiedergibt, ist eine Silhouette des großen Mathematikers von J. D. Rachettes Büste dargestellt. Diese Büste hat auch für Eulers Silhouette auf dem ersten Bildnis als Vorlage gedient.

А. Н. ПЕТРОВ

ПАМЯТНЫЕ ЭЙЛЕРОВСКИЕ МЕСТА В ЛЕНИНГРАДЕ

Жизнь и творчество Леонарда Эйлера самым тесным образом были связаны с Петербургом. В Петербург великий математик приехал двадцатилетним юношей и здесь же скончался в возрасте 76 лет. Всего в России Эйлер прожил 31 год — с 1727 по 1741 гг., и затем снова с 1766 по 1783 гг. И в первый и во второй периоды своей петербургской жизни Эйлер жил на Васильевском острове, где были сосредоточены немногочисленные в начале XVIII в. академические учреждения.

В первый раз Эйлер приехал в Петербург 13 мая 1727 г.[1] 20 декабря 1733 г. он приобрел в собственность небольшой дворовый участок «с ветхим строением» на 10-й линии Васильевского острова, между Невой и Большим проспектом, или «большой першпективой». На этом участке Эйлер построил деревянный дом, не сохранившийся до нашего времени. Имеющиеся документы дают о нем ясное представление.

В 1741 г., предполагая оставить Россию, Эйлер обратился в Академию с предложением купить у него принадлежавший ему двор. 4 июня 1741 г. архитектор Дж. Трезини и резного дела мастер Конрад Оснер осмотрели дом Эйлера и составили его краткое описание: «Мерою земли под тем двором длиннику тридцать, поперешнику десять сажен, а на нем строение: на линию деревянные хоромы на кирпичном фундаменте, в которых покоев числом пять и одна кухня и осреди сени; в тех покоях печей обращатых живописных две, очаг один. Передние на линию две светлицы, в которых одна с перегородкою, стены и потолок обиты холстом, и двери в них столярной работы; два покоя, в одном стены и потолок холстом обиты и белены известью, а протчие не обиты; наличная стена от улицы обита досками и раскрашена, с окошечными ставнями, краскою шарою и белилами; кровля крытая гонтами и крашена черленью; оконницы стеклянные, в рамах столярных, с переплетом; в дворе, от огорода, изба с сеньми,

[1] Даты указаны по старому стилю.

сарай, конюшня и меж хором сараец же для дров дощаный, накрыт дранью; в огороде беседка и несколько кустов малины и смородины» [1, л. 550][2].

Трезини и Оснер оценили двор Эйлера в 400 рублей, но Академия наук нашла возможным уплатить ему за дом со всеми строениями 300 рублей.

Описание двора Эйлера интересно как одна из немногих сохранившихся характеристик дома городского жителя Петербурга первой половины XVIII в. Детали описания свидетельствуют о том, что в отделке внутренних помещений дома нашли свое отражение и художественные запросы его обитателей. Это не удивительно, если мы вспомним, что Эйлер был женат на дочери известного живописца, служившего при Академии наук, Георга Гзеля — Екатерине, а его брат Иоганн-Генрих Эйлер с 1735 по 1740 г. был учеником Г. Гзеля.

После отъезда, Эйлера в июне 1741 г., в Германию, его дом заняли служившие при Академии наук «гридоровального дела мастер» Христиан Вортман и рисовальный подмастерье Андрей Греков с матерью, сестрой и братом — рисовального дела учеником Алексеем Грековым. Кроме них в доме жил рисовального дела ученик Иван Еляков и служители названных лиц [2, стр. 300—301, 518]. В 1745 г. «ветхий Эйлеров двор» купил за 200 руб. у Академии механик Исаак Брукнер[3].

17 июля 1766 г. Эйлер вторично приехал в Петербург [4, стр. 49]. Сразу же после приезда Эйлер начал подыскивать для себя дом и 14 августа 1766 г. купил обширный каменный двухэтажный дом, на подвалах, на Васильевском острове, на набережной Большой Невы, близ 10-й линии.

До нашего времени дошло лишь изображение этого дома на аксонометрическом плане Сант-Илера.

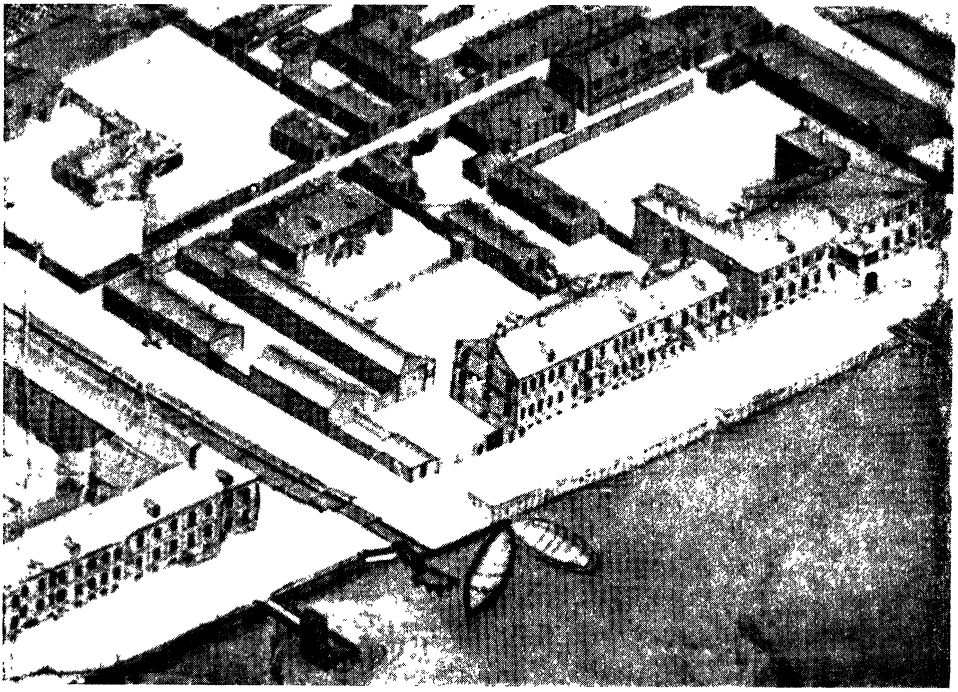
Планшеты плана, изображающие кварталы Васильевского острова, исполнялись в 1765—1766 гг., и таким образом дом Эйлера показан на нем в том виде, какой он имел в год его покупки или за год до этого.

Дом на набережной Невы, купленный Эйлером, был сооружен примерно в 1720 г. его первым владельцем князем Александром Куракиным. В 1723 г. А. Куракин обменял его камер-юнкеру, барону Василию Поспелову на двор на Адмиралтейской стороне, по набережной у Галерного двора [5, стр. 524]. В результате перепродаж дом оказался собственностью секунд-майора Ивана Франца, в свою очередь продавшего его Эйлеру.

---

[2] К описанию приложен схематический план дома [1, л. 568]. В деле сохранилась и подлинная купчая. 20 декабря 1733 г. Эйлер купил свой двор у отставного майора И. А. Кольцова-Мосальского.

[3] Академия наук пыталась продать двор Эйлера «с аукционного торга», но покупатели предлагали слишком незначительную сумму — не более 110 руб. [3, стр. 386—387].



Фрагмент аксонометрического плана Васильевского острова 1766 г.
Дом Эйлера отмечен знаком ×

В день совершения купчей Эйлер впервые почувствовал приближение грозившей ему потери зрения. Через несколько часов после прочтения и подписания купчей он не только не мог разобрать написанного, но даже не отличал белой бумаги от исписанной [6, стр. 494].

22 мая 1771 г. около полудня в переулке позади дома Академии наук, на углу набережной Невы и 7-й линии Васильевского острова, начался пожар. За три часа пожар охватил огромную территорию между 7-й и 21-й линиями [7, стр. 150—151]. В огне погибли десятки жилых домов. Горели не только деревянные дома, преобладавшие на острове, но и каменные дома на набережной Невы, в их числе — дом Эйлера. Великий ученый был вынесен из горевшего дома жившим там же ремесленником — швейцарцем Гриммом.

Были спасены также рукописи его математических трудов [6, стр. 496.]

Во время пожара сгорели постройки «питейного дома», находившегося на смежном с домом Эйлера участке, на углу 10-й линии. По просьбе

Эйлера Екатерина II подписала 22 июня 1771 г. «предложение» Камер-конторе «сгоревшего на Васильевском острову в десятой линии питейного дому на прежнем месте не строить, а отдать оное ко двору профессора Ейлера» [8]. В 1772 г. Екатерина приказала Кабинету выдать профессору Эйлеру — «старику» 3 000 руб. на отстройку дома [9].

После смерти Эйлера в 1783 г. его дом в 10-й линии очень недолго оставался во владении его наследников. Семья Эйлера не только поторопилась с продажей дома, но и распродала библиотеку ученого.

В 1784 г. в «Санкт-Петербургских ведомостях» (№ 18, 1784) появилось объявление о распродаже библиотеки Эйлера в доме Вольного экономического общества[4]. «Каталоги оной, — говорилось в объявлении, — раздаются в том же доме у эконома Миллера.» Уже 23 января 1784 г. в «Санкт-Петербургских ведомостях» (№ 7, 1784) было в первый раз напечатано объявление о продаже «каменного дома покойного г. Академика Эйлера» в 10-й линии, на берегу Большой Невы[5].

Только 27 января 1785 г. дом Эйлера был куплен «агентом датского короля» коммерции советником Иоахимом Маасом [10][6].

На протяжении XIX в. дом Куракина — Эйлера — Мааса неоднократно переходил из рук в руки. В 1850-х годах им владел саксонский консул купец Антон Гитшов.

В 1851 г. А. Гитшов поручил архитектору А. Робену разработать проект расширения принадлежавшего ему дома. Над существовавшим домом А. Робен надстроил один этаж. Одновременно по 10-й линии он построил каменный корпус во всю длину участка, связав его с набережным корпусом в одно целое. Дом Эйлера вошел в существующее здание целиком, без разборки стен, так как фундаменты и стены легко могли выдержать надстройку одного этажа. Дом сохранился до нашего времени в том виде, какой он получил при перестройке в 1851 г. В настоящее время он числится под № 15 по набережной Лейтенанта Шмидта. В нем помещается 31-я средняя школа и 1-я детская и юношеская библиотека Василеостровского района Ленинграда.

После продажи дома Эйлера его сын — академик, секретарь Конференции Иоганн-Альбрехт Эйлер поселился в доме Академии на углу 7-й линии. Второй его сын — гоф-медик Карл Эйлер купил в 1785 г.

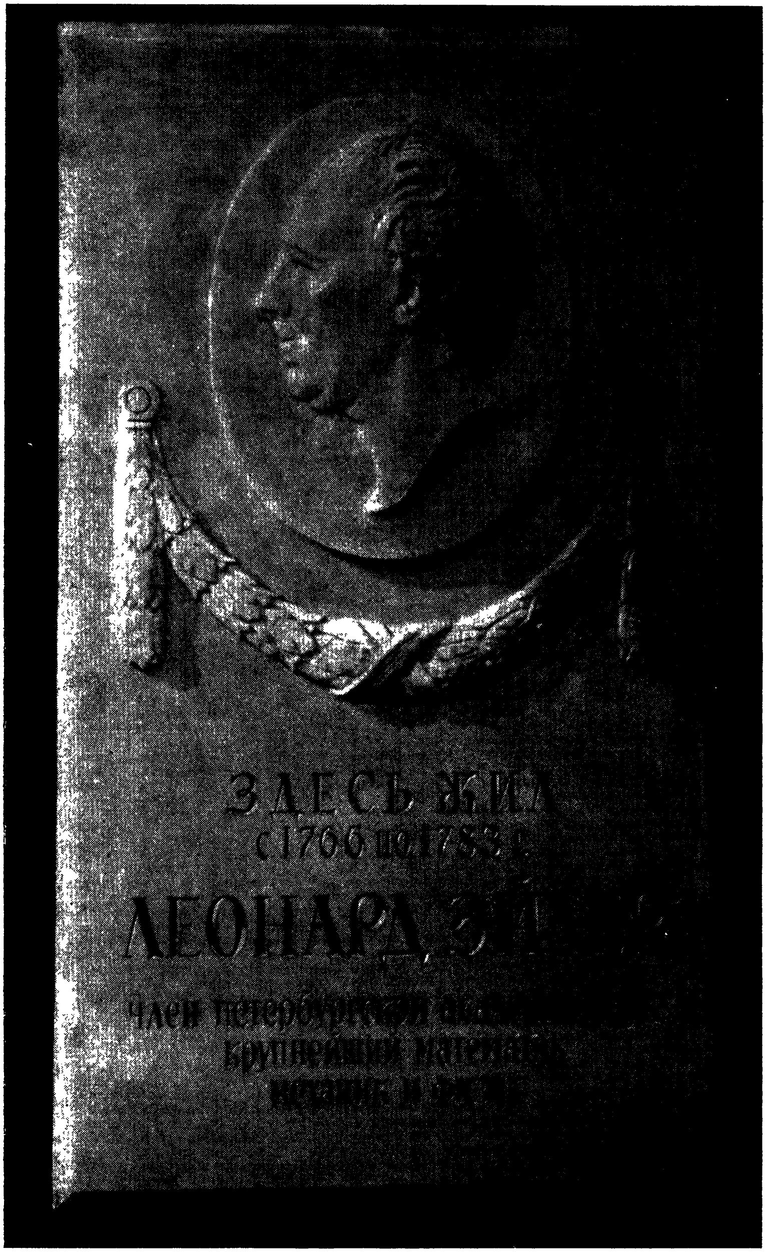
---

[4] В объявлении, напечатанном повторно в № 19 той же газеты, указывалось, что «начало продаже сделано будет с книги «Description des arts et métiers».

[5] Объявление неоднократно перепечатывалось.

[6] Дом был продан за 15 500 рублей вместе с «приданным к оному порозжим местом».

Надгробие на могиле Леонарда Эйлера в Ленинградском Некрополе



Мемориальная доска, установленная на доме Эйлера 15 апреля 1957 г.

небольшой каменный домик на Среднем проспекте (сейчас № 25). Дом этот сохраняет в общих чертах тот вид, какой он имел в XVIII в. [11].

Академия наук почтила память Эйлера, поместив его барельефный портрет работы скульптора М. Павлова в старейшем из академических зданий — Кунсткамере. 14 января 1785 г. директор Академии Е. Р. Дашкова открыла чрезвычайное собрание, во время которого был установлен в зале собраний, на колонне итальянского мрамора, бюст Эйлера, изваянный из каррарского мрамора скульптором Д. Рашеттом.

В 1830 г., при погребении невестки Эйлера на Смоленском евангелическом кладбище была найдена ушедшая в землю, заросшая надгробная плита с надписью на немецком языке: «Здесь покоятся останки знаменитого во всем свете Леонарда Эйлера, мудреца и праведника. Род. в Базеле 4 апреля 1707 г., ум. 7 сентября 1783 года» [12].

В 1837 г. Академия наук заменила эту надгробную плиту новым гранитным надгробием. На его лицевой стороне высечена надпись: «Leonhardo Eulero — Academia Petropolitana», а на противоположной: «Natus Basileae die $\frac{4}{15}$ Aprilis MDCCVII. Mortuus Petropoli die $\frac{7}{18}$ Septembris MDCCLXXXIII».

В 1957 г. прах Эйлера и надгробие перенесены со Смоленского лютеранского кладбища на старое кладбище Александро-Невской лавры, ныне — Ленинградский Некрополь, на избранное для памятника место, близ надгробия М. В. Ломоносова.

На доме на углу 10-й линии и набережной Лейтенанта Шмидта 15 апреля 1957 г., в день 250-летия со дня рождения Эйлера, была установлена мемориальная доска.

Литература

1. Архив АН СССР, ф. 3, кн. 58. Тек. дела 1741 г., янв.— февраль
2. Материалы для истории Академии наук, т. V, СПб., 1889
3. Материалы для истории Академии наук, т. VII, СПб., 1895
4. N. Fuss, Eloge de Monsieur Léonard Euler. St.-Pb., 1783
5. Сборник Русского исторического общества, т. 104
6. Саткевич, Л. Эйлер. «Русская Старина», 1907, т. 132
7. Ф. Туманский, Российский магазин, 1792, окт.
8. ЦГИАЛ, ф. 1329, оп. 2, д. № 13, 1765—1778 гг., л. 27
9. ЦГИАЛ, ф. 468, оп., 353/1342, д. № 34, 1772, № 59
10. ГИАЛО, ф. 757, оп. 1, д. № 987/1785 г., л. 29—30
11. ГИАЛО, д. № 1012/1791 г., л. 100—101
12. ЖМНП, ч. 16, стр. 477—480 (1837) (Заметка: Памятник Эйлера).

A. N. PETROW

LEONHARD EULER — DENKWÜRDIGE STÄTTEN IN LENINGRAD

Zusammenfassung)

L. Euler verbrachte in Petersburg die Jahre 1727—1741 und 1766 bis 1783. Während beider Zeitabschnitte wohnte er auf der Wassiljewski-Insel unweit der Petersburger Akademie der Wissenschaften. Im Jahre 1733 kaufte er ein kleineres Holzhaus in der 10. Linie der Wassiljewski-Insel. Dieses Haus, in dem Euler sich mit seiner Familie niedergelassen hatte, ist uns nicht erhalten geblieben. — Im Jahre 1766 erwarb Euler ein geräumiges steinernes zweistöckiges Haus auf dem Newa-Kai. Es ist eine Abbildung des Kais und des Eulerschen Wohnhauses erhalten geblieben, die aus der Zeit von 1765—1766 stammt und von dem Aussehen des Hauses während der Jahre, in denen es von Euler bewohnt war, eine klare Vorstellung vermittelt. Im Jahre 1851 wurde das Haus um eine Etage aufgestockt und ein steinerner Gebäudeblock längs der 10. Linie, der mit dem Uferblock zu einem Ganzen verbunden ist, angebaut. Das Eulersche Haus ist in das bestehende Gebäude ohne Abbruch der Mauern eingegangen. Gegenwärtig ist es das Haus Nr. 15 auf dem Leutnant-Schmidt-Kai. Im Jahre 1957 wurde anläßlich der 250. Wiederkehr des Geburtstages des großen Gelehrten an der Fassade des Hauses eine Gedenktafel angebracht.

L. Euler, der am 7. (18) September 1783 in seinem Hause am Kai verstarb, wurde auf dem lutherischen Smolenski-Friedhof auf der Wassiljewski-Insel begraben. Im Jahre 1957 wurden die sterblichen Überreste L. Eulers und das Grabmal auf den alten Friedhof der Alexander Newski-Lawra — der Leningrader Nekropole — auf eine für das Denkmal ausgewählte Stelle, nahe dem Grabmal M. W. Lomonossows, umgebettet.

Г. Е. ПАВЛОВА

ЗАБЫТОЕ СВИДЕТЕЛЬСТВО СОВРЕМЕННИКА О СМЕРТИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Краткое описание последнего дня жизни Эйлера и его кончины дал его ученик, муж его внучки академик Н. И. Фус в известном своем «Похвальном слове», прочитанном 23 октября (ст. ст.) 1783 [1].

Существует еще одно забытое описание кончины Эйлера, оставленное его современником и знакомым и дополняющее в некоторых отношениях рассказ Фуса. Оно принадлежит Абелю Бурья (1752—1816), который описал кончину Эйлера в своей книге «Наблюдения путешественника по России, Финляндии, Ливонии, Курляндии и Пруссии».

Реформаторский богослов, учитель математики в Collège Français в Берлине, Абель Бурья был приглашен в Россию в 1777 г. в качестве воспитателя детей Татищева в с. Болдино, близ Москвы; затем он был воспитателем в сухопутном кадетском корпусе в Петербурге, а потом пастором реформаторской церкви. В 1784 г. Бурья возвратился в Берлин. Он известен как автор многочисленных учебных пособий по математике. Возможно, что интерес А. Бурья к математике и сблизил его с Эйлером.

Будучи в России, Абель Бурья посылал время от времени корреспонденции в «Берлинскую литературную газету», а возвратившись в Германию, собрал свои корреспонденции в названную книгу, которая была издана в Берлине в 1785 г. и вторично в 1787 г. [2].

Книга Абеля Бурья содержит ряд любопытных сведений, которые автор-очевидец изложил довольно объективно.

Мы приведем описание последнего дня жизни Л. Эйлера в собственных словах Бурья:

«Смерть Леонарда Эйлера

В 1783 году мы потеряли г. Леонарда Эйлера, столь знаменитого в ученом мире благодаря своим многочисленным открытиям в математике, столь любимого всеми, кто его часто посещал, столь уважаемого в своей многочисленной семье. Я его видел в предпоследний день его жизни веселым, приветливым, как всегда: он только жаловался на головокружения. Он говорил также, что с недавнего времени, когда он думает о своем положении, ему кажется, что он чужой в своей семье и что он не узнает себя сам. На следующий день после обеда он беседовал с гг. Лекселем и Фусом о различных математических, физических и астрономических предметах, в частности о новой планете и о воздушных шарах, о которых тогда начинали говорить. Около пяти часов вечера, когда вошел один из его внуков, он стал с ним шутить, сидя на диване и куря табак: вдруг его трубка упала: он воскликнул — моя трубка, и наклонился, чтобы ее поднять; затем он встал, не подняв трубку, ударил себя руками по лбу и сказал: я умираю; после этих слов он не произносил уже больше ничего, и находился в состоянии агонии до 11 часов вечера, когда скончался. А в тот же самый день утром он давал урок математики своему внуку, о котором я только что говорил. Он также закончил некоторые начатые им расчеты относительно воздушных шаров и записал их, как обычно, крупными буквами мелом на двух аспидных досках, — ибо это было все, что он мог еще делать при том слабом зрении, которое у него осталось. Он скончался в возрасте 76 с половиной лет. Скорбное чувство продиктовало мне по поводу этой кончины следующие стихи:

Il n'est donc plus, ce Savant dont la gloire
Toujours nouvelle, ira d'un vol heureux
Transmettre encore son nom à la mémoire
De nos derniers neveux.
Heureux vieillard! Tel qu'un soleil qui brille
Lorsque ses feux vont s'éteindre au couchant,
Couvert d'honneurs au sein de ta famille,
Tu meurs en inventant.
Mais non, tu vis. Ta dépouille mortelle
A beau servir de nourriture aux vers;
Ton âme va d'une vigueur nouvelle
Parcourir l'Univers.
Voiles sacrés, dont la sage nature
Toujours se couvre à nos profanes yeux,
Tombez pour lui! Souffrez d'une âme pure
Les regards curieux.
Secrets du ciel, o Mystères sublimes!
Qu'à nos efforts cacha le Créateur;
Oui, Léonard déjà de vos abîmes
Perce la profondeur.

Tandis qu'aux cieux sa grande âme contemple
De l'Univers les principes moteurs,
A ses vertus nous dresserons un temple
Dans le fond de nos coeurs[1].

Я только слабо выразил этими стихами уважение, которое, как все порядочные люди, питал к этому достойному и знаменитому старцу».

Литература

1. N. Fuss, Éloge de Monsieur Léonard Euler, lu à l'Académie Impériale des sciences, dans son assemblée du 23 Octobre 1783, St.-Pétersbourg, 1783, стр. 65
2. Abel Burja, Observations d'un voyageur sur la Russie, la Finlande, la Livonie, la Curlande et la Prusse, Berlin, 1785, 1787

[1] «Нет более среди нас этого ученого, вечно новая слава которого в счастливом полете передаст его имя памяти самых далеких потомков.

Счастливый старец! Ты умер, творя, покрытый почестями, в кругу твоей семьи, подобно Солнцу, блистающему, когда его лучи гаснут на закате.

Но нет, ты жив. Твои бренные останки могут служить пищей червям, но твоя душа с новой силой пробегает Вселенную.

Священные покровы, которыми укрывается от наших непосвященных взоров мудрая природа, падите перед ним! Позвольте чистой душе бросить за вас любопытствующие взгляды.

Секреты небес, возвышенные тайны, сокрытые от наших усилий Создателем! Да, Леонард уже проникает чрез глубину вашей бездны.

Меж тем как его великий дух созерцает в небесах движущие начала Вселенной, мы воздвигнем в глубине наших сердец храм его добродетелям».

G. E. PAWLOWA

EIN VERGESSENES ZEUGNIS ÜBER DEN TOD L. EULERS

(Zusammenfassung)

In der Notiz wird die Erinnerung des Pastors der reformierten Kirche in Petersburg A. Burja über das Ableben Eulers angeführt. Die Umstände des Todes des großen Gelehrten hat Burja eingehend in seinem Buche «Observations d'un voyageur sur la Russie etc.» (Berlin, 1785, 2. Aufl., 1787) beschrieben.

ОГЛАВЛЕНИЕ

INHALT

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

Сборник статей
в честь 250-летия со дня рождения

Редактор Издательства *Л. В. Гессен*
Супер-обложка и переплет художника *Н. А. Сидельникова*
Титульные страницы художника *А. М. Олевского*
Технический редактор *Т. П. Поленова*

РИСО АН СССР № 4—1Р. Сдано в набор 12/IX-1958 г.
Подписано к печати 29/XII-1958 г.
Формат $72\times100^1/_{16}$. Печ. л. 38,25+8 вкл. Усл. печ. л. 52,4
Уч.-изд. л. 38,3. Тираж 2500 экз. Т-13154
Изд. № 3360. Тип. зак. № 988

Цена 29 руб. 70 коп.

Издательство Академии наук СССР
Москва Б-64, Подсосенский пер., 21

2-типография Издательства АН СССР
Москва Г-99, Шубинский пер., 10

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
20	19 св.	Sein Enkel	Der Mann seiner Enkelin
20	22 св.	daß für ihn	daß ihn
20	4 сн.	haben	hat
27	4 св.	er	Euler
29	17 сн.	300 Sterling	300 Pfund Sterling
33	2 сн.	marhématique	mathématique
33	1 сн.	inswischen	inzwischen
144 подпись к вклейке		1783	1786

Зак. 988

29р. 70к.