Люди науки

А. Я. ЯКОВЛЕВ

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

Люди науки

А. Я. ЯКОВЛЕВ

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

Пособие для учащихся

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1983

ББК 22.1г
Я47

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук профессор Ташкентского Института истории математики АН Уз. ССР *Г. П. Матвиевская*,
профессор Ленинградского института инженеров железнодорожного транспорта *А. А. Эйлер*

Яковлев А. Я.
Я47 Леонард Эйлер: Пособие для учащихся.— М.: Просвещение, 1983.— 79 с., ил.— (Люди науки).

В сентябре 1983 г. все прогрессивное человечество отмечает 200-летие со дня смерти выдающегося математика, гения XVIII в. Леонарда Эйлера — швейцарца, который обрел в России вторую родину и проработал в Петербургской Академии более 30 лет. Первая часть книги содержит жизнеописание великого ученого. Вторая часть включает сведения о некоторых математических проблемах, которыми занимался Эйлер; при отборе материала автор старался остановиться на проблемах и задачах, доступных пониманию учащихся IX—X классов, которым прежде всего и адресована книга. В конце приводится краткий рассказ о работах Эйлера в других отраслях науки, в частности в механике.

Книга может быть также использована учителями математики для факультативных или кружковых занятий.

Я $\dfrac{\mathbf{4306020400-670}}{\mathbf{103(03)-83}}$ **177—83**

ББК 22.1г
51(09)

Введение

«...Эйлер принадлежит к числу гениев, чье творчество стало достоянием всего человечества. До сих пор школьники всех стран изучают тригонометрию и логарифмы в том виде, какой придал им Эйлер,— говорил академик М. А. Лаврентьев в речи на совместном заседании Академии наук СССР и Академии наук ГДР, посвященном 250-летию со дня рождения Леонарда Эйлера.— Студенты проходят начала высшей математики по руководствам, первыми образцами которых явились классические монографии Эйлера... . Эйлер был прежде всего математиком, но он знал, что почвой, на которой расцветает математика, является практическая деятельность».

«Имя Эйлера дорого всему прогрессивному человечеству, которое чтит в нем одного из величайших геометров мира,— продолжает Михаил Алексеевич Лаврентьев.— В качестве члена Петербургской и Берлинской Академий наук Эйлер содействовал развитию математических наук в обеих странах и распространению в них физико-математических знаний».

Леонард Эйлер был избран академиком (и почетным академиком) в восьми странах мира. Он оставил важнейшие труды по самым различным отраслям математики, механики, физики, астрономии и по ряду прикладных наук. Трудно даже перечислить все отрасли, в которых трудился великий ученый. Но в первую очередь он был математиком.

В этой книге рассказывается о *точках Эйлера, прямой Эйлера* и *окружности Эйлера* в треугольнике; о *теореме Эйлера* для многогранников; о *формулах Эйлера,* связывающих тригонометрические функции с показательными функциями мнимого аргумента; о *подстановках Эйлера* при интегрировании важного класса функций. Один из простейших методов приближенного решения дифференциальных уравнений, широко применявшийся до самых

1*

последних лет (до повсеместного распространения ЭВМ), называется *методом ломаных Эйлера;* во многих разделах математики важную роль играют *Эйлеровы интегралы* (бета-функция и гамма-функция Эйлера). В теории чисел именем Эйлера названы теорема о сравнениях и особая функция, выражающая количество натуральных чисел, меньших данного натурального числа n и взаимно простых с ним. В механике при описании движения тел пользуются *углами Эйлера,* в гидродинамике рассматривается *число Эйлера...* Нет, пожалуй, ни одной значительной области математики, в которой не оставил бы след один из величайших математиков всех времен и народов, гений XVIII в. Леонард Эйлер.

Эйлер прославил своей деятельностью как Петербургскую, так и Берлинскую Академии. В Академии наук СССР и Академии наук ГДР в сентябре 1983 года проводятся научные сессии, посвященные юбилею.

Неоценимо велика роль Эйлера в создании классических образцов учебной литературы и в стимулировании творчества многих поколений математиков.

— Читайте, читайте Эйлера, он — наш общий учитель,— любил повторять Лаплас. И труды Эйлера с большой пользой для себя читали — точнее, изучали — и «король математиков» Карл Фридрих Гаусс, и чуть ли не все знаменитые ученые последних двух столетий.

Даже сейчас, через 200 лет после смерти Эйлера, его работы побуждают ученых всего мира к творчеству в самых различных областях математики и ее приложений.

Часть I. Жизнь Эйлера

1. В БАЗЕЛЕ

Первое упоминание о Базеле — римском военном поселении Базилиа — историки относят к 374 г. Расположенный у начала судоходного пути на Рейне город быстро рос и развивался. Постепенно он подчинил своему влиянию всю округу. В средние века Базель стал одним из крупнейших европейских центров торговли, ремесла, культуры и ... ростовщичества.

Стрельчатый кафедральный собор над Рейном строился в Базеле более трех веков и являет собой превосходнейший архитектурный памятник. Базельский университет, основанный в 1460 г.,— один из старейших в Европе.

В 1687 г. профессором математики в Базельском университете стал Якоб Бернулли, один из членов знаменитого семейства, давшего миру ряд выдающихся ученых в области точных наук. После его смерти, в 1705 г., кафедру возглавил его брат Иоганн Бернулли, бывший до того профессором в Гронингене (Голландия).

Кроме них, семейство дало миру в XVIII в. еще 6 профессоров математики. Деятельность семейства Бернулли знаменует собой эпоху как в истории Базельского университета, так и в истории мировой математики.

Благодаря Бернулли математика достигла в Базельском университете весьма высокого уровня. Якоб и Иоганн Бернулли вместе с Ньютоном и Лейбницем по праву относятся к создателям *математического анализа.*

В конце XVI в. из Линдау (на Боденском озере) переехал в Базель неприметный ремесленник Ганс-Георг Эйлер. В 1594 г. он стал гражданином города Базеля. В следующих поколениях Эйлеров наряду с ремесленниками появились уже пасторы.

В 1693 г. 23-летний Пауль Эйлер окончил курс теологии в Базельском университете. Но ученых-теологов было в те годы

Якоб Бернулли
(1654—1705)

больше, чем требовалось, и лишь в 1701 г. он получил официальную должность священника сиротского дома в Базеле. 19 апреля 1706 г. пастор Пауль Эйлер женился на Маргарите Брукнер — тоже дочери священника. А 15 апреля 1707 г. у них родился сын, названный Леонардом.

В июне 1708 г. Пауль Эйлер был избран церковным советом на должность священника в небольшое селение Риэн, насчитывающее около тысячи жителей и расположенное в часе ходьбы к северо-востоку от Базеля на правом берегу Рейна. И хотя состав семьи пастора вскоре вырос до шести душ, семья располагала лишь одной жилой комнатой да отцовским кабинетом. Благодаря мягкому климату члены семьи большую часть времени проводили под открытым небом.

Начальное обучение будущий ученый прошел дома под руководством отца, учившегося некогда математике у Якоба Бернулли. Добрый пастор готовил старшего сына к духовной карьере, однако занимался с ним и математикой — как в качестве развлечения, так и для развития логического мышления. Мальчик увлекся математикой, стал задавать отцу вопросы один сложнее другого.

Когда у Леонарда проявился интерес к учебе, его направили в базельскую латинскую гимназию — под надзор бабушки, вдовы госпитального священника. Гимназия была в те годы в плохом состоянии: грубые и малоквалифицированные учителя, с одной стороны, и запущенные ученики — с другой, портили жизнь друг другу. Не говоря уже о постоянных драках между учениками, случалось, что и учителя избивали учеников. Разумеется, серьезных знаний эта гимназия дать не могла.

Но чиновничья карьера требовала получения аттестата, знания некоторых разделов математики; поэтому многим брали репетиторов, обычно студентов, которые за один день могли дать своим подопечным больше знаний, чем гимназия за неделю. У Леонарда тоже появился частный учитель — Иоганн Буркгардт, впоследствии небезызвестный математик и теолог, который сразу же предсказал своему ученику блестящее будущее.

20 октября 1720 г. 13-летний Леонард Эйлер стал студентом факультета искусств Базельского университета: отец желал, чтобы он стал священником. Но любовь к математике, блестящая память и отличная работоспособность сына изменили эти намерения и направили Леонарда по иному пути.

Базельский университет был в то время невелик: 19 профессоров обучали лишь чуть больше сотни студентов. Однако среди преподавателей был Иоганн Бернулли.

Иоганн Бернулли (1667—1748)

Лейбниц к этому времени умер, а Ньютон был очень стар — и Иоганн Бернуллли по праву считался первым математиком мира. Великий базельский математик был разносторонне образованным человеком, любил и понимал литературу, был доктором медицины и, главное — блестящим педагогом.

Леонард Эйлер давно уже интересовался математикой. Теперь, став студентом, он благодаря своей блестящей памяти легко усваивал учебные предметы, отдавая основное время математике. И немудрено, что способный мальчик вскоре обратил на себя внимание Бернулли.

Ученый понял, что нелепо готовить Леонарда в пасторы: он способен на большее. В то время не существовало учебников по высшей математике, а заниматься с Леонардом индивидуально Бернулли не имел времени. И он нашел единственно правильный метод, который очень высоко оценил впоследствии сам Эйлер: предложил юноше читать математические мемуары, а по субботам приходить к нему домой, чтобы совместно разбирать непонятное.

В течение нескольких лет Эйлер каждую субботу проводил послеобеденное время в доме Бернулли. По прошествии многих лет он вспоминал, что, разобрав со своим учителем один неясный вопрос, добивался ясности и во многих других: нескольких замечаний или наводящих вопросов ученого было достаточно, чтобы пытливым умом студент додумал остальное.

«Несомненно, это лучший способ делать успехи в математических науках,— писал Эйлер в автобиографии.— После разъяснения одной трудности десятки других исчезали».

В университете Эйлер числился как будущий теолог. Однако, по его собственным воспоминаниям, он «не очень-то продвинулся в греческом и древнееврейском языкознании», ибо все его помыслы были направлены на математику. А вскоре и Пауль Эйлер согласился, чтобы сын, оставив теологию, занялся математикой.

В доме своего учителя Эйлер познакомился и подружился с сыновьями Бернулли — Николаем и Даниилом, также увлеченно занимавшимися математикой. А 8 июня 1724 г. 17-летний Леонард Эйлер произнес по-латыни великолепную речь о сравнении философских воззрений Декарта и Ньютона — и был удостоен ученой степени магистра (в XIX в. в большинстве университетов Западной Европы ученая степень магистра была заменена степенью доктора философии).

Даниил Бернулли
(1700—1782)

Небольшая по численности населения Швейцария, включавшая в те годы 13 разобщенных кантонов, готовила гораздо больше образованных людей, чем могла содержать и обеспечить службой. Да и во всей Западной Европе спрос на ученых был невелик. Ни Эйлер, ни его друзья братья Бернулли не могли найти приложения своим силам. Однако у братьев было достаточно известное ученым Европы имя, служившее им лучшей рекомендацией,— и вскоре обоих пригласили во вновь создаваемую в Петербурге Академию наук.

«Я возымел неописуемое желание,— пишет Эйлер в автобиографии,— отправиться вместе с ними в 1725 г. в Петербург. Однако дело не могло быть тогда осуществлено. Младшие Бернулли дали мне твердое заверение, что после их приезда в Петербург выхлопочут мне там подходящее место; это и в действительности затем последовало».

В последующие два года юный Эйлер написал несколько научных работ. В эпоху парусного флота первостепенную роль играли количество, высота и расположение мачт на корабле. Парижская Академия объявила конкурс на оптимальное решение задачи. Поступило немало сочинений от ученых различных стран, и среди них — работа никому не известного юноши из Базеля, откуда «хоть три года скачи, ни до какого моря не доскачешь». По существу проблемы нужно было ясно представить себе корабль-парусник.

Французские академики тщательно проверили сочинение юноши и дали на него почетный отзыв, которого удостаивались немногие. Юношу звали Леонард Эйлер, а сочинение было его первой серьезной научной работой.

«Я не видел необходимости проверять разработанную мной теорию экспериментом,— писал впоследствии автор, который до того действительно никогда не видел моря.— Эта теория полностью выведена из неоспоримых принципов механики. Не может возникнуть и тени сомнения в справедливости теории и применимости ее к практике».

Другая работа, «Диссертация по физике о звуке», также получившая благоприятный отзыв, была представлена на конкурс для замещения неожиданно освободившейся в Базельском университете должности профессора физики. Вакансии в Базеле замещались путем жребия среди отобранных по конкурсным сочинениям кандидатов. Но, несмотря на положительный отзыв о «Диссертации», 19-летнего Эйлера сочли слишком юным, чтобы включить в число кандидатов на профессорскую кафедру. Однако это обстоятельство обернулось счастьем и для самого Эйлера и для науки в целом.

В начале зимы 1726 г. Эйлеру сообщили из Петербурга: по рекомендации братьев Бернулли он приглашен на должность адъюнкта по физиологии. Если Эйлер пожелает отправиться в далекое путешествие лишь летом, советовал Даниил Бернулли, то следовало бы использовать оставшееся время для занятий физиологией. И Эйлер действительно начинает систематически слушать лекции на медицинском факультете. А после отказа на конкурсе по кафедре физики решает сразу же выехать в Петербург.

Путь в далекий Петербург представлялся Эйлеру чуть ли не путешествием на край света. Когда уезжали в Петербург братья Бернулли, их предостерегали: там холодно, там «живут дикари». Но Иоганн Бернулли рассеял все сомнения:

«Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз,— заметил он,— чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз презирают и обижают».

Эйлер был молод и полон энергии. Ни в магистрате, ни в университете он не мог найти применения своим силам и способностям. 5 апреля 1727 г. он навсегда покидает Швейцарию.

2. В ПЕТЕРБУРГЕ

«По указу Ее Императорского величества велено Эйлеру быть при Академии и оному надлежит послать денег на проезд сто тридцать рублев векселем...

Санкт-Питербурх. 1726 года декабря 17 дня».

Это распоряжение Президента Академии Лаврентия Блюментроста было незамедлительно выполнено.

В связи с этим Даниил Бернулли писал Эйлеру несколько дней спустя: «Ты сможешь направить путь прямо в Любек с тем, чтобы прибыть туда в начале или середине мая и после этого завершить путь морем».

Спустившись при попутном ветре по Рейну до Майнца, Эйлер на почтовых проехал через Франкфурт и прибыл в Марбург, где встретился с Христианом Вольфом, одним из крупнейших философов того времени. Именно ему доверил некогда Петр I подбирать и рекомендовать ученых во вновь создаваемую Академию: ведь в петровской России если и были свои ученые, то главным образом богословы. Затем через Кассель и Ганновер Эйлер прибывает в Любек, чтобы морским путем добраться до Петербурга.

24 апреля, не найдя в порту Травемюнде корабля, идущего в Петербург, он отплыл в Ревель (ныне Таллин). Во время этого первого в своей жизни морского путешествия Эйлер сильно страдал от морской болезни. 21 мая корабль прибыл в Ревель, а 24 мая

Х. Вольф
(1679—1754)

Эйлер вступил наконец на набережную российской столицы. Путь, который поезд проходит за 40 ч, занял полтора месяца.

«Меня сделали адъюнктом высшей математики, а медициной мне заниматься так и не пришлось. При этом мне было дозволено присутствовать в заседаниях Академии и читать сочинения, которые тогда же помещались в «Комментариях» Академии».

Еще в начале XVIII в. великий философ и математик Г. В. Лейбниц разработал проект создания академий в различных городах Европы. По просьбе Петра I Лейбниц прислал и в Петербург несколько писем-рекомендаций по организации Академии.

За три года до описываемых событий 22 января 1724 г., Петр I утвердил проект устройства Петербургской Академии наук и художеств, представленный его лейб-медиком Л. Блюментростом, который стал и первым президентом Академии. 28 января вышел указ сената о создании Академии.

Петр I вскоре умер. Но его жена императрица Екатерина I сдержала обещание, данное Петру, и осуществила создание Академии. Из казны отпускались необходимые деньги, заключались договоры («контракты»), по которым прибывали иностранные ученые; в ноябре 1725 г. состоялось собрание ученых — членов академической конференции, а в декабре 1727 г. — первое, торжественное заседание Петербургской Академии наук.

Х. Вольф с большим вниманием отнесся к просьбе Петра I — приглашать в Академию первоклассных ученых. Особенно удачным оказался подбор ученых в области точных наук.

Первым профессором, прибывшим во вновь открытую академию, был базельский математик (и дальний родственник Эйлера) Якоб Герман; затем прибыли Николай и Даниил Бернулли, Христиан Гольдбах, Фридрих Майер, Георг-Бернард Бильфингер, Георг-Вольфганг Крафт, Жозеф Никола́ Делиль. Из 22 профессоров и адъюнктов, приглашенных в первые годы, оказалось 8 математиков, которые, впрочем, занимались также механикой, физикой, астрономией, картографией...

Многие европейские академии того времени (например, итальянские) представляли собой добровольные сообщества ученых, получавших лишь денежную поддержку меценатствующих владык*.

* Меценат, Кай Цилий (I в. до н. э.) — римский политический деятель. Покровительствовал поэтам Вергилию, Горацию и другим, оказывал им материальную поддержку. Позднее меценатом стали называть любого покровителя наук и искусств.

Петербургская же Академия с самого начала своего существования была государственным учреждением, цели и задачи ее определялись потребностями государства, научные достижения ее членов широко публиковались в изданиях Академии.

Академия не только вела теоретические исследования, но также снаряжала экспедиции, изучала растительный и животный мир, вела астрономические и метеорологические наблюдения, составляла карты; одной из важнейших функций Академии был обмен информацией и издание научных трудов.

Помимо отдельных книг научного содержания, Петербургская Академия издавала «Комментарии», выходившие также под названиями «Записки», «Новые записки», «Труды», и другие сборники сочинений по различным наукам, которые сразу же приобрели известность и пользовались спросом среди ученых Европы. Уже в 1734 г., когда успели выйти из печати только 3 тома сборников, Д. Бернулли писал Эйлеру из Базеля:

«Не могу Вам объяснить, с какой жадностью повсюду спрашивают о Петербургских мемуарах*... Желательно, чтобы их печатание было ускорено».

В уставе Академии содержалось и требование, чтобы «не только слава государства для размножения наук ... распространилась, но и чрез обучение и распространение оных польза в народе была».

С первых лет своего существования Петербургская Академия занялась и подготовкой русских ученых. Позднее при Академии были созданы университет и гимназия. Пройдя академический университет и стажировку в Германии, академиком стал гениальный М. В. Ломоносов; из числа учеников Эйлера в русской науке успешно работали В. Адодуров, С. Котельников, С. Румовский, М. Софронов, М. Головин, а позднее также А. Лексель, Ф. Шуберт и другие.

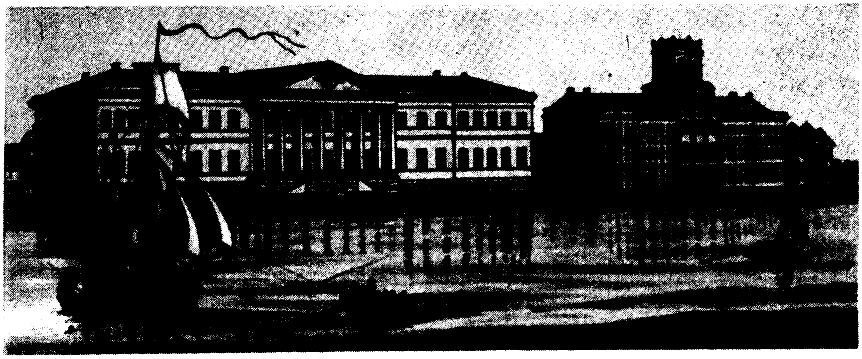
Ученые Европы изъяснялись между собой по-латыни; на этом же языке писались научные работы, велись протоколы. В Петербургской Академии широкое употребление имел также немецкий язык, которым владели приглашенные ученые. Многие из них так до конца жизни и не научились говорить по-русски.

Эйлер стал бегло говорить по-русски уже через несколько месяцев после приезда в Петербург. Позднее он владел русским почти свободно и даже писал по-русски некоторые из своих писем.

В августе 1727 г. молодой ученый уже читал в Академии свой первый доклад «О количестве истекающей из отверстия воды». Со следующего года ни один том трудов Академии не выходил без нескольких сочинений Эйлера по математике, механике, физике. Скажем, из 13 работ по математике, опубликованных в «Трудах Академии» за 1736 г., 11 принадлежало Эйлеру и 2 — Д. Бернулли.

---

* Мемуары — воспоминания, а также научные труды по отдельным проблемам, научные статьи. Здесь: «сборники трудов».



Академия наук и кунсткамера в Петербурге (гравюра Мильтона, 1789 г.)

За первые 14 лет пребывания в Петербурге он написал более 80 крупных научных работ, более 50 из которых были тогда же опубликованы.

Ему часто давались поручения по практическим проблемам. Он читал лекции студентам академического университета, принимал экзамены в Кадетском корпусе, занимался вопросами устройства пожарных насосов и механических пил, работал в Комиссии мер и весов, в Географическом департаменте.

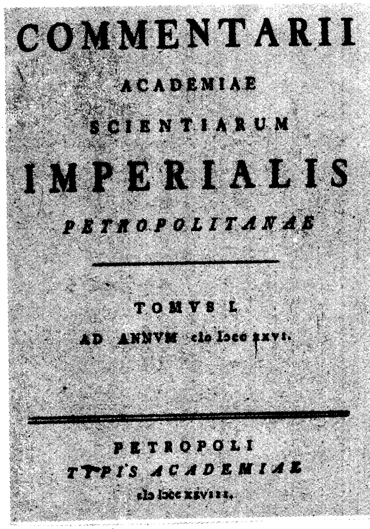
Приглашенный в Петербургскую Академию французский ученый Ж. Делиль имел «особенное» поручение: составлять карты Российской империи. Впоследствии он стал заведующим специальным Географическим департаментом.

Но карты России было не так просто составить. Если карту небольшой страны или области можно начертить достаточно точно многими способами, в различных проекциях, то для карт всей России с ее огромными протяжениями получались серьезные искажения. Ведь на *плоской* бумаге нужно было изобразить значительную часть *сферической* поверхности. Вполне понятно, что чем бóльшая протяженность по широте и по долготе изображается, тем бóльшие искажения масштаба неизбежны, особенно по краям карты. Масштаб одной части карты может сильно отличаться от масштаба другой части.

Делиль предложил вместо применявшейся ранее простой конической проекции, или проекции Птолемея, известной со II в., новую «коническую проекцию с двойным сечением». Однако Делилю требовалась помощь математика. И Эйлеру было поручено оказывать Делилю содействие «как в составлении карт, так и во всем, что еще потребуется для географии». Эйлер нашел возможность еще лучшего уточнения проекции, при котором отклонения масштаба становились еще меньше.

«Самой существенной целью карты,— говорил Эйлер,— является то, что все частичные карты могут получаться простым копированием с нее, без дальнейших исправлений».

Вскоре Эйлер становится одной из ведущих фигур в Географическом департаменте. Он быстро и точно выполняет весьма громоздкие вычисления. Не ограничиваясь чисто математической частью, он непосредственно занялся картографией и сам вычертил немало карт, испортив себе при этом зрение.



Титульный лист первого тома «Записок императорской Петербургской Академии наук за 1726 г.» (изд. 1728 г.)

«Стараниями Гейнзиуса и Винсгейма, под руководством бессмертного Эйлера, составлен был, наконец, и издан в 1745 г. тот превосходный атлас империи, который был в общем употреблении...» — писал сто с лишним лет спустя директор Пулковской астрономической обсерватории академик О. В. Струве. Впрочем, ценность и важность выполненной работы понимал и сам Эйлер:

«География Российская через мои и господина Гейнзиуса труды гораздо в исправнейшее состояние приведена, нежели география немецкой земли,— писал он впоследствии.— Кроме разве Франции, почти ни одной страны нет, которая бы карты лучше имела».

Академия обратилась к своим членам с просьбой: составить руководства для первоначального обучения наукам. И Эйлер, не считаясь со временем, составил на немецком языке прекрасное «Руководство к арифметике», которое вскоре было переведено на русский и сослужило добрую службу многим учащимся. Перевод первой части выполнил в 1740 г. первый русский адъюнкт Академии, ученик Эйлера Василий Адодуров. На русском языке это было первым изложением арифметики как математической науки.

Эйлеру часто поручалось составление отзывов на публикуемые или присылаемые в Академию сочинения по математике, физике и другим наукам. В протоколе одной из Академических конференций за 1735 г. Эйлеру поручается дать отзыв о статье по квадратуре круга «и в дальнейшем продолжать разбор таких курьезов». Уже через 4 дня Эйлер «подробно и даже с выкладками доказал, что в статье имеются ошибки и нелепости».

По рекомендации Эйлера в Петербург был приглашен механик из Базеля Исаак Брукнер, оказавшийся весьма искусным мастером, изготовившим прекрасные инструменты. Позднее, когда Эйлер жил в Берлине, Брукнер переехал к нему, но затем вернулся в Базель. В 1750 г. он даже получил премию Парижской Академии за изобретенный им инструмент для определения долготы.

Л. Эйлер

В марте 1738 г. Брукнер доложил на конференции свои соображения по квадратуре круга — проблеме, которую в то время пытались решить многие. Этот доклад и представленную Брукнером работу рецензировал Эйлер. В сохранившейся рецензии Эйлер высказал ряд общих положений о проблеме, а также сделал уточнение обоих предложенных Брукнером методов и в результате получил

$$\pi \approx 1 + \sqrt{6 - \sqrt{2}} \approx 3{,}14149.$$

Эйлер написал ряд статей для издававшегося с февраля 1728 г. небольшого (8 страниц) еженедельного журнала — первого русского научно-популярного журнала под названием «Исторические, генеалогические и географические примечания в ведомостях», где действительно печатались разъяснения и примечания к газете «Санкт-Петербургские ведомости». Этот журнал охотно читался публикой. Каждую субботу академики собирались и обсуждали содержание очередного номера. Статьи научного содержания излагались языком, доступным каждому любознательному читателю. Отметим кстати, что, когда печатание «Примечаний» прекратилось, М. В. Ломоносов пытался добиться их восстановления, но безуспешно.

В 1730 г., когда на русский престол вступила Анна Иоанновна, страной фактически стали править ее приближенные. Они видели в Академии учреждение, которое требовало много денег и не приносило ощутимой пользы. Ходили даже слухи о скором закрытии Академии.

«Что делать дальше? — думал Эйлер, веря и не веря этим слухам.— Не возвращаться же в Швейцарию?»

Адмирал Сиверс, начальник русского флота, понимая, какую пользу может принести русскому флоту способный ученый-математик, выхлопотал Эйлеру чин лейтенанта и обещал немедленное дальнейшее продвижение по службе. И Эйлер, которому всего-то было 23 года, уже готов был принять это предложение.

Однако Академия продолжала существовать. Правда, делами ее правил теперь Иоганн-Даниил Шумахер, тщеславный карьерист, но к Эйлеру относившийся с большим уважением. Многие ученые терпеть не могли Шумахера и, не чувствуя поддержки, стали покидать Россию. Бильфингер и Герман уехали уже в 1731 г.

Освободившееся место профессора физики было предложено Эйлеру. Одновременно он получил и значительное увеличение оклада. Еще через два года, после отъезда Д. Бернулли, Эйлер стал академиком и профессором чистой математики.

Некогда, будучи в Голландии, Петр I пригласил и привез с собой в Петербург Георга Гзелля, живописца из Амстердама, швейцарца по происхождению. В один из последних дней 1733 г. 26-летний Леонард Эйлер, только что ставший академиком, женился на дочери живописца Екатерине Гзелль, которой в это время тоже было 26 лет.

Ранее Эйлер несколько лет жил в одном доме с другом детства Даниилом Бернулли и вел общее с ним хозяйство. Теперь Бернулли уехал, а Эйлер после женитьбы приобрел небольшой деревянный дом на Васильевском острове, на берегу Невы.

Свадьба, Новый год — два праздника сразу! Вся Академия сердечно поздравляет молодоженов. Оказывается, великий математик может не только вычислять и анализировать, он не чужд и мирской жизни.

Молодоженам преподнесли сочиненные к случаю стихи, одну строфу из которых мы здесь приводим.

В том усомниться мог ли кто-то,
Что Эйлер удивит весь мир,
Что только цифры и расчеты
Его единственный кумир.
Теперь совсем в другом он мире,
Где чувства, счастье и любовь.
И то, что дважды два — четыре,
Доказывать придется вновь!*

Эйлер отличался феноменальной работоспособностью. Он просто не мог не заниматься математикой или ее приложениями. В 1735 г. Академия получила задание выполнить срочное и очень громоздкое астрономическое вычисление. Группа академиков просила на эту работу три месяца, а Эйлер взялся выполнить работу за 3 дня — и справился самостоятельно. Однако перенапряжение не прошло бесследно: он заболел и потерял зрение на правый глаз**. Однако ученый отнесся к несчастью с величайшим спокойствием:

«Теперь я меньше буду отвлекаться от занятий математикой», — философски заметил он.

До этого времени Эйлер был известен лишь узкому кругу ученых. Но двухтомное сочинение «Механика, или наука о движении, в аналитическом изложении», изданное в 1736 г., принесло ему мировую славу. Эйлер блестяще применил методы математического анализа к решению проблем движения в пустоте и в сопротивляющейся среде.

Основные вопросы, которые требовали ответа и которые сформулировал еще Галилей, гласили: какую линию описывает камень, брошенный вверх? Какие силы действуют на этот камень? И Эйлер показал, что сила, действующая на камень, меняется с изменением высоты, что важную роль в описании движения играет сопротивление среды. Применение аналитического метода позволило упростить многие проблемы механики и привело к новым открытиям.

«Тот, кто имеет достаточные навыки в анализе, сможет все увидеть с необычайной легкостью и без всякой помощи прочитает

* Перевод стихов — М. Скавронской.

** По другим источникам Эйлер потерял зрение на правый глаз в 1738 году.

работу полностью»,— заканчивает Эйлер свое предисловие к книге.

Дух времени требовал аналитического пути развития точных наук, применения дифференциального и интегрального исчисления для описания физических явлений. Этот путь и начал прокладывать Леонард Эйлер.

«30-летний Эйлер стал знаменитостью,— пишет его биограф Отто Шпис.— Однако плохо, что он жил в далеком Петербурге, где Академия не пользовалась должным уважением, и к тому же в постоянной вражде с «правителем дел» Шумахером».

Нужно отметить, что Петербургская Академия предоставила своим членам весьма хорошие материальные условия и широкие возможности для научной работы и публикации. Как уже говорилось, «Комментарии» Академии быстро завоевали широкое признание во всем научном мире. Шпис прав лишь в том, что Петербург был в то время далек от европейских научных центров и климат в нем посуровее, да еще в том, что отношения большинства академиков с Шумахером оставляли желать лучшего.

Обстоятельства ухудшились, когда в 1740 г. умерла императрица Анна Иоанновна, царем был объявлен малолетний Иоанн VI, а регентшей — его мать, Анна Леопольдовна (Брауншвейгская). Сложилась неустойчивая политическая обстановка, которую особенно остро почувствовали иностранцы.

«Предвиделось нечто опасное,— писал позднее Эйлер в автобиографии.— После кончины достославной императрицы Анны при последовавшем тогда регентстве... положение начало представляться неуверенным».

В самом деле, статут Академии утвержден не был. Ученые полностью зависели от произвола «канцелярии», которой бесконтрольно распоряжался своенравный Шумахер. Немалую роль играли и финансовые затруднения: если на увеселения двора расходовалось ежегодно до двух миллионов, то на Академию наук и Адмиралтейскую академию вместе отпускалось лишь 47 тысяч рублей. Поэтому Эйлер принял предложение прусского короля, который приглашал его в Берлинскую Академию на весьма выгодных условиях.

В соответствии с поданным Эйлером прошением он «был отпущен от Академии в 1741 году» и утвержден почетным академиком. Он обещал по мере своих сил помогать Петербургской Академии — и действительно помогал весьма существенно все 25 лет, пока не вернулся обратно в Россию. В июне 1741 г. Леонард Эйлер с женой, двумя сыновьями и четырьмя племянниками благополучно добрался морем до Вольгаста и вскоре прибыл в Берлин.

3. В БЕРЛИНЕ

В 1740 г. на прусский престол вступил Фридрих II, получивший у раболепных историков наименование Великий. Помимо формирования прусской армии и ведения многочисленных войн, он оказался и фактическим создателем Берлинской Академии наук.

К этому времени в Лондоне, Париже, Санкт-Петербурге, во многих городах Италии уже существовали академии. Тщеславный прусский король решил, что тоже должен — во имя престижа! — создать свою Академию.

Фридрих решил возродить Бранденбургское научное общество, основанное (впрочем, чисто номинально) еще Лейбницем в 1700 г. и как бы впавшее в летаргию. Предстояло влить в это общество свежую струю. Король стал искать по всей Европе ученых, которых можно было бы пригласить в Берлин,— и прежде всего философов и математиков. Для создания Академии нужен был и руководитель, организатор, авторитет которого привлек бы других крупных ученых Европы.

Уже незадолго до восшествия на престол Фридрих обращается к великому французскому писателю и философу Вольтеру с льстивым письмом, в котором просит совета по поводу состава будущей Академии; письмо содержало также завуалированный намек на возможность предложения Вольтеру президентского кресла.

Однако, как и предполагал Фридрих, Вольтер не соглашается ради президентства расстаться с Францией и рекомендует в качестве президента видного ученого Пьера Луи Моро де Мопертюи, ученика И. Бернулли и хорошего по тем временам популяризатора науки, прославившегося также руководством Лапландской экспедицией, которая по поручению Парижской Академии измерила меридиан и уточнила форму Земли. Можно было пригласить и знаменитого Христиана Вольфа, которого в свое время изгнал из Галле отец Фридриха; но Вольф был стар и дряхл, к тому же он испытал на себе капризы сильных мира сего и предпочитал оставаться первым в Марбурге, чем быть под чьим-то началом в Берлине.

Едва успев получить престол, Фридрих приглашает Вольтера и Мопертюи в гости в один из своих замков. Несколько дней спустя Вольтер возвращается во Францию, а Мопертюи едет вместе с Фридрихом в Берлин.

Итак, президентом будет Мопертюи: Франция куда ближе к Германии, чем другие страны. Теперь на очереди первый математик Европы — Эйлер. Приглашены и трое Бернулли, Иоганн и его сыновья Даниил и Жан. Фридрих был бы рад заполучить всех трех ведущих математиков Базеля!

«Если бы я был лет на двадцать моложе, я не медлил бы ни минуты,— писал Иоганн Бернулли Эйлеру, сообщая о полученном приглашении,— так мне опротивело все здесь».

Но в возрасте 73 лет пускаться в дальний путь в почтовой карете? Нет, старый математик окончит свои дни в привычном, хотя и надоевшем Базеле. А его сыновья попросили разрешения обдумать предложение — и тоже не решились покинуть престарелого отца.


С. Я. Румовский (1734—1812)

История повторяется. Прусская Академия, едва зародившись, никак не могла стабилизироваться. Фридриху было некогда заняться вплотную Академией. Он провел две силезские войны (1741—1742 и 1744—1745 гг.), а потом развязал семилетнюю войну. Лишь в промежутке между войнами, празднуя 24 января 1744 г. свой день рождения, «заодно» устроил и «открытие» Академии наук.

Реорганизованная Академия состояла теперь из четырех классов (отделений): *физического* (физика, химия, медицина, ботаника), *математического* (включающего и технические науки), *литературного* (языки, история, археология) и класса *умозрительной философии*. В каждом классе предусматривались директор и три действительных члена, а также три «компаньона» без жалованья. Президентом и полновластным хозяином Академии стал Мопертюи; король числился шефом Академии и членом литературного отделения; впрочем, он писал сочинения, но не участвовал в заседаниях. Эйлер был директором математического класса и обычно замещал президента во время его частых и длительных отъездов во Францию.

Впрочем, он оставался гражданином Швейцарии; в 1752 г. его жена и дети также получили швейцарское подданство, а за участие в одном юридическом споре Эйлер получил от Базельского магистрата золотую медаль.

В 1745 г. в Базеле скончался отец Эйлера, а несколько лет спустя умер младший брат Эйлера Генрих; оставшаяся в одиночестве мать решила переехать к сыну в Берлин. Л. Эйлер в сопровождении своего старшего сына Иоганна Альбрехта встречает ее во Франкфурте-на-Майне и привозит в Берлин, где она и жила до своей смерти в 1761 г.

В течение всего времени пребывания в Берлине Эйлер продолжал оставаться почетным членом Петербургской Академии. Как он и обещал при отъезде из Петербурга, он по-прежнему печатал многие из своих трудов в изданиях Петербургской Академии; редактировал математические отделы русских журналов; приобретал для Петербурга книги и инструменты; при нем, а иной раз и у него на квартире, на полном пансионе, разумеется, за соответствующую оплату (которую, кстати, канцелярия Академии при-

П. Мопертюи
(1698—1759)

сылала с большим запозданием), годами жили молодые русские ученые, командированные на стажировку,— будущий «президент» Петербургской Академии К. Г. Разумовский, с которым Эйлер занимался частным образом, С. К. Котельников, С. Я. Румовский, ставший потом вице-президентом Академии, и другие. И как Эйлер некогда подружился в доме своего учителя И. Бернулли с его сыновьями, так и у Степана Румовского навсегда установились дружеские отношения с сыном Эйлера Иоганном Альбрехтом. Эйлеру посылались на отзыв письменные работы, так как с его отъездом в Петербурге не осталось крупных специалистов по математике.

Правитель академической канцелярии Шумахер, не терпевший русских ученых вообще, был особенно враждебно настроен по отношению к Ломоносову. В 1747 г. он послал сочинения Ломоносова Эйлеру, надеясь получить отрицательный отзыв и на этом основании Ломоносова «определить к переводам, а от профессорства отлучить», как записано в архивных документах. Но отзыв Эйлера оказался даже не просто положительным, а весьма восторженным:

«Все сии сочинения,— писал Эйлер,— не токмо хороши, но и весьма превосходны, ибо он пишет о материях физических и химических... с таким основательством, что я совершенно уверен в справедливости его изъяснений».

Эйлер вряд ли был лично знаком с Ломоносовым — разве что встречался с ним в 1736 г., когда Ломоносов был студентом академического университета. Потом Ломоносов уехал стажироваться в Марбург и вернулся в Петербург... через несколько дней после отъезда Эйлера в Берлин. А когда Эйлер возвратился из Берлина обратно в Петербург, Ломоносова уже не было в живых. Однако Эйлер внимательно следил за работами Ломоносова в области физики и химии, высоко ценил ясность и простоту его изложения и всегда хорошо отзывался о его сочинениях. Когда Берлинская Академия объявила конкурс на лучшее сочинение о происхождении селитры, Эйлер направил на имя президента Петербургской Академии письмо:

«Я сомневаюсь,— писал он,— чтобы мог кто-нибудь, кроме Ломоносова, написать об этом лучше, почему и прошу убедить его приняться за работу. Было бы, конечно, почетно, когда бы член императорской Академии и притом русский получил премию...»

Иоганн Бернулли, при всей своей гениальности, скептически относился к уму и способностям других, в том числе и собственных детей.

Однажды он предложил своему сыну Даниилу довольно сложную для его возраста задачу. Тот усердно занимался ею несколько дней и, найдя наконец решение, прибежал к отцу поделиться своей радостью. Но отец неожиданно огорошил его: «И над этим пустяком ты так долго раздумывал?!»

Когда Даниил, будучи уже профессором и академиком, создал в 1738 году свою знаменитую «Гидродинамику», Иоганн Бернулли не мог допустить даже мысли, что сын оказался талантливее его самого — пусть даже в какой-то специальной области. Он публично заявил, что вынашивал те же идеи чуть ли не десять лет, сформулировал их по-своему и, ничтоже сумняшеся, включил в собрание своих сочинений. Даниил оказался в глазах ученого мира лишь как бы распространителем идей своего знаменитого отца.

«Бильфингер упрекнул меня,— писал Д. Бернулли Эйлеру,— что я-де все списал у отца. Но ведь я не взял у него ни единого слова!»

Однако — бывают же на свете чудеса! — тщеславный и завистливый Иоганн Бернулли, который не терпел превосходства более талантливого, но рано умершего брата Якоба и который боялся соперничества собственного сына,— великий Иоганн Бернулли преклоняется перед своим учеником Леонардом Эйлером! Свидетельство тому — двадцатилетняя переписка Бернулли с Эйлером. Проследим, хотя бы, как менялся стиль первых строк посланий Бернулли.

Сначала (1728 г.) — отечески благожелательно:

«Высокоученому и изобретательному юному мужу...»

Через год — «Широко известному ученому...»

Еще через несколько лет, когда Эйлер легко, как бы играючи, получил некоторые результаты, над которыми тщетно бился Бернулли (например, нашел сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$), в письмах появляется превосходная степень.

1737 год: «Широко известному и весьма проницательному математику...»

Наконец в последних письмах, относящихся к 1745 г.:

«Несравненному Л. Эйлеру, главе математиков...»

В 1742 г. вышло четырехтомное собрание сочинений И. Бернулли. Посылая его из Базеля Эйлеру в Берлин, старый ученый писал своему ученику:

«Я посвятил себя детству высшей математики. Ты, мой друг, продолжишь ее становление в зрелости».

Эйлер оправдал надежды своего учителя. Одна за другой выходят его научные работы колоссальной важности: «Введение в анализ бесконечных» (1748), «Морская наука» (1749), «Теория движения Луны» (1753), «Наставление по дифференциальному

М. В. Ломоносов (1711—1765)

исчислению» (1755) — не говоря уже о десятках статей по отдельным частным вопросам, печатавшихся в изданиях Берлинской и Петербургской Академий.

По поручению Фридриха II Эйлер перевел на немецкий язык «Новые принципы артиллерии» английского механика Бенжамена Робинса и дополнил книгу анализом движения снаряда в канале ствола орудия, а также учением о движении круглого снаряда в воздухе.

«Я читаю с большой пользой для себя «Артиллерию» Робинса, снабженную Вами превосходными замечаниями,— писал Ломоносов в письме к Эйлеру 5 июля 1748 г.

Венценосный владыка часто давал ученому поручения вовсе, казалось бы, не связанные с наукой: то нужно было подсчитать количество воды для фонтанов Потсдамского парка Сан-Суси, то проконсультировать постройку Финовского канала (между реками Хавель и Одер), то рассчитать прочность колонн строящегося дворца... Но Эйлер обобщает и расширяет многие частные проблемы, а названное выше задание короля послужило в 1743 г. поводом для расчета общей теории прочности колонн, которая и по сей день служит основой подобных построек. Конкретные практические задачи, решенные Эйлером, являлись обычно лишь побочным продуктом капитальных теоретических исследований, а вовсе не самоцелью его работ.

Огромную популярность приобрели в XVIII, а отчасти и в XIX в. Эйлеровы «Письма о разных физических и философических материях, написанные к некоторой немецкой принцессе...», которые выдержали свыше 40 изданий на 10 языках.

Двухтомное «Введение в анализ бесконечных» содержало не столько собственно анализ, сколько алгебру, аналитическую геометрию и другие вопросы. Главной идеей сочинения было учение о функциях и обоснование важнейшей роли этого понятия в математике и ее приложениях. Книги отличались естественностью изложения, насыщенностью примерами и, хотя являлись учебниками, читались с интересом. С появлением этих книг математический анализ становится методически разработанной учебной дисциплиной.

Некоторые знаменитые ученые в своих книгах и статьях «поражают» читателя: приводят неожиданные результаты решения той или иной проблемы, а затем доказывают, что эти результаты верны.

Эйлер же, напротив, не стремится удивить читателя; он вместе с читателем как бы проходит весь путь, ведущий к открытию, показывает всю цепь рассуждений и умозаключений, приводящую к результату.

«Я приложил старание не только к тому, чтобы подробнее и отчетливее, чем обычно, изложить все, чего требует анализ,— пишет он в предисловии к «Введению в анализ бесконечных».— Я развил также довольно много вопросов, благодаря которым читатели могут незаметно освоиться с идеей бесконечности».

Эйлер — искусный учитель. Он умеет поставить себя в положение ученика; он знает, в чем ученик может встретить затруднение,— и стремится предупредить это затруднение. Мопертюи был очень высокого мнения об Эйлере и как об ученом, и как об организаторе. Уезжая весной 1753 г. на отдых во Францию, он рекомендовал королю Эйлера в качестве своего заместителя. А год спустя, вернувшись и вступив в исполнение президентских обязанностей, добился утверждения 20-летнего Иоганна Альбрехта Эйлера академиком. Незадолго до этого Иоганн Альбрехт заслужил премию Геттингенского научного общества и, как говорили в Академии, «подавал надежды».

В 1756 г. здоровье Мопертюи резко ухудшилось и он опять отправился в отпуск на родину — чтобы больше не вернуться. Эйлер вновь фактически возглавил Академию, но президентом так и не был утвержден.

После смерти Мопертюи Эйлер продолжал руководить Берлинской Академией. Однако шел четвертый год войны. Новых членов в Академию не принимали, старые постепенно выбывали. Несмотря на увеличение объема организационной работы, Эйлер не снижает научной продуктивности. В 1760—1761 гг. он пишет упомянутые выше «Письма к немецкой принцессе» — свыше 200 «Писем», содержавших всю известную тогда физику в популярном изложении, а также критику лейбницевского «учения о монадах». В это же время Эйлер создает свою «Динамику твердого тела» (1760, издана в 1765 г. в Ростоке) и готовит к печати трехтомное «Интегральное исчисление», которое было опубликовано уже после возвращения его в Россию.

В 1757 г. Эйлер впервые в истории нашел формулы для определения критической нагрузки при сжатии упругого стержня. Однако в те годы эти формулы не могли найти практического применения.

Почти сто лет спустя, когда во многих странах — и прежде всего в Англии — стали строить железные дороги, потребовалось рассчитывать прочность железнодорожных мостов. Профессор Лондонского университета, известный английский инженер И. Ходжкинсон провел многочисленные эксперименты по определению возможной нагрузки стержней при сжатии — и критическая нагрузка оказалась раз в десять меньше, чем получалось по формулам Эйлера.

«Значит, великий Эйлер ошибался?!» — все громче и громче восклицали скептики.

Но еще полвека спустя выяснилось, что Ходжкинсон проводил эксперименты с очень короткими стержнями, в которых важную разрушающую роль играют пластические свойства (а не только упругие, которые, собственно, и рассматривал Эйлер). После этого модель Эйлера была реабилитирована и принесла практическую пользу; одновременно были установлены и границы применения формул, выведенных Эйлером.

Эйлер «выдавал» в среднем 800 страниц «ин-кварто» в год. Это было бы немало даже для создателя романов; для математика же такой объем научных трудов, очень четко изложенных, включающих механику и теорию чисел, анализ и музыку, астрономию и физику, теорию вероятностей и оптику...— просто не укладывается в сознании!

Русская императрица Елизавета Петровна унаследовала от отца, Петра I, энергию и властолюбие, но отнюдь не способности и тягу к знаниям. Она куда больше заботилась о развлечениях, чем о делах государства Российского.

Елизавета приблизила к себе самого «громогласного» из певчих придворного хора Алексея Разумовского, возвела его в графы, подарила огромные земельные владения и многие тысячи крепостных.

Новоиспеченный граф, имевший огромное влияние на императрицу, послал в 1743 г. своего 16-летнего брата Кирилла за границу «учиться», приставив сопровождающего и предоставив неограниченный кредит.

В течение двух лет Кирилл объездил дюжину европейских столиц и университетских центров, «изучая» в них главным образом игорные и другие увеселительные «дома». Некоторое время Кирилл провел в Берлине, пытаясь учиться у Эйлера. Но жить в доме Эйлера, где царил строгий режим и образцовый порядок, оказалось «неудобно», а обучение свелось к нескольким формально проведенным беседам — сиятельный недоросль предпочитал не столько учиться, сколько развлекаться.

Возвратившись в Петербург, 18-летний Кирилл (который к этому времени был произведен в графы и в камергеры) потрясал многочисленными свидетельствами своей «учености», и ... малограмотная императрица «в рассуждение усмотренной в нем особливой способности и приобретенного в науках искусства», назначила его президентом «Императорской де сиянс Академии» — ибо самое слово «наука» в русский язык еще только входило. Кирилл тотчас назначил немца Шумахера академиком-секретарем, а своего спутника в поездке по Европе Г. Н. Теплова — правителем дел, и стал реформировать Академию, диктуя знаменитым ученым, что и как им следует делать.

Это издевательство (другого слова не подберешь) над академиками продолжалось до 1750 г., когда «президент» оставил, наконец, Академию, чтобы стать гетманом Украины. Счастье Эйлера, что он был в эти годы вдали от России!

Впрочем, Эйлер тоже подвергался поучениям коронованного владыки — Фридриха II.

Как уже сказано, после смерти Мопертюи Эйлер фактически руководил Берлинской Академией, но не мог решать важнейших вопросов о привлечении новых членов и об установлении окладов. А однажды, после напоминания королю о нуждах Академии, Эйлер получил весьма резкий ответ: привыкнув к правилам алгебраическим, он-де забыл правила хорошего тона; король-де и сам знает о своих нуждах! Иными словами: не суй носа, куда не просят.

Все это шло вразрез с привычным для швейцарского гражданина свободомыслием. Эйлер весьма болезненно воспринимал деспотическое вмешательство короля во внутренние дела Академии.

После окончания семилетней войны Берлинская Академия стала пополнять свои поредевшие ряды. В течение двух лет были приняты 7 новых членов, и среди них — Иоганн III Бернулли и Иоганн Генрих Ламберт. Впрочем, Ламберт был принят не сразу.

Эйлеру потребовалось много времени и стоило немалых усилий убедить короля в гениальности Ламберта. Это был тот самый Ламберт, которого Кант считал величайшим философом века, «Фотометрия» которого стала классическим произведением в физике и имя которого связано с целым рядом открытий в области точных наук. Однако и «ложной» скромностью Ламберт отнюдь не страдал.

«Первыми из ныне живущих математиков я считаю Эйлера и Д'Аламбера или, если угодно, Д'Аламбера и Эйлера, ибо каждый из них дополняет блестящие качества другого,— рассуждал Ламберт во всеуслышание.— Эйлер обладает бо́льшей непосредственностью и легкостью, Д'Аламбер — бо́льшей утонченностью, остроумием и изяществом. Оба в равной мере глубоки и продуктивны, так что трудно одного из них предпочесть другому; каждый из них, бесспорно, первый. Лагранж является ныне вторым, но, возможно, догонит их. А третий — я».

Нет, в рассуждении Ламберта — не пустое тщеславие, а объективность ученого, хотя и высказанная чересчур прямолинейно. В 1765 г. Ламберт стал, наконец, членом Берлинской Академии.

Содействие избранию Ламберта было последним «административным» делом Эйлера в Берлинской Академии. Он давно уже понял, что не будет утвержден президентом — и не желал больше руководить Академией де-факто. К тому же из России продолжали поступать приглашения одно другого лестнее.

Вернуться в Россию Эйлера приглашали и раньше. К. Г. Разумовский, на которого Эйлер произвел весьма благоприятное впечатление в Берлине, став президентом, тотчас послал Эйлеру приглашение. Но Эйлера, разумеется, отнюдь не прельщала перспектива оказаться в административном подчинении у Разумовского и, особенно, у Шумахера.

Ж. Д'Аламбер
(1717—1783)

Однако в 1762 г. на русский престол вступила Екатерина II, получившая прозвище «Великая», которая осуществляла политику «просвещенного абсолютизма». Она хорошо понимала значение науки как для процветания государства, так и для собственного престижа; провела ряд важных по тому времени преобразований в системе народного просвещения и культуры — разумеется, при полном сохранении помещичье-феодального господства. Однако, если Фридрих II «отпускал» на Берлинскую Академию лишь 13 тыс. талеров в год, то Екатерина II ассигновала свыше 60 тыс. рублей — сумму куда более значительную.

Императрица приказала предложить Эйлеру управление математическим классом (отделением), звание конференц-секретаря Академии и оклад 1800 рублей в год; его сыну Иоганну Альбрехту — звание академика и 600 рублей в год. «А если не понравится,— говорилось в письме,— благоволит сообщить свои условия, лишь бы не медлил приездом в Петербург». Одновременно Эйлеру и его семье обещали достаточно денег на путевые расходы. Но... Д'Аламбер, которого Фридрих прочил в президенты Берлинской Академии, наотрез отказался занять этот пост. И Эйлер снова заколебался.

«Д'Аламбер уже десять дней как в Потсдаме,— пишет Эйлер в одном из своих писем,— но объявил наотрез, что не вступит в здешнюю службу никогда и даже предложил меня на место президента Академии. Но я наверное знаю, что предложение будет отвергнуто».

Однако Д'Аламбер не терял надежды уговорить Фридриха утвердить Эйлера президентом: Д'Аламбер был очень высокого мнения и о научных, и об организационных талантах Эйлера, и о его чисто человеческих качествах. «Я счел бы себя счастливым, если бы сохранил королю и Академии такого человека, как Вы»,— писал он в это время Эйлеру.

Эйлер подает Фридриху прошение об увольнении со службы. Тот не отвечает. Эйлер пишет вторично — но Фридрих не желает даже обсуждать вопрос об отъезде Эйлера:

«Вы мне доставите удовольствие,— пишет он 17 марта,— если откажетесь от своей просьбы и не будете более писать об этом».

Эйлер перестает работать для Берлинской Академии.

«Он не ходит больше в академические собрания, не работает и не желает работать для Академии,— пишет в это время Иоганн

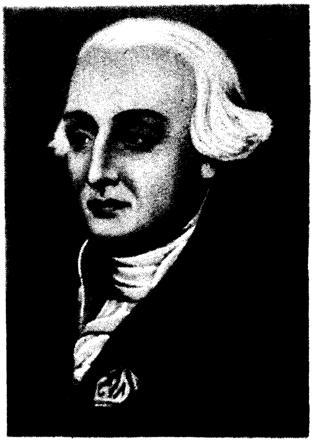
Альбрехт.— Одним словом, он как бы отставлен, чтобы быть освобожденным или, как здесь говорят, чтобы получить расчет».

Наконец, 30 апреля 1766 г. он пишет королю резкое письмо, в котором ссылается на предложения Екатерины и напоминает о своих правах свободного гражданина Швейцарии.

Король задумался: как-никак, швейцарский гражданин, а за спиной его — Екатерина Великая. С этим нельзя не считаться...

«Но некоторые из его детей родились в Пруссии, и они — мои подданные!— воскликнул король.— Их-то я вправе не отпускать!»

И два дня спустя он пишет:



Л. Лагранж
(1736—1813)

«Je vous permets, sur votre lettre du 30 d'avril dernier, de quitter pour aller en Russie.

Potsdam, 2.V.1766».

(«В соответствии с Вашим письмом от 30 апреля я разрешаю Вам уехать, чтобы отправиться в Россию».)

Одновременно он категорически запретил отъезд Кристофу Эйлеру, который родился в Пруссии и служил в прусской армии. А после напоминания Эйлера, что не следует отрывать молодого человека от семьи,— даже приставил к нему стражу. Кристофу было разрешено уехать лишь намного позже, после вмешательства Екатерины.

После того как Д'Аламбер отказался перейти на службу к Фридриху, в мире оставался лишь один человек, достойный заменить Эйлера в Берлине. Это был молодой французский ученый Жозеф Луи Лагранж, «второй» математик мира, по классификации Ламберта.

Уже в 16-летнем возрасте, будучи слушателем артиллерийской школы в Турине (Италия), Лагранж стал там же преподавать математику и даже составил свой учебник. Пять лет спустя, в 1759 г., он написал очень важное теоретическое сочинение «О способах нахождения наибольших и наименьших значений величин интегралов», продолжавшее работы Эйлера в области вариационного исчисления. Эйлер в Берлине получил экземпляр этого сочинения еще до его опубликования, пришел в восторг и ... тут же рекомендовал 23-летнего Лагранжа в члены Берлинской Академии. Впоследствии Лагранж развил и дополнил многие работы Эйлера по вариационному исчислению, а во многих отношениях продвинулся дальше Эйлера; он, если можно так выразиться, как бы поднялся на плечах Эйлера. И как некогда старый

Иоганн Бернулли справедливо отдал пальму первенства более молодому Эйлеру, так и Эйлер несколько лет спустя писал, что «вступивший в апогей своей славы Лагранж является весьма достойным моим преемником (в Берлинской Академии) и самым знаменитым геометром века».

Лагранж приехал в Берлин почти сразу же после отъезда Эйлера. В том же году он стал президентом Берлинской Академии и оставался им более 20 лет. Лишь в 1787 г., уже после смерти Фридриха, Лагранж переехал во Францию.

Фридрих II, как уже сказано, не понимал существа математики, не видел пользы от точных наук вообще. И, тем не менее, истории было угодно, чтобы и первый президент «его» Академии Мопертюи, и долголетний и.о. президента Эйлер, и «кандидат» в президенты Д'Аламбер, и новый президент Лагранж — все были математики!

Заметим, что и нынешний президент АН СССР А. П. Александров и его предшественник М. В. Келдыш — тоже математики.

4. СНОВА В ПЕТЕРБУРГЕ

Сразу же по прибытии Эйлер был принят императрицей. Екатерина осыпала ученого милостями: пожаловала деньги на покупку дома на Васильевском острове и на приобретение обстановки, предоставила на первое время одного из своих поваров и поручила подготовить соображения о реорганизации Академии.

Еще в начале 1766 г. Екатерина приказала «уведомить г. Эйлера, что до его приезда я не предпринимаю никаких перемен в Академии... чтобы лучше уговориться с ним об улучшениях». В последующие месяцы состоялось несколько длительных бесед Эйлера с императрицей.

Эйлер представил (на французском языке) проект организации Академии, который, однако, так и не был осуществлен.

Все условия, обещанные Эйлеру, были выполнены. Иоганн Альбрехт получил кафедру физики, но вскоре стал постоянным секретарем Академической конференции и постепенно отошел от научной деятельности, хотя продолжал помогать отцу, особенно после того, как тот совсем ослеп.

После возвращения в Петербург у Эйлера образовалась катаракта второго, левого глаза — и он перестал видеть. Однако это не отразилось на его работоспособности. Приехавший с ним из Берлина мальчик-портной, понятия не имевший о математике, писал под его диктовку по-немецки, и Эйлер очень быстро продиктовал ему свои «Элементы алгебры», которые были сразу же переведены П. Иноходцевым и И. Юдиным на русский и вышли в двух томах в 1768 и 1769 гг. под названием «Универсальная арифметика». В следующем году был напечатан немецкий оригинал («Anleitung zur Algebra»). Это руководство выдержало три десятка изданий на 6 языках; «в этом совсем элементарном курсе царит дух открытий» (Н. Н. Лузин), а «отбор материала, его расположение и метод изложения оказали решающее влияние на преподавание алгебры в средних школах всего мира» (А. П. Юшкевич).

В 1767 г. в Петербург приехал физик Вольфганг Людвиг Крафт, сын петербургского академика Г. В. Крафта. Будучи вначале адъюнктом Академии, он помогал Эйлеру в работе над тремя томами «Диоптрики», изданными один за другим в 1769, 1770 и 1771 гг. — в них было объединено все, написанное Эйлером за три десятилетия об оптических инструментах. Этим сочинением была создана новая по тем временам наука об оптических инструментах, описывающая законы прохождения и преломления световых лучей, правила расчета телескопов и микроскопов, вычисление аберрации — все, что может дать оптике математика. Будучи слепым, Эйлер, блестяще изложил законы распространения света!

С. Я. Румовский переводит на русский язык «Письма к немецкой принцессе», написанные Эйлером по-французски еще в Берлине. В 1768—1772 гг. они выходят тремя томами вначале на русском, затем на французском и немецком языках. Это единственное (кроме «Универсальной арифметики») популярное сочинение Эйлера стало настольной книгой всех культурных людей Европы и содержало изложение почти всей физики и философии того времени. Помимо четырех русских изданий, «Письма» издавались 12 раз на французском, 9 — на английском, 6 — на немецком, по 2 — на голландском и шведском, а также на испанском, итальянском, датском языках. Ныне готовится новый перевод «Писем» на русский язык: они и по сей день не утратили своего познавательного и философского значения.

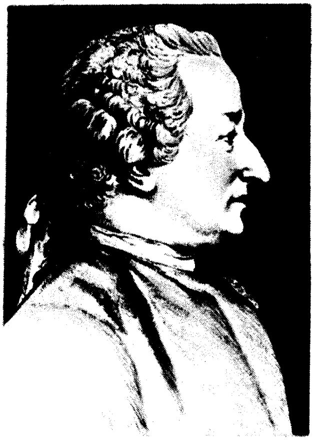
Эйлер в силу своего воспитания был верующим человеком. Однако свою веру он строго отделял от научной деятельности и в своей философии стоял на позициях вульгарного материализма, не пытаясь примирить эти противоположные точки зрения.

«Чем меньше вмешивать бога и божественные силы в дела мирские, в том числе в науку, тем лучше и для науки, и для авторитета бога»,— считал Эйлер. А в вопросах познаваемости мира и его закономерностей он явно придерживался материалистических взглядов.

С развитием торговли и мореплавания особенно актуальным стало решение важной практической задачи: определение местоположения корабля в открытом море.

Географическую широту определить довольно легко: днем — по высоте Солнца, ночью — по высоте Полярной звезды над горизонтом. Нужны лишь хорошие угломерные инструменты, да умение выполнять несложные расчеты, облегчаемые наличием таблиц.

Чтобы определить долготу, следовало сравнить местное время (определяемое по Солнцу или по звездам) с местным временем



А. Клеро
(1713—1765)

пункта, долгота которого известна. Но пока не было достаточно точных хронометров, чуть ли не единственным способом определения времени в открытом море было наблюдение положения Луны. А для этого необходимо было хорошо знать закономерности сложного движения Луны среди звезд.

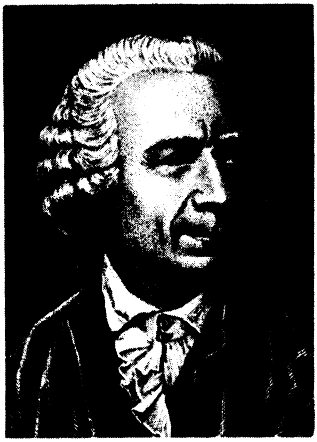
Еще в начале XVIII в. английский парламент по предложению Ньютона выделил огромную по тем временам сумму — 20 000 фунтов стерлингов в качестве премии за решение проблемы определения долготы,— ну, хотя бы, с точностью до полградуса, что соответствует определению положения в море с точностью до нескольких десятков километров.

Определение видимого положения Луны требовало знания законов ее движения под действием притяжения Земли и Солнца. Эту сложнейшую «задачу трех тел» решали в середине XVIII в. Эйлер, Д'Аламбер и Клеро — каждый на свой лад. Решение Эйлера — наиболее удобное для практического применения — было использовано геттингенским математиком Т. Майером, который и составил знаменитые лунные таблицы, пригодные для использования мореплавателями. Часть премии английского парламента была присуждена Т. Майеру. Эйлеру также была выделена часть премии за теоретическую часть работы.

Несколько лет спустя английский часовщик Джон Гаррисон изготовил особо точные часы — хронометр, перевозка которого на кораблях позволяла всегда знать местное время порта или, скажем, местное время начального (гринвичского) меридиана. Гаррисон получил половину премии. Однако хронометров изготавливалось немного, стоили они очень дорого, и способ определения долготы по лунным расстояниям применялся на практике около 100 лет. Проблема получила окончательное решение лишь в начале XX в., когда была создана служба радиосигналов точного времени.

Работы Эйлера, Д'Аламбера и Клеро были недостаточно точными. В 1770 и 1772 гг. Парижская Академия объявляла конкурсы на уточнение теории движения Луны. Обе премии были присуждены Эйлеру: за «Теорию движения Луны и, в частности, векового уравнения» (1770) и за «Новые изыскания движения Луны» (1772). В подготовке этих работ принимал участие старший сын Эйлера Иоганн Альбрехт: во-первых, он писал под диктовку отца, а во-вторых, выполнил по его указанию некоторые виды работ.

В 1772 г. была напечатана «Теория движения Луны, пересмотренная новым методом», в подготовке которой приняли участие, помимо Иоганна Альбрехта, петербургские академики В. Г. Крафт и А. И. Лексель.



Л. Эйлер

Эта работа Эйлера, по словам академика А. Н. Крылова, опередила свое время по крайней мере на целое столетие, и была продолжена американскими астрономами Дж. Хиллом и Э. Брауном сто лет спустя. А в 1934 г. работа Эйлера была заново переведена с французского академиком А. Н. Крыловым и издана на русском языке.

В 1771 г. в жизни Эйлера произошли два серьезных события.

В мае в Петербурге возник большой пожар, уничтоживший сотни зданий, в том числе дом и почти все имущество Эйлера. Самого ученого с трудом спас приехавший ранее из Базеля швейцарский ремесленник Петр Гримм. Правда, почти все рукописи удалось уберечь от огня; сгорела лишь часть «Новой теории движения Луны», но Иоганн Альбрехт с помощью отца, сохранившего до глубокой старости феноменальную память, быстро написал ее заново.

Слепому старцу пришлось переселиться в другой дом, расположение комнат и предметов в котором было ему незнакомо. Однако эта неприятность оказалась, к счастью, лишь временной.

В сентябре того же года в Санкт-Петербург прибыл известный немецкий окулист барон Вентцель, который согласился сделать Эйлеру операцию — и удалил с левого глаза катаракту. За работой приезжей знаменитости приготовились было наблюдать 9 местных светил медицины. Но вся операция заняла 3 минуты — и Эйлер снова стал видеть!

Искусный окулист предписал беречь глаз от яркого света, не писать, не читать — лишь постепенно привыкать к новому состоянию. Но разве мог Эйлер «не вычислять»? Уже через несколько дней после операции он снял повязку. И вскоре потерял зрение снова. На этот раз — окончательно. Однако, как ни странно, отнесся он к событию с величайшим спокойствием. Научная продуктивность его даже возросла: без помощников он мог только размышлять, а когда приходили помощники, диктовал им или писал мелом на столе, кстати сказать, вполне разборчиво, ибо кое-как мог отличать белый цвет от черного. Его сын Иоганн Альбрехт переносил записи в толстую книгу, сохранившуюся до наших дней.

В 1773 г. по рекомендации Д. Бернулли в Петербург приехал из Базеля его ученик Никлаус («Николай Иванович») Фусс. Это было большой удачей для Эйлера. Фусс обладал редким сочетанием математического таланта и умения вести практические дела, что и дало ему возможность сразу же после приезда взять на себя заботы о математических трудах Эйлера. Вскоре Фусс женился на внучке Эйлера. В последующие десять лет — до самой своей смерти — Эйлер именно ему диктовал свои труды. Дважды в месяц, а порой и чаще, Фусс сдавал в печать очередной текст сочинений Эйлера.

Каждое утро Фусс читал Эйлеру поступающую на его имя корреспонденцию, газеты, а также математические работы; Эйлер диктовал, давал указания — и к следующему утру Фусс приносил проект очередного сочинения. Эйлер вносил поправки, Фусс записывал — и еще через день-два приносил готовую работу, которую Эйлеру оставалось лишь утвердить.

В 1773 г. умерла жена Эйлера, с которой он прожил почти 40 лет. Это было большой потерей для ученого, искренне привязанного к семье. После трех лет вдовства Эйлер в 1776 г. женился вторично на сводной сестре своей покойной жены Саломее Гзелль.

Эту женщину Эйлер хорошо знал и видел раньше (что особенно важно для слепого); она тоже была родом из Швейцарии; с ее вступлением в права хозяйки дома не пришлось менять привычного уклада жизни.

В последние годы жизни ученый продолжал усердно работать, пользуясь для чтения «глазами старшего сына» и ряда своих учеников: Н. Фусса, М. Головина (племянника М. В. Ломоносова), Ф. Шуберта и других. Существенную помощь, особенно в области разработки физических и астрономических приложений математики, оказывали В. Крафт и А. Лексель.

В сентябре 1783 г. ученый стал ощущать головные боли и слабость. 18 сентября после обеда, проведенного в кругу семьи, беседуя с А. И. Лекселем об открытой недавно планете Уран и ее орбите, он внезапно почувствовал себя плохо. Эйлер успел произнести «Я умираю» — и потерял сознание. Через несколько часов, так и не придя в сознание, он скончался от кровоизлияния в мозг.

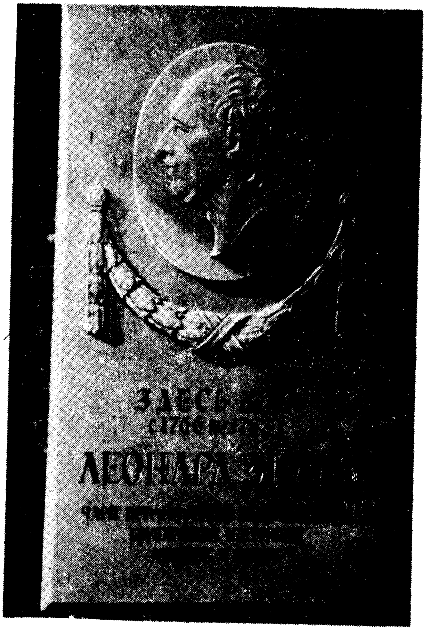
По образному выражению французского ученого Кондорсе, «Эйлер перестал жить и вычислять». Его похоронили на Смоленском кладбище в Петербурге. Надпись на памятнике гласила: «Леонарду Эйлеру — Петербургская Академия». В 1956 г. прах Эйлера перенесли в Ленинградский некрополь.

Через несколько дней после смерти Эйлера состоялось траурное заседание конференции Академии, в ноябре того же года на торжественном собрании Академии Н. Фусс произнес речь памяти своего учителя, а в начале 1785 г. в зале заседаний Академии против президентского кресла был укреплен бюст Эйлера на мраморной колонне. После переезда Президиума Академии наук СССР в Москву этот бюст установлен в одном из московских залов Президиума Академии.

Посмертные почести, оказанные Эйлеру в России, не остались незамеченными в странах Европы. Математик Кондорсе в речи, произнесенной во французской Академии наук, сказал: «Народ, который мы в начале этого (т. е. XVIII.— *А. Я.*) века принимали за варваров, в настоящем случае подает пример цивилизованной Европе — как чествовать великих людей при жизни и уважать их память после смерти...»

Вследствие политических кризисов в мире его карьера ученого неоднократно подвергалась опасности — но ни разу дело не дошло до какой-либо катастрофы.

Эйлер привил любовь к математике и своим трем сыновьям.



Мемориальная доска, установленная в 1957 г. на доме, в котором проживал Л. Эйлер во второй петербургский период жизни (Ленинград, Набережная лейтенанта Шмидта, 15)

Наиболее способным был старший сын Иоганн Альбрехт — однако и он главным образом лишь разрабатывал идеи отца.

Учеными секретарями Санкт-Петербургской Академии наук в течение целого века были потомки и родственники Эйлера. С 1769 г. этот пост занимал Иоганн Альбрехт, после его смерти в 1800 г. — Н. Фусс, после смерти Н. Фусса — его сын Павел, правнук Эйлера.

Эйлер, Д'Аламбер и Лагранж образовали замечательный математический триумвират конца XVIII в. И хотя в это время уже жили на свете Лаплас, Лежандр, Монж, Фурье, Пуассон, но они еще ничего не успели сделать для науки. Коши еще не родился. Будущему «королю математиков» Карлу Фридриху Гауссу в момент смерти Эйлера едва минуло 6 лет. Правда, о нем говорили, что уже в этом возрасте он «умел считать лучше, чем говорить».

В начале нашего века в связи с 200-летием со дня рождения Эйлера швейцарское общество естествоиспытателей решило издать полное собрание сочинений ученого. Это издание не завершено и по сей день. Чтобы только разобраться в научном наследии Эйлера, не хватит целой человеческой жизни.

Во второй части мы попытаемся кратко рассказать о некоторых наиболее важных работах Леонарда Эйлера.

Часть II

ЭЙЛЕР-МАТЕМАТИК

Трудно даже перечислить все отрасли науки, в которых весьма успешно трудился Эйлер. Но в первую очередь он был математиком. Его сочинения по механике, физике, астрономии большей частью представляют собой математическую формулировку и математическое решение прикладных проблем.

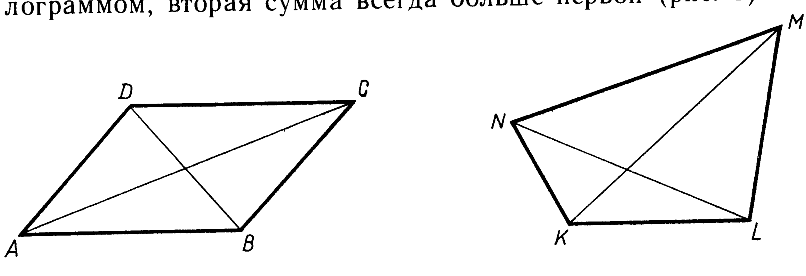
Расскажем о некоторых результатах Эйлера в области решения проблем, доступных пониманию старшеклассника.

1. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И ТРЕУГОЛЬНИК

Казалось бы, что нового можно найти в этих фигурах, которые изучались чуть ли не со времен египетских фараонов?

В феврале 1748 г. Эйлер писал Гольдбаху, что доказал теорему, которая кажется ему любопытной.

Школьникам старших классов известно, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. Эйлер доказал, что в четырехугольнике, не являющемся параллелограммом, вторая сумма всегда больше первой (рис. 1).



$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$ $\qquad$ $KL^2 + LM^2 + MN^2 + NK^2 > KM^2 + NL^2.$

Рис. 1

Далее. Известно, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке; эта точка H называется *ортоцентром* треугольника.

Назовем середины отрезков высот треугольника от ортоцентра до каждой из вершин (т. е. точки K, Q, P на рис. 2) *точками Эйлера.*

В 1765 г. в «Трудах» Петербургской Академии была опубликована **теорема Эйлера**: *Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков высот треугольника от ортоцентра до вершины лежат на одной окружности.*

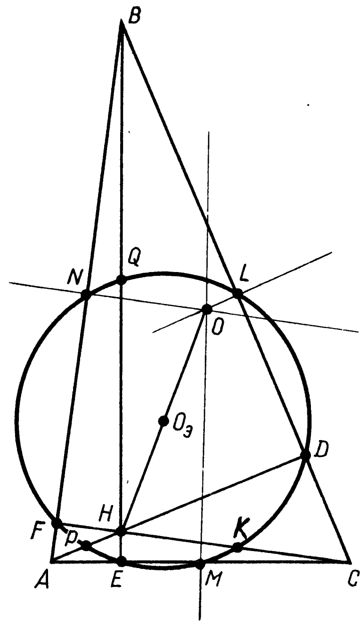


Рис. 2

Эта окружность называется *окружностью девяти точек* или *окружностью Эйлера.* Радиус ее равен половине радиуса окружности, описанной около этого треугольника.

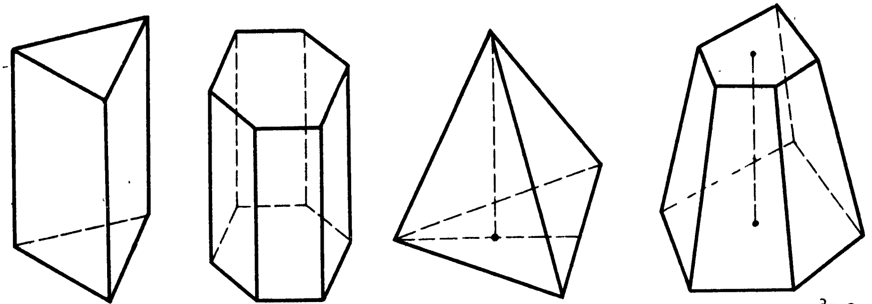
Прямую, соединяющую ортоцентр треугольника с центром O описанной окружности, называют *прямой Эйлера.* Центр окружности Эйлера $O_Э$ лежит на этой прямой как раз посредине между ортоцентром и центром описанной окружности*.

2. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О МНОГОГРАННИКАХ

Многогранник — тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Призма и пирамида — многогранники. Призма может быть треугольной (рис. 3, *а*) или, скажем, шестиугольной (рис. 3, *б*), пирамида может быть полной и иметь в основании, например, треугольник (рис. 3, *в*), а может быть усеченной и иметь своими основаниями, скажем, пятиугольники (рис. 3, *г*). Существуют 5 видов *правильных* многогранников, т. е. таких, все грани которых — правильные и равные между собой многоугольники (рис. 4).

Многогранник называется «простым» или «односвязным», если он не имеет «дыр»; все упомянутые и изображенные выше многогранники — простые; а на рисунке 5 изображен «непростой», или «двусвязный», многогранник, имеющий сквозное отверстие.

* С некоторыми геометрическими свойствами окружности Эйлера и прямой Эйлера можно познакомиться по книге С. И. Зетеля «Новая геометрия треугольника» (М., Учпедгиз, 1940).



а) треугольная призма; б) шестиугольная призма; в) пирамида с треугольным основанием; г) усеченная пирамида с пятиугольным основанием

Рис. 3

Попробуем выписать число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) некоторых простых многогранников.

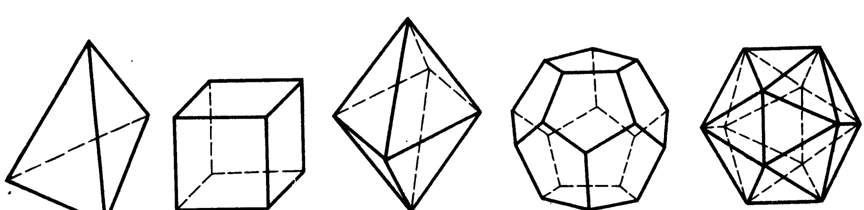
Вид многогранника	Число: вершин В	Число: ребер Р	Число: граней Г	Значение выражения В − Р + Г
Куб (параллелепипед)	8	12	6	2
Призма с 6 боковыми гранями	12	18	8	2
Пирамида с треуг. основан. (тетраэдр)	4	6	4	2
Пирамида с четырехуг. основан.	5	8	5	2
Усеч. пирамида с треуг. основан.	6	9	5	2
Усеч. пирамида с пятиуг. основан.	10	15	7	2

Обратите внимание на последнюю колонку таблицы: значение выражения В − Р + Г равно двум для каждого из перечисленных многогранников. Случайно ли это?

Эйлер доказал, что для л ю б о г о простого многогранника

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2,$$

и это свойство получило название *теоремы Эйлера о многогранниках.*



а) тетраэдр; б) куб; в) октаэдр; г) додекаэдр; д) икосаэдр

Рис. 4

С помощью этой теоремы, между прочим, легко доказать, что существует не более пяти видов правильных многогранников.

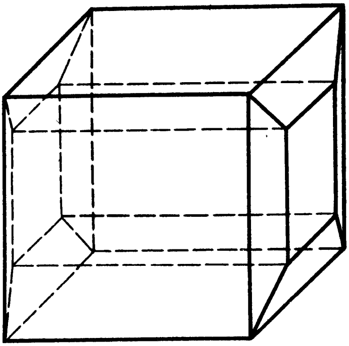


Рис. 5

В самом деле, пусть правильный многогранник имеет Г граней, каждая из которых — правильный n-угольник, а в каждой из вершин сходится по x ребер. Тогда, пересчитывая ребра, сходящиеся у каждой вершины, получим

$$x \cdot \mathrm{B} = 2\mathrm{P} \text{ или } \mathrm{B} = \frac{2\mathrm{P}}{x},$$

ибо каждое ребро попадает в пересчет у обоих своих концов.

Пересчитывая ребра, расположенные в каждой грани, получим

$$n \cdot \Gamma = 2\mathrm{P} \text{ или } \Gamma = \frac{2\mathrm{P}}{n},$$

ибо здесь каждое ребро попадает в пересчет тоже по 2 раза. По теореме Эйлера $\mathrm{B} - \mathrm{P} + \Gamma = 2$, то есть $\frac{2\mathrm{P}}{x} - \mathrm{P} + \frac{2\mathrm{P}}{n} = 2$, или (делим все члены на 2Р)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{n} = \frac{1}{\mathrm{P}} + \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Очевидно, $n \geqslant 3$ и $x \geqslant 3$ (многоугольник имеет не менее трех сторон, а в каждой вершине сходится не менее трех граней). Если же и $n > 3$, и $x > 3$, то

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

что делает равенство (*) невозможным. Отсюда следует, что либо $n = 3$, либо $x = 3$. Дальнейшие рассуждения читатель без труда проведет самостоятельно.

3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ

Рассмотрим последовательность

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}; \qquad x_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}; \qquad x_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}};$$

$$x_4 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}; \; \ldots \qquad x_n = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}.$$

Нетрудно подсчитать, что

$$x_1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2};\qquad x_2=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{7}{5};\quad x_3=\frac{17}{12};\ x_4=\frac{41}{29}\ \text{и т. д.}$$

А что будет получаться при дальнейшем возрастании n? Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$? Чему может равняться этот предел?

Рассмотрим положительное число x, определяемое как предел выражения

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}.$$

Перенесем единицу влево:

$$x-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}.$$

Это равенство равносильно такому:

$$x-1=\frac{1}{2+(x-1)},$$

откуда $(x-1)(2+x-1)=1$
и, следовательно, $x=\sqrt{2}$ или

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}.$$

Выражение в правой части называется *цепной* или *непрерывной* дробью. В общем виде ее можно записать так:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\dots}}},$$

где a, b, c, d, вообще говоря, различные целые числа.

Если, начиная с некоторого места, повторяются одинаковые числа (или одинаковые конечные последовательности чисел), то *непрерывная дробь* называется *периодической*. Выше показано, что число $\sqrt{2}$ может быть записано в виде периодической непрерывной дроби, хотя, как известно, это число, как и всякое другое иррациональное число, невозможно записать в виде *десятичной периодической дроби.*

Если десятичную периодическую дробь оборвать на каком-либо месте, мы получим ее приближенное значение (с недостатком). Например:

$$\frac{1}{3}=0,(3)=0,333333...\approx 0,33.$$

Оборвав непрерывную дробь, мы тоже получим ее приближенное значение в виде рационального числа. Мы видели, что $x_1=\frac{3}{2}$; $x_2=\frac{7}{5}$; $x_3=\frac{17}{12}$; $x_4=\frac{41}{29}$ и т. д. Эти дроби называют *подходящими дробями* для данной непрерывной дроби; в самом деле, каждая следующая подходящая дробь все ближе подходит к предельному значению данной дроби, или, иначе, дает все более точное приближение этого значения.

Можно доказать, что подходящие дроби четного порядка всегда меньше их предельного значения, а подходящие дроби нечетного порядка больше их предельного значения. Например, нетрудно проверить, что

$$x_4=\frac{41}{29}<\sqrt{2}<\frac{17}{12}=x_3.$$

В статье «О непрерывных дробях» (1737) Эйлер впервые указал приемы преобразования таких дробей и показал связь непрерывных периодических дробей с квадратными уравнениями и квадратическими иррациональностями. Там же показано выражение основания натуральных логарифмов, числа e* ($e=2,71828182845...$), с помощью *непериодической* непрерывной дроби

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}.$$

Вот еще некоторые простые разложения в непрерывные дроби, найденные Эйлером:

---

* Число e можно определить как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Оно играет, как и число π, важную роль в анализе и его приложениях.

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}}}}},$$

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\ldots}}}}}}.$$

Разлагая в бесконечную цепную дробь e и e^2, Эйлер, по существу, доказал иррациональность этих чисел, т. е. невозможность равенств $e=\frac{m}{n}$ и $e^2=\frac{p}{q}$, где m, n, p, q — произвольные натуральные числа.

Пользуясь этим, И. Г. Ламберт несколько лет спустя получил представление некоторых функций в форме бесконечных непрерывных дробей, например

$$\operatorname{tg} x=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{7}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{9}{x}-\ldots}}}}}.$$

Позднее выяснилось также, что непрерывные дроби могут быть использованы для приближенного решения уравнений. А в 1759 г. Эйлер представил в Петербургскую Академию 2 статьи о применении непрерывных дробей для нахождения целых решений так называемого «уравнения Пелля», имеющего вид

$$x^2-ay=1.$$

Непрерывные дроби часто используются для приближения иррациональных чисел рациональными. Так, исторически известные приближенные значения числа π: $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ и т. д. — являются, как выяснилось, значениями подходящих дробей для изображения числа π в форме непрерывной дроби. Подробные исследования непрерывных дробей выполнили впоследствии русские математики П. Л. Чебышев и А. А. Марков.

4. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Эйлер написал более ста сочинений по теории чисел.

Еще в XVII в. юрист из Тулузы Пьер Ферма, ставший одним из крупнейших математиков Франции, высказал — большей частью без доказательств — много интересных предложений, относящихся к целым числам. Однако Ферма, как правило, высказывал свои предложения лишь в предположительной форме, подкрепляя их примерами, но без строгих доказательств. А Эйлер подробно исследовал эти предложения и либо доказывал их, либо опровергал. Мы рассмотрим здесь некоторые примеры.

Если p — простое число и a не делится на p, то $n=(a^{p-1}-1)$ всегда делится на p. Эта теорема носит название «малой теоремы Ферма»; она имеет очень большое значение для *теории сравнений.*

Два натуральных числа a и b, дающие при делении на натуральное число m один и тот же остаток r, называются равноостаточными или *сравнимыми по модулю* m. Записывают это так:

$$a\equiv b(\mathrm{mod}\ m).$$

Например, 53 и 38 при делении на 5 дают один и тот же остаток 3. Поэтому они сравнимы по модулю 5:

$$53\equiv 38(\mathrm{mod}\ 5).$$

В частности, если некоторое число n делится на m, то говорят, что оно сравнимо с нулем по модулю m. Например:

$$20\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5).$$

По признаку делимости на 5 все натуральные числа можно разбить на 5 классов:

класс C_0, содержащий 5, 10, 15, ..., вообще все числа вида $5k$;
класс C_1, —«— 1, 6, 11, ..., вообще все числа вида $5k+1$;
класс C_2, —«— 2, 7, 12, ..., —«— —«— $5k+2$;
класс C_3, —«— 3, 8, 13, ..., —«— —«— $5k+3$;
класс C_4, —«— 4, 9, 14, ..., —«— —«— $5k+4$.

Эти классы называют *классами вычетов* по модулю 5. Разумеется, при разбиении по модулю m мы получили бы ровно m классов.

Если для каждого из классов выбрать по одному представителю — скажем, числа 15, 21, 12, 3 и 49, то мы получим полную систему вычетов по модулю 5. Чаще всего в качестве представителей выбирают попросту остатки от деления на модуль; в данном случае получится система 0, 1, 2, 3, 4.

Эйлер продолжал работы Ферма в области теории чисел. Он, в частности, ввел функцию $\varphi(m)$, которая называется *функцией Эйлера* — количество натуральных чисел, меньше данного m и взаимно простых с ним. Так, $\varphi(6)=2$, потому что только два числа, 1 и 5, меньших шести, взаимно просты (не имеют общих делителей) с числом 6; $\varphi(10)=4$, потому что только числа 1, 3, 7, 9 взаимно просты с числом 10. Если p — простое число, то все меньшие числа взаимно просты с p и $\varphi(p)=p-1$.

Эйлер обобщил малую теорему Ферма и доказал, что если a и m взаимно простые числа — это можно записать $(a, m)=1$,— то $(a^{\varphi(m)}-1)$ делится на m. Это предложение называется *теоремой Эйлера* (о сравнениях). Добавим еще, что Эйлер разработал основы теории степенных вычетов.

Любителям математики знакома «великая теорема Ферма»: требуется найти целые числа x, y, z так, чтобы для какого-нибудь целого $n \geqslant 3$ выполнялось равенство $x^n+y^n=z^n$, или доказать, что такое равенство невозможно. Эйлер доказал невозможность равенства для $n=3$ и для $n=4$. Позднее невозможность равенства была доказана для некоторых других значений n; однако полного, общего доказательства до сего времени найти не удалось.

Отметим кстати, что для суммы не двух, а б о л ь ш е г о ч и с л а с л а г а е м ы х подобное равенство возможно, например

$$3^3+4^3+5^3=6^3.$$

В 1940 г. было высказано предположение, что равенство

$$x_1^n+x_2^n+\ldots+x_k^n=y^n$$

возможно в том и только в том случае, когда $k \geqslant n$. Если бы это предположение удалось доказать, то из него как частный случай вытекало бы и доказательство «великой теоремы Ферма».

Ряд простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... — бесконечен. Этот факт доказал еще Евклид. Если, напротив, допустить, что существует только n простых чисел x_1, x_2, ..., x_n, то число

$$N=x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n+1,$$

которое больше любого из этих чисел, не делится ни на одно из них. Значит, либо оно само — простое, либо делится на какие-то другие числа — и, следовательно, существует еще хоть одно простое число, что противоречит допущению о конечности ряда простых чисел. Эйлер дал новое а н а л и т и ч е с к о е доказательство бесконечности ряда простых чисел; тем самым было заложено начало *аналитической теории чисел.*

Немало проблем теории чисел обсуждалось Эйлером в его переписке с Христианом Гольдбахом. Изучение этой переписки подтверждает несомненное математическое дарование Гольдбаха, хотя оно не может идти в сравнение с гениальностью Эйлера (отметим, кстати, что позднее Гольдбах сделал блестящую карьеру на дипломатической службе, но долгие годы продолжал научную переписку с Эйлером). Из их переписки возникла, например, знаменитая «Проблема Гольдбаха», состоявшая из двух гипотез:

1) всякое нечетное число, большее шести, есть сумма трех простых чисел;

2) всякое четное число есть сумма двух простых чисел.

Рассмотрение этих проблем* и другие работы Эйлера составили основы *аддитивной теории чисел* — теории разложения данного целого числа на слагаемые определенного вида.

Следует упомянуть еще о работах Эйлера по исследованию чисел вида $4k+1$ и представлению их в виде суммы двух квадратов; о работах по теории цепных дробей (см. предыдущий раздел); наконец, в 1772 г. Эйлер эмпирически нашел так называемый *закон взаимности,* оказавшийся полезным для решения неопределенных уравнений второй степени.

5. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Многим знакома игра «Спортлото». Уплатив 30 копеек, каждый желающий отмечает на карточке несколько чисел. Возможность выиграть в лотерее нетрудно оценить заранее, пользуясь несложными правилами *комбинаторики* и *теории вероятностей.*

В некоторых странах уже более двухсот лет назад начали проводить так называемую «генуэзскую лотерею». Желающие участвовать покупали билеты с числами от 1 до 90 и отмечали одно, два, три, четыре или пять из этих чисел. В день розыгрыша из мешка, содержавшего номера от 1 до 90, вытаскивали случайным образом 5 номеров; выигрывали те и только те билеты, все номера которых оказывались среди вытянутых.

Владелец выигравшего билета с одним отмеченным номером получал в 15 раз больше стоимости билета; с двумя номерами — в 270 раз; с тремя — в 5500 раз; с четырьмя — в 75 000 раз и с пятью выигравшими номерами — в миллион раз больше стоимости билета. Если же на билете был отмечен хоть один из невытянутых в лотерее номеров — билет не выигрывал.

В начале XVIII в. лотерейная горячка охватила Италию. Многие тратили на лотерейные билеты последние гроши, надеясь ухватить «счастье» — угадать пять, четыре или хотя бы три числа и обогатиться. Однако вероятность угадать все пять чисел из 90 составляет

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}=\frac{1}{43\,969\,268};$$

---

* В общем виде эти проблемы не решены и поныне. В 1937 г. академик И. М. Виноградов с помощью разработанного им метода оценок тригонометрических сумм доказал, что каждое достаточно большое нечетное число действительно является суммой трех простых. Значит, достаточно большое четное — сумма четырех простых.

иначе говоря, такой выигрыш возможен в среднем один раз из почти 44 миллионов попыток.

В 1749 г. итальянец Рокколини предложил Фридриху II организовать генуэзскую лотерею. 15 сентября того же года Фридрих направил письмо Эйлеру — просил консультацию по этому поводу. Аналогичное письмо Эйлер получил несколько лет спустя, когда Фридриху предложили провести лотерею «для помощи населению, пострадавшему от бедствий семилетней войны».

Эйлер решил задачу и представил в Берлинскую Академию сочинение «Решение одного очень трудного вопроса теории вероятностей» — экспертизу относительно предлагаемых лотерей. Позднее это сочинение было опубликовано в изданиях Берлинской Академии.

Эйлер рассчитал не только вероятность выигрышей, но и вероятности *секвенций,* то есть появления в данном тираже двух или нескольких последовательных чисел. Например, выпадение номеров 17, 18, 19, 20, 21 дает секвенцию пяти чисел; выпадение 12, 17, 18, 19, 58 дает секвенцию трех чисел и отдельно два изолированных числа или 1(3)+2(1); выпадение 17, 18, 19, 58, 59 дает 1(3)+1(2) и т. п. Ученый вывел общие формулы, рассмотрел вероятности и количество вариантов для всех семи случаев, встречающихся при вытягивании пяти номеров из 90.

Случай	Секвенции	Вероятность	Количество вариантов
1	1(5)	$\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\frac{1}{511038}$	86
2	1(4)+1(1)	$\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot85}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\frac{85}{511038}$	14620
3	1(3)+1(2)	$\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot85}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\frac{85}{511038}=\frac{85}{K}$	
4	1(3)+2(1)	$\frac{3\cdot4\cdot5\cdot85\cdot84}{K}=\frac{3570}{K}$	614040
5	2(2)+1(1)	$\frac{3\cdot4\cdot5\cdot85\cdot84}{K}=\frac{3570}{K}$	
6	1(2)+3(1)	$\frac{4\cdot5\cdot85\cdot84\cdot83}{K}=\frac{98770}{K}$	8494220
7	5(1)	$\frac{85\cdot84\cdot83\cdot82}{K}=\frac{404957}{511038}$	34826302

Седьмой случай, наиболее вероятный, как рассчитал Эйлер, когда секвенции не появляются.

Различные исследования Эйлера по теории вероятностей в основном были связаны с азартными играми и лотереями и лишь частично — с проблемами демографии и страхового дела. За пределы этих проблем не выходили запросы науки и техники того времени.

XVIII в. прошел под знаком повышенного интереса к демографии. Люди стали интересоваться вопросами рождаемости, смертности, средней продолжительности жизни, ростом народонаселения и, в частности, исчислением срока удвоения населения. Не мог пройти мимо этих вопросов и Эйлер. Так, в его «Введении в анализ» (1748) сформулированы и разобраны следующие задачи:

1. Число жителей некоторой области увеличивается ежегодно на $\frac{1}{30}$ свою часть; вначале в области было 100 000 жителей; каково будет число жителей области через 100 лет?

2. После библейского потопа род человеческий размножился, якобы, от 6 человек; допустим, что через 200 лет стало 1 000 000 людей; на какую свою часть число людей должно было возрастать ежегодно?

3. Предположим, что к концу каждого века население удваивается; найти годовой прирост.

Вычисления Эйлера дали на эти задачи следующие ответы:

1) 2 654 874; 2) на $\frac{1}{16}$ часть (примечание Эйлера: если бы и далее рост числа людей шел в таком же соотношении, то в последующие 200 лет их стало бы 166 666 666 666, и для их прокормления не хватило бы всей Земли); 3) на $\frac{1}{144}$ часть.

Весьма интересно следующее рассуждение Эйлера.

Пусть в каком-то году родилось N людей.

Через год останется в живых N_1 людей,

через два года останется в живых N_2 людей,

. . . .

через k лет останется в живых N_k людей.

Значит: в возрасте до 1 года, то есть на I году жизни умрет $N - N_1$;

на II году умрет $N_1 - N_2$;

на III году умрет $N_2 - N_3$;

. . . .

на k-м году умрет $N_{k-1} - N_k$ людей и т. д.

Эта идея Эйлера о выживании и вымирании служит основой для демографических расчетов и по сей день.

Эйлер сформулировал 6 важных задач демографии и указал формулы для их решения, например:

1. Найти вероятность того, что лицо возраста m лет проживет еще n лет (ответ: $\frac{N_{m+n}}{N_m}$); вероятность умереть в течение того же срока для этого лица составит $1 - \frac{N_{m+n}}{N_m}$.

2. Для лица в возрасте m лет найти вероятность смерти через n лет, то есть в промежуток от n до $(n+1)$ лет, начиная с данного момента. (Ответ. $\frac{N_n - N_{n+1}}{N_m}$.)

3. Из данной группы в M лиц данного возраста m лет найти число лиц, которые проживут еще n лет (ответ: $M\frac{N_{m+n}}{N_m}$).

4. Для человека в возрасте m лет найти число z лет, которые он еще проживет с вероятностью 0,5. Искомое число лет находится из равенства $\frac{N_{m+z}}{N_m}=\frac{1}{2}$.

6. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Еще Иоганн Бернулли определил функцию как «количество, составленное любым способом из переменной величины и постоянных».

В начале первого тома «Введения в анализ бесконечных», вышедшего в 1748 г. в Лозанне (Швейцария), Эйлер уточняет определение своего учителя:

«Функция переменного количества есть *аналитическое выражение,* составленное каким-либо образом из этого переменного и чисел или постоянных количеств». Далее Эйлер различает функции *явные* и *неявные.* Скажем, функции $y=\frac{1}{x}$ — явная, а уравнение $x^2+y^2=a^2$ выражает неявную функцию, которая может быть определена (хотя и не во всех случаях) путем решения уравнения относительно y. Там же формулируется предложение о существовании *обратной* функции и *функции, заданной параметрически.*

Если задана функция $y=3x+8$, то, решая уравнение относительно x, получим $x=\frac{y-8}{3}$, а потому функция $y=\frac{x-8}{3}$ является обратной по отношению к данной функции. Если дана функция $y=\sin x$, то обратной будет функция $x=\arcsin y$.

Совокупность равенств $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t \end{cases}$

выражает ту же функцию, что и $x^2+y^2=a^2$, в чем можно убедиться, если возвести оба данных равенства в квадрат и сложить почленно:

$$\begin{array}{l} x^2=a^2\cos^2 t \\ y^2=a^2\sin^2 t \\ \hline x^2+y^2=a^2(\cos^2 t+\sin^2 t)=a^2\cdot 1=a^2. \end{array}$$

Здесь параметр t, через который первоначально выражены x и y, можно рассматривать как угол, составленный вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью абсцисс (рис. 6). При изменении этого угла от 0 до 2π точка $M(x, y)$ будет описывать окружность радиуса $r=a$.

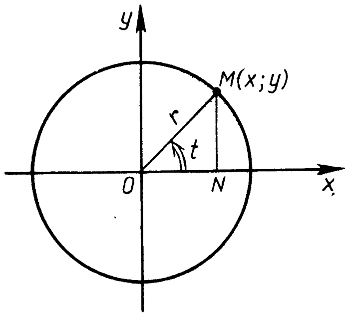


Рис. 6

В предисловии к «Наставлению по дифференциальному исчислению» (1755) Эйлер дает новое определение функции:

«Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых». При всей витиеватости выражений XVIII в. это определение ничем, по существу, не отличается от классических определений, сформулированных в XIX в. Лобачевским и Лежен-Дирихле.

Эйлер рассмотрел разделение функций на однозначные и многозначные, выделил классы четных и нечетных функций. Вся его классификация вошла в употребление в математике и сохраняется по сей день.

Вместе с тем, Эйлер понимал, что существуют и «неаналитические» функции. Уже в статье «О колебаниях струны», написанной в 1748 г. и опубликованной в Берлине в 1850 г., он указывает, что кривая, рассматриваемая как изображение функции, может оказаться и более сложной, чем объединение нескольких (вообще — конечного числа) дуг непрерывных линий. Таковыми, в частности, являются функции, получающиеся при интегрировании дифференциальных уравнений.

«В анализе появляются также разрывные функции, что многим видным математикам представляется противоречивым,— писал он позднее в III томе своего «Интегрального исчисления» (1770).— Особенная сила интеграций, рассматриваемых в этой книге, в том и состоит, что при них могут встречаться и разрывные функции: благодаря этому новому (т. е. интегральному.— *А. Я.*) исчислению границы анализа значительно расширяются».

«Что такое дифференциальное исчисление?» — риторически вопрошает Эйлер и определяет его как «метод определения отношения *исчезающих* приращений, получаемых какими-либо функциями, когда переменному количеству, функциями которого они являются, дается исчезающее (то есть исчезающе малое, по современной терминологии *бесконечно малое. — А. Я.*) приращение».

Итак, по Эйлеру, истинным объектом дифференциального исчисления является производная, то есть отношение исчезающе малого приращения функции к исчезающе малому приращению аргумента или, пользуясь современными обозначениями:

$$y'(x)=\frac{dy}{dx},$$

что следует понимать как

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Бесконечно малые величины Эйлер во многих рассуждениях полагает равными нулю — и все же получает верные выводы. В то же время он правильно считает, что отношение двух таких «нулей», то есть отношение бесконечно малого приращения функции к соответствующему приращению аргумента, перестает быть неопределенным — поэтому их следует обозначать различными символами, например dx, dy и т. д., ибо они могут иметь различные отношения.

Эйлер еще не считает нужным обосновывать каждое утверждение, не обсуждает и тем более не обосновывает теорию пределов, но в то же время различает порядки бесконечно малых. Этот стиль — практическая применимость и безошибочность при отсутствии строгих доказательств — вообще характерен для математики XVIII столетия. Этот стиль «правдоподобных рассуждений» — наилучший при знакомстве с существом тех или иных явлений и закономерностей, когда требуется разобраться в фактах, но еще не наступило время для строгого обоснования и дедуктивного построения теории. Именно так следует впервые знакомиться с отдельными разделами физико-математических наук; лишь когда существо явления станет понятным, можно будет говорить о его первопричинах и строгих обоснованиях,— но это нужно, разумеется, лишь тем немногим, кто посвятит свою жизнь глубокому изучению точных наук.

Именно таким путем шло развитие точных наук в XVIII и первой половине XIX в. Понятия математики и не всегда строго обоснованные формулы применялись — и в подавляющем большинстве случаев приводили к верным результатам. А обоснования фундаментальных начал анализа появились лишь в работах выдающихся математиков XIX в. К. Вейерштрасса и О. Коши.

Однако Эйлер занимался в анализе не только рассуждениями и исследованиями. Он разработал и конкретные приемы интегрирования многих функций, которые и по сей день изучаются студентами вузов. Мы рассмотрим здесь три примера.

Напомним, что для нахождения производных предусмотрены правила, применимые к любой элементарной функции. Обратное же действие, нахождение первообразной функции, или неопределенного интеграла, значительно сложнее и, как указывал Эйлер, может привести к функциям нового типа.

Весьма важным классом функций, интегрирование которых всегда может быть выполнено в конечном виде*, являются дробно-рациональные функции, представляющие собой частное двух многочленов. Мы будем предполагать, что умеем разложить многочлен в знаменателе на множители первой и второй степени**. Эйлер предложил *разложение дробей на простейшие,* то есть на такие, знаменатели которых — линейные двучлены либо не разлагающиеся на линейные множители квадратные трехчлены.

1°. Рассмотрим

$$\int \frac{x+22}{x^2-x-20}\,dx.$$

Очевидно, дробь

$$\frac{x+22}{x^2-x-20}=\frac{x+22}{(x-5)(x+4)}$$

«произошла» от приведения к общему знаменателю дробей вида

$$\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+4}.$$

Каждую из таких дробей интегрировать очень легко, например:

$$\int \frac{A}{x-5}\,dx=A\ln|x-5|+C.$$

Эйлер и предложил разлагать дроби с составным знаменателем на простейшие. Чтобы определить A и B, можно, скажем, воспользоваться методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{x+22}{(x-5)(x+4)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+4}.$$

Приводя обе части равенства к общему знаменателю и отбрасывая его, получим

$$x+22=Ax+4A+Bx-5B;\quad x+22=(A+B)\,x+(4A-5B).$$

Так как это равенство выполняется *тождественно,* то есть при любых числовых значениях переменной x, то коэффициенты при одинаковых степенях x должны быть равны:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & A+B=1 \\ x^0 & 4A-5B=22, \end{array}$$

откуда находим $A=3$, $B=-2$,

---

* Практическое выполнение может оказаться громоздким. В последние годы громоздкие интегрирования предпочитают выполнять приближенно с помощью ЭВМ.

** Для этого необходимо найти корни многочлена, записанного в знаменателе. Это всегда можно выполнить с достаточной точностью.

или

$$\frac{x+22}{(x-5)(x+4)}=\frac{3}{x-5}-\frac{2}{x+4},$$

и, окончательно,

$$\int\frac{x+22}{x^2-x-20}dx=\int\frac{3}{x-5}dx-\int\frac{2dx}{x+4}=$$

$$=3\ln|x-5|-2\ln|x+4|+\ln C=\ln\left|\frac{C(x-5)^3}{(x+4)^2}\right|.$$

2^0. Эйлер предложил также некоторые *подстановки*, сводящие интеграл, содержащий $\sqrt{ax^2+bx+c}$, к интегралу от рациональных функций, который, как мы упоминали выше, всегда может быть вычислен в конечном виде.

Студентам и поныне часто предлагают примеры вида:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Положим $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$; тогда

$$x^2+x+1=t^2-2tx+x^2,$$

откуда

$$x(1+2t)=t^2-1;$$

$$x=\frac{t^2-1}{2t+1};$$

$$dx=\frac{2t(2t+1)-2t^2+2}{(2t+1)^2}dt=\frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}dt,$$

и мы получаем интеграл от рациональной функции

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{2t^2+2t+2}{t(2t+1)^2}dt=2\int\frac{dt}{t}-3\int\frac{dt}{2t+1}-$$

$$-3\int\frac{dt}{(2t+1)^2}=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2(2t+1)}+\ln C=$$

$$=\frac{3}{2(2t+1)}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{Ct^4}{(2t+1)^3}\right|,$$

где $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$.

3^0. Интегралы вида $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, где m, n, p — любые рациональные числа, носят название *интегралов от биномиальных дифференциалов.* Эти интегралы могут быть вычислены в конечном виде при выполнении хотя бы одного из трех условий:

1) p — целое; 2) $\frac{m+1}{n}$ — целое; 3) $\frac{m+1}{n}+p$ — целое.

Эти три случая были, впрочем, известны еще Ньютону. Эйлер указал для каждого из этих случаев подстановки, позволяющие непосредственно вычислить первообразную в конечном виде. А в следующем столетии русский математик П. Л. Чебышев строго доказал, что если ни одно из этих трех условий не выполняется, то первообразную нельзя выразить в конечном виде.

Д. Бернулли в одном из писем к X. Гольдбаху впервые вводит число e (не пользуясь этим символом) как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ — и сразу же записывает это число в форме бесконечного ряда

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots .$$

Эйлер обобщил рассуждение Бернулли, показав, что

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots,$$

и, как бы между прочим, вычислил значение e с 24 верными знаками.

Чуть позднее Эйлер по-новому вывел разложения в ряд для синуса и косинуса, известные ныне каждому студенту и включенные даже в таблицы В. М. Брадиса для средней школы:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\ldots;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots .$$

«Отрицательные числа логарифмов не имеют»,— убеждены многие школьники. Однако это утверждение не совсем верно.

Второклассник, скажем, считает, что 7 на 5 «не делится»: он еще не знает о существовании дробей и не ведает, что $7:5=\frac{7}{5}$ или $7:5=1{,}4$. Третьеклассник, даже отличник, уверен в том, что из 3 нельзя вычесть 5. Старшеклассники часто считают, что корень квадратный, скажем, из трех «не извлекается»; однако существует ведь «точное» *иррациональное* число $\sqrt{3}$; его можно выразить приближенно десятичной дробью с любой требуемой точностью. В этом же смысле «существуют» и логарифмы отрицательных чисел; однако эти логарифмы являются числами новой природы — *мнимыми числами**, представителем которых является «мнимая единица», обозначаемая через i и определяемая так:

$$i^2=-1.$$

Еще в 1717 г. английский математик Р. Коутс высказал (в геометрической форме) предложение о связи между показательной и тригонометрическими функциями от мнимого аргумента. Позднее Эйлер заметил, что разложения в ряд показательных и тригонометрических функций «почти совпадают» — и вывел знаменитые *формулы Эйлера*, которые в современной символике (обозначая мнимую единицу через i) можно записать

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x;$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2};\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Полагая в первой из этих формул $x=\pi$, получим

$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1;$$

поэтому удобно считать, что натуральный логарифм числа -1 равен $i\pi$:

$$\ln(-1)=i\pi.$$

Приведенные выше формулы играют ныне основополагающую роль в важной области математики — теории функций комплексного переменного, широко применяемой в электро- и радиотехнике и во многих других отраслях современной техники.

Отметим кстати, что Эйлер ввел во всеобщее употребление обозначение π для отношения длины окружности к ее диаметру и обозначение e для основания натуральных логарифмов. Синус и косинус тоже лишь со времен Эйлера стали рассматриваться как функции; до него синус и косинус считались лишь определенными отрезками в круге или длинами этих отрезков, выражаемыми в долях радиуса.

Эйлер сформулировал и доказал ряд важных тождеств, известных ныне каждому школьнику под названием «формул приведения».

$$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\alpha;\quad \cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi+\alpha\right)=-\sin\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi+\alpha\right)=-\sin\alpha;\quad \cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha;$$

* Вот уже несколько лет, как изучение мнимых чисел в нашей средней школе не является обязательным.

$$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha;\ \cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha;\ \cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\alpha.$$

Уже в первые годы пребывания в Петербурге Эйлер пытался найти формулу для общего выражения суммы так называемого гипергеометрического ряда

$$1+1\cdot2+1\cdot2\cdot3+\ldots+1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k+\ldots,$$

и в 1728 г. сделал на заседании Академии доклад «Об общих членах рядов». К сожалению, рассуждения Эйлера содержат довольно громоздкие действия с интегралами; поэтому отметим лишь, что в итоге Эйлер пришел к выражению через интегралы двух важнейших функций, которые и были названы *эйлеровыми интегралами* первого и второго рода, а позднее — *бета-функцией Эйлера* и *гамма-функцией Эйлера.*

Во второй период пребывания в Петербурге Эйлер уже систематически разработал теорию таких функций, определил соотношение между бета- и гамма-функцией и нашел связь этих функций с эллиптическими интегралами.

Рассматривая некоторые вопросы колебания мембран в своих работах по акустике, Эйлер столкнулся с другим видом специальных функций — цилиндрическими функциями первого и второго рода. Позднее, во II томе «Интегрального исчисления» Эйлер нашел выражение и для этих функций через степенные ряды.

Дальнейшие результаты в теории гамма-функции были получены полвека спустя Н. И. Лобачевским, а еще позднее — советским математиком В. А. Стекловым.

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В XVII в. французский математик и философ Рене Декарт ввел в рассмотрение переменные величины. «Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление»,*— пишет Энгельс в «Диалектике природы». С этого времени математика рассматривает не только числа, величины и фигуры, но также и *процессы, изменения величин во времени.* В XVIII в. стало необходимым изучение зависимостей между переменными величинами. Наряду с уравнениями, в которых неизвестными служат числа, появились уравнения, в которых неизвестны и подлежат определению функции.

К XVIII в. на первый план в математике и ее приложениях выдвинулось понятие функции.

Изучение переменных величин и функциональной зависимости сразу же потребовало развития математического анализа, основы которого были заложены Ньютоном и Лейбницем.

Во многих задачах быстро развивающегося естествознания неизвестные функции оказались связанными со скоростью их изменения — иначе говоря, устанавливалась взаимосвязь между функцией и ее производной; позднее в рассмотрение вошли производные от производных или, иначе, производные высших порядков. По этой зависимости, которую записывали в форме *уравнения,* и требовалось обычно отыскать неизвестную функцию. Подобные уравнения называются в математическом анализе *дифференциальными уравнениями.*

Некоторые простейшие дифференциальные уравнения решаются путем *интегрирования,* т. е. *квадратурой;* более сложные дифференциальные уравнения долгое время вообще не умели решать. Поэтому нахождение способа решения каждого нового типа дифференциальных уравнений было важным открытием, способствовавшим развитию математики и ее приложений в естественных и технических науках.

Приведем пример. По закону Ньютона скорость охлаждения нагретого тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Пусть металлическая болванка, имеющая начальную температуру $T_0=300°C$, брошена в воду, имеющую температуру $T_{ср}=60°C$ (воды много, ее температура при охлаждении болванки практически не изменяется). Требуется найти функцию, выражающую зависимость температуры болванки T от времени t и определить t, для которого будет $T_t=150°C$. если через $t_1=10$ мин температура болванки станет $T_{10}=200°C$.

Обозначим переменную температуру болванки через x. Тогда разность температур тела и жидкости в каждый момент времени t равна $(x-60)$ °C; изменение температуры за малое время Δt составляет Δx; предполагается, что за очень малое время Δt изменение температуры незначительно и скорость этого изменения сохраняет «постоянное» значение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Если «коэффициент пропорциональности» в законе Ньютона обозначить через K, то можно записать равенство

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=K(x-60).$$

Однако это равенство — приближенное, ибо скорость изменения температуры лишь «почти» сохраняет постоянное значение. Чтобы равенство стало точным, необходимо в левой части заменить приращения дифференциалами (перейти к пределу при условии $\Delta t \to 0$). Тогда

$$\frac{dx}{dt}=K(x-60) \text{ или } x'_t=K(x-60).$$

Это — простейшее *дифференциальное уравнение;* ему удовлетворяет функция

$$x=60+C\cdot e^{Kt},$$

где C — произвольная постоянная величина.

Чтобы определить C, используем «начальное условие»: в начальный момент времени, т. е. при $t_0=0$, было $T_0=300$, поэтому

$$300=60+C\cdot e^{K\cdot 0},$$

откуда $C=240$, а потому

$$x=60+240\cdot e^{Kt},$$

Чтобы определить K, воспользуемся дополнительным условием $T_{10}=200$:

$$200=60+240\cdot e^{K\cdot 10},$$

откуда с помощью, скажем, таблиц логарифмов находим

$$K=-0{,}053,$$

и температура болванки x (градусов Цельсия) характеризуется искомой функцией времени t (мин):

$$x=60+240\cdot e^{-0{,}053t}.$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, остается лишь подставить в эту функцию $x=150°$:

$$150=60+240\cdot e^{-0{,}053t},$$

откуда непосредственным вычислением получаем

$$t\approx 18{,}5 \text{ (мин)}.$$

Уже в первый период своей работы в Петербурге Эйлер нашел решение нескольких типов дифференциальных уравнений, а в 1739 г. впервые показал общий метод решения линейных дифференциальных уравнений любого порядка (т. е. таких, в которые входят неизвестная функция, ее производная, производная от производной и т. д. любого порядка) — но только с постоянными коэффициентами. А именно такие уравнения чаще всего и встречаются в механике. Например, линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a\cdot y''+by'+c\cdot y=f(x),$$

где a, b, c — постоянные величины. Немного позднее Эйлер нашел решение более сложного типа уравнений

$$a\cdot x^2\cdot y''+bx\cdot y'+cy=f(x).$$

Уравнения этого типа, также часто встречающиеся в приложениях, и поныне называются «уравнениями Эйлера».

Если искомая функция зависит от двух, трех, вообще — от нескольких переменных, то приходится рассматривать системы дифференциальных уравнений *с частными производными,* играющие особенно важную роль в физике. Рассказ о них в популярной книге оказался бы чересчур сложным; скажем лишь, что Эйлер заложил основы общей теории подобных систем уравнений первого и второго порядков, а французские математики Д'Аламбер, Лагранж, Монж и Лаплас позднее развили и расширили теорию дифференциальных уравнений с частными производными. Особенно важные результаты в исследовании дифференциальных уравнений принадлежат крупнейшему французскому математику Анри Пуанкаре (1854—1912).

8. ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Каждому знакома простейшая кривая — окружность. В школе рассматриваются еще парабола, гипербола, синусоида и другие кривые, а также их уравнения $x^2+y^2=r^2$, $y=ax^2$, $y=\frac{k}{x}$, $y=\sin x$ и тому подобные уравнения, связывающие две переменные x и y. Впрочем, можно записывать уравнения и в параметрической форме; мы видели, что для окружности

$$\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t, \end{cases}$$

где параметр t — угол поворота вектора по отношению к положительному направлению оси абсцисс (см. рис. 6, с. 47). Каждая точка любой из этих кривых лежит в плоскости чертежа.

Вспомните теперь винтовую линию (рис. 7). Если провести плоскость через какие-нибудь три ее точки, например через точки A, B и C, то всегда найдутся еще другие точки винтовой линии, не лежащие в этой плоскости. Винтовая линия не является плоской кривой; чтобы записать ее аналитически, понадобятся два уравнения с тремя переменными x, y и z, например

$$\begin{cases} x=r\cos\frac{z}{a}, \\ y=r\sin\frac{z}{a}, \end{cases}$$

или, в параметрической форме,

$$\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t, \\ z=at, \end{cases}$$

где $t=\frac{z}{a}$ — угол поворота переменного вектора по отношению к положительному направлению оси абсцисс, r — радиус выбранного цилиндра, на который «нанесена» винтовая линия, a — коэффициент, характеризующий «крутизну» винтовой линии.

Если развернуть поверхность цилиндра на плоскость, то винтовая линия также развернется и превратится в семейство наклонных отрезков (рис. 8). Крутизну развернутой винтовой линии мож-

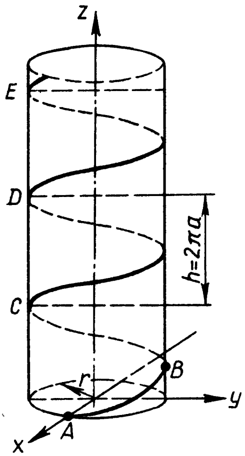


Рис. 7

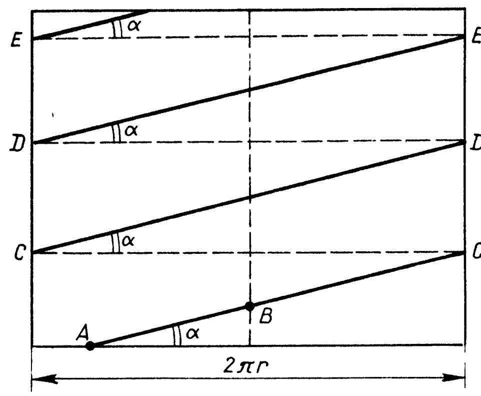


Рис. 8

но охарактеризовать углом или, лучше, тангенсом угла α, составленного этими отрезками с разверткой основания цилиндра.

Кратчайшим расстоянием между двумя точками *A* и *B* на плоскости является отрезок прямой, соединяющий эти точки. Ну, а если часть плоскости, на которой расположен отрезок *AB*, искривить, превратить в поверхность цилиндра или конуса? Очевидно, кратчайшим расстоянием между точками *A* и *B* на этой поверхности будет тот же отрезок — теперь он будет проходить по *геодезической линии* на этой поверхности. Поэтому геодезической линией на поверхности цилиндра и будет отрезок винтовой линии. Если же говорить о геодезической линии, соединяющей две точки на сфере (шаровой поверхности), то это будет дуга большого круга — круга, радиус которого равен радиусу самого шара. Поэтому, например, корабли в открытом море и самолеты в воздухе движутся обычно именно по дугам больших кругов.

Задача найти геодезические линии на заданных поверхностях была поставлена еще Иоганном Бернулли. В 1728 г. он сообщил об этой задаче в письме к своему сыну Даниилу, а тот предложил ее Эйлеру, который в 1729 г. написал сочинение «О кратчайшей линии на поверхности, соединяющей две любые точки» (опубликовано в 1732 г.).

Задачу, поставленную Иоганном Бернулли, можно было решить чисто механически: овеществить нужную поверхность, скажем, в металле и на выпуклую ее сторону натянуть гибкую нить, закрепленную в двух указанных точках. Эйлер же решает задачу аналитически: вводит систему пространственных координат и разъясняет, что поверхность выражается одним уравнением с тремя переменными (ныне мы сказали бы: с тремя координатами

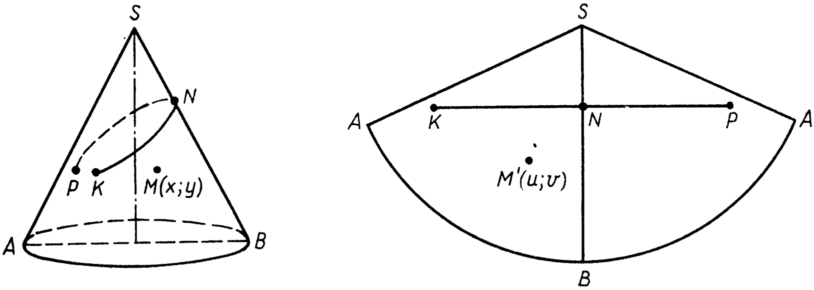


Рис. 9

x, y и z), линия — парой таких уравнений, точка — тройкой уравнений или просто тремя координатами x, y, z. Далее Эйлер решает задачу методами дифференциального исчисления в общем виде, а затем рассматривает применение найденного решения к частным видам поверхностей и, между прочим, доказывает, что при развертке цилиндра или конуса на плоскость любая геодезическая линия переходит в прямую.

В 1732 г. Эйлер пишет новое сочинение, рассматривает задачи более общего характера, в которых «отыскиваются кривые, обладающие максимальным или минимальным свойством». В качестве одного из первых примеров Эйлер ищет — и находит! — кривую проходящую через две данные точки, для которой $\int x^n ds$ имел бы минимальное значение. Это — простейшая задача *вариационного исчисления* — нового для того времени раздела математики, имеющего ныне весьма широкое применение.

В дальнейшем Эйлер использует полученные результаты в механике. Тело, не находящееся под действием каких-либо сил, доказывает он, движется на данной поверхности именно по геодезическим линиям.

Наконец, в 1744 г. Эйлер публикует «Решение изопериметрической задачи в самом широком смысле». Это было первым в мире серьезным сочинением по вариационному исчислению.

Во второй период жизни в Петербурге Эйлер вновь возвращается к проблеме. В 1767 г. он пишет работу «Исследования по кривизне поверхностей», в которой доказывает важную теорему о кривизне нормального сечения поверхности. Немного позднее (1770—1771) он занялся исследованием развертывающихся поверхностей и установил зависимости между координатами x, y точек поверхности и соответствующими координатами u, v точек развертки (рис. 9) этой поверхности на плоскость. Это оказалось особенно важным для составления карт — области, в которой Эйлер и до этого работал весьма успешно.

9. ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА О СЕМИ МОСТАХ И ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

«На груди его красовался Орден Семи Мостов самого первого класса (рис. 10).

— Темные места,— объяснил доктор,— представляют собой речку, а белые дорожки — это берега речки и мосты. Задача очень простая: обойти все мосты и по каждому пройти только один раз. Знаешь ли ты, что это за речка?

— Нет,— промолвил Илюша.— А разве есть на самом деле такая речка?

— Есть! Это речка Преголя с островом, а на ней стоит город Калининград... Эти мосты оказались причиной возникновения очень важной отрасли геометрии... Однажды на одном вечере в обществе кто-то задал Эйлеру вопрос: можно ли пройти по этим семи мостам, не проходя ни по одному два раза? Эйлер заинтересовался этой задачей, доказал, что сделать это невозможно, и нашел общие правила, которым подчиняются задачи подобного рода. В честь этого замечательного события и учрежден этот превосходный и достопримечательный орден».

Разумеется «орден» — фантазия Сергея Боброва, автора популярной математической книги «Волшебный двурог», откуда и заимствован с некоторыми сокращениями приведенный выше отрывок. Но частная задача о семи мостах действительно рассматривалась Эйлером и послужила первопричиной весьма общих открытий.

В самом деле: так ли уж важно пройти по каждому из мостов ровно один раз? Что за беда, если путешественник пропустит какой-либо мост или пройдет по мосту дважды?

Обобщение результатов рассмотрения какой-либо конкретной задачи нередко приводит к открытию общих закономерностей, правил, формул. Увидеть в частной, иногда очень простой задаче важную общую проблему и решить эту проблему — доступно немногим. Одним из таких немногих был крупнейший математик XVIII в. Леонард Эйлер.

Рис. 10

Эйлер обратил внимание на математическую сущность некоторых задач, связанных с шахматной доской. Одна из таких задач состоит в определении маршрута коня, который должен обойти все 64 поля шахматной доски, побывав на каждом поле только один раз.

(Напоминаем: конь ходит буквой «Г»; на рис. 11 отмечены все поля, на которые конь может пойти своим ближайшим ходом.)

Найти какой-нибудь из требуемых маршрутов не так уж сложно. При доста-

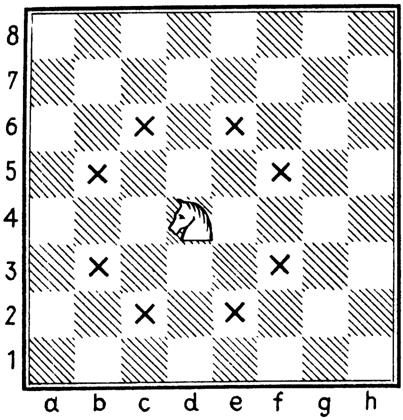


Рис. 11

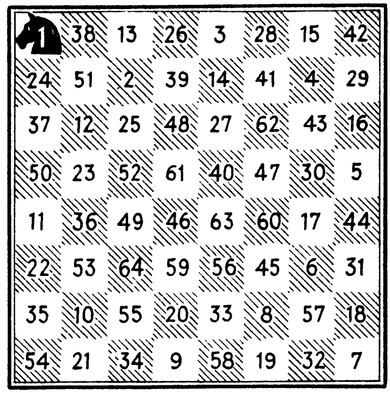


Рис. 12

точном терпении с этим справится любой из наших читателей. На рисунке 12 показана одна из возможных последовательностей посещения конем всех полей шахматной доски. Сложнее другое: определить количество различных маршрутов.

Задача имеет богатую событиями историю. Ее решением занимались многие математики нескольких предыдущих столетий. Однако Эйлер впервые обратил внимание на ее математическую сущность.

Полностью решить задачу — определить точное число маршрутов — пока не удалось. Известно количество различных маршрутов для половины шахматной доски, т. е. для доски 8×4. Известно, что общее число маршрутов на всей доске не менее 31 054 144, но менее числа C_{168}^{63} (это число порядка 10^{100}).

Профессор Дерптского (ныне г. Тарту, Эст. ССР) университета Фердинанд Миндинг (1806—1885) указал возможный метод подсчета количества маршрутов. Однако объем необходимых работ для его осуществления настолько велик, что выполнить его практически пока не удалось даже с помощью ЭВМ. Поэтому метод Миндинга представляет лишь теоретический интерес, показывая принципиальную возможность решения задачи.

В другой задаче требовалось расставить на доске размером $n \times n$ клеток n ладей так, чтобы ни одна из них не могла бить другую.

Ладья в шахматах ходит и бьет по горизонтали и по вертикали (рис. 13). Задача сводится к тому, чтобы на каждой горизонтали выбрать разные вертикали (или, наоборот, на каждой вертикали выбрать разные горизонтали). Если обозначить поля, занимаемые ладьями,

$$(1,\ x_1),\ (2,\ x_2),\ \ldots,\ (n,\ x_n),$$

то существует ровно $n!$ различных порядков расположения чисел $x_1, x_2, \ldots x_н$. Поэтому, на обычной шахматной доске 8×8 клеток существует ровно $8! = 40\,320$ различных решений задачи.

Эйлеру предложили эту задачу в усложненной форме: было дополнительно запрещено ставить ладьи на главной диагонали, т. е. на поля $a1, b2, \ldots n8$; задачу требовалось решить в общем виде, для доски размером $n \times n$ клеток.

Эйлер не смог найти общую формулу, выражающую количество решений в виде функции от n. Однако, обозначив искомое количество решений через Q_n, Эйлер нашел рекуррентное соотношение

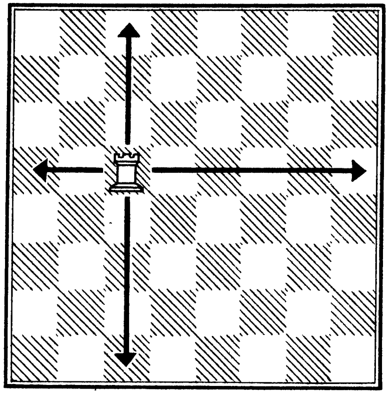


Рис. 13

$$Q_n = (n-1)(Q_{n-1} + Q_{n-2}), \qquad (*)$$

которое позволяет постепенно найти количество решений для любого конкретного значения n.

Нетрудно убедиться, что для доски 2×2 существует единственное решение задачи (рис. 14), т. е. $Q_2 = 1$. Простой перебор вариантов показывает, что для доски 3×3 можно найти 2 решения (рис. 15), т. е. $Q_3 = 2$. Следовательно,

$$Q_4 = (4-1)(2+1) = 9;$$

$$Q_5 = (5-1)(9+2) = 44 \text{ и т. д.}$$

Общая формула решения задачи, найденная уже в XIX в., оказалась следующей

$$Q_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \qquad (**)$$

и, в частности, для обычной доски 8×8

$$Q_8 = 8!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}\right) = 14833.$$

Проверку формулы (**) методом математической индукции с помощью соотношения (*), выведенного Эйлером, мы предоставляем читателю.

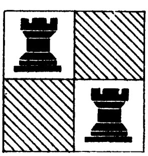


Рис. 14

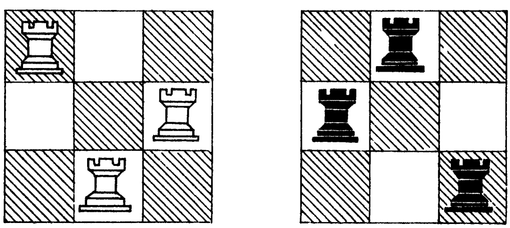


Рис. 15

Занимаясь обобщением подобных задач, Эйлер вывел ряд важных соотношений между бесконечными суммами и бесконечными произведениями, которые оказались полезными в теории чисел, в том числе равенство

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)=1+\sum_{n=1}^{\infty}A(n)x^n,$$

где символ $\prod\limits_{m=1}^{\infty}(1-x^m)$ означает произведение

$$(1-x^1)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^m)\dots,$$

а символ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A(n)x^n$ означает сумму

$A(1)\cdot x^1+A(2)\cdot x^2+A(3)\cdot x^3+\dots+A(n)\cdot x^n+\dots$, причем символ $A(n)$ равен $(-1)^k$ для целых чисел вида

$$n=\frac{3k^2\pm k}{2}$$

и равен нулю для всех остальных чисел.

Эйлер понимал также, что самое лучшее объяснение правила, самое подробное доказательство простейшей теоремы может оказаться не понятым без рассмотрения иллюстрирующих примеров, частных задач и упражнений. Поэтому учебные книги Эйлера содержат немало примеров, задач и упражнений. В заключение мы приведем две задачи, предлагавшиеся Эйлером.

— Мул и осел несли груз весом в несколько сотен каких-то единиц. Осел, жалуясь на свою судьбу, сказал мулу: «Мне нужно только сто единиц твоей ноши, чтобы я был нагружен вдвое тяжелее тебя». Мул возразил: «Да, верно, но если бы ты отдал мне сто единиц из твоей ноши, я был бы нагружен втрое больше тебя». Сколько единиц груза нес осел и сколько — мул?

— Отец после смерти оставил несколько детей, доля которых при разделе наследства выразилась так:

первый получил сто крон и одну десятую остатка;

второй получил 200 крон и одну десятую следующего остатка;

третий получил 300 крон и одну десятую следующего остатка и т. д.

В конце концов наследство оказалось поделенным поровну между всеми детьми. Как велико было наследство и сколько крон получил каждый?

10. МАТЕМАТИКА И ДРУГИЕ ВОПРОСЫ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

Ограничившись только рассказом об Эйлере-математике, мы не могли бы полностью представить себе Эйлера-ученого.

На протяжении всей своей научной деятельности — а это значит на протяжении всей сознательной жизни — он живо интересовался и многими другими областями человеческих знаний. Его пытливый ум не мог оставить без внимания множество загадок, волновавших ученых того времени. И пусть для благодарных потомков Эйлер в первую очередь великий математик, однако его вклад в другие науки, в частности в механику, менее известен, но также весьма весом.

Время, когда жил и работал Эйлер, можно назвать золотым веком физики. Именно тогда завершалась первая великая научная революция, положившая начало современной науке. Многие ученые и естествоиспытатели с энтузиазмом возводили здание, фундамент которого был заложен Николаем Коперником, Джордано Бруно, Галилео Галилеем, Рене Декартом, Исааком Ньютоном и другими корифеями. Одним из крупнейших корпусов этого здания науки была физика (или, как ее называли в те времена, натурфилософия).

Известно, что в средние века наука почти полностью находилась в руках церкви; господствовали освященные церковью представления о принципиальном различии законов, управляющих явлениями на «грешной» Земле и на «божественных» небесах.

Общепризнанная тогда геоцентрическая система Птолемея легко согласовывалась с религиозными представлениями о мире. Представления о закономерностях движения тел средневековые ученые целиком заимствовали у древнегреческого философа Аристотеля (IV в. до н. э.). Согласно этим представлениям, существуют два вида движения земных тел: естественное и насильственное. Естественное движение происходит само по себе (скажем, движение дыма — вверх, движение камня — вниз и т. п.). Насильственное же движение, в том числе и равномерное прямолинейное, происходит только при наличии внешних причин (т. е. внешних сил), постоянно его поддерживающих (телегу тянет лошадь, мельничное колесо вращает вода и т. п.).

Требовалась смелость и для того, чтобы отказаться от образа мыслей большинства «благоразумных» людей, искренне веривших в «оккультные»* качества тел, имевших «божественное» происхождение — и на этом основании не подлежавших научному исследованию.

Для полноты картины остается еще добавить пренебрежение научным экспериментом, характерное для средневековой науки. Неудивительно поэтому, что такая наука оказалась совершенно беспомощной во многих технических и теоретических задачах, решения которых требовало бурное развитие ремесел, торговли, мореплавания, военного дела — иными словами, решения которых требовала сама жизнь. Но «если у общества появляется техническая потребность, она продвигает науку больше, чем десяток университетов»,— писал Энгельс.

---

* Т. е. сверхъестественные, мистические.

Бурное развитие промышленности, торговли, и мореплавания нуждалось в науке, изучавшей свойства физических тел и формы проявления сил природы. И ...«наука восстала против церкви... Буржуазия нуждалась в науке и приняла участие в этом восстании» (Энгельс).

Одним из пионеров — творцов новой науки — был Рене Декарт (1596—1650), построивший атеистическую картину мира. Все явления природы он объяснял, не прибегая к оккультным свойствам тел, а основываясь лишь на движении материи и непосредственном — «контактном» — взаимодействии частиц. Декарт впервые в истории науки дал формулировку закона инерции, сформулировал закон сохранения движения во вселенной. Он ясно показал ценность своего способа изучения явлений природы — с помощью научных гипотез.

Гипотезой называется предположение, способное объяснить известные в данное время свойства или явления в соответствии с данными науки и основами научного мировоззрения. Дальнейшее развитие науки дополняет гипотезу новыми фактами, которые либо вновь и вновь подтверждают гипотезу — и тогда она становится общепризнанной теорией,— либо опровергают ее — и тогда на смену выдвигается новая гипотеза.

Несмотря на ряд сомнительных, а порой и просто ошибочных идей (только теперь мы узнали, что они были ошибочными), учение Декарта благодаря своим несомненным преимуществам завоевало множество сторонников и последователей — и вылилось в целое научное направление — картезианскую* механику.

Еще бо́льшую роль в развитии механики сыграли работы великого англичанина Исаака Ньютона (1643—1727). Основываясь на экспериментально обнаруженных свойствах тел (инертность, протяженность, непроницаемость и т. д.), а также на трех аксиомах движения (три закона Ньютона), Ньютон сумел количественно описать закономерности движения тел, обосновать открытый им закон всемирного тяготения. Используя свой метод построения теории из экспериментальных данных, Ньютон описал количественно и многие световые явления. В отличие от Декарта, Ньютон считал эксперимент единственным источником познания.

Между последователями ньютонианской и картезианской физических систем разгорелся знаменитый спор, который во многом определил дальнейшее развитие естественных наук**.

Картезианцы считали, что путем логических рассуждений все явления природы можно объяснить, основываясь на нескольких очевидных «первичных» свойствах. Ньютонианцы же оперировали только экспериментально установленными свойствами, нисколько

---

* Свое название — «картезианцы» — последователи Декарта получили в соответствии с латинским написанием фамилии Декарта — «Картезиус».

** В начале книги уже говорилось, что магистерская диссертация 17-летнего Эйлера как раз и была посвящена сравнению натурфилософии Декарта и Ньютона.

не заботясь об их «первичности» или «вторичности». И поистине, это был спор, рождавший истину: ведь доказательства принимались только строго научные, обоснованные, много раз перепроверенные.

Эйлера как математика не могли не привлекать попытки картезианцев построить ясную картину мира путем логических рассуждений, опираясь лишь на несколько основополагающих принципов. С другой стороны, много занимаясь прикладными вопросами, Эйлер понимал ценность экспериментального обоснования физических законов.

Однако как естествоиспытатель Эйлер был не столь удачлив. Пока речь идет о выводе математических следствий из физических законов, будь то в небесной механике или в геометрической оптике — он вне досягаемости. Когда же Эйлер пытается высказать собственные гипотезы для объяснения недостаточно исследованных явлений природы, то сразу же проявляется слабость его рационалистического мировоззрения.

Эйлер был убежден, что мир создан и упорядочен добрым богом по наилучшим естественным законам. Он занимался наукой с непосредственностью, которая соответствовала своему времени и исходила лишь из внутренней религиозности. Задолго до ныне известных достижений науки он верил, что именно богом поставлена перед человеком задача: путем изучения этих «наилучших» законов способствовать их познанию и применению. Однако познание должно предшествовать применению, а не наоборот.

Великая книга природы открыта для нас, считал Эйлер. Но бог написал ее на таком языке, научиться читать на котором можно лишь путем прилежания, любви и страданий. Язык этот — математика. Книга природы — это скорее не юридический кодекс, а учебник, содержащий не только установленные богом законы, но и поставленные им вопросы. Первым шагом изучающего этот язык является чтение, изучение, и лишь после глубокого изучения он сможет бегло говорить на этом языке и отвечать на поставленные вопросы. Затем следует самая трудная часть науки: решать эти математически сформулированные задачи. При разъяснениях и ответах на поставленные богом вопросы человек в конце концов находит наилучшие возможности, вытекающие из установленных в этом мире законов. Таковым было восприятие мира не только Эйлером, но и многими учеными XVIII в.

Всю физику, все физические явления Эйлер пытается свести к взаимодействию и соударению атомов — единственному, что, по его мнению, является действенным в мире физических тел. Материя, по мнению Эйлера, обладает четырьмя свойствами: протяженностью, непроницаемостью, подвижностью и инерцией. Из этих основных принципов он чисто формальным путем выводит законы соударений, гравитацию и все другие явления.

Эйлер даже не подозревал, что воображаемая «действенность» атомов является лишь теоретическим допущением; что *законы соударений* не более постижимы, чем, скажем, гравитация. Но все это давно уже осознали философы, вроде Д'Аламбера или даже Мопертюи. Эйлер же оказался весьма наивным в отношении познаваемости явлений природы и их законов.

«Смешно утверждать, как это делают иные философы, что существо тел неизвестно нам»,— заверяет он принцессу в одном из своих «Писем». А в другом месте Эйлер обещает:

«Я надеюсь убедить Ваше высочество, что не остается ни одного электрического явления, разъяснение которого составит такие серьезные трудности».

В 1743 г. Эйлер пишет Фридриху, что ему удалось открыть первопричину магнетизма, которая разъясняет все наблюдаемые явления. Однако позднее Эйлер вынужден был признать, что ошибся. Подобных ошибочных заявлений и утверждений в области физики у Эйлера было немало.

Однако в области механики, где Эйлер мог применить аналитический метод исследования, ему удалось получить результаты колоссальной важности, сыгравшие первостепенную роль в дальнейшем развитии науки.

В предисловии к двухтомному капитальному труду «Механика, или наука о движении, изложенная аналитическим методом» (Петербург, 1736) Эйлер пишет:

«Сначала мы будем рассматривать тела бесконечно малые, т. е. те, которые могут рассматриваться как точки. Затем мы приступим к телам, имеющим конечную величину,— тем, которые являются твердыми, не позволяющими менять своей формы. В-третьих, мы будем говорить о телах гибких. В-четвертых, о тех, которые допускают растяжение и сжатие. В-пятых, мы подвергнем исследованию движение многих разъединенных тел, из которых одни препятствуют другим выполнять свои движения так, как они стремятся это сделать. В-шестых, будет рассматриваться движение жидких тел...»

Под *механикой* Эйлер понимал науку о движении — в отличие от *статики,* науки о равновесии сил.

Уже в названии работы — и, разумеется, в содержании — есть существенное отличие работы Эйлера от всех предыдущих руководств по механике: Эйлер излагает механику аналитическим путем, широко применяя недавно появившийся математический анализ.

«Если анализ где-либо и необходим,— пишет Эйлер,— так это особенно относится к механике. Хотя читатель и убеждается в истине выставленных предложений, но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что, если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно, если не прибегнет сам к анализу и те же предложения не разрешит аналитическим методом».

И действительно: переработав синтетические рассуждения в аналитические, уяснив суть вопроса, Эйлер переходит к аналитическому исследованию новых задач — а это, в свою очередь, приводит его к открытию принципиально новых методов как в механике, так и собственно в анализе.

Первый том «Механики» содержит учение о свободном движении материальной точки. Сюда входят свободное падение, движение в однородной среде с сопротивлением, пропорциональным какой-либо степени скорости, плоское движение в пустоте, а также движение под действием центральной силы, криволинейное движение в сопротивляющейся среде.

Второй том рассматривает несвободное движение точки. Движение в пространстве изучается путем разложения действующих сил по трем взаимно перпендикулярным направлениям — по касательной к направлению движения, по главной нормали и по бинормали. Это позволяет Эйлеру составить три уравнения движения — уравнения, которые оказались основой всех исследований многих ученых вплоть до наших дней.

«Механика» сразу привлекла к себе внимание ученого мира. Уже в ноябре 1737 г. восторженную оценку этой работе дает в письме к Эйлеру И. Бернулли. Вскоре появились и другие весьма лестные отзывы в печати.

Программа, сформулированная Эйлером в предисловии, рассчитана на многолетние исследования. Живя в Берлине (1741—1766), Эйлер написал ряд работ по механике в осуществление этой программы; это были работы по собственно механике, по небесной механике, по теории движения твердого тела, по гидромеханике.

Основанные на законе всемирного тяготения расчеты французского ученого А. К. Клеро давали явно ошибочные результаты обращения апогея лунной орбиты — результаты, резко расходившиеся с наблюдениями. Значит, закон всемирного тяготения неверен? — такие сомнения возникали у многих, в том числе и у Клеро, и у Эйлера. Но в 1749 г. Клеро обнаружил ошибку в своих расчетах — и сообщил о ней в письме к Эйлеру. Тогда Эйлер порекомендовал Петербургской Академии объявить конкурс на тему: «Согласуются или нет все неравенства, наблюдаемые в движении Луны, с теорией Ньютона? И какова истинная теория этих неравенств, которая позволила бы точно определить местоположение Луны для любого времени?»

Конкурс был объявлен, и Клеро представил работу «Теория Луны, выведенная из одного только принципа притяжения, обратно пропорционального квадрату расстояний». Эйлер как член жюри дал блестящий отзыв — и Клеро присудили объявленную премию.

Однако Эйлер не успокоился. Он дополнительно исследовал проблему своим собственным методом и в 1753 г. опубликовал в Берлине «Теорию движения Луны, выявляющую все ее неравенства». Так Клеро и Эйлер подтвердили справедливость закона всемирного тяготения, открытого еще Ньютоном.

Работа Эйлера оказалась полезной и для решения практических проблем. Именно по методу Эйлера немецкий астроном Т. Майер составил таблицы наблюдаемых движений Луны, которые вскоре вошли в справочники для определения географической долготы в открытом море. А когда английский парламент выдал премию, назначенную за способ определения долготы, часть этой премии была присуждена Эйлеру, на основе формул которого Майер составил свои таблицы.

Большой «Трактат о движении твердых тел» был опубликован в 1765 г. В предисловии к нему Эйлер повторяет основные факты из своей «Механики», вышедшей почти на 30 лет раньше. В «Трактате» уже достаточно подробно рассмотрены вопросы вращения твердого тела, использованы знаменитые «углы Эйлера», изучены свойства момента инерции и вычислены моменты инерции многих часто встречающихся тел. Кроме того, в «Трактате», разработана и самая динамика твердого тела.

Серьезные трудности представляло исследование движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Это движение можно математически описать системой из шести дифференциальных уравнений, в левых частях которых — производные по времени от искомых функций движения, а в правых — квадратичные выражения от тех же функций. Решить такую систему в общем виде оказалось невозможным.

Эйлер рассмотрел частный, но нередко встречающийся на практике случай, когда тело произвольной формы закреплено в центре тяжести,— и нашел возможность интегрирования уравнений, то есть отыскания неизвестных функций движения тела для этого случая.

Отметим еще, что исследование другого частного случая — когда центр тяжести тела находится на оси вращения, а само тело обладает некоторой симметрией — удалось вскоре Лагранжу. В каждом из этих случаев систему удается проинтегрировать с помощью так называемых эллиптических функций. Наконец, третий случай интегрируемости был найден лишь в 1888 г. С. В. Ковалевской. А позднее было доказано, что никаких других случаев, которые могут быть исследованы в общем виде, не существует.

Наконец, в последних главах «Трактата» Эйлер рассматривает приложения созданной им теории к движению небесных тел и к движению волчка (гироскопа).

Первоначально полученные Эйлером общие уравнения верно объясняли все аспекты движения гироскопа. Но сам Эйлер удовлетворен не был: они казались ему слишком громоздкими, недостаточно изящными, не соответствовали, по его мнению, ясному и простому «языку природы». И Эйлер не успокаивается, пока ему не удается найти более изящную, более логичную форму записи этих уравнений.

Начиная с 1765 г. Эйлер исследует понятие инерции, в том числе инерции вращательного движения. Он получает важный результат: доказывает, что всякое несимметричное твердое тело имеет три постоянных оси, вокруг которых оно может вращаться достаточно длительное время.

Серия работ Эйлера по теории корабля начинается написанным еще в Базеле мемуаром о наилучшем расположении мачт, получившим почетный отзыв Парижской Академии (1726 г.).

В результате деятельности Петра I, «прорубившего окно в Европу», Россия стала могущественной морской державой. Понятно, что проблемы кораблестроения и кораблевождения играли важную роль в XVIII в. — и, разумеется, были в центре внимания Петербургской Академии наук. По поручению Академии Эйлер подготовил двухтомную «Морскую науку» (правда, издана она была лишь в 1749 г.). В первом томе подробно изложена общая теория равновесия и устойчивости плавающих тел, во втором исследуются проблемы конструкции и правильной нагрузки корабля. В 1759 г. Эйлер представляет на конкурс Парижской Академии сочинение «Исследование усилий, которые должны выносить все части корабля во время боковой и килевой качки». Впоследствии, уже вернувшись в Петербург, Эйлер подготовил по всем этим вопросам сокращенное практическое руководство, которое в 1773 г. было издано на французском языке и предназначено для мореходных школ Франции; в 1778 г. оно вышло на русском языке под названием «Полное умозрение строения и вождения кораблей, сочиненное в пользу учащихся навигации»; тогда же были осуществлены английское и итальянское издания.

Знакомясь с работами Эйлера в области механики и считая механику частью физики, можно подумать, что Эйлер был не только великим математиком, но и великим физиком. Но если присмотреться к *методам* исследований Эйлера в области механики, то нетрудно заметить, что почти все они представляют собой математическую постановку и математическое решение конкретных проблем — будь то проблемы, возникшие в механике, в астрономии или в инженерных дисциплинах. Поэтому механика Эйлера — это математическая механика или, иначе, применение математики к решению проблем механики, а вовсе не особая наука, существенно отличная от математики. И, разумеется, достижения Эйлера в области механики являются триумфом его математического метода мышления.

Приложение

КРАТКИЙ БИОГРАФИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

Эйлер, Пауль — отец Л. Эйлера. Родился 25 февраля 1669 г. Учился в Базельском университете (с 1685 г.), с 1701 г. — пастор сиротского приюта в Базеле, с 1704 г. — проповедник в соборе св. Якова, в 1706 г. женился на Маргарите Брукер. С 1708 г. — пастор в Риэне, селении близ Базеля, на правом берегу Рейна.

Умер в 1745 г.

Эйлер, Маргарита (урожденная Брукер) — мать Л. Эйлера. Родилась в 1677 г. в семье госпитального пастора Иоганна Генриха Брукера, мать — Мария Магдалина, урожд. Фабер. После смерти мужа переехала (в 1750 г.) к старшему сыну Леонарду в Берлин; Л. Эйлер вместе с сыном Иоганном Альбрехтом ездил во Франкфурт-на-Майне, чтобы встретить ее и привезти в Берлин.

Умерла в 1761 г.

Эйлер, Иоганн Альбрехт, старший сын Л. Эйлера. Родился в Петербурге 27 ноября 1734 г. Семи лет переехал вместе с отцом в Берлин. Некоторое время учился в школе, затем занимался с отцом — главным образом точными науками. Проявил прекрасные способности и жажду к знаниям. В 1749 г. помогал отцу в измерениях Финовского канала — и очень хорошо зарекомендовал себя. Член Берлинской Академии (с 1754 г., но денежное содержание лишь с 1756 г.). В 1758—1759 гг. — инспектор королевской обсерватории, где и сам много работал, в частности наблюдал и описал появившуюся комету. С 1766 г. — профессор физики в Петербургской Академии, куда переехал вместе с отцом. С 1769 г. — секретарь конференц-коллегии Академии наук. Член научных обществ и академий: Мюнхенской (1762), Петербургского экономического общества (1766), Стокгольмской (1771), Флиссингенской (1775). Лауреат семи научных премий (Петербургской АН, Парижской АН, Мюнхенской АН и Гёттингенского научного общества).

Умер в 1800 г.

Эйлер, Карл, второй сын Л. Эйлера. Родился 15 июня 1740 г. в Петербурге. Рос и учился в школе (а также у частных учителей) в Берлине. Занимался с отцом точными науками и философией, затем заинтересовался медициной. В университете Галле получил степень доктора медицины (1762), с 1763 г. — врач французской колонии в Берлине. В 1766 г. вместе с отцом отправился в Петербург, где был принят на императорскую службу. С 1772 г. — медик императорской АН.

Умер в 1790 г

Эйлер, Христофор, третий сын Л. Эйлера. Родился 1 мая 1743 г. в Берлине. После кратковременного, но успешного обучения в школе занимался точными науками под руководством отца и старшего брата Иоганна Альбрехта. Увлекся военной карьерой. Сопровождал в походах прусского короля Фридриха II, который не разрешил ему в 1766 г. вернуться вместе с отцом в Россию и, опасаясь самовольного отъезда, приставил к нему стражу. Был отпущен лишь после вмешательства Екатерины II. На русской службе был произведен в майоры и назначен начальником Сестрорецкого оружейного завода. В 1769 г. был в числе астрономов, наблюдавших прохождение Венеры по диску Солнца (в Орске). Участвовал в войне против турок. Позднее был произведен в генерал-лейтенанты.

Умер в 1812 г.

Бернулли — семья ученых, родоначальник которой, Якоб Бернулли, в XVI в. переселился в Швейцарию из Голландии. Внук его, также Якоб Бернулли (1598—1634), постоянно жил в Базеле.

Бернулли, Якоб I родился в 1654 г. в Базеле. Изучал теологию, позднее увлекся математикой. Во время поездки в Голландию и Англию познакомился с математиками этих стран. С 1687 г. — профессор математики Базельского университета. Познакомившись с первыми работами Г. В. Лейбница по дифференциальному исчислению, применил изложенные в них идеи к исследованию функций. Сформулировал и частично решил ряд важных задач математики и механики. В книге «Арифметические приложения о бесконечных рядах и их конечных суммах», которая была первым учебником по теории рядов, доказал, между прочим, расходимость гармонического ряда (т. е. доказал, что сумма членов ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+$ $+\frac{1}{n}$ при достаточно большом количестве членов окажется больше любого наперед заданного числа). Решил также ряд задач комбинаторики и теории вероятностей (его труд «Искусство предположения» был издан посмертно в 1713 г. и оказал большое влияние на приложение теории вероятностей к практике).

Многие понятия теории вероятностей названы его именем («схема Бернулли», «теорема Бернулли» и др.). Имел многочисленных учеников, в том числе младшего брата Иоганна I Бернулли, племянника Николая I Бернулли, Пауля Эйлера — отца Леонарда Эйлера и др.

Умер в 1705 г.

Бернулли, Иоганн I — брат Якоба — родился в 1667 г. в Базеле. Занимался медициной, позднее под влиянием брата увлекся математикой. С 1695 г. — профессор математики в Гронингене (Голландия); в 1705 г., после смерти брата, вернулся в Базель, где занял кафедру Якоба Бернулли.

Как и брат, активно сотрудничал с Лейбницем в развитии дифференциального исчисления. В 1742 г. издал первый систематический курс дифференциального и интегрального исчисления. Имел многочисленных учеников, в том числе троих сыновей и Леонарда Эйлера.

Умер в 1748 г. Интересно отметить, что траурную речь над его могилой произнес дядя Л. Эйлера, священник Генрих Брукер, а надпись на могильном камне гласила:

«Под этим камнем покоится Иоганн Бернулли, гениальнее которого не видели в Базеле, Архимед своего века, не уступающий таким светочам Европы, как Декарт, Ньютон и Лейбниц».

Остается добавить, что если эта надпись и преувеличивает заслуги Иоганна Бернулли, то не очень уж сильно.

Бернулли, Николай I — племянник Якоба и Иоганна — родился в 1687 г. в Базеле. Занимался теорией вероятностей и интегральным исчислением. Был профессором математики в Падуе (Италия), затем профессором логики и права в Базеле. Вел научную переписку с Г. В. Лейбницем, а позднее — с Л. Эйлером.

Умер в 1759 г.

Бернулли, Николай II — сын Иоганна Бернулли. Родился в 1695 г. в Базеле. С 1725 г. — профессор математики в Петербурге.

Умер в 1726 г.

Бернулли, Даниил — также сын Иоганна Бернулли. Родился в 1700 г. в Гронингене. Под руководством отца и отчасти старшего брата рано приобщился к занятиям математикой; кроме того, занимался физиологией и медициной. В 1725—1733 гг. — профессор Петербургской Академии, позднее — ее почетный член. По рекомендации Д. Бернулли в Петербург был приглашен и Л. Эйлер.

Впервые применил математический анализ к теории вероятностей, а последнюю — к демографии. Дал определение числа e: $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Разработал важные проблемы гидродинамики. Завоевал 10 премий Парижской

Академии за работы по математике и физике. В течение многих десятилетий вел научную и дружескую переписку с Л. Эйлером

Умер в 1782 г.

Известны также:

Иоганн II Бернулли (1710—1790) — также сын Иоганна I Бернулли, который вначале был профессором риторики, а затем профессором математики в Базельском университете;

Иоганн III Бернулли (1744—1807), который был королевским астрономом в Берлине;

Якоб II Бернулли (1759—1789) — племянник Даниила Бернулли, который был профессором и академиком в Петербурге.

Блюментрост, Лаврентий — первый президент Санкт-Петербургской Академии наук. Родился в 1692 г. в России. Учился вначале у магистра Паузе в школе пастора Глюка. С 15 лет — студент-медик в Галле (Германия), затем в Оксфорде (Англия) и Лейдене (Голландия), где и стал доктором.

В 1714 г. вернулся в Россию и стал лейб-медиком при Наталье Алексеевне — сестре Петра I. В 1717 г. послан на стажировку в Париж к известному врачу Дювернуа. В 1718 г., после смерти Арескина, занял его место лейб-медика Петра I и одновременно управляющего библиотекой и кунсткамерой.

Около 1720 г. предложил Петру I «вызвать способных ученых людей в Санкт-Петербург, которые бы исключительно науками занимались». Петр I, будучи уже членом Парижской Академии, счел это предложение для Российского государства полезным. Открытие Академии состоялось уже после смерти Петра I, и Блюментрост стал ее первым президентом.

В 1728 г., уезжая с двором в Москву, Блюментрост перепоручил руководство Академией библиотекарю И. Д. Шумахеру.

В 1738 г. был назначен начальником московского госпиталя.

Умер в 1755 г.

Вольф, Христиан — философ и математик. Родился в 1679 г. Один из авторитетнейших последователей философии Лейбница, систематизировавший и комментировавший его учение. В начале XVIII в. был профессором университета в Галле. Однако в 1723 г. по доносу своего чересчур «правоверного» сослуживца Ланге был обвинен в безбожии и бежал в Марбург (ландграфство Гессен, не входившее тогда в Пруссию). После смерти прусского короля Фридриха Вильгельма I и воцарения «просвещенного» Фридриха II (1740) с триумфом приехал в Галле в карете, которую везли 50 студентов, предшествуемых шестью трубачами. Тем не менее продолжал жить и работать в Марбурге.

Руководил научной подготовкой М. В. Ломоносова, посланного к нему Петербургской Академией (1736—1739). Написал хороший учебник по математике, переведенный на все европейские языки (изданный, в частности, «морским шляхетным корпусом в Петербурге»).

Будучи приглашен в 1723 г. Петром I во вновь создаваемую Академию, без обиняков ответил, что «для одного преподавания приезжать было бы неразумно, а для России невыгодно, ибо начинающих учить высоким материям невозможно... и нет необходимости назначать ему столь высокую плату». Однако рекомендовал в Петербургскую Академию ряд западноевропейских ученых, в том числе братьев Бернулли, которые позднее, уже живя в Петербурге, рекомендовали и юного Эйлера.

В 1727 г. Эйлер, направляясь из Базеля в Петербург, избрал далеко не прямой путь через Марбург — именно для того, чтобы встретиться в Марбурге с Вольфом.

Умер в 1754 г.

Головин, Михаил Евсеевич — адъюнкт Академии наук, позднее — профессор учительской семинарии. Племянник М. В. Ломоносова, распорядившегося незадолго до своей смерти «учить его латинскому языку, арифметике, чисто и хорошенько писать и танцевать».

Родился в 1756 г. в Архангельской губернии. Будучи студентом академического университета, изучал математику под руководством Эйлера — именно таким методом, как некогда самого Эйлера учил И. Бернулли. Эйлер к этому времени уже ничего не видел — и Головин записывал с его слов или просто под диктовку очередные сочинения Эйлера. Разумеется, это требовало незаурядных математических познаний.

В «Протоколах заседаний» Академии говорилось, что «успехи студента Головина очень значительны» и что «...академик Эйлер, воздав заслуженную похвалу усердию... просит поощрить его повышением оклада жалованья». Вскоре по настоянию Эйлера Головин утвержден адъюнктом Академии.

Головин перевел на русский язык «Морскую науку» и часть «Введения в анализ» Эйлера, а также ряд других работ. Позднее Головин работал в учительской семинарии и других учебных заведениях.

Умер в 1790 г.

Гольдбах, Христиан, математик. Родился в 1690 г. в Кенигсберге (ныне Калининград) в семье пастора. Окончил юридический факультет Кенигсбергского университета. Увлекался математикой. Много путешествовал, был лично знаком с Лейбницем, Н. Бернулли и другими выдающимися учеными. Один из первых членов Петербургской Академии (с 1725 г.), конференц-секретарь Академии (1725—1740). В первых изданиях Петербургской Академии опубликовал ряд статей по математике. С 1742 г. жил в Москве, работал в Министерстве иностранных дел. Математикой занимался для удовольствия.

С 1729 г. до самой смерти постоянно переписывался с Эйлером, главным образом по математическим проблемам. В одном из писем высказал предположение, что каждое нечетное целое число $n>6$ может быть представлено суммой трех простых чисел; в ответном письме Эйлер заметил: для этого достаточно, чтобы каждое четное число можно было представить суммой двух простых чисел.

Умер в 1764 г.

Д'Аламбер, Жан ле Рон (иногда пишут Даламбер, Жан Лерон) — крупнейший французский математик, философ и просветитель, работавший вместе с Дидро и другими «энциклопедистами» над созданием «Энциклопедии наук, искусств и ремесел», в которой Д'Аламбер вел раздел точных наук.

Родился в 1717 г. в Париже, был подкинут матерью на ступени церкви святого Жана ле Рон, откуда и получил свое имя. Воспитывался в семье бедного стекольщика; позднее его стал материально поддерживать отец, офицер де Туш. Уже в раннем детстве поражал окружающих наблюдательностью и рассудительностью. В 1739 и в 1740 гг. представил в Парижскую Академию трактаты по математике и физике — и в 1741 г. был избран членом Парижской Академии. Позднее был избран членом Петербургской (с 1764 г.), Берлинской и еще нескольких академий.

В «Трактате о динамике» (1743 г.) впервые сформулировал один из наиболее общих принципов динамики, известный ныне под названием «Принцип Д'Аламбера». Важнейшие работы относятся к теории дифференциальных уравнений, которые послужили основой для создания новой тогда науки — математической физики. Д'Аламбер и, независимо от него, Эйлер впервые нашли связи между действительной и мнимой частью аналитических функций, которые впоследствии были названы уравнениями Коши — Римана (хотя исторически правильнее было бы назвать их уравнениями Д'Аламбера — Эйлера). Каждому студенту известен достаточный признак сходимости числовых рядов — признак Д'Аламбера (числовой ряд сходится, если отношение последующего члена к предыдущему стремится к некоторому постоянному числу P, которое по модулю меньше единицы).

Умер в 1783 г.

Иноходцев, Петр Борисович, русский математик, астроном, филолог. Родился в 1742 г. Академик (с 1779 г.). Перевел на русский язык «Элементы алгебры» Эйлера, выпущенные в 1768—1769 гг. под названием «Универсальная арифметика» (совместно с И. Юдиным). В 1769 г. по поручению Эйлера наблюдал в Гурьеве редкое астрономическое явление — прохождение Венеры по диску Солнца. Определил географические координаты некоторых городов России. Позднее участвовал в составлении толкового словаря русского языка (совместно с С. К. Котельниковым и др.).

Умер в 1806 г.

Клеро, Алексис Клод, французский математик и астроном. Родился в 1713 г. в Париже в семье профессора математики. Уже в 18 лет стал адъюнктом Парижской Академии. Занимался вопросами геодезии («теоремы Клеро») и гидродинамики. После опубликования представленной на конкурс Петербургской Академии «Теории движения Луны» (1752) был избран почетным членом Петербургской Академии. В 1759 г. исследовал орбиту кометы Галлея. На примере одного типа дифференциальных уравнений («Уравнение Клеро») построил понятия частного и общего решения дифференциального уравнения. Написал ряд хороших учебников по геометрии.

Умер в 1765 г.

Котельников, Семен Кириллович — академик. Родился в 1723 г. в Петербурге. В 11 лет поступил в школу Ф. Прокоповича, знаменитого сподвижника Петра I.

В 1738 г., после закрытия школы, переведен в Александро-Невскую семинарию, затем в академическую гимназию, а из нее — в академический университет. По свидетельству проф. Рихмана, «проявил большое усердие» в математике, ее приложениях — механике, гидростатике, гидравлике и т. д., а также в латыни. Эти успехи послужили основанием, чтобы отправить его в обучение «к искусному геометру» — он был утвержден адъюнктом и послан в Берлин к Эйлеру. Впрочем, из дипломатических соображений Котельников некоторое время обучался в Лейпциге, а с лета 1752 г. поселился у Эйлера в его берлинской квартире и очень быстро завоевал благорасположение великого ученого.

Успехи Котельникова в изучении математики оказались блистательными. Эйлер писал, что так как Д'Аламбер — мировое светило тогдашней математики — не согласится, разумеется, занять кафедру высшей математики в Петербурге, то никого в Европе сильнее Котельникова он рекомендовать не может. В декабре 1756 г. Котельников был утвержден экстраординарным профессором высшей математики, а четыре года спустя — ординарным академиком.

Однако Котельников интересовался также и языкознанием и способствовал успешному составлению толковых словарей.

Котельников — первый из русских математиков, работы которого имели самостоятельное значение в науке. Несмотря на это, он в 1796 г. был отчислен от Академии и назначен ... цензором. Впрочем, Котельников оставался академиком и получал академическую пенсию.

Умер в 1806 г.

Лагранж, Луи Жозеф — знаменитый французский математик. Дед его, французский офицер, служивший на Сардинии, был женат на итальянке.

Родился в 1736 г. в Турине (Италия). Вначале изучал древние языки и рано познакомился с сочинениями Архимеда и Евклида. Случайно прочитал книгу английского математика Э. Галлея (впрочем, более известного в качестве астронома, вычислившего орбиту кометы его имени) «О преимуществах аналитического метода», после чего живо увлекся математикой.

Уже в возрасте 16 лет начал преподавать математику в туринском артиллерийском училище, а в 18 лет стал там же профессором. Из наиболее способных учеников, которые почти все были старше своего наставника, организовал научное общество, превратившееся впоследствии в Туринскую Академию.

Сочинение «О способах нахождения наибольших и наименьших величин интегралов» Лагранж написал в 19-летнем возрасте. Эйлер, ознакомившись с этим сочинением еще до того, как оно было опубликовано, предрек автору мировую славу. А в 1759 г., получив от Лагранжа письмо с найденным им решением одной важной задачи вариационного исчисления, Эйлер добился избрания 23-летнего ученого в члены Берлинской Академии.

С 1766 до 1787 г. Лагранж жил в Берлине и возглавлял Берлинскую Академию. Затем переехал в Париж, был профессором Нормальной школы и Политехнической школы.

В своей «Аналитической механике», разработанной еще в 1759 г. (издана в 1772 г.), Лагранж впервые показал, что четыре величины — три декартовы координаты и время — полностью определяют движение материальной точки. Использование аналитических методов и, в частности, «уравнений Лагранжа» в механике оказалось более гибким и более мощным методом исследования, чем все известные ранее методы.

Другие важные труды Лагранжа относятся к вариационному исчислению, математическому анализу (каждому студенту знакома «формула конечных приращений Лагранжа»), а также к теории чисел, алгебре, астрономии.

За работы по математике и ее приложениям Лагранж получил 5 премий Парижской Академии.

Умер в 1813 г.

Ламберт, Иоганн Генрих — немецкий математик и астроном. Родился в 1728 г. в Эльзасе (ныне — г. Мюлуз, департамент Верхний Рейн, Франция). Французы называют его Жан Анри Ламбéр. Сын и внук портного, в 12 лет оставил школу и стал помогать отцу. Случайно, благодаря хорошему почерку, устроился секретарем. А затем попал в воспитатели троих детей богатого вельможи.

Юный Ламберт стал с жадностью знакомиться с богатейшей библиотекой патрона, изучил латынь, но особенно увлекся математикой и физикой. В 1755 г. опубликовал в журнале «Акта Гельветика» свою первую научную работу — и стал членом Базельского научного общества. С 1759 г.— член Баварской Академии.

Эйлер знал Ламберта и ценил его способности. Неоднократно предлагал Фридриху избрать его в Академию — и в 1765 г. 37-летний Ламберт стал членом Берлинской Академии, а вскоре получил от короля почетный титул «обербаурат».

По рекомендации Эйлера Екатерина II поручила своему послу князю Долгорукому пригласить Ламберта в Петербургскую Академию. Вскоре Ламберт составил даже проект, по которому должна быть организована Академия «для пользы науке и государству». Посол пригласил Ламберта вместе с Эйлером на обед; однако окончательная договоренность достигнута не была, и Ламберт остался в Берлине.

Его фотометрические исследования стали основополагающими в этой области науки, а единица измерения яркости названа в его честь *ламбертом*; «закон Ламберта» устанавливает зависимость силы света диффузно-светящихся поверхностей в зависимости от направления, в котором ведется наблюдение. Его исследования в области кометных орбит привели к открытию неизвестных до того свойств конических сечений; первые упоминания о двойных звездах появились также лишь в работах Ламберта. Космогонические идеи Ламберта предвосхитили гипотезу происхождения планет, связываемую с именами Канта и Лапласа. Исследования по чистой математике привели в 1766 г. к первому в истории науки доказательству иррациональности числа π — хотя позднее Лежандр обнаружил в этом доказательстве некоторые неточности. Наконец, Ламберту принадлежат важные работы по геометрии и ее обоснованиям, а также ряд идей в алгебре логики.

Умер в 1777 г.

Лейбниц, Готфрид Вильгельм — величайший немецкий математик и философ. Родился в 1646 г. в Лейпциге; учился в Лейпцигском и Иенском университетах. Был организатором и первым президентом Берлинской Академии; его советы были положены в основу при подготовке Петром I создания Петербургской Академии.

Основой философии Лейбница было учение о «монадах» — простых неделимых субстанциях, исходном начале всего сущего и обладающих способностью действия и самостоятельностью. Несмотря на идеалистический образ мышления, в философской системе Лейбница был ряд ценных элементов, которые высоко оценил К. Маркс, а позднее — В. И. Ленин, считавший, что философская система Лейбница — «своего рода диалектика и очень глубокая, несмотря на идеализм и поповщину» (В. И. Ленин. «Философские тетради»).

Важнейшей заслугой Лейбница в области математики является разработка дифференциального и интегрального исчисления, имевшая огромное значение для развития математики и естествознания. Почти одновременно и независимо от Лейбница к открытию дифференциального и интегрального исчисления пришел и Ньютон; однако если Лейбниц сформулировал свое открытие на языке геометрии, то Ньютон — на языке механики. Спор о том, кто же из них двоих был первым, не решен и по сей день, хотя строгое обоснование рассуждений, приводящих к понятиям дифференциального и интегрального исчисления (или короче: математического анализа), было дано лишь в XIX в. после работ К. Вейерштрасса и О. Коши.

Лейбниц получил важные результаты и в отдельных частных вопросах математики. Назовем здесь открытие «признака Лейбница для сходимости знакопеременных рядов» (если члены знакочередующегося ряда убывают, стремясь к нулю, то ряд сходится); открытие «ряда Лейбница» $\left(\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots\right)$;

формулу Лейбница для производной любого порядка от произведения двух функций, которую он сообщил в письме к И. Бернулли еще в 1695 г.

Лейбниц ввел много математических терминов и символов, которые сохранились до нашего времени, а также впервые стал писать научные труды на немецком языке (а не на латыни, как было принято в те годы в ученом мире).

Умер в 1716 г.

Лексель, Андерс Иоганн («Андрей Иванович») — русский астроном, член Петербургской Академии (с 1771 г.). Родился в 1740 г. в Або (Финляндия), там же окончил университет и остался в нем работать; затем работал в университете и в Морском училище в Упсале (Швеция). Вскоре после своего возвращения из Берлина Эйлер пригласил его в Петербург, где Лексель занимался математикой и ее приложением к астрономии — особенно сферической тригонометрией — под руководством Эйлера. В статье «Исследования о новой планете, открытой Гершелем» (речь идет о планете Уран) Лексель высказал предположение, что за орбитой этой планеты должна существовать еще одна более отдаленная от Солнца планета, которая своим притяжением отклоняет («возмущает») ее движение. Эта идея, математически разработанная У. Леверье и Дж. Адамсом в середине XIX в., действительно привела к открытию следующей планеты — Нептуна.

Умер в 1784 г.

Мопертюи, Пьер Луи Моро — французский математик, физик, астроном, геодезист. Родился в Сен-Мало (сев.-зап. Франция) в 1698 г. Служил в юности в армии офицером. Затем вышел в отставку, занялся научными исследованиями и был избран членом Парижской Академии. В 1728 г. побывал в Англии, ознакомился с идеями И. Ньютона и старался распространять их во Франции. В 1736—1737 гг. по поручению Академии руководил Лапландской геодезической экспедицией, измерения которой подтвердили, что Земля сплющена у полюсов. Эта работа принесла Мопертюи всемирную известность в научном мире. В 1744 г. Мопертюи открыл «принцип наименьшего действия», получивший название «принцип Мопертюи» и сыгравший важную роль в развитии механики.

С 1745 г. был президентом Берлинской Академии, однако к обязанностям своим относился формально, часто уезжал из Берлина во Францию, оставляя вместо себя Эйлера. В 1759 г., во время семилетней войны, ввиду трудностей проезда через театр военных действий, пытался вернуться из Франции в Германию кружным путем, однако, будучи тяжело больным, задержался в Базеле и там умер.

Румовский, Степан Яковлевич — астроном, математик, вице-президент Академии наук. Родился в 1734 г. близ г. Владимира. После переезда семьи в Петербург поступил в Александро-Невскую семинарию, где рано проявил интерес к точным наукам.

В 1748 г. Ломоносов отобрал четырех лучших учеников — и среди них Румовского — для пополнения академической гимназии. Вскоре Румовский становится студентом недавно созданного академического университета. «В математике юноша Румовский обладает такими прирожденными способностями, которые намного превосходят обычный уровень»,— отзывался о нем профессор Рихман.

В 1753 г. студент Румовский за выдающиеся успехи был рекомендован к выдвижению в адъюнкты. Для этого он должен был представить сочинение (по математике или физике). Это сочинение Румовского «Решение задачи Кеплера» было послано в Берлин на отзыв Эйлеру (со времени отъезда Эйлера в Берлин в Петербурге не было специалиста по высшей математике). Эйлер отметил на полях несколько мелких неточностей и написал блистательный отзыв. Вскоре девятнадцатилетнего адъюнкта Степана Румовского послали для продолжения образования к Эйлеру. В доме Эйлера Румовский прожил 2 года — и навсегда сохранил к своему учителю самые добрые чувства.

Через несколько лет после возвращения в Петербург Румовский становится профессором, а в 1800 г. — вице-президентом Академии. Выдающиеся труды по астрономии послужили поводом для избрания его членом Стокгольмской Академии наук.

Румовский играл также немалую роль в деле народного просвещения — был попечителем Казанского учебного округа, способствовал становлению Лобачевского как ученого.

Умер в 1812 г.

Фусс, Никлаус («Николай Иванович») — русский математик и педагог. Родился в 1755 г. в Базеле Д. Бернулли, учеником которого он был, рекомендовал его Эйлеру в качестве секретаря. Приехав в 1773 г. в Петербург, Фусс 10 лет работал с Эйлером по 8—9 часов в день — читал ему корреспонденцию, писал под его диктовку, готовил к печати его труды.

В 1783 г. стал профессором и академиком, а с 1800 г., после смерти Иоганна Альбрехта Эйлера, занял пост непременного секретаря Академии. Был женат на внучке Эйлера.

Математические работы Фусса представляют собой главным образом продолжение и детализацию работ Эйлера.

Составил первую биографию Эйлера и подготовил к печати многие его работы. Составил первые русские учебники математики, совместно с С. Я. Румовским разрабатывал программы для учебных заведений России.

В конце жизни, получив на отзыв сочинение Н. И. Лобачевского по неевклидовой геометрии, не понял революционного смысла открытия Лобачевского и дал резко отрицательный отзыв.

Умер в 1826 г.

Фусс, Павел Николаевич — правнук Эйлера. Родился в 1798 г. в Петербурге. Академик (с 1823 г.). Опубликовал ряд статей по частным вопросам математики и «Сравнительные таблицы» французских и русских мер. Составлял примечания и библиографию к работам Эйлера, а также критические обзоры работ, поступавших в Академию. После смерти отца (1826) заменил его на посту непременного секретаря Академии.

Подготовил к печати переписку Эйлера с Х. Гольдбахом и с Д. Бернулли; привлек к работе в Академии крупнейших математиков России того времени — М. В. Остроградского и В. Я. Буняковского.

Умер в 1853 г.

Шумахер, Иоганн-Даниил — библиотекарь Академии. Родился в 1690 г. в Эльзасе. С 1707 г. — студент Страсбургского университета, магистр (1711).

Приглашен на русскую службу любимцем Петра I адмиралом Ф. Лефортом, в 1714 г. прибыл в Санкт-Петербург.

Аккуратный исполнитель распоряжений, но по характеру — беспринципный карьерист. Старался угодить своему непосредственному начальнику — лейб-медику Петра I Арескину, а затем его преемнику Л. Блюментросту.

По поручению Петра I, переданному Блюментростом, завел переписку для приглашения в будущую Академию иностранных ученых.

Во вновь созданной Академии являлся библиотекарем; однако после переезда президента Блюментроста вместе с двором в Москву фактически стал полноправным распорядителем дел Академии.

Был в весьма натянутых отношениях с М. В. Ломоносовым, всячески мешал его продвижению; выказывал презрительное отношение ко всем русским.

Умер в 1761 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Котек В. В. Леонард Эйлер. М.: Учпедгиз, 1961.
2. Прудников В. Е. Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков. М.: Учпедгиз, 1956, с. 27—57.
3. Юшкевич А. П. История математики в России. М.: Наука, 1968, с. 103—113.
4. К 150-летию со дня смерти Эйлера — сборник. Изд-во АН СССР, 1933.
5. К 250-летию со дня рождения Л. Эйлера — сборник. Изд-во АН СССР, 1958.
6. Историко-математические исследования — сборники (особенно выпуск III — 1949, вып VII—1954, вып. X—1957).
7. Имеется также весьма подробная книга о жизни Эйлера, написанная его швейцарским биографом Отто Шписом (на немецком языке): O. Spiess. Leonhard Euler. Frauenfeld — Leipzig, 1929.
8. R. Thiele. Leonhard Euler. Leipzig, 1982.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Александр Яковлевич Яковлев

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

Редактор Г. С. Уманский
Художник Б. Л. Николаев
Художественный редактор Е. Н. Карасик
Технический редактор Л. М. Абрамова
Корректоры Н. В. Лепендина, А. А. Семина

ИБ № 7320

Сдано в набор 20.12.82. Подписано к печати 24.06.83. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 2. Гарн. литер. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5. Усл. кр. отт. 5,37. Уч.-изд. л. 5,28. Тираж 170 000 экз. Заказ № 578. Цена 15 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Смоленский полиграфкомбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Смоленск-20, ул. Смольянинова, 1.

15 коп.

Люди науки

Есть несколько имен в истории современной математики, которые известны каждому образованному человеку. К их числу принадлежит и имя великого математика академика Леонарда Эйлера, руководителя первой русской научной математической школы, крупнейшего ученого XVIII века, который в области математики справедливо может быть назван веком Эйлера. Эйлер сделал первостепенные открытия почти во всех областях математики.

Школьники и сейчас изучают теорию логарифмов и тригонометрию по Эйлеру, студенты наших дней изучают аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисления, механику по руководствам, восходящим к трактатам великого ученого. Эйлер, по выражению Лапласа, был отцом современного анализа, заложил фундамент ряда новых математических наук. Механика, впервые систематически изложенная Эйлером с помощью анализа, приобрела в его трудах современный вид и получила новое, существенное развитие.

Научная деятельность Эйлера оказала исключительно сильное влияние на развитие математических наук в XVIII веке. «Читайте, читайте Эйлера: это наш общий учитель», говорил своим ученикам Пьер Симон Лаплас, младший современник Эйлера и один из крупнейших математиков Франции.

И сейчас, через 200 лет после смерти Эйлера, его огромное научное наследие изучено еще далеко не полностью.

По материалам статьи И. Г. Башмаковой и А. П. Юшкевича в VII выпуске «Историко-математических исследований».

Neue Grundsätze
der
ARTILLERIE
enthaltend
die Bestimmung der Gewalt des Pulvers
nebst
einer Untersuchung
über den Unterschied des Widerstands der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen
aus dem Englischen des Hrn. Benjamin Robins übersetzt und mit den nöthigen Erläuterungen und vielen Anmerkungen versehen
von
Leonhard Euler
Königlichem Professor in Berlin.

SAPERE AUDE

Berlin bey A. Haude
Königl. und der Academie der Wissenschaften privil. Buchhändler 1745.