НЕОПУБЛИКОВАННЫЕ МАТЕРИАЛЫ Л. ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт истории естествознания и техники
Санкт-Петербургский филиал

НЕОПУБЛИКОВАННЫЕ МАТЕРИАЛЫ Л. ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Ответственный редактор
д-р филос. наук Н. И. НЕВСКАЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
„НАУКА"
1997

ББК 22.13
Н 52

УДК 51(09)

Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел. — СПб.: Наука, 1997. — 255 с.

Книга содержит неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел, хранящиеся в Санкт-Петербургском филиале Архива Российской академии наук. Во введении освещается история приобщения Л. Эйлера к математике и разным отраслям естествознания и анализируются неопубликованные рукописи Эйлера по теории чисел. Книга включает следующие разделы: диофантов анализ, виды чисел, записи Эйлера по разбиению чисел (partitio numerorum), малую теорему Ферма, теорему Эйлера, заметки Эйлера по теории чисел из его записных книжек и др. Записи Эйлера снабжены комментарием. Книгу завершают список литературы, список трудов Эйлера по теории чисел и именной указатель.

Книга предназначена для математиков, механиков, физиков, астрономов и всех интересующихся историей науки.

Составители:

Г. П. МАТВИЕВСКАЯ, Е. П. ОЖИГОВА, Н. И. НЕВСКАЯ, Ю. Х. КОПЕЛЕВИЧ

Рецензенты:

Л. И. БРЫЛЕВСКАЯ, Л. В. КОНОВАЛОВА

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 96-03-16024д)

Н $\frac{1602030000-523}{042(02)-97}$ 62–97, I полугодие

ISBN 5-02-024847-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

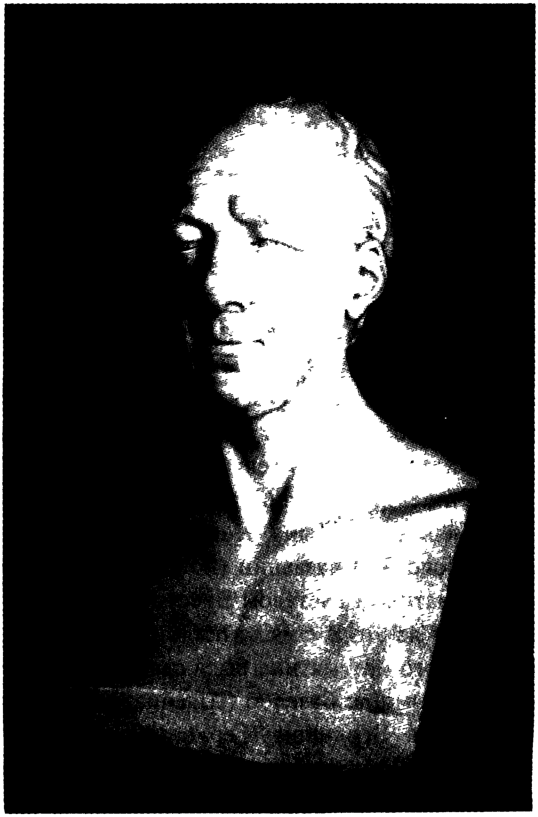
Леонард Эйлер — выдающийся представитель физико-математических наук, во многих областях которых его труды определили их дальнейшее развитие как в XVIII, так и в XIX в. Это влияние заметно сказывается и в XX в. Научное наследие Л. Эйлера исключительно велико и разнообразно. Список его сочинений, опубликованных как под его именем, так и под именем его сына Иоганна Альбрехта Эйлера, насчитывает около 900 названий (по списку, составленному шведским математиком Густавом Энестрёмом, 1852—1923).* Около 120 работ из этого списка посвящены теории чисел.

Жизнь великого математика была связана с тремя городами в трех странах мира: Базелем (Швейцария), Санкт-Петербургом (Россия) и Берлином (Германия). В Базеле Эйлер родился и окончил университет. В Петербурге он сформировался как ученый и успешно начал свою блестящую научную карьеру (в 1727—1741 гг.). В Берлине Эйлер работал с 1741 по 1766 г. В 1766 г. он вернулся в Петербург, где, по выражению одного из биографов, продолжал «жить и вычислять» до 1783 г.

Помимо огромного количества опубликованных трудов Эйлер оставил обширное научное наследие неопубликованных рукописей, заметок, записных книжек и писем. Особый интерес представляют его записные книжки, представляющие собой подлинный кладезь разнообразных идей великого ученого. К сожалению, полное описание этих документов, хранящихся в Санкт-Петербургском филиале Архива Российской академии наук (СПбФА РАН), до сих пор не опубликовано.

---

* В эйлероведении принято обозначать работы Л. Эйлера из списка Энестрёма [94] буквой «Е» и порядковым номером в списке Энестрёма (например, Е458). Работы, опубликованные под именем И. А. Эйлера, аналогично обозначаются буквой «А» и порядковым номером из того же списка (например, А25). Перечень работ Эйлера по теории чисел, выбранных из списка Энестрёма, см. на с. 248—251 настоящего издания.



Л. Эйлер (1707—1783). Бюст работы Ж. Д. Рашетта (Гос. Эрмитаж).

С 1911 г. было начато издание Полного собрания сочинений Л. Эйлера [108], не завершенное и до сих пор. Оно все больше привлекает к себе внимание мировой общественности.

Изучение неопубликованных рукописей Л. Эйлера представляет большие трудности. Здесь необходимо расшифровывать записи ученого, сделанные на латинском, немецком, французском, а изредка и на русском языках, которыми он свободно владел. Особенно большого труда требует исследование записных книжек ученого, представляющих собой черновые наброски, запечатлевшие различные идеи, волновавшие Эйлера, попытки решения им различных математических задач, результаты проведенных им астрономических наблюдений, рассуждения о всевозможных проблемах механики (земной и небесной), астрономии, физики и т. п. Здесь встречаются также записи о прочитанных им книгах, о людях, с которыми он встречался. Записные книжки позволяют проникнуть в творческую лабораторию гениального ученого и использовать его многочисленные ценнейшие идеи в разных областях физико-математических наук.

Настоящая книга посвящена неопубликованным материалам Л. Эйлера по теории чисел, извлеченным из его записных книжек (СПбФА РАН, ф. № 136, оп. 1). Изучением этих материалов много лет занимались Г. П. Матвиевская, Е. П. Ожигова, А. А. Киселев, И. Г. Мельников и ряд других исследователей. Работа выполнялась по исследовательским грантам Российского фонда фундаментальных исследований и Российского гуманитарного фонда научных исследований. Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского гуманитарного фонда научных исследований.

К сожалению, Е. П. Ожигова, первоначально руководившая исследовательским проектом по теме «Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел», скоропостижно скончалась 13 июля 1994 г. Завершение работы и подготовку ее к печати выполнили ее друзья и коллеги: Г. П. Матвиевская, Н. И. Невская, Ю. Х. Копелевич. Член-корреспондент Академии наук Узбекистана, доктор физико-математических наук Г. П. Матвиевская — математик и историк науки, давно занималась изучением записных книжек Эйлера по теории чисел. Доктор философских наук Н. И. Невская — астроном и историк науки, сменила Е. П. Ожигову на посту руководителя проекта. Автор ряда монографий по истории астрономии России XVIII в., она изучала труды Л. Эйлера и других петербургских ученых XVIII в. по астрономии и астрофизике. Кандидат филологических наук Ю. Х. Копелевич — член редколлегии по изданию Полного собрания сочинений Л. Эйлера, автор ряда монографий по истории европейских академий и Петербургской академии наук XVIII в., активный участник подготовки к публикации обширного эпистолярного наследия гениального математика.

Книга состоит из Введения и шести глав. Во Введении освещается биография Л. Эйлера (этот раздел написан Ю. Х. Копелевич) и дается очерк его научной деятельности, начавшейся в Петербурге, продолжавшейся в Берлине и завершившейся в Петербурге (этот раздел написан Н. И. Невской). Здесь нам хотелось показать, насколько многообразной была научная деятельность великого ученого, не ограничивавшегося одной лишь математикой, хотя в этой науке он добился наибольших успехов.

И наконец, заключительная часть Введения посвящена работам Эйлера по теории чисел и общей характеристике его записных книжек. Этот раздел подготовлен Г. П. Матвиевской и Е. П. Ожиговой.

Первая глава, посвященная диофантову анализу, написана Г. П. Матвиевской, третья, посвященная записям Эйлера по разбиению чисел, — Г. П. Матвиевской в сотрудничестве с А. А. Киселевым. Остальные главы — вторая, четвертая, пятая и шестая — подготовлены Е. П. Ожиговой. Записи и фрагменты записей Эйлера снабжены комментариями. Книгу завершают список трудов Л. Эйлера по теории чисел и именной указатель.

В связи с тем что издание Полного собрания сочинений Л. Эйлера подошло к публикации четвертой серии, включающей переписку и записные книжки великого ученого, составители надеются, что настоящее издание будет полезно для специалистов и всех интересующихся историей математики и вообще историей науки.

Составители благодарны А. Б. Кузнецовой за помощь в оформлении рукописи, сверке текстов Эйлера с архивными материалами и помощь в подготовке указателя и списка работ Эйлера по теории чисел.

Г. П. Матвиевская, Н. И. Невская, Ю. Х. Копелевич

ВВЕДЕНИЕ

ЭЙЛЕР И ПЕТЕРБУРГСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Предлагаемая книга содержит труды Леонарда Эйлера по теории чисел, которые не публиковались ни при жизни ученого, ни в посмертных изданиях, но хранятся в его рукописном наследии в Петербургском филиале Архива Российской академии наук. Среди них есть законченные сочинения, варианты, уже печатавшиеся ранее, а также фрагменты и наброски. Составители исходили из убеждения, что эти материалы помогут исследователям творчества Л. Эйлера глубже проникнуть в творческий процесс ученого по теории чисел, увидеть новые грани его гения, характеризующие его гигантскую продуктивность, пожалуй не имеющую аналогов в истории науки.

В историко-научной литературе Эйлера часто называют самым выдающимся математиком XVIII в., и это утверждение еще никем не оспаривалось. Причем значение его отнюдь не исчерпывается этим периодом, а широко простирается и на последующие столетия, включая и наше время. Многие математики и сейчас могли бы сказать вслед за П. С. Лапласом, что Эйлер — «учитель всех нас».

В текущем столетии ученый мир несколько раз торжественно отмечал эйлеровские юбилеи при самом активном участии Швейцарии, родины ученого, и России, страны, где 20-летний юноша стал ученым и с которой была связана бóльшая часть его богатой творческой жизни. В 1907 г. праздновалось 200-летие со дня рождения Эйлера. В ознаменование этой даты было принято решение об издании его Полного собрания сочинений [108]. Все предприятие возглавляет Эйлеровская комиссия Швейцарской академии естественных наук при широком участии сотрудников Российской академии наук, давно занимающихся изучением переписки и трудов Л. Эйлера.

Празднества по случаю 250-летия со дня рождения Л. Эйлера проходили в 1957 г. главным образом в Ленинграде (Санкт-Петербурге). Были заслушаны доклады выдающихся ученых разных стран, открыта мемориальная доска на доме по набережной Лейтенанта Шмидта, где жил Эйлер. Прах ученого был перенесен со старого Смоленского кладбища в Петербургский некрополь. В связи с юбилеем вышел ряд ценных изданий.

Еще раз наша Академия чествовала Эйлера в 1983 г. по случаю 200-летия со дня его смерти. И на этот раз в наш город приехало много зарубежных гостей. Из разных городов и стран собрались многочисленные потомки Эйлера, были изданы в Швейцарии и России юбилейные сборники.

Теперь до следующего большого юбилея — 300-летия со дня рождения Эйлера нас отделяет десятилетие. Хотелось бы, чтобы эта книга открыла новую серию изданий, посвященных памяти великого ученого.

Своим рождением и годами учения Эйлер принадлежит Швейцарии, где он появился на свет 15 апреля 1707 г.* в г. Базеле, в семье пастора. Вскоре Эйлеры переехали в Риген, местечко близ Базеля, где отец получил приход. Базель в ту пору был европейским центром математики благодаря блистательным достижениям братьев Бернулли, Якоба и Иоганна. Маленький Эйлер начальные знания получил от своего отца, обучавшегося в университете у Я. Бернулли. В семилетнем возрасте Леонард был отправлен к бабушке в Базель и там стал учиться в латинской школе, а по математике отец нанял ему молодого частного учителя.

Тринадцати лет Леонард стал посещать лекции в университете, на философском факультете. Здесь, как он сам вспоминал на склоне лет (в своей краткой автобиографии), Л. Эйлер вскоре нашел возможность представиться знаменитому И. Бернулли, который с особым удовольствием помогал ему продвигаться в математике. Из-за занятости И. Бернулли, правда, отказался давать юноше частные уроки, но посоветовал самостоятельно изучать сложные математические книги. Он предложил Эйлеру приходить к нему по субботам пополудни, если встретятся трудности. Юноша охотно воспользовался этим предложением и вскоре убедился, что это наилучший способ добиться наибольших успехов в математике.

В 1722 г. Эйлер получил степень бакалавра, а еще через год — магистра. В качестве магистерской диссертации он прочел лекцию, в которой проводилось сравнение натурфилософских систем И. Ньютона и Р. Декарта. Эта проблема оставалась предметом жгучих споров вплоть до середины XVIII в. Тогда как в Англии учение Ньютона было признано сразу после издания «Начал» [61] в 1687 г., на континенте Европы еще долго не принимали нового учения, а в официальных учреждениях — академиях и научных обществах — еще долго придерживались картезианских позиций. Детальное знакомство с «Началами» Ньютона и сравнение их с основными положениями Р. Декарта помогло Эйлеру в дальнейшем понять преимущества нового учения и включиться в создание нового естествознания, основанного на учении Ньютона.

Став магистром, по желанию отца Эйлер поступил для продолжения образования на богословский факультет, однако все свободное время он посвящал математике. В эти годы он особенно сблизился со своим учителем И. Бернулли и тремя его сыновьями — Николаем, Даниилом и Иоганном (его принято называть Иоганном II). Тогда же Эйлер написал две математические статьи, примыкающие к работам его учителя и касающиеся обратных траекторий. Они были опубликованы в лейпцигских «Acta eruditorum». В своем последнем сочинении на эту тему И. Бернулли вспомнил и о первых опытах молодого Эйлера. Он писал:

---

* В России XVIII в. был принят старый стиль. Датировки по этому стилю были обязательны во всех официальных документах: протоколах заседаний различных подразделений Академии наук. Однако в частной переписке, в записных книжках Эйлера, в журналах астрономических наблюдений даты давались по новому стилю. В переписке с иностранцами давалась иногда двойная датировка. Даты нового стиля отличались от старого стиля на 11 суток.

«Кто желает немного дальше исследовать эту тему, тот, продвигаясь по указанному здесь следу, сможет попробовать свои силы в изучении других обратных траекторий из следующих друг за другом линий. Что это не безнадежно, можно видеть из того, чего добился Леонард Эйлер, молодой человек прекрасных дарований, от остроумия и смышлености которого мы можем ожидать самого великого, когда мы увидели, с какой легкостью и находчивостью он под нашим руководством проникает в глубочайшие тайны высшей математики» (цит. по [120, с. 23]). Эта оценка тем более примечательна, что И. Бернулли обычно весьма ревниво относился к успехам своих современников, в том числе и своих сыновей.

Фактом признания молодого ученого было также одобрение (равнозначное второй премии) на конкурсе Парижской академии наук в 1726 г. его сочинения об оснастке корабля. В 1727 г. Эйлер выступил одним из претендентов на появившуюся в Базельском университете вакансию профессора физики и представил по этому случаю диссертацию «О звуке». В ту пору Швейцария «производила» значительно больше ученых, чем требовалось стране, и на любую вакансию было много претендентов. Трудно критиковать сейчас принятые в Базельском университете правила отбора кандидатов, призванные обеспечить беспристрастность решений, но оборотную сторону этих правил ярко иллюстрирует пример с Эйлером, который даже не был допущен до жеребьевки. Н. и Д. Бернулли также не рассчитывали на должность у себя дома и покинули родину.

Все эти события происходили в то время, когда в Европе создавался новый научный центр — Петербургская академия наук. По замыслу Петра Великого в страну, где не было своих профессиональных ученых, пришлось пригласить иностранцев. Отбор кандидатов длился несколько лет, Петру помогали Х. Вольф и другие европейские знаменитости. По рекомендации Вольфа и Х. Гольдбаха (будущего конференц-секретаря Академии) в число приглашенных попали братья Бернулли — Даниил и Николай. Когда они отправлялись в Россию, их младший друг Л. Эйлер просил их исходатайствовать и ему место в новой Академии. В Петербург они прибыли 27 октября 1725 г. Основатель Петербургской академии наук Петр I скончался в январе 1725 г.

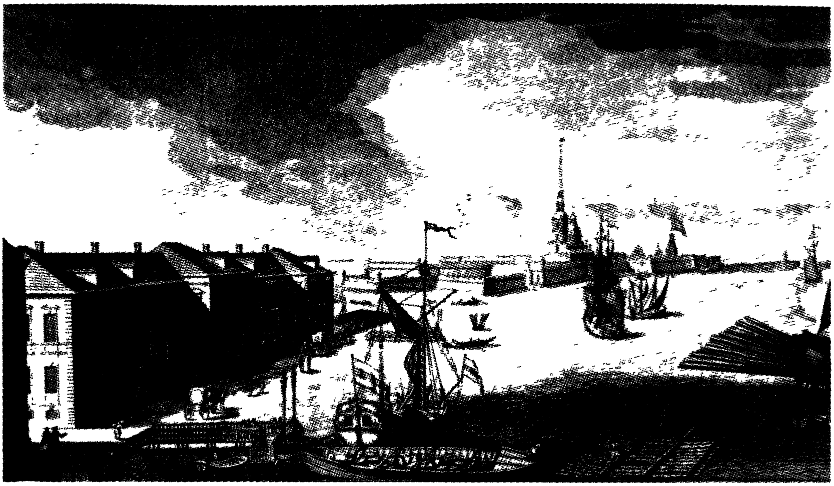
В конце весны 1726 г. Д. Бернулли написал Эйлеру, что президент Академии Л. Л. Блюментрост предлагает ему место «элева» (слово «адъюнкт» появилось в академических документах только в 1727 г., раньше молодые помощники академиков назывались то студентами, то «элевами» — по примеру Парижской академии, то магистрами, если они имели эту степень). Так как сам Бернулли по штату Академии был профессором физиологии и Эйлера он прочил себе в помощники, он советовал, если Эйлер не отправится в путь осенью, до весны познакомиться с книгами, «в которых физиология рассматривается на основании принципов геометрии». К письму прилагалась записка, полученная Бернулли от президента Блюментроста, с указанием условий приглашения Эйлера: жалованье 300 руб. в год, 100 руб. дорожных и контракт на 5 лет.

5 апреля 1727 г. Эйлер отправился в путь кораблем до Майнца, оттуда почтовыми до Марбурга, где он, вероятно с рекомендательным письмом от И. Бернулли, посетил Х. Вольфа. Дальше сушей он доехал до Любека, затем на корабле до Ревеля и, наконец, прибыл в Кронштадт, а 24 мая

Д. Бернулли (1700—1782).

добрался до Петербурга. В письме, которое знаменитый Х. Вольф отправил Эйлеру через неделю после их встречи в Марбурге, философ пожелал молодому человеку долгой и счастливой службы в Петербургской академии наук. Он писал: «Вы едете теперь в рай для ученых». Эти слова были сказаны человеком, хорошо знающим научную жизнь Европы и дела молодой Петербургской академии наук, где он был одним из первых почетных членов.

Петербургская академия наук переживала тогда счастливую пору своей ранней истории. Екатерина I проявляла милостивое внимание к Академии, детищу ее великого супруга. Президентом Академии был назначен лейб-медик Л. Л. Блюментрост. Академии передали просторный дом на Петербургском острове, а на Васильевском, напротив Адмиралтейства, для нее готовился пустовавший дворец покойной царицы Прасковьи Федоровны, рядом достраивалось здание Кунсткамеры для переданных Академии коллекций и библиотеки Петра Великого. В башне строилась Обсерватория под руководством первого астронома Академии Ж. Н. Делиля. Начиналась работа академической типографии. Интересно отме-

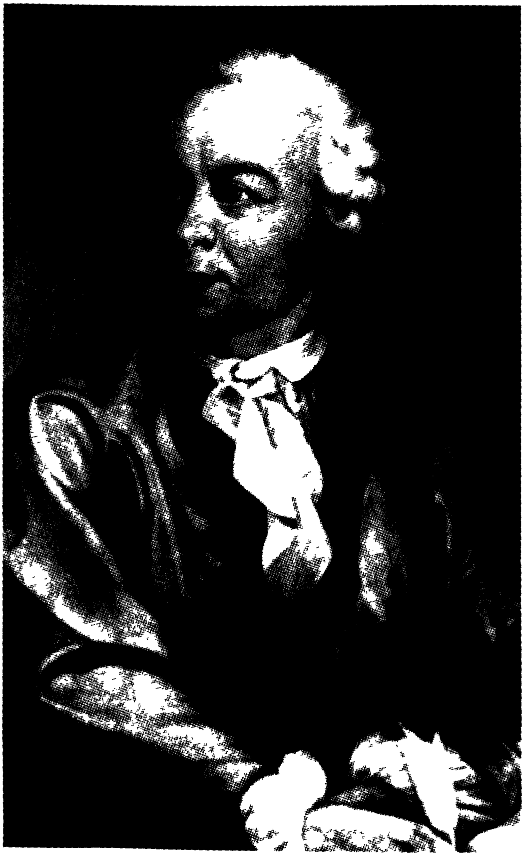


Здание Петербургской академии наук в XVIII в.

тить, что в то время ни одна другая академия в Европе не имела своей типографии. Академическая типография вскоре стала главной типографией России — на нее было возложено издание не только научной, но и всей литературы, за исключением церковной. Блюментрост всячески использовал свою близость ко двору на благо Академии. Он заботился о быте академиков. А для молодых и холостых (а таких было тогда большинство) даже организовал совместное питание, чтобы они не ходили в трактиры и не общались там «с роскошниками и пианицами».

К моменту приезда Эйлера академический штат был в основном укомплектован. В нем преобладали ученые физико-математического профиля, что вполне соответствовало намерениям основателя Академии. Он создавал морской флот России и хотел обеспечить его всем необходимым — лучшими кораблями, навигационными инструментами, мореходными таблицами и геодезистами, капитанами и штурманами, владеющими самыми точными методами навигации и картографии. От Академии Петр ожидал здесь всесторонней помощи и в подготовке кадров астрономов, которые могли бы помочь в обучении русских ученых и моряков. Петр даже предполагал в дальнейшем объединить Академию наук с Морской академией, однако после его смерти эти идеи не были осуществлены.

Коллектив Академии возглавляли убежденные ньютонианцы, уже известные в Европе ученые — математик Яков Герман (земляк и родственник Эйлера) и астроном, физик, географ и историк науки Жозеф Николя Делиль. Его пригласил еще сам Петр I во время своего пребывания в Париже в 1717 г. и поручил Делилю основать в Петербурге астрономическую школу и Обсерваторию. Математиком был и конференц-секретарь Христиан Гольдбах. Д. Бернулли хотя и числился по штату физиологом, но занимался разработкой математического описания физиологических процессов. Н. Бернулли, к сожалению, скоропостижно скончался в



Л. Эйлер в 1756 г. Портрет работы Э. Хандмана, гравюра Ф. Вебера.

1726 г. Несколько младших сотрудников — адъюнктов — также вскоре проявили себя как одаренные астрономы, математики, физики, механики.

Эйлер сразу попал в среду, весьма благоприятную для развития его таланта. Этому способствовала и принятая в Академии форма коллективной работы — регулярные, обычно дважды в неделю, заседания академической Конференции, где заслушивали и обсуждали доклады. И хотя выступали там преимущественно академики (по обычаю университетов их часто называли профессорами), для Эйлера было сделано исключение. Он единственный из адъюнктов был включен в очередь для чтения докладов и в дальнейшем по частоте выступлений намного превзошел всех членов Академии. Его уникальный математический талант был здесь быстро оценен по заслугам, и хотя приглашали его по специальности «физиология», никто не препятствовал ему заниматься математикой, а вскоре и полностью переключиться на излюбленную им науку — математику.

Еще в Базеле, как отмечалось выше, Эйлер познакомился с трудами Р. Декарта и «Началами» И. Ньютона [61]. Хорошо знал он и «Форономию» Я. Германа [127], в которой автор пытался развивать механику Ньютона с помощью синтетических геометрических доказательств, правда оказавшихся не очень-то пригодными для такой цели. Тогда же, работая над своими первыми статьями под руководством И. Бернулли, Эйлер хорошо познакомился с дифференциальным исчислением Г. В. Лейбница и мечтал на языке исчисления бесконечно малых Лейбница изложить механику точки в «Началах» Ньютона и в «Форономии» Я. Германа. Теперь ему представилась возможность осуществить эту мечту. Быстрому росту молодого ученого способствовали и другие благоприятные условия, созданные в Петербургской академии наук: богатейшая Библиотека, располагавшая литературой по старым и новейшим отраслям науки, хорошо оборудованная астрономическая Обсерватория, где Эйлер под руководством Делиля пристрастился к астрономии, практически неограниченные возможности публикации трудов (одобренных Конференцией) и широкие международные связи, поощряемые академическим руководством.

Еще в 1724 г., в письме от 26 сентября, приглашая любимого ученика Х. Вольфа Г. Б. Бильфингера в Россию, Блюментрост писал: «... мы желаем, чтобы у нашей нации, еще не приверженной ни к каким другим философским учениям, преподавалась вольфианская философия и чтобы она распространялась в этом столь обширном государстве» [29, с. 72]. Однако получилось так, что картезианцы и вольфианцы, занимавшие высокие посты в престижных университетах и академиях континентальной Европы, не захотели ехать в далекую и неведомую им Россию. Отказался от самых заманчивых предложений и сам Х. Вольф. И получилось так, что в Петербург приехали только два уже известных ученых — Ж. Н. Делиль и Я. Герман. Оба они были убежденными ньютонианцами, а потому чувствовали себя на родине не очень-то уютно среди картезианцев. Остальной штат Академии составляли недавние выпускники университетов, начинающие ученые, взгляды которых еще не сложились. Неудивительно, что в таких условиях академическая молодежь под руководством старших коллег начала разрабатывать новое естествознание, основанное на трудах Коперника—Кеплера—Ньютона.

Приняв предложение Петра I об основании в России астрономической школы и обсерватории, наблюдения которой позволили бы составить необходимые для морского флота России астрономические и мореходные таблицы, Делиль понял, что для этого прежде всего следовало разработать теорию движения Луны и планет. Особое внимание он уделил Луне и Юпитеру, так как по наблюдениям Луны и затмений спутников Юпитера в то время определялась долгота судна в открытом море.

Делиль обещал Петру обучить астрономическим наблюдениям русских астрономов, геодезистов и штурманов, которые в то время не владели точными методами определения координат с помощью астрономических наблюдений. Обещал Делиль и подготовить соответствующие руководства для них, включающие практическую и теоретическую астрономию и историю астрономии всех стран и народов мира. Кроме того, Делиль мечтал о создании теории движения Солнца, Луны и планет. Он и сам

Портрет Ж. Н. Делиля (1688—1768). Гравюра К. Вестермайера.

еще в Париже начал работать над теорией движения солнечных пятен по собственным наблюдениям, но понял, что предложенный для этого Ньютоном геометрический метод слишком громоздок и неудобен для подобных расчетов. Сам он не смог найти подходящего метода вычислений, но понял, что это — важная задача для решения вопроса о создании теории движения небесных тел. Здесь интересы астронома и основателя Петербургской академии наук, стремившегося создать морской флот России и оснастить его всем необходимым для отличной работы, вполне совпадали. И Делиль взялся за создание астрономической школы в России.

Прежде чем ехать в Петербург, Делиль составил детальную программу работ по астрономии в России и даже успел получить одобрение ее Петром. Вспоминая о своем письме Петру I, где излагалась эта программа, Делиль писал Блюментросту 8 сентября 1721 г.: «... астрономические наблюдения, выполненные в Петербурге и сопоставленные с наблюдениями, сделанными в других странах, могли бы дать много полезных для астрономии открытий... и стать вполне достаточной базой для точного определения расстояний всех небесных тел от Земли и главным образом Луны, что значительно продвинуло бы знание ее истинной теории, которая... имела бы, как известно, столь большое применение при нахождении долгот...». И далее: «Я запасся солидными основами геометрии и алгебры, будучи убежден в том, что астрономия, обогатившись в наши дни большим числом открытий, почерпнутых из этих двух наук, может продвигаться дальше только благодаря соединению этих абстрактных наук с доскональным пониманием астрономических наблюдений, которые и являются ее истинной основой» [7, с. 104—105]. Делиль хорошо понимал, что для этого необходима «большая работа, бесконечное вычисление, постоянная игра геометрии, которая по мере продвижения вперед становится все более сложной и трудной и которая, следовательно, требует солидной математической базы» [7, с. 107].

В Петербурге Делиль нашел самые благоприятные условия для создания новой астрономии и петербургской астрономической школы. Здесь оказалась целая группа математиков — от студентов и вчерашних выпускников университетов (как Л. Эйлер) до начинающих ученых (как братья Бернулли) и маститых ньютонианцев (как Я. Герман). Все они были полны энтузиазма, хорошо знали труды Г. В. Лейбница, И. Ньютона и Р. Декарта и мечтали о создании нового естествознания, основанного на учении Коперника—Кеплера—Ньютона и математике Лейбница. Оставалось лишь приобщить их к астрономическим наблюдениям.

Делиль с энтузиазмом принялся за дело. С 9 марта 1726 г. он организовал в Петербурге систематические метеорологические наблюдения, положившие начало метеослужбе России. К этим наблюдениям он сразу привлек добровольных помощников — студентов Ф. Х. Майера и Г. В. Крафта. С 11 марта начались и астрономические наблюдения, перенесенные 12 июня 1727 г. в еще не достроенное здание Кунсткамеры, в башне которой по его проекту была построена Обсерватория. Ее двери Делиль открыл для всех желающих. Можно было просто зайти посмотреть, как работают астрономы, а можно было и самому провести какие-либо заинтересовавшие каждого наблюдения. Для этого следовало почитать книги по списку, рекомендованному Делилем, и пройти специальную подготовку, сперва под руководством Делиля, а затем и самостоятельно.

Поскольку в России не было тогда еще ни одной научной школы, вокруг Делиля и его Обсерватории объединились многие сотрудники Академии, от профессоров до студентов. Из этих добровольцев Делиль подбирал себе потом штатных сотрудников. Первыми оказались Ф. Х. Майер (к сожалению, скончавшийся в 1729 г.) и Г. В. Крафт, ставший впоследствии известным физиком. В дальнейшем к ним присоединились Д. Бернулли, Я. Герман и многие другие. Л. Эйлер, как видно по журналам наблюдений Обсерватории, появился здесь в феврале 1727 г. Он участвовал во всех наблюдениях, сперва как пассивный наблюдатель за работой астрономов, а с 1731 г. он начал самостоятельные наблюдения полуденных высот Солнца. На основании этих наблюдений определялись широты и выверялся ход часов [58, с. 65—71].

Наибольшее внимание добровольных сотрудников и гостей Обсерватории привлекала камера-обскура — небольшая затемненная комната, оборудованная на третьем этаже башни. Там под руководством Делиля и по разработанной им методике проводились весьма эффектные и красочные эксперименты по дифракции света. Через крохотное отверстие или щель в камеру-обскуру пропускался луч света Солнца, который разлагался при этом на составные цвета из-за дифракции. Полученная таким образом дифракционная картина отбрасывалась на белый экран и рассматривалась с помощью лупы или микроскопа и измерялась с помощью микрометра. Вставляя во входное отверстие камеры-обскуры лупу или объектив телескопа, Делиль добился большой четкости изображения. Ему удалось измерить на экране 6 полос дифракционного спектра и качественно оценить их цвет и интенсивность [87, с. 205—266].

В камере-обскуре Петербургской обсерватории были изучены все свойства дифракции света, а также доказана тождественность дифракционного и призматического спектра (который получается при прохождении света через призму). Следует напомнить, что дифракция света — весьма сложное явление, полная теория которого не разработана и сегодня. Эксперименты по дифракции весьма тонки и требуют большого искусства. Именно этим и можно объяснить тот факт, что, хотя дифракция света и была открыта в 1663 г., удачно повторить эксперименты Ф. М. Гримальди удалось лишь в 1672—1675 гг. Р. Гуку и И. Ньютону. В XVIII в. эти эксперименты повторялись редко. Однако Делиль умело воспроизводил их и решил использовать для изучения рефракции и дифракции света в атмосферах планет и других небесных тел.

Делиль в совершенстве владел тонкой методикой экспериментов по дифракции и обучил ей своих петербургских учеников. Эти эксперименты так увлекли Майера и Крафта, что они решили стать физиками. Эйлер также проводил с увлечением различные опыты в камере-обскуре и продолжал их затем в Берлине. Природа света и цветов живо интересовала всех петербургских ученых, в том числе и Эйлера. К этим вопросам он неоднократно возвращался в своих работах. Эксперименты по дифракции света, такие красочные и запоминающиеся, наложили особый отпечаток на работы всех петербургских ученых.

Как известно, еще в XVII в. сложились две гипотезы о физической природе света — волновая и корпускулярная. Сторонники первой опирались на аналогию между светом и расходящимися на воде волнами, возникающими при падении в воду камня. Огибая препятствия, т. е. дифрагируя, свет наглядно проявлял свои волновые свойства, тогда как при отражении и преломлении он вел себя как частица — корпускула. Подавляющее большинство ученых XVIII в., редко воспроизводивших эксперименты по дифракции света, отдавало предпочтение корпускулярной гипотезе. Ее предпочитал и Ньютон, хотя в своей «Оптике» [62], пользовавшейся огромной популярностью в XVIII в., он описал опыты по дифракции, а в приложении к ней дал список нерешенных вопросов, где на равных обсуждались волновая и корпускулярная гипотезы.

Петербургские ученые, много раз наблюдавшие эксперименты по дифракции света, не могли «отрешиться» от уверенности в его волновой природе. Для проверки они обратились, как и предлагалось в 27—31-м вопросах Ньютона [62, «Вопросы Ньютона», с. 274—285], к изучению аналогии между светом и звуком. С этой целью изучалось распространение света от вспышки молнии и звука грома, а в июле 1727 г. удалось организовать и опытные стрельбы. Ствол пушки был установлен вертикально вверх, производился выстрел, после которого изучались скорости распространения в воздухе звука выстрела и света вспышки, которые видоизменялись в зависимости от величины заряда.

В опытных стрельбах участвовала большая группа петербургских ученых (в их числе были Л. Эйлер и Д. Бернулли), посвятивших анализу стрельб целый ряд работ [76 и др.]. В результате всех этих исследований был сделан вывод о полной аналогии между светом и звуком. После этого петербургские ученые свято уверовали в такую аналогию, и вплоть до конца XVIII столетия никто здесь на нее не покушался. Убежденность в правильности аналогии между светом и звуком и представление о свете как о волновом явлении отныне стали характерными для всех петербургских ученых. Даже те из них, кто впоследствии уезжал из России на родину, не могли отрешиться от этого неверного убеждения. Оно помогало им разрабатывать теории, порой весьма изящные, которые позволяли с единой точки зрения объяснить, казалось бы, разные явления. Л. Эйлер также много здесь потрудился. Он предложил свою теорию света, представляющую свет как продольные колебания эфира: это и теория, объясняющая возникновение цветов в зависимости от различного числа колебаний эфира, это и теория видимости несамосветящихся тел, частицы поверхности которых под действием света приходят в возбуждение, начинают колебаться и становятся видимыми. Сюда же следует отнести и предложенную Эйлером теорию электрических, точнее электростатических, явлений с помощью представлений об изменении упругости эфира, в результате чего в нем возникают сгущения или разрежения.

Именно эта излюбленная петербургскими учеными аналогия между светом и звуком привела их, в том числе и Л. Эйлера, к выводу о продольности световых колебаний, что надолго, вплоть до начала XIX в. (когда Т. Юнг и О. Френель положили начало теории дифракции и интерференции) задержало изучение интерференции и помешало разработке теории дифракции и интерференции на основе поперечных колебаний. Тем не менее все петербургские ученые, за исключением лишь Ф.У.Т. Эпинуса, приехавшего в Петербург в 1757 г., в аналогии между светом и звуком черпали уверенность в правильности своих взглядов. Опытные стрельбы 1727 г. были первым подтверждением истинности избранного ими пути. Вторым этапом стали исследования, связанные с аналогией между цветом и музыкой, подсказанной еще И. Ньютоном в вопросах 13 и 17 [62].

Подтверждение аналогии между цветом и музыкальным тоном петербургские ученые нашли и в «Трактате о гармонии» известного французского композитора и теоретика музыки Ж. Ф. Рамо [149]. В 30-е гг. XVIII в. Эйлер разработал теорию образования человеческого голоса и теорию музыки, основанную на теории гармонии [119]. Правда, опубликованы эти работы были значительно позднее [6, 74]. И хотя музыканты порой нелестно отзывались о теории музыки Л. Эйлера, которую они не могли использовать на практике, сам ученый и его единомышленники в

Петербурге были довольны — они получили дополнительное подтверждение в пользу своих взглядов. Эйлер очень гордился своей теорией образования голоса и музыки.

Эйлер внимательно штудировал «Оптику» Ньютона, особенно приложенные к ней «Вопросы», на основе которых он разработал волновую теорию света и цветов. Объяснение видимости освещенных темных тел также было заимствовано им из вопросов 5—11. Изучению ряда других проблем, связанных с механизмом зрения, были посвящены вопросы 12—16 [62, с. 261—264]. Этой теме в Петербурге уделялось особое внимание. Наряду с «Оптикой» Ньютона петербургские ученые штудировали и другие труды по оптике. Особой популярностью здесь, вслед за Ньютоном, пользовалась «Оптика» арабского ученого X в. Ибн ал-Хайсама [79].

Сохранившийся до наших дней экземпляр этой книги в Библиотеке Российской академии наук испещрен многочисленными пометками, сделанными в XVIII в. Среди них привлекает внимание изображение строения глаза человека. Рядом со схемой — детальное перечисление и описание всех четырех преломляющих сред глаза. Интересно отметить, что петербургские ученые не ограничивались изучением схем оптической системы глаза человека. Они имели прекрасную и уникальную в то время возможность сравнить особенности анатомического строения глаза человека с глазами других обитателей Земли. В коллекцию анатомических препаратов Ф. Рюйша, описание которой составляли академики, входило 109 препаратов глаз человека, кита, курицы, лягушки и теленка. Позднее, уже в Петербурге, к ним были добавлены препараты глаз слона, мухи, ночной совы и тюленя [58, с. 138—140].

Сравнение анатомического строения глаз человека и различных животных четко выявило преимущество человеческого глаза, который за счет нескольких преломляющих сред создает более правильное и четкое изображение, чем глаза многих других животных. Стало ясно, что развитие органа зрения от животных к человеку шло от простых, однолинзовых систем к сложным, многолинзовым. Так возникла надежда на то, что, подражая живой природе, можно надеяться на уменьшение хроматизма, т. е. окрашивания изображения, а заодно уменьшить и другие оптические дефекты телескопов и микроскопов. Для петербургских ученых, исследовавших явление дифракции, когда белый свет разлагался на составные цвета, особенно важно было устранить хроматизм.

Однако в XVIII в. еще не умели строить таких инструментов, а Ньютон даже считал устранение хроматизма стекол принципиально невозможным. Вот почему он предложил заменить линзовые телескопы и микроскопы зеркальными и сам описал их модели в своей «Оптике». Мнение Ньютона благодаря его все возраставшему авторитету надолго задержало развитие оптики в странах Европы. Только петербургские ученые не могли с ним согласиться. Обязательное изучение работ анатомов стало традиционным для всех петербургских оптиков.

В первые же годы своего пребывания в Петербурге, познакомившись с устройством человеческого глаза, Л. Эйлер начал разработку своей знаменитой теории ахроматов, т. е. объективов телескопов и микроскопов, не дающих заметного окрашивания изображения. Основные идеи этой теории были продуманы им в Петербурге, однако первую статью на эту тему он опубликовал в 1749 г. в Берлине. Вспоминая о возникновении основных идей своей теории, Эйлер писал: «Вот источник... из которого я постарался позаимствовать для усовершенствования стеклянных объективов... я убедился, что в наших глазах находятся различные жидкости, расположенные таким образом, что не дают никакой диффузии фокуса. По моему мнению, это совершенно новый предмет в устройстве глаза, достойный удивления» [116, с. 279]. В дальнейшем Эйлер детально разработал и подробно опубликовал свою теорию, на основе которой к концу XVIII в. удалось построить ахроматические телескопы и микроскопы.

И хотя выяснилось, что полностью устранить все дефекты оптики инструментов все же не удается, да и сам глаз не свободен от этих дефектов, Эйлер не переставал удивляться этому столь совершенному творению природы. Пристрастие же к анатомическим препаратам, принесшее столь большую пользу в создании теории ахроматов, помогло Эйлеру разработать теорию намагничивания тел. Так, он полагал, что под действием магнита все «поры» внутри физического тела выстраиваются в ряд, образуя своеобразные «канальцы», напоминающие кровеносные или лимфатические сосуды в теле живых организмов. Вероятно, вспомнив о своей работе с коллекцией анатомических препаратов Ф. Рюйша и о демонстрациях петербургского анатома и врача И. Г. Дювернуа, Эйлер наделил канальцы намагниченных тел свойствами вен и лимфатических сосудов. Как известно, в стенках сосудов есть ворсинки, а в венах — даже клапаны, препятствующие обратному движению крови и лимфы и заставляющие их течь строго в одном направлении. Именно такими же ворсинками и клапанами, по мнению Эйлера, должны были обладать и «поры» намагниченных тел.

Лабораторные эксперименты по дифракции света, изучение механизма зрения и строения глаза, проведение опытных стрельб, метеорологические наблюдения и наблюдения полярных сияний предназначались Делилем для решения вопроса об атмосферах небесных тел. Еще в 1715 г. в Париже, наблюдая явление покрытия Венеры Луной, он заметил какие-то цветовые эффекты в момент, когда Венера заходила за Луну, и в момент, когда она оттуда выходила. Цветовые эффекты в 1715 г. заметили многие наблюдатели, однако все объясняли их по-разному. Тогда вопрос так и остался нерешенным.

Однако Делиль, полагавший, что эти цветовые эффекты вызваны атмосферой Венеры, надеялся решить этот вопрос в 1729 г. 8/19 сентября этого года ожидалось явление покрытия Венеры Луной, которое было невидимо на большей части территории Европы, но зато доступно петербургским наблюдателям днем, при весьма благоприятных условиях. Готовясь к предстоящим наблюдениям, петербургские ученые начали разрабатывать модель планетной атмосферы, начав с модели атмосферы Земли.

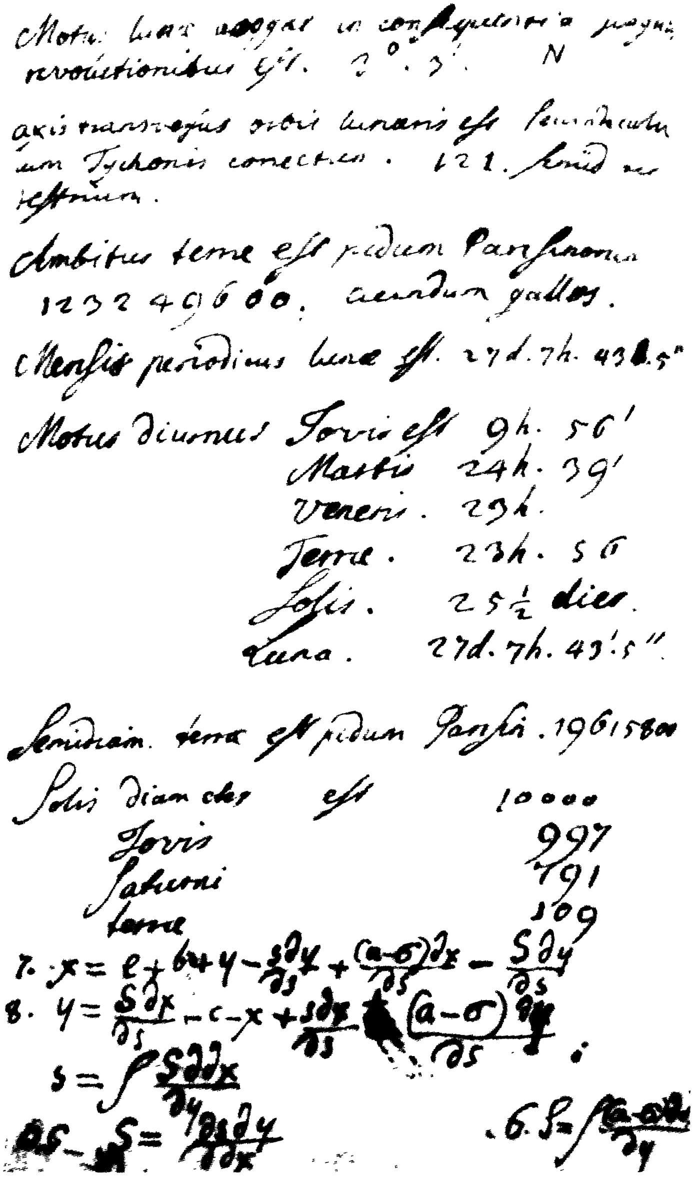
Материалом для построения модели планетной атмосферы для петербургских ученых послужили эксперименты со стрельбами. Эйлер предложил свою модель в упоминавшейся статье, опубликованной в 1729 г.: «Попытка объяснения воздушных явлений» [118]. Ученый представлял себе воздух как скопление бесконечного числа маленьких пузырьков, наружная оболочка которых состоит из воды. В зависимости от состояния атмосферы пузырьки могут расширяться или сжиматься. На основе опытных стрельб Эйлер правильно объяснил упругость воздуха, показав, что его нельзя сжать больше, чем до определенного объема, не равного нулю.

Однако ясно, что такая атмосфера, в которой пузырьки воздуха без промежутков примыкают друг к другу, должна была напоминать облако, еще прозрачное вблизи, но совершенно терявшее свою прозрачность на большом расстоянии. Петербургские ученые сразу отвергли модель Эйлера. Исходя из тех же опытных данных, но наделяя свойством упругости не каждую частицу воздуха, как это делал Эйлер, а лишь совокупность всех частиц, Д. Бернулли предложил другую модель (впоследствии усовершенствованную М. В. Ломоносовым), которая была включена в знаменитую «Гидродинамику» Д. Бернулли [3, с. 282—341], написанную им в России, но опубликованную в Страсбурге.

Наблюдения 8/19 сентября 1729 г. прошли успешно. В них участвовал и Л. Эйлер. Сообщения о наблюдениях были опубликованы в газете «Санкт-Петербургские ведомости» за 9 сентября 1729 г. и в журнале «Примечания на Ведомости» [48, 1729 г., ч. 78, с. 315—316], издававшихся тогда Академией наук на русском и немецком языках. Петербургским ученым не удалось заметить никаких цветовых эффектов. Это привело их к выводу, которым они и закончили статью в «Примечаниях»: «... не можно ли за неимением цветов и о небытии парнóго круга (т. е. атмосферы. — *Сост.*) около Луны весма подлинно рассуждать. Время о том лутче всего объявит...». Эйлер не был удивлен, он был уверен, что «атмосфера-облако» издалека и должна казаться темным телом, а потому ее и нельзя было заметить с Земли.

Однако остальные петербургские ученые стали ждать кольцеобразного солнечного затмения 25 июля 1748 г., во время которого можно было вновь попытаться решить вопрос об атмосферах Луны и Венеры. Забегая вперед, отметим, что в наблюдениях 1748 г. участвовало много наблюдателей из разных стран Европы. Эйлер вел эти наблюдения в Берлине, куда он переехал в 1741 г. Наблюдал он вместе с сестрами покойного Кирха, знаменитого берлинского астронома. Делиль наблюдал уже в Париже, куда он к тому времени вернулся. В Петербурге затмение наблюдали Н. И. Попов, И. А. Браун и М. В. Ломоносов. В результате всех наблюдений 1748 г. (кроме эйлеровых!) было доказано, что на Луне нет достаточно плотной атмосферы, способной дать заметные эффекты дифракции или рефракции. И только Эйлер, опираясь на свою модель «атмосферы-облака», «открыл» атмосферу на Луне.

В 1761 г. огромное по тем временам число людей в разных концах мира по призыву Делиля наблюдали прохождение Венеры по диску Солнца — редкое астрономическое явление, случающееся лишь дважды в столетие. Письма Делиля с инструкцией по наблюдениям были разосланы всем друзьям Делиля. Именно во время этих наблюдений М. В. Ломоносов открыл атмосферу Венеры. Однако Эйлер не проявил к этим наблюдениям ни малейшего интереса и даже не обмолвился о них в письмах к немецким принцессам, полагая, что атмосфера Венеры изда-



Motus lineae apsidum in consequentia singulis revolutionibus est. 3°. 3'. N

axis transversus orbis lunaris est semidiametrorum Tychonis correctus. 121. semid. terrestrium.

Ambitus terrae est pedum Parisinorum 123249600. secundum gallos.

Mensis periodicus lunae est. 27d. 7h. 43'. 5"

Motus diurnus Jovis est 9h. 56'
Martis 24h. 39'
Veneris. 23h.
Terrae. 23h. 56
Solis. 25½ dies.
Luna. 27d. 7h. 43'. 5".

Semidiam. terrae est pedum Parisi. 19615800

Solis diameter est 10000
Jovis 997
Saturni 791
Terrae 109

$$7.\ x = e + bx + y - \frac{s\partial y}{\partial s} + \frac{(a-\sigma)\partial x}{\partial s} - \frac{S\partial y}{\partial s}$$

$$8.\ y = \frac{S\partial x}{\partial s} - c - x + \frac{s\partial x}{\partial s} + \frac{(a-\sigma)\partial y}{\partial s}.$$

$$s = \int \frac{S\partial\partial x}{\partial y}$$

$$\partial\sigma - S = \frac{\partial y \partial s \partial y}{\partial\partial x} \qquad .6.\ S = \int \frac{(a-\sigma)\partial x}{\partial y}$$

Лист 50 об. из записной книжки Эйлера № 130 с записью астрономических вычислений.

лека должна казаться темным телом, а потому никаких цветовых эффектов в ней нельзя будет заметить. Слишком уж он верил в свою модель «атмосферы-облака», разработанную еще в 1729 г. и пересказанную в «Письмах к немецкой принцессе о разных физических и философских предметах» [103].

Однако петербургские ученые после наблюдений 1748 г. отказались от модели Эйлера. М. В. Ломоносов усовершенствовал модель атмосферы, предложенную Д. Бернулли, и описал ее в своей работе «Опыт теории упругости воздуха» [36], опубликованной в 1750 г. Там же, «не называя фамилий», он проанализировал недостатки модели Эйлера. Ломоносов писал: «Частицы воздуха можно представить себе двояким образом: либо отдельные частицы сложены так, что... они стремятся распространить образующие их части, и, таким образом, каждая отдельная частица может расшириться в большее пространство и сжаться в меньшее (как это и было в модели Эйлера. — *Сост.*), либо свойство упругости проявляют не единичные частицы,... но... совокупность их (это модель Д. Бернулли и М. В. Ломоносова. —*Сост.*).

Первое предположение, будучи крайне несоответствующим величайшей простоте природы, представляется также несовместимым с прозрачностью и нерушимой прочностью воздуха. Поэтому когда воздух разрежается от солнечной теплоты, то лучи Солнца должны непременно проникать в любую частицу. А так как... лучам необходимо пройти через... тяжелые твердые частицы бесконечное число раз, то это не может произойти без того, чтобы в любой частице воздуха они не претерпели преломления при входе и выходе. И хотя в частицах такого рода преломление может быть бесконечно мало, но преломившийся в бесчисленных частицах от поверхности атмосферы до самой Земли свет был бы настолько ослаблен, что нам пришлось бы обретаться в вечной ночи» [36, с. 111].

Любопытно отметить, что всесильный правитель Академической канцелярии И. Д. Шумахер, славившийся своим коварством, именно эту работу Ломоносова послал на отзыв Л. Эйлеру, находившемуся тогда в Берлине. Шумахер уверенно рассчитывал на отрицательный отзыв. Но, как известно, Эйлер дал восторженный отзыв, чем оказал Ломоносову большую поддержку. Тем не менее сам он не отказался от своей модели и продолжал ревностно ее отстаивать.

Только после того, как М. В. Ломоносов во время наблюдения прохождения Венеры по диску Солнца 26 мая/7 июня 1761 г. открыл атмосферу Венеры, Л. Эйлер изменил свое отношение. Факты — упрямая вещь, особенно для ученого. И позиция Эйлера начала меняться. Наиболее наглядно это видно по «Письмам к немецкой принцессе» [103]. Переехав в 1741 г. в Берлин, Эйлер работал там в Берлинской академии наук и обучал двух сестер — немецких принцесс, двоюродных племянниц короля Пруссии Фридриха II, дочерей князя Фридриха Генриха Бранденбург-Шведт (двоюродного брата короля и друга Л. Эйлера). Старшая сестра — Фридерика Шарлотта Людовика Луиза (по другим сведениям — София Фридерика Шарлотта Леопольдина, 1745—1808) — в 1755 г. стала коадъюторшей, а в 1764—1803 гг. была последней аббатиссой в Херфорде. Младшая сестра — Луиза Генриетта Вильгельмина (1750—1811) — в

1767 г. вышла замуж за князя Леопольда Ангальт-Дессау и была видной деятельницей Немецкого Просвещения.

Находясь в Берлине, Л. Эйлер начал обучать принцесс, по просьбе их отца, физике, математике, астрономии, механике и философии. Вначале обучение было обычным, но после переезда королевского двора из-за Семилетней войны из Берлина в Магдебург Эйлер регулярно посылал им письма по почтовым дням — вторникам и субботам. В общей сложности Л. Эйлер написал 234 письма, которые датированы 1760—1762 гг.

Как раз в этот период ожидалось редчайшее явление — прохождение Венеры по диску Солнца. Эти астрономические явления бывают лишь дважды в столетие, в XVIII в. — в 1761 и 1769 гг. Эти наблюдения стали для всего тогдашнего мира первым международным научным мероприятием. Инициатором его был Ж. Н. Делиль, в 1747 г. вернувшийся в Париж и оттуда руководивший организацией экспедиций ученых разных стран. Всем академиям и научным обществам, а также отдельным ученым в разных странах мира были разосланы письма с призывом наблюдать предстоящее явление (с инструкцией и картой видимости). Разумеется, Петербургская академия наук, императрица России и все бывшие сотрудники Делиля по Петербургской академии наук получили эти письма.

Однако в то время как весь мир готовился к столь редким наблюдениям, Эйлер в письмах к своим ученицам-принцессам ни словом о них не обмолвился. Лишь после того, как Ломоносов открыл атмосферу на Венере во время наблюдений 1761 г., Эйлер резко изменил отношение к этой проблеме. Так, в письмах, адресованных принцессам, после открытия атмосферы Венеры Ломоносовым [103, письма № 139—140, датированные 23 и 27 июня 1761 г. н. ст. и последующие], Эйлер излагает свою модель «атмосферы-облака» совершенно иначе, чем раньше [103, письмо № 32, датированное 27 июля 1760 г., и письмо № 70, датированное 25 октября 1760 г.]. Позднее он, не называя имени автора, приводит «атмосферу-облако» как пример совершенно непригодной модели. Он отмечает, что если бы атмосфера Земли действительно была похожа на эту модель, то все люди должны были бы жить «во тьме египетской» (ср. с цитатой из работы М. В. Ломоносова на с. 22)!

Открытие Ломоносова убедило Эйлера в том, что правы были Д. Бернулли и М. В. Ломоносов. Значит, атмосфера Земли, да и других планет, должна быть значительно прозрачнее, чем предполагал он сам. Это означало, что в таких атмосферах вполне возможно было наблюдать различные цветовые эффекты, обусловленные рефракцией или дифракцией. Вот почему, вернувшись в Петербург в 1766 г., Эйлер уже весьма активно участвовал в организации и обработке наблюдений прохождения Венеры по диску Солнца в 1769 г., несмотря на то, что тогда он почти ослеп.

Однако и модель «атмосферы-облака» была использована Эйлером. Еще из Берлина, в 1756 г. он послал (от имени своего сына И. А. Эйлера) на конкурс, объявленный Петербургской академией наук, работу «Исследование физической причины электричества» [95]. В ней Эйлер использовал свою любимую модель для объяснения электростатических явлений. Работа была премирована, и Ломоносов сразу же стал дополнять теорию Эйлера. Он ввел в нее вращение частиц и объяснил таким образом электродинамические явления. Впрочем, и старая модель «атмосферы-облака» была успешно использована Эйлером для объяснения синего цвета неба [103, письма № 32, 227, 228] и ряда других эффектов.

Еще в 1729 г., начиная работу в Петербургской академии наук, Эйлер участвовал в разнообразных наблюдениях, проводившихся в Академической обсерватории: метеорологических, геофизических, наблюдениях полярных сияний, магнитного склонения и наклонения, наблюдениях за приливами и отливами моря, которые фиксировались по колебанию уровня воды в Неве. Как отмечалось выше, эти наблюдения велись в Петербурге с 1726 г., и за три года удалось сделать некоторые выводы. Они были опубликованы на страницах научно-популярного журнала «Примечания на Ведомости».

Эйлер много занимался вопросами мореходной астрономии, теорией движения Луны, теорией приливов и отливов моря, а также методами определения долгот на море. Именно этим вопросам были посвящены его статьи «О сыскании долготы мест на море», «О кораблеплавании», а также «О приливе и отливе моря» и одна из серии статей под общим названием «О прибывании и убывании воды в реке Неве» [56, с. 269].

Эта серия статей была написана Г. В. Крафтом, который вел метеорологические наблюдения и следил за колебаниями уровня воды в Неве. Именно в одной из статей этой серии появилась первая критика в адрес весьма популярной в то время «вихревой теории» Р. Декарта. Как известно, он объяснял возникновение морских приливов давлением «лунного вихря» на воздушный и водный океаны Земли. Однако регулярное ежедневное измерение температуры воздуха, барометрического давления и уровня воды в Неве никак не соответствовало предположениям Декарта.

«Сия от Картезия объявленная причина, — говорилось в статье Крафта, — в действо произведена быть не может. Ибо ежели б воздух под Луною так жестоко угнетал, то надлежало бы оного действие и на ртуте в барометрах приметить, от котораго оная знатно выше подымалась, но сие не примечено. Потом надлежало бы морю в то время, как Луна чрез полуденную линию идет, убывать, чему противное толь паче примечается... Чего ради Кеплер причину того более притязающей силе Луны, нежели угнетению, приписал, а господин Невтон доказал потом помощию вышния математики зело изрядно...» [48, 1729 г., ч. 89, с. 363].

В «Примечаниях на Ведомости», где в то время статьи печатались анонимно и выражали мнение всей Академии, в том же 1729 г. была опубликована серия статей, объединявшая целое созвездие неразрешимых задач: о вечном двигателе, о квадратуре круга, удвоении куба и трисекции угла [48, 1729 г., ч. 56, 58, 61, 65, 67, 69]. По утверждению П. П. Пекарского, все они были написаны Крафтом, в то время сотрудником Обсерватории [67, с. 465]. Издатели журнала воспользовались случаем, чтобы в занимательной форме рассказать об истории развития математики, механики, астрономии и показать, что даже при решении «бесполезных» задач можно извлечь пользу для науки. Во-первых, работая над решением таких задач, математики испытывают радость, которую они ценят «более других награждениев», хотя это и не приносит им непосредственной пользы, так же как при созерцании прекрасной картины. Во-вторых, как говорилось в статье, «в Геометрии каждое изыскание многим другим помощь дает». В доказательство приводился пример, как исследование свойств циклоиды оказалось полезным для создания маятниковых часов конструкции Х. Гюйгенса [48, 1729 г., ч. 58, с. 231—232]. В-третьих, при обсуждении неразрешимых задач нередко удавалось разработать новые методы математического исследования. Эти методы в статье сравнивались с ключами от запертой комнаты. Не беда, если она окажется пустой. Ведь с помощью ключа можно открыть и другую дверь, за которой могут быть спрятаны сокровища. Конечной же целью всех этих исследований признавалось создание «истинной Астрономии». И утверждалось, что то, что «к истинной Астрономии принадлежит, за самую полезную вещь почитать должно» [48, 1729 г., ч. 58, с. 232].

Чем ближе подходили петербургские ученые к созданию новой астрономии, механики, физики, т. е. нового естествознания, основанного на учении Коперника—Кеплера—Ньютона, тем больше возникало и накапливалось у них противоречий с физикой, механикой и особенно философией Р. Декарта, Г. В. Лейбница и особенно Х. Вольфа. И если в 1724 г. петербургские ученые согласились бы с Блюментростом в том, чтобы в России, «еще не приверженной ни к каким другим философским учениям», распространилась «вольфианская философия», то через пять лет, в 1729 г., они уже никак не могли с этим согласиться.

В 1729 г. Бильфингер из-за вольфианской философии так ужасно поссорился с Д. Бернулли, тем самым Бернулли, которого рекомендовал сам Х. Вольф, что пришлось создавать специальную комиссию для их примирения. Председателем комиссии был назначен Ж. Н. Делиль, членами — Ф. Х. Майер и Г. Ф. Миллер [67, с. 104]. На этот раз непримиримых антагонистов удалось примирить, но ненадолго. Вскоре вольфианец Бильфингер перессорился не только с Д. Бернулли, ставшим теперь убежденным ньютонианцем, но и со всеми остальными коллегами. В 1730 г. Бильфингер покинул Петербург. Других вольфианцев и картезианцев здесь никогда больше не было.

1729 г. оказался «урожайным» на работы по механике и применению ее положений к решению астрономических задач, а также приложению математических методов. В первых четырех томах петербургских «Комментариев», опубликованных в 1729 г., были статьи Ф. Х. Майера, Д. Бернулли, Г. В. Крафта [80, 81, 141, 144 и др.]. В них убедительно доказывалась неприменимость положений вольфианской физики и философии к явлениям реального мира. Первый удар был нанесен по самому уязвимому месту в системе Вольфа—Лейбница — по «последним частицам», или «монадам», наделенным непонятными и противоречивыми свойствами.

Детальному анализу всевозможных «элементов тел» было посвящено публичное собрание Академии 2 февраля 1732 г. Как было принято, заседание проводилось в форме диспута. Основным докладчиком выступил И. Г. Гмелин, с ответным словом — Л. Эйлер. Речь Гмелина «О происхождении и развитии химии и особенно о том, какую пользу она приносит в изучении металлов и что можно заключить из химического исследования тел для раскрытия их начал» не сохранилась.

Два варианта ответа Эйлера, восстановленных по найденным в архиве черновикам, были опубликованы Ю. Х. Копелевич и Н. М. Раскиным

[33]. Эйлер начал свою речь такими словами: «Каковы последние частицы всех тел, или, как их обычно называют, элементы, — этот вопрос был спорным среди философов всех времен, и по сей день он не решен настолько, чтобы из него вытекала какая-нибудь польза для познания природы вещей». Подробно остановившись на огромном разнообразии микро-, макро- и мегамира, он пришел к заключению, что «в мельчайшем тельце может находиться столь же много разнообразнейших вещей, сколько во всей вселенной» [33, с. 42].

Эйлер отметил, что такая неисчерпаемость, бесконечная делимость и разнообразие материи на разных уровнях заставляют естествоиспытателей с большой осторожностью подходить к априорным утверждениям философов о неделимости той или иной еще не изученной частицы, которую они готовы назвать «элементом тел». «Поэтому, — говорил Эйлер,— мы не могли бы принять ни мнение Аристотеля, устанавливающего четыре элемента, ни три элемента Декарта». По сравнению с ними, продолжал Эйлер, «мнение Лейбница о том, что во всем мире нет двух совершенно одинаковых монад, конечно, ближе к истине. Однако и оно ничего не дает для конкретного изучения природы». В результате Эйлер пришел к такому заключению: «...для нас совершенно бесполезны размышления тех, которые пытаются от исследования элементов прийти к познанию природы вещей» [33, с. 42].

В заключение Эйлер призвал своих слушателей оставить заведомо неделимые «элементы» философов и заняться изучением «элементов» химиков. Конечно, это будут уже гораздо более грубые частицы, зато они реально изучены и точно известно, что химическими методами их нельзя разделить на более мелкие частицы. Для познания же истинных элементов надо провести как можно больше опытов и лишь с их помощью выяснить реальные свойства неделимых частиц. Итак, не философы должны придумывать различные «элементы» и навязывать их естествоиспытателям, а, наоборот, ученые должны с помощью экспериментов выяснять, каковы свойства этих неделимых частиц. И только ими должны оперировать философы. Материалы этого публичного собрания так и остались неопубликованными, возможно потому, что единственный в Петербурге вольфианец Бильфингер уехал из России и сражаться теперь было не с кем.

Петербургские ученые продолжали свои исследования. С 30-х гг. XVIII в. в Петербурге была организована Служба Солнца. Первые же наблюдения солнечных пятен еще в XVII в. убедили в том, что с появлением пятен учащаются наблюдения полярных сияний. В справедливости этих замечаний убедился и Делиль, начавший еще в 1713 г. в Париже наблюдения солнечных пятен. Отправляясь в 1725 г. в Петербург, он договорился с Ж. Ж. Дорту де Мераном вести систематические наблюдения изменений погоды, полярных сияний и солнечных пятен как в России, так и во Франции, с тем, чтобы окончательно решить вопрос о взаимосвязи этих явлений. Позднее к их работам присоединился и А. Цельсий, начавший собирать аналогичные наблюдения по Швеции и Скандинавским странам.

Метеорологические и геофизические наблюдения в Петербурге были начаты уже с 9 марта 1726 г., как отмечалось выше. Эйлер несомненно неоднократно на них бывал, но его собственные наблюдения этих явлений нам неизвестны. Однако солнечные пятна, появившиеся в 1730 г., Эйлер наблюдал сам и с большим увлечением. Тогда же он начал заниматься и теорией этих явлений. Первую теорию полярных сияний в 1726 г. предложил первый петербургский наблюдатель этих явлений Ф. Х. Майер. Она была опубликована в 1729 г. [144]. Первые теоретические исследования Эйлера по этому вопросу были напечатаны в 1730 г.

До сих пор их автором считался Г. В. Крафт, начавший наблюдения полярных сияний с Ф. Х. Майером и, по утверждению П. П. Пекарского, напечатавший в «Примечаниях на Ведомости» пять анонимных статей [67, с. 465]. В «Примечаниях» за 1730 г. действительно опубликовано десять статей под общим заглавием «О бывшем великом тому недавно северном сиянии» [48, 1730 г., ч. 14—17, 21, 25, 32, 35, 77, 78]. Если верно, что пять из десяти статей написаны Крафтом, то какие именно? И кто автор остальных? Это удалось установить Ю. Х. Копелевич [27], которая, изучая письма Г. Ф. Миллера к И. Д. Шумахеру, выяснила, что статьи, освещающие историю вопроса [48, 1730 г., ч. 14—17, 21], писал Миллер, три статьи по теории происхождения полярных сияний — Эйлер, а две последние статьи — Г. В. Крафт [48, 1730 г., ч. 77, 78].

В статьях Эйлера [48, 1730 г., ч. 25, 32, 35] дан критический анализ объяснений физической природы полярных сияний, предложенных различными учеными от Аристотеля до Ф. Х. Майера. Теория последнего вместе с петербургскими наблюдениями, на которых она базировалась, освещена в заключительных статьях Крафта. И хотя Эйлер не предложил ничего принципиально нового, он, опираясь на наблюдения петербургских ученых, показал необоснованность различных домыслов о природе полярных сияний, в том числе объяснения Аристотеля, которое «человеческую память более пустыми словами наполняет, нежели разум действительными понятиями наполняет» [48, 1730 г., ч. 25, с. 97]. Более позднее объяснение Декарта, который, как особо подчеркивалось, сам никогда не видел полярных сияний, «от древнего Аристотелскаго мнения... взято, которое, однако ж, ныне более за важно не почитается» [48, 1730 г., ч. 35, с. 138].

Особое внимание Эйлер уделил наиболее популярному тогда объяснению возникновения полярных сияний за счет отражения света извергаемой вулканами лавы от взламывающегося льда. Однако «сие мнение здесь в Санктпетербурге невесма подтверждается», — отметил Эйлер [48, 1730 г., ч. 25, с. 98], поскольку лед Ладожского озера взламывается каждую весну, тогда как северные сияния в то время там никогда не наблюдались. К тому же неясно, как Гекла и другие вулканы могли столь сильно освещать ладожский лед, чтобы свечение это было видно по всей Европе [48, 1730 г., ч. 25, с. 98—99].

Перебрав все известные объяснения полярных сияний, Эйлер пришел к заключению, что каждый судит о Вселенной «по своей науке, в которой он искусен». Во почему полководец видит поле брани там, где купец — ярмарку, поэт — Парнас, лекарь — госпиталь, а астроном — планету! «...Однако ж те наилутче разсуждают, — заключил свой раздел Эйлер, — которые свет (т. е. Вселенную. — *Сост.*) за то почитают, что оной

И. А. Кофф (1697—1766), президент Петербургской академии наук с 1734 по 1741 г.
Портрет работы А. И. Тюрина.

подлинно есть, — за истинный химический лабораториум...» [48, 1730 г., ч. 35, с. 140].

Следует отметить, что петербургские ученые весьма удачно выбрали время для привлечения внимания своих читателей к «химической лаборатории Вселенной». Формальным поводом для публикации статей послужило наблюдение аномального полярного сияния 5 февраля 1730 г. Статьи Г. Ф. Миллера, Л. Эйлера и Г. В. Крафта в «Примечаниях на Ведомости» печатались с 16 февраля по 28 сентября 1730 г. Однако истинной причиной их публикации послужила замеченная петербургскими учеными активизация различных процессов в околоземном пространстве. Она проявилась в резком увеличении числа полярных сияний, солнечных пятен и резких погодных изменениях. Наиболее полная информация об этих явлениях была опубликована позднее в статье Г. В. Крафта «Краткое описание наидостойнейших примечания погод и разных воздушных перемен, бывших здесь в Санкт-Петербурге с начала 1726 г. до конца 1736 г.» [48, 1738 г., ч. 70, с. 70—75].

Первой публикацией о единстве физической природы полярных сияний и хвостов комет стала статья «О кометах», напечатанная, как тогда и было принято, анонимно [48, 1733 г., ч. 86]. Она основывалась на наблюдениях аномального полярного сияния 1733 г., солнечных пятен и ряда других явлений. Как отмечалось выше, Эйлер с увлечением наблюдал солнечные пятна и другие проявления солнечной активности, размышлял о взаимосвязи этих явлений в течение многих лет. Вот почему есть основания полагать, что именно Эйлер и был автором этой статьи, в которой впервые четко говорилось о сходстве процессов, происходящих в хвостах комет и полярных сияниях. До сих пор все три статьи под общим заглавием «О необыкновенном северном сиянии 1733 года» [48, 1733 г., ч. 85—87] приписывались Г. В. Крафту [67, с. 465]. Однако сравнение всех статей показывает, что описанию самóго аномального полярного сияния 1733 г. посвящены лишь первая и последняя части, тогда как средняя имеет самостоятельный заголовок «О кометах» и посвящена другой теме. Основное внимание уделяется здесь физической природе кометных хвостов. При изложении различных взглядов на образование хвостов комет явное предпочтение отдается теории истечения Ньютона. Возникновение полос в хвосте кометы рассматривается как явление, происходящее в атмосфере кометы, по аналогии с образованием «столбов» полярных сияний в атмосфере Земли. Отмечается важность изучения комет для разработки в будущем методов определения орбит комет и планет, а также для выяснения вопроса о плотности межпланетной среды [48, 1733 г., ч. 86, с. 343—346]. Всеми этими вопросами в начале 30-х гг. в Петербурге занимался именно Эйлер. Можно полагать, что ему как автору статей по теории полярных сияний доверили написать и статью о происхождении хвостов комет.

В дальнейшем авторы любой статьи в «Примечаниях», касаясь вопроса о полярных сияниях [48, 1738 г., ч. 70, с. 70—75], хвостах комет [48, 1742 г., ч. 33—40], солнечных пятнах [48, 1735 г., ч. 23—27], зодиакальном свете [48, 1739 г., ч. 45—48] и других подобных явлениях, никогда не забывали подчеркнуть единство их физической природы. Наиболее подробный анализ всех этих явлений был дан в статье Л. Эйлера «Физические исследования о причине хвоста комет, северного сияния и зодиакального света» [112], опубликованной уже в Берлине.

Начав в 1730 г. с наблюдения солнечных пятен, Эйлер затем перешел к наблюдениям полуденных высот Солнца, важным для Службы времени, которая была впервые организована при Петербургской обсерватории. Эйлер активно участвовал и в этих работах. Побывав в Обсерватории вскоре после своего приезда в Россию, Эйлер убедился в том, как много огорчений доставляет астрономам неравномерный ход часов. Это побудило его заняться регулировкой их хода, а затем и созданием новых астрономических часов. За основу конструкции были взяты часы Х. Гюйгенса. Эйлер вместе с Д. Бернулли и Я. Германом разрабатывал теоретические основы их конструкции. Они были изложены в серии статей, опубликованных в «Комментариях» Петербургской академии наук за 1727—1736 гг. В 1735 г. профессор механики И. Г. Лейтман построил эти часы, использовавшиеся в дальнейшем при астрономических наблюдениях [58, с. 57]. К 1735 г. завершились исследования, связанные с изготовлением новых маятниковых часов для Петербургской обсерватории, а также работы, связанные с регулировкой хода всех часов Обсерватории и способами введения поправок времени. Эти позволило Делилю обратиться в Сенат с предложением об организации в России Службы времени. Как отмечалось в протоколе Академической конференции за 20/31 января 1735 г., отныне выстрел сигнальной пушки должен был ежедневно оповещать жителей Петербурга о наступлении полудня [69, с. 139]. Традиционные полуденные выстрелы звучат в Петербурге и сегодня.

Важное значение имел и предложенный Эйлером метод вычисления таблиц полуденного уравнения Солнца. С его помощью были составлены таблицы высот Солнца в Петербурге на каждый час, а затем и таблица для вычисления полуденного уравнения Солнца по двум его равным высотам, наблюдавшимся до и после полудня. С 1733 г. этими таблицами стали пользоваться все сотрудники Академической обсерватории. Работа Эйлера была опубликована в 1741 г. в «Комментариях» [106]. Можно полагать, однако, что часть ее печаталась в 1731 г. по-русски и по-немецки в серии статей «О времени и его разделении» в «Примечаниях на Ведомости» [48, 1731 г., ч. 2—10]. Автором этих анонимных публикаций считали Г. В. Крафта [67, с. 465]. Тем не менее Эйлер, по-видимому, был его соавтором или даже сам написал две из девяти статей — те, что вошли в части 7 и 8 [48, 1731 г., ч. 7, 8, с. 25—32]. В них обсуждаются вопросы о вычислении поправки маятниковых часов по наблюдению звезд и Солнца, т. е. те же проблемы, что в работе Эйлера [106]. К тому же и Эйлер уже не раз успешно сотрудничал с Крафтом, как в Обсерватории, так и в написании статей для «Примечаний на Ведомости».

Деятельность Эйлера, как и всех других петербургских астрономов, была тесно связана не только с Обсерваторией, но и с Географическим департаментом, другим академическим учреждением, основанным по инициативе Ж. Н. Делиля и работавшим долгие годы под его руководством. Фактически работу по составлению географических карт России петербургские ученые под руководством Делиля начали с 1726 г., но официально Географический департамент начал работу с 1735 г. Директором его был назначен Делиль, а его помощником — Л. Эйлер. Как выяснилось по протоколам Географического департамента, Эйлер впервые появился там 25 августа 1735 г. и работал вплоть до своего отъезда в Берлин в 1741 г. В результате огромной работы дружного коллектива ученых Академии и геодезистов, присланных из Сената, Россия, до XVII в. не имевшая ни одной карты с градусной сеткой, получила точные карты всей обширной страны, основанные на столь большом числе пунктов, географические координаты которых были определены с помощью точных астрономических наблюдений, какого не имела в то время ни одна страна мира. «Атлас Российской...» [1] был опубликован в 1745 г.

В кратком обзоре невозможно охватить все грани разнообразной научной деятельности Л. Эйлера в Петербургской академии наук. Отметим только, что, близко познакомившись со всеми отраслями современного ему естествознания XVIII в. — астрономией, физикой, механикой, геодезией и картографией, а также с историей науки, Эйлер углубился в математику, чтобы осуществить свою юношескую мечту — пересказать механику Ньютона на математическом языке Г. В. Лейбница. Первым его шагом в этом направлении была «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» [104], сразу же ставшая классической. Вслед за тем Эйлер перешел к небесной механике (ее он называл «астрономической механикой»). Первые статьи Эйлера по небесной механике, написанные им в 1734—1735 гг., были опубликованы в «Комментариях» за 1740 г. [96, 111].

Естественно, что теперь уже ученый никак не мог согласиться с произвольными и противоречивыми утверждениями X. Вольфа, высказанными в его только что опубликованных работах «Онтология» и «Космология» [157, 158]. В 1738 г. Эйлер проштудировал «Космологию» и составил записку под названием «Размышления по поводу „Космологии" славнейшего Вольфа...». По распоряжению президента Петербургской академии наук И. А. Корфа записка Эйлера была отправлена к Бильфингеру, который вежливо ответил, что еще не читал эту книгу.

Бильфингеру явно не понравились слова Эйлера о том, что «метафизическое учение должно основываться на физике» [22, с. 16]. Эйлер пытался убедить Бильфингера в своей правоте. С этой целью в письме от 3/14 ноября 1738 г. он подробно изложил свои возражения Вольфу [22, с. 16—18]. На это письмо Бильфингер не ответил, а возражения Эйлера переслал Вольфу (несмотря на просьбу Эйлера не делать этого). Вольф ужасно рассердился как на Эйлера, так и на всех петербургских ученых.

В 1741 г. Эйлер переехал в Берлин. Этому способствовали политическая неустойчивость в России конца 30-х гг., обострившаяся со смертью Анны Иоанновны, и разлад в Академии, долгое время остававшейся без президента после увольнения И. А. Корфа в 1740 г. и К. Бреверна в 1741 г. Эйлер принял на почетных условиях приглашение Фридриха II и переехал с семьей в Берлин, где он деятельно участвовал в создании на базе бывшего Научного общества Королевской Берлинской академии наук и словесности. В Берлинской академии он занял место директора математического класса, оставаясь почетным членом Петербургской академии, в трудах которой он продолжал печатать много работ. В Берлинской академии он также имел много организационных обязанностей и в отсутствие президента П. Л. Мопертюи фактически выполнял его обязанности.

При этом Эйлер продолжал и кипучую научную деятельность по всем направлениям, начатым в России. За 25 лет пребывания в Берлине он примерно поровну публиковал свои труды как в Петербурге, так и в Берлине. Не забыл он и учение о монадах. 16 октября 1741 г., уже из Берлина, Эйлер написал Вольфу, призывая его во имя научной истины признать свои ошибки [22, с. 74—78]. Вольф не удостоил его ответом и перешел к открытой борьбе с петербургскими «антимонадистами».

Эйлер не остался в долгу. В 1746 г. он опубликовал три «антимонадные» работы: брошюру на немецком языке «Размышление об элементах тел, в котором проверяется учение о строении простых вещей и монад и открывается истинная сущность тел» [99] и две статьи: одну на латинском языке — «Обстоятельное изложение вопроса: можно ли свойства материи вывести из принципов механики с помощью размышления, или нет?» [98], другую на французском — «Физические исследования о природе мельчайших частиц материи» [113]. И наконец, по настоянию Эйлера Берлинская академия наук объявила в 1747 г. конкурс о монадах. Эйлер, употребив весь свой научный авторитет, добился того, чтобы премирована была работа Юсти, до основания ниспровергавшая систему монад [130]. Так закончилась победой начатая еще в Петербурге борьба с «монадами».

Эйлер с радостью послал в Петербург сборники небольших работ, опубликованных в Берлине. Они включали «антимонадные» статьи и еще две статьи по небесной механике: «Астрономические таблицы Солнца и Луны» [117], «О замедлении движения планет» [97] и «Новая теория света и цветов» [107], основы которой он разрабатывал в Петербурге.

В 1748 г. Эйлер опубликовал давно им вынашиваемые «Введение в анализ бесконечно малых» [102], в 1755 г. — «Дифференциальное исчисление» [100], а в 1768—1770 гг., уже после возвращения в Петербург — три тома «Учения об интегральном исчислении» [101]. Эти труды стали настольной книгой для многих поколений специалистов в области физико-математических наук. Так было в основном завершено создание математического аппарата, начала которого закладывали еще Р. Декарт и Г. В. Лейбниц. На основе этих методов в значительной мере лично Л. Эйлером разрабатывалась и наука, известная теперь под названием «небесная механика». Эйлер очень много сделал для ее развития. Однако предложенный им термин «астрономическая механика» не удержался в науке. Прижился предложенный позднее П. С. Лапласом термин «небесная механика». Нет возможности в краткой статье остановиться на всех работах Эйлера в области небесной механики. Мы можем лишь сослаться на фундаментальные исследования М. Ф. Субботина, К. В. Холшевникова и др. [71].

Остановимся еще немного на работах Эйлера в области логики и философии, менее известных широкой публике. Эти вопросы Эйлер затронул в своих знаменитых «Письмах к немецкой принцессе» [103]. Как известно, вопросами логики много занимался Г. В. Лейбниц. И Эйлер в разделах о логике сперва аккуратно изложил достижения Лейбница, разработавшего учение об анализе и синтезе, сформулировавшего закон достаточного основания, закон тождества, принятый в современной науке, и создавшего наиболее полную для своего времени классификацию определений. В работе «Рассуждение об искусстве комбинаторики» [135] Лейбниц предвосхитил некоторые моменты современной математической логики. Петербургские ученые хорошо знали и высоко ценили эти работы Лейбница. Ими пользовались и развивали их дальше. Наиболее успешно это делал Эйлер. Так, например, он ввел графическое изображение понятий, значительно упростившее все рассуждения. Оно получило название «круги Эйлера» и сегодня широко применяется. Впервые в печати оно появилось в «Письмах к немецкой принцессе» [103, письма № 100—109].

В «Письмах к немецкой принцессе» Эйлер также детально обсуждал вопросы о том, как человек познает окружающий мир и насколько достоверно подобное знание, насколько можно доверять органам чувств, с помощью которых человек познает окружающий мир (см. письма № 80—100). В решении этих вопросов Эйлер предстает как ученый-естествоиспытатель, много и успешно потрудившийся над познанием Вселенной. Эйлер проявляет себя стихийным материалистом: он уверен в реальности окружающего его мира и в возможности познать его с помощью органов чувств, данных человеку природой.

Эйлер упоминает философов-идеалистов, отрицающих существование внешнего мира. Заметив, что их весьма трудно опровергнуть, он тем не менее ссылается на опыт как критерий истинности познания. Эйлер с глубоким сарказмом замечает: «Нет такого человека или животного, который сомневался бы в этой истине — реальности мира. Если бы крестьянин выразил сомнение... в существовании своего сельского старосты, хотя тот стоит перед ним, то его приняли бы за сумасшедшего, и вполне справедливо. Но когда философ высказывает подобные мнения, он хочет вызвать восхищение своим умом и образованностью...» [103, письмо № 97, с. 76].

Не менее резко Эйлер критиковал и французских материалистов-энциклопедистов, утверждавших, что материальна даже мысль [103, письмо № 80], но неспособных понять, как из ощущений, возбуждаемых внешним миром в наших органах чувств, переданных по нервам в мозг, возникают затем абстрактные идеи, правильно отражающие свойства реального мира. Рассматривая процесс познания как процесс взаимодействия «души» и тела, Эйлер определяет «душу» как мозолистое тело, где в мозгу сходятся все нервы [103, письмо № 81]. Он отчетливо понимает, что познание — процесс диалектический, состоящий из единства материального и идеального. С этих позиций он беспощадно критикует «теорию предустановленной гармонии», предложенную Г. В. Лейбницем и доведенную до абсурда Х. Вольфом. Эта теория, предназначенная для объяснения соотношения психических и физиологических процессов, рассматривала душу и тело как двое часов, идущих совершенно одинаково и не связанных друг с другом. Считалось, что тело никак не может воздействовать на душу, как и душа — на тело. Душа познает мир сама, без взаимодействия с внешним миром и без помощи тела [103, письма № 82—84].

Теория Лейбница—Вольфа, основанная на представлении о монадах, также подверглась жестокой критике со стороны Эйлера, как уже отмечалось. То же произошло и со связанным с ними представлением о свободе воли. Эйлер с гордостью писал, что даже Бог не может покушаться на свободу воли человека. Бог и священнослужители могут убеждать верующих жить в соответствии с евангельскими заповедями, чтобы стать счастливыми, но насильно заставить человека быть счастливым не может даже Бог.

Представления о свободе воли человека и животных помогло Эйлеру устранить строгий детерминизм в мире ньютоновой механики. Эйлер попытался внести в такой мир весьма любопытную и существенную поправку. Он писал: «Если бы мир состоял только из тел и если бы все изменения, в нем происходящие, были необходимым следствием законов движения, соответствующим силам взаимодействия тел, то все события стали бы необходимыми и зависели бы от первоначального порядка, установленного Создателем в мире тел... В этом случае мир стал бы, бесспорно, настоящим механизмом, подобным часам...» [103, письмо № 87, с. 29].

И далее: «Но стоит лишь допустить, что души людей и животных имеют некоторую власть над своими телами, чтобы совершать в них движения, которые одно лишь телосложение не могло бы произвести, как система мира больше не будет простой машиной, а все события уже не будут происходить там с необходимостью, как в предыдущем случае. Мир наполнится событиями двоякого рода. Одни, на которые души не оказывают никакого влияния, будут телесными, или зависящими от мирового механизма, как например движения и небесные явления, происходящие с такой же необходимостью, как и движение часов, зависящее исключительно от первоначального устройства мира. Другие, которые зависят от души людей и животных, связанной с их телами, не будут больше необходимыми, как предыдущие, а станут зависеть от свободы, как и от воли этих одухотворенных существ. Эти два рода событий отличают мир от простой машины и возвышают его до уровня, гораздо более достойного Всемогущего Творца, который его создал. Потому-то упорядоченность мира всегда внушает нам самые возвышенные идеи о мудрости и высочайшей благости Бога» [103, письмо № 87, с. 31].

Понятно, что если свобода человеческой души и разума играет столь важную роль во Вселенной, то и на Земле, в человеческом обществе, она должна была, по мнению всех петербургских ученых, занимать достойное место. Демократизму, уверенности в том, что все люди рождаются одинаково свободными, все они не изменили до конца своих дней. Однако, отдавая должное свободе «одушевленных тел» и ее роли в делах мироздания, Эйлер прекрасно понимал, что «события в мире не зависят исключительно от доброй воли или желания людей и животных» [103, письмо № 87, с. 32]. Люди и животные лишь действуют, следуя своим желаниям и разумению, как бы создавая фон случайных событий, вносящих в мир разнообразие и непредсказуемость окончательного результата действий всех «одушевленных тел». «Итак, — заключил Эйлер свое рассуждение, — Бог остается абсолютным владыкой всех событий в мире, несмотря на свободу людей. Все свободные действия их с самого начала уже входили в План, который Бог пожелал воплотить, создавая этот мир» [103, письмо № 87, с. 32—33].

В критике вольфианства, в те годы весьма популярного в государствах раздробленной тогда Германии, Эйлер, по-видимому, затронул и самого Фридриха II, который разделял эти взгляды и оспариваемые Эйлером идеи французских энциклопедистов. Таким образом, издание «Писем», хотя и адресованных «немецкой» принцессе, оказалось совершенно невозможным в Германии, тогда как в России у Эйлера было множество единомышленников, в том числе и противников философских взглядов Г. В. Лейбница и особенно X. Вольфа. Не случайно поэтому, что «Письма» впервые были изданы именно в России, куда Эйлер вернулся в 1766 г.

Интересно отметить, что петербургских ученых объединяла и любовь к музыке. Л. Эйлер и X. Гольдбах музицировали, большим любителем музыки был и Ж. Н. Делиль. По крылатому выражению Лейбница, музыка — это «скрытое упражнение в арифметике, не умеющей считать души». Гольдбах считал, что музыка — это проявление скрытой математики. Понятно, что петербургские ученые не могли пройти мимо музыки, не заинтересоваться ею. Эйлер посвятил теории музыки книгу, изданную в Петербурге в 1739 г., и четыре статьи. В Санкт-Петербургском филиале Архива РАН хранится рукопись еще одной книги. Эти работы Эйлера были исследованы специалистами-музыковедами Е. В. Герцманом и С. С. Церлюк-Аскадской, которые пришли к заключению, что Эйлер удачно развивал идеи Г. В. Лейбница по теории музыки и верно предсказал развитие современной музыки [6, 74].

Представители Петербургской академии наук были тесно связаны с немецкой наукой и культурой. Прежде всего это объяснялось тем, что в России в разные годы XVIII в. работало много немецких ученых. Так, например, из Тюбингена были Г. Б. Бильфингер, И. Г. Дювернуа, Ф. Х. Майер и Г. В. Крафт, из Виттенберга — Г. Гейнзиус, рекомендованный Ж. Н. Делилю астроном, из Лейпцига — Г. Ф. Миллер. Да и сам грозный правитель Академической канцелярии И. Д. Шумахер был выпускником Страсбургского университета. Однако наиболее тесные связи Петербургская академия наук имела с Кёнигсбергом. Оттуда в Петербург приехали Т. З. Байер, И. С. Бекенштейн и Х. Гольдбах — первый непременный секретарь Академии. Выпускниками Кёнигсбергского университета были и два президента Петербургской академии наук — И. А. Корф и Г. К. Кайзерлинг. Выходцами из Германии были также астроном И. Х. Либертус, механик И. Г. Лейтман, секретарь Географического департамента П. Л. Леруа, востоковед Г. Я. Кер. Все они в разное время работали в Обсерватории.

В XVIII в. раздробленная тогда Германия не располагала необходимыми средствами для оборудования Астрономической обсерватории, хотя бы отдаленно напоминавшей Петербургскую. Не было там и научного руководителя, по масштабу сравнимого с Ж. Н. Делилем. Вот почему молодым немецким ученым оставалось лишь жадно следить за работой этой великолепно оснащенной и прекрасно организованной Обсерватории. Она считалась образцовой, и молодые немецкие ученые старались принять посильное участие в ее работах. Это стало возможным с тех пор, как в трудах Петербургской академии наук, а с 1728 г. и в издававшемся и на немецком языке журнале «Примечания на Ведомости» стали печататься задачи, над решением которых работали петербургские ученые. Молодые немецкие ученые (как, впрочем, и их сверстники из других небольших государств Европы) мечтали хоть немного поработать в Петербурге, этом «раю для ученых».

Вместе с тем каждый сотрудник Петербургской академии наук, возвратившийся в Германию по окончании срока контракта, продолжал у себя на родине астрономические и метеорологические наблюдения, начатые в Петербурге. Так, например, регулярно присылали в Петербург свои метеорологические наблюдения физик Г. В. Крафт и анатом И. Г. Дювернуа, а астрономические наблюдения — Г. В. Крафт и астроном Г. Гейнзиус. Следует отметить, что все бывшие сотрудники Петербургской академии наук, вернувшиеся на родину в Германию, считались там высшими авторитетами в области астрономии и организации работы обсерваторий.

Не случайно, что и Эйлер, переехав в Берлин, был назначен директором Берлинской обсерватории (одновременно он был директором математического класса). Эти обязанности он исполнял с 1741 по 1766 г., т. е. все годы пребывания в Берлине. Эйлер вскоре убедился, что Берлинской обсерватории слишком далеко до Петербургской. 1 февраля 1744 г. он писал Делилю: «...в Обсерватории все находится в таком состоянии, что совершенно нет возможности сделать наблюдения, на которые можно было бы положиться» [24, с. 174]. Какой резкий контраст эти слова составляют с характеристикой Петербургской обсерватории, приведенной в письме Эйлера к И. Д. Шумахеру от 18/29 марта 1746 г.: «Обсерватория в Петербурге по праву может гордиться тем, что в течение столь многих лет не жалели никаких средств на приобретение всех необходимых инструментов. Кроме того, и здание ее также настолько хорошо приспособлено для астрономических целей, что мы в этом отношении не можем предложить лучшего образца. Все, что там с большими затратами можно было бы изменить, послужило бы не иначе, как во вред» [24, с. 86].

После того как И. Ф. Вайдлер, виттенбергский математик, по просьбе Делиля и на собранных в Петербурге материалах, по плану, разработанному в Петербурге, опубликовал в Виттенберге в 1741 г. «Историю астрономии» [156], в которой привел детальное описание Петербургской обсерватории, она стала считаться одной из лучших в Европе. Даже в XIX в., когда Ф. В. Бессель решил оборудовать свою обсерваторию в Кёнигсберге, он взял за образец описание Петербургской обсерватории у Вайдлера. Точно так же поступил и В. Я. Струве, оборудовавший сперва Дерптскую, а затем Пулковскую обсерватории.

Работая в Берлине, Эйлер продолжал себя чувствовать петербургским ученым. Он с готовностью поддерживал все исходившие из России начинания. Так, он способствовал публикации немецкого перевода сатир А. Д. Кантемира, оказавших большое влияние на формирование Немецкого Просвещения. На формирование раннего Русского Просвещения оказали большое влияние статьи из «Примечаний на Ведомости», публиковавшиеся в 30-е гг. XVIII в. Л. Эйлер был одним из авторов этих статей.

23 августа 1749 г. к Эйлеру как к представителю петербургской астрономической школы обратился с письмом начинающий немецкий ученый И. Кант. Он прислал Эйлеру свою первую печатную работу, основанную на публикациях в первом томе петербургских «Комментариев». Работа Канта «Мысли об истинной оценке живых сил» [13] была опубликована в 1746 г. Почему же он послал ее Эйлеру не сразу, а лишь три года спустя? Можно полагать, что эти годы понадобились Канту на то, чтобы хотя бы вчерне закончить другое, гораздо более важное сочинение, в котором использовались как многочисленные петербургские публикации, так и статьи Эйлера, опубликованные им в Берлине за 1746—1749 гг.

Это предположение подтверждается следующим замечанием Канта в сопроводительном письме к Эйлеру: «Я буду иметь честь прислать Вам и краткое дополнение к этой статье,... где я дам необходимые объяснения и некоторые, также относящиеся сюда, мысли» [25, с. 372]. О какой же работе шла здесь речь? Судя по некоторым данным, Кант имел в виду ставшую впоследствии знаменитой «Всеобщую естественную историю и теорию неба» [11], впервые опубликованную в 1755 г. Как известно, здесь излагалась знаменитая космогоническая гипотеза Канта. Первое издание этой работы фактически осталось неизвестным современникам философа, так как его издатель обанкротился и книги были опечатаны. Лишь второе издание 1791 г., исправленное по поручению Канта магистром Гензихеном, принесло немецкому философу мировую известность. Интересно отметить, что в издание 1791 г. по указанию Канта было внесено следующее замечание: «Уже за шесть лет до этого (т. е. до 1755 г., а значит, в 1749 г. — *Сост.*) профессор Кант изложил свою точку зрения на Млечный Путь как на систему движущихся солнц, аналогичную планетной системе; теперь Ламберт в своих „Космологических письмах" об устройстве мироздания, вышедших в свет лишь в 1761 г., высказал подобную же идею. Таким образом, за первым из них остается право владения вещью, которая никому еще не принадлежала» [11, с. 516].

О том, что космогоническая гипотеза Канта была разработана и написана им задолго до ее публикации, говорилось и в представленном на конкурс Берлинской академии наук 1752 г. сочинении Канта о замедлении вращения Земли: «Исследование вопроса, претерпела ли Земля в своем вращении вокруг оси, благодаря которому происходит смена дня и ночи, некоторые изменения со времени своего возникновения» [12, с. 83—91]. Сочинение заканчивалось следующими словами: «Я посвятил этому вопросу целый ряд исследований и объединил их в систему, которая в скором времени появится в свет под названием: „Космогония, или Попытка объяснить происхождение мироздания, образование небесных тел и причины их движения общими законами движения материи в соответствии с теорией Ньютона"» [12, с. 91].

По-видимому, Эйлер не ответил на письмо молодого философа, да и присланная им на конкурс 1752 г. работа о вращении Земли не привлекла его внимания. Во всяком случае пока не обнаружены сведения о каких-либо личных контактах между Кантом и кем-либо из сотрудников Петербургской академии наук. Тем не менее петербургские ученые оказали сильное влияние на Канта уже тем, что именно их публикации в защиту Ньютона и исследования по ньютоновскому естествознанию воспитали его последователем английского ученого. Эти же публикации и Берлинский «антимонадный» конкурс помогли Канту освободиться от влияния вольфианской философии.

Однако любимый учитель Канта М. Кнутцен (1713—1751) работал в тесном контакте с петербургскими учеными. Так, уже в 1733 г. он решал поставленную Ж. Н. Делилем задачу о движении солнечных пятен (СПбФА РАН, ф. 3, оп. 1, № 17, 18). Тот же вопрос решали Л. Эйлер и другие петербургские ученые. В 1739 г. Кнутцен прислал в Петербург свою работу о теории магнетизма (СПбФА РАН, ф. 1, оп. 3, № 1, л. 93—97). Кнутцен внимательно следил за деятельностью петербургских ученых и старался принять посильное участие во всех их наблюдениях и других работах, а нередко привлекал к ним и своих многочисленных учеников. Имя Кнутцена постоянно встречается в переписке Эйлера и Ж. Н. Делиля с Л. Эйлером, охватывающей период с 1741 по 1751 г.

Все биографы Канта отмечают большое и благотворное влияние М. Кнутцена на Канта в годы его учебы в Кёнигсбергском университете (1740—1746 гг.). Вот, например, что пишет Ю. Я. Баскин: «В эти годы Кант особенно интересовался естествознанием. Его любимым учителем был философ и математик, профессор Мартин Кнутцен... — блестящий лектор и педагог. Именно Кнутцен познакомил будущего философа с трудами Ньютона, в частности с „Математическими началами натуральной философии"» [2, с. 6—7].

Петербургскую академию наук связывали тесные дружеские контакты с Кёнигсбергским университетом, этой «альма-матер» многих петербургских ученых. Кёнигсберг, как и другие приграничные с Россией города, по особому распоряжению Петра I должны были получать все русские издания (СПбФА РАН, ф. 3, оп. 1, № 77, л. 502—507). Таким образом, Кнутцен и его студенты регулярно читали все издания Петербургской академии наук и использовали их на занятиях. Неудивительно, что и первая печатная работа Канта, присланная Эйлеру, была посвящена вопросу о живых силах, который обсуждался в первом томе петербургских «Комментариев». Кант определенно хотел показать Эйлеру, что он знаком с этим изданием Петербургской академии.

Тематика естественно-научных работ Канта, написанных им в первый докритический период, говорит о том, что кёнигсбергский философ весьма широко пользовался материалами, печатавшимися в «Санкт-Петербургских ведомостях» и «Примечаниях на Ведомости», тем более что эти издания выходили параллельно на немецком и русском языках. По-видимому, не только Кнутцен, но и сам Кант часто обращался к этим изданиям, работая со студентами. В трудах Канта нередко встречались проблемы, занимавшие петербургских астрономов, например движение солнечных пятен и их физическая природа, вращение Земли, движение Луны и планет и т. п. Даже идея о развитии природы могла быть почерпнута Кантом из «Примечаний на Ведомости». Ведь у Бюффона эта идея появилась значительно позднее, да и то она была подсказана ему Ж. Н. Делилем, на которого Бюффон и сослался.

Как отмечалось, находясь в Берлине, Эйлер продолжал публиковать свои работы в петербургских изданиях. За 25 «берлинских» лет публикации его разделились примерно поровну между Петербургом и Берлином. Наиболее важные труды он печатал в Петербурге. Эйлер не только активно помогал Петербургской академии наук во всех ее делах — был ее высшим экспертом по вопросам математики и физики, рекомендовал кандидатов на вакантные места, предлагал темы конкурсных задач, помогал в покупке книг и инструментов, обучал в своем доме студентов, присланных из Петербургской академии. Эйлер фактически заочно исполнял свою должность академика по высшей математике, которая во все годы его пребывания в Берлине оставалась вакантной. Статьи Эйлера, присылавшиеся из Берлина, печатались в петербургских «Комментариях» и «Новых комментариях», на 4/5 заполняя их математический класс. Из 102 помещенных там статей лишь 19 были написаны другими авторами, в том числе учениками Эйлера.

Эйлер отчетливо сознавал, какую важную роль в его формировании как ученого сыграло его пребывание в Петербургской академии наук, где он прошел хорошую школу, приобщился к науке и приобрел высокий научный авторитет. В письме к Шумахеру от 7/18 ноября 1749 г. Эйлер следующими словами выразил свою признательность Петербургской академии наук: «...я и все остальные, кто имел счастье провести некоторое время в русской Императорской академии, должны быть благодарны благоприятным обстоятельствам, в которых мы там находились. Затем, что касается в особенности меня, то за неимением такой прекрасной возможности я был бы вынужден взяться главным образом за другие исследования, в которых я, по всей видимости, должен был бы стать всего лишь кропателем. Когда недавно его королевское величество (Фридрих II. — *Сост.*) спросил меня также, где я изучил то, что знаю, то я, согласно истине, ответил, что я за все должен благодарить свое пребывание в Петербургской академии» [89, т. 2, с. 182].

В 1763 г. на российский престол взошла Екатерина II. Она провела ряд реформ в Академии и всячески заботилась о повышении ее престижа. Эйлеру стали предлагать вернуться в Россию. К тому времени его отношения с прусским королем, ценившим в математике лишь ее прикладное значение и часто вмешивавшимся в дела Академии в оскорбительной для Эйлера форме, окончательно испортились. Эйлер решил вернуться в Россию. В июне 1766 г. он приехал в Петербург с двумя старшими сыновьями. Младший его сын, офицер, был отпущен позднее. Старший сын Эйлера Иоганн Альбрехт вскоре стал непременным секретарем Академии, второй сын Карл получил должность «архиатера», т. е. возглавил медицинское ведомство. Третий сын Христофор сначала служил в Академии, участвуя в различных астрономических экспедициях. Несколько лет он был на военной службе, а позднее стал командиром Сестрорецкого оружейного завода.

Императрица пожаловала Эйлеру деньги на приобретение двухэтажного дома на набережной Невы. Позднее он был расширен и надстроен. В настоящее время в нем находится школа. Это дом № 15 по набережной Лейтенанта Шмидта.

По приезде в Петербург Эйлера привлекли к руководству Академией. Он вошел в Комиссию по управлению Академией. Однако благополучное течение дел было омрачено большим несчастьем — болезнью глаза, неудачной операцией в 1771 г. и почти полной потерей зрения (один глаз Эйлер потерял еще в 1738 г. в результате экспериментов по дифракции света в камере-обскуре и работы с географическими картами). Однако и это не приостановило поразительную творческую продуктивность ученого, которую он поддерживал с помощью сыновей и учеников. До смерти Эйлера в 1783 г. Академической конференции было представлено около 500 его статей (вероятно, часть их была привезена из Берлина). Академия продолжала их публикацию еще более полувека и после смерти великого ученого.

Если первые математические работы Эйлера были выполнены в традициях его учителя И. Бернулли, то теорией чисел он начал заниматься в Петербурге, по всей вероятности, под влиянием Х. Гольдбаха. Несмотря на 17-летнюю разницу в возрасте, они очень коротко сблизились. Их объединяли общие интересы. К теореме Ферма, которой посвящена первая работа Эйлера по теории чисел, его внимание привлек Гольдбах в своем первом письме Эйлеру от 1 декабря 1729 г., когда Гольдбах по делам Академии ездил в Москву. Переписка Эйлера с Гольдбахом, который, по выражению А. П. Юшкевича, «обладал высокой степенью арифметической наблюдательности», длилась до самой смерти Гольдбаха в 1764 г., и одной из главных ее тем всегда была теория чисел. В числе трудов, принесших Эйлеру мировую известность, были и несколько статей по теории чисел, в том числе о теореме Ферма, о диофантовых задачах и др. Примечательно и то, что из более чем двадцати статей Эйлера по теории чисел, написанных им во время его пребывания в Берлине, почти все они были напечатаны в изданиях Петербургской академии наук. Среди публикаций петербургского периода и работ, изданных посмертно, теория чисел занимает примерно седьмую часть. Наибольшим вкладом в науку по теории чисел было издание в 1849 г. двух томов сборника «Commentationes arithmeticae collectae» (E791), содержащего ряд не публиковавшихся ранее статей.

Наиболее ярко и кратко вклад Эйлера в теорию чисел охарактеризовал А. П. Юшкевич. Он писал: «Отношение Эйлера к теории чисел, быть может, особенно убедительно свидетельствует о поистине математическом стиле его мышления. После гениальных прозрений П. Ферма теория чисел долгие десятилетия оставалась в загоне. Она не интересовала таких выдающихся ученых, как Д. Бернулли, А. Клеро, Ж. Даламбер, да и большинство современников Эйлера, который, по выражению П. Л. Чебышева, впервые создал теорию чисел как науку. Конечно, теория чисел привлекала Эйлера красотой и вместе с тем трудностью многих ее теорем, столь просто формулируемых и вместе с тем требующих для своего открытия острой наблюдательности, а для своего решения и доказательства — чрезвычайно тонких средств. Но главное было в том, что Эйлер сознавал глубокую органическую зависимость всех частей математики друг от друга. Он воспринимал математику как единое целое, неотъемлемой частью которого является теория чисел, и в продолжении математики по всему фронту видел предпосылку ее скорейшего прогресса» [77, с. 45].

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ В НЕОПУБЛИКОВАННЫХ ТРУДАХ ЭЙЛЕРА

ЗАПИСНЫЕ КНИЖКИ ЭЙЛЕРА

За два столетия, прошедшие со дня смерти Леонарда Эйлера, написано множество статей и книг об отдельных сторонах его жизни и творчества. Было сделано также немало серьезных попыток, обобщив известные сведения, составить полную научную биографию великого ученого. Однако каждая такая попытка имела лишь ограниченный успех, так как предпринимавший ее неизменно сталкивался с трудностями, преодолеть которые ему оказывалось не под силу.

Хотя жизнь Эйлера была небогата внешними событиями и, казалось бы, несложно проследить его творческий путь, в действительности описание фактов его биографии само по себе не дает даже приблизительного представления о его личности. Уже современники Эйлера, которые, воздавая ему должное, стремились осветить его многогранную научную деятельность и сохранить для потомков живой образ своего сотрудника и учителя, поняли всю сложность такой задачи. Это видно, например, из текста речей Я. Штелина и Н. И. Фуса, произнесенных по случаю кончины Эйлера. Штелин, отмечая «выдающиеся его качества, которые в силу редкости своей вызывали удивление и выделяли его из миллионов других людей» [28, с. 37], сказал, что биография гениального ученого «могла бы составить солидную книгу» [28, с. 40]. Фус, которого связывала с Эйлером многолетняя совместная работа, рассказал о его жизни в «Похвальной речи» [124], произнесенной 23 октября 1783 г. Эта речь и сейчас производит сильное впечатление искренностью и глубоким пониманием великих заслуг Эйлера перед наукой. Но и Фус счел непосильным для себя сказать о них «настоящее похвальное слово» и выразил лишь готовность тому, кто возьмется за это, предоставить необходимый материал. Как впоследствии выяснилось, и более поздние биографы Эйлера испытывали не меньшие затруднения, так что даже спустя столетие положение в этом смысле существенно не изменилось.

Полноценная научная биография, помимо фактов и анализа конкретных результатов деятельности ученого, должна открыть перед читателем его внутренний мир и позволить, как обычно говорится, заглянуть в лабораторию его творчества. В отношении Эйлера эта задача заведомо превосходит возможности отдельного исследователя. Трудности связаны в первую очередь с колоссальным объемом материала, подлежащего изучению. По широте интересов, по количеству важнейших открытий в каждом из затронутых направлений физико-математических наук, по богатству и разнообразию оригинальных идей Эйлер не имел себе равных, и это существенным образом отразилось на судьбе его научного наследия: даже простой обзор полученных им результатов превратился в сложную проблему, решением которой занималось не одно поколение ученых. Научное наследие Эйлера столь велико, что нелегким для биографов делом оказалось даже составление списка его сочинений.

Список опубликованных сочинений Эйлера к 1784 г. достиг 562 наименований, но многие законченные работы еще не были напечатаны. Последним изданием, в подготовке которого он сам принимал участие, был 1-й том сборника «Opuscula analytica», вышедший в свет в 1783 г. В 1785 г. из печати вышел 2-й том этого издания.

В 1826 г. список трудов Эйлера насчитывал уже 771 название, а из подготовленных к печати оставались неопубликованными 14 трактатов. Они вошли в изданный в 1830 г. 11-й том «Мемуаров» Академии, дополнительный к закрывшейся в 1826 г. серии этого издания.

Когда публикация завершенных работ Эйлера была закончена, обратились к его огромному архиву, который, как справедливо полагали, содержал важные материалы, касающиеся его научной биографии. Прежде всего это относилось к научной переписке Эйлера с видными учеными своего времени, заключавшей в себе чрезвычайно интересные мысли. Изучая рукописные материалы академического Архива и пересматривая его семейный архив, П. Н. Фус выяснил, что научное наследие Эйлера далеко не исчерпано. В 1844 г. он обнаружил много (61!) рукописей трактатов Эйлера по математике и механике, готовых к печати, но неизвестных издателям его наследия. Замечательная находка послужила поводом для начала работы над проектом издания Полного собрания сочинений великого ученого. Идею этого издания горячо поддержали М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский, П. Л. Чебышев [34], в разработке плана принял живое участие берлинский математик К. Г. Якоби [153]. Вначале предполагалось издать все труды Эйлера в 25 томах, но затем из-за материальных трудностей решили отказаться от перепечатывания вышедших самостоятельно сочинений и ограничиться публикацией статей. Из этого проектировавшегося издания (Leonhardi Euleri Opera minora collecta) в 1849 г. были выпущены лишь два первых арифметических тома (Commentationes arithmeticae collectae) (E791).

В 1862 г. публикация научного наследия Эйлера была в основном завершена, но идея о необходимости Полного собрания сочинений продолжала волновать математиков. Не уменьшался интерес также к дальнейшему исследованию и публикации переписки Эйлера и других материалов из его архива, необходимых для создания его научной биографии.

К концу XIX в. стало ясно, что она может быть написана лишь после того, как будут собраны воедино все печатные труды Эйлера, сохранившиеся рукописи, письма, а также имеющие к нему отношение официальные документы. Внимание ученого мира к этой задаче привлекли торжественное заседание, проведенное 17 ноября 1883 г. Базельским обществом естествоиспытателей в ознаменование 100-летия со дня смерти Эйлера, а затем подготовка к празднованию в 1907 г. его 200-летнего юбилея. Появились многочисленные работы о его жизни и творчестве. Одновременно велась пропаганда идеи издания Полного собрания сочинений Эйлера. При его планировании предполагалось сотрудничество ученых трех стран, с которыми была связана его жизнь, — Швейцарии, России и Германии.

В 1907 г. в Швейцарии была создана Эйлеровская комиссия. Она вынесла решение о начале подготовительной издательской работы и обратилась к научным обществам, ученым и любителям науки всех стран мира с призывом оказать изданию материальную поддержку. Эта инициатива была встречена с воодушевлением, и уже в 1911 г. из печати вышел первый том уникального издания, начатого по международной подписке и продолжающегося до настоящего времени. В предисловии редактор и один из энтузиастов издания «Leonhardi Euleri Opera omnia» Ф. Рудио подробно изложил историю изучения и публикации научного наследия Эйлера [108].

Петербургская академия наук приняла самое активное участие в работе. На Общем собрании Академии 2 мая 1909 г. была избрана специальная комиссия «для рассмотрения подлежащего передаче в Эйлеровскую комиссию материала, хранящегося в Архиве Академии наук и касающегося ученой деятельности Эйлера» [9]. В декабре 1910 г. эйлеровские материалы из Архива Академии наук вместе с их описью, составленной Б. Л. Модзалевским [53], были отосланы в Цюрих для Швейцарского общества «с обязательством возвратить их в определенное время» [63, 151]. Исследованием архивных материалов занялся известный шведский историк математики Г. Энестрём, автор фундаментального списка трудов Эйлера [94].

О результатах своей работы Энестрём сделал доклад Эйлеровской комиссии в 1913 г. [93]. Прежде всего он выделил рукописи Эйлера, относящиеся к уже опубликованным работам, не проводя, однако, по его словам, точного сравнения их с соответствующими печатными изданиями. Затем он отсеял материалы, не принадлежащие Эйлеру, и классифицировал остальные по следующим пунктам: а) общее и смешанное; б) научные работы, доклады и отзывы; в) биографические и библиографические материалы.

Особое внимание Энестрёма привлекли рукописи, вызвавшие у него «большое удивление» и оказавшиеся записными книжками, «в которых Эйлер случайно отмечал такие вещи, которыми он в данное время занимался» [94, с. 193]. По мнению исследователя, «две наиболее старые записные книжки содержат в основном упражнения и имеют поэтому подчиненное значение, но с помощью других записных книжек можно довольно хорошо ознакомиться с историей эйлеровских открытий» [94, с. 193]. Выразив пожелание, чтобы эти рукописи были основательно проработаны, Энестрём предложил для каждой математической записи дать особую заметку о ее содержании, но, по его словам, «так как записные книжки в общем имеют примерно 3000 исписанных страниц и записи часто очень коротки, такая работа потребовала бы много месяцев» [94, с. 194]. Нужно заметить, что, как показало время, Энестрём недооценил ее трудоемкость. Сам он, как он пишет, смог только бегло пролистать записные книжки, в первую очередь для того, чтобы установить их хронологическую последовательность.

При издании «Opera omnia» [108] из архивных документов были использованы только рукописи опубликованных работ, а записные книжки предполагалось издать отдельно в серии биографических материалов. Как и другие рукописи Эйлера, они долго оставались в Швейцарии и были возвращены лишь в послевоенное время (1947—1948 гг.). Отсутствие архива Эйлера болезненно ощущалось советскими историками науки, которые продолжали изучать как труды Эйлера [21—30, 35 и др.], так и труды его современников, особенно М. В. Ломоносова. Письма последнего к Эйлеру, находившиеся в этом архиве, также оказались для них недоступными [52, с. 22—23].

Возвращение рукописей в Архив Академии наук совпало с началом подготовки к 250-летию со дня рождения Эйлера. В связи с этим его научное наследие вновь оказалось в центре внимания многих ученых, включившихся в большой коллективный труд по созданию научной биографии великого человека. Издание Полного собрания сочинений Эйлера намного облегчает работу над его научным наследием. Однако вопрос о генезисе его идей, столь важный для истории современной математики, все еще далек от решения. Чтобы ответить на него, нужно знать не только факты, но и путь, которым он пришел к открытию. Эйлер, как никто другой, стремился указать читателю этот путь, подробно разъясняя ход своей мысли. Эту замечательную черту, присущую всем его трудам, отмечали уже ранние биографы. Однако результаты, полученные им в разных областях естественных наук, столь глубоки и так тесно связаны между собой, что восстановить картину его научного творчества, несмотря на предельную ясность изложения, очень трудно. Поэтому к исследованию были привлечены помимо опубликованных сочинений Эйлера драгоценные рукописные документы — это научная корреспонденция и записные книжки.

Рукописные материалы Эйлера сразу же после возвращения их в Архив Академии наук привлекли особое внимание советских ученых [32, 71, 75—78], прежде всего ныне покойных В. И. Смирнова и А. П. Юшкевича, который уже почти 40 лет целенаправленно изучал эйлеровское наследие, а также Г. К. Михайлова. Постепенно круг исследователей, работающих в указанном ими направлении, расширялся, и к настоящему времени литература об Эйлере, основанная на анализе его рукописей, существенно пополнилась.

В сотрудничестве с зарубежными историками науки много сделано по изданию научной переписки Эйлера [89]. Переписка играла в жизни ученого того времени огромную роль, позволяя обнародовать научные открытия задолго до их публикации. Эйлер написал свыше 4000 писем научного содержания, в которых сообщал своим корреспондентам об интересовавших его задачах, о методах их решения и т. д. Трудно переоценить значение этих писем для создания его научной биографии.

Важнейший материал для истории научных открытий Эйлера содержится, как уже отмечалось, в его записных книжках — двенадцати переплетенных томах различного объема, хранящихся в Санкт-Петербургском филиале Архива Российской академии наук (ф. 136, оп. 1, № 128—140). Количество страниц в них колеблется от 152 (№ 130) до 544 (№ 131), а общий объем превышает 3000 страниц. Их изучение сопряжено с особыми трудностями. Исследователь сталкивается здесь с поистине необозримым хаосом самых разнородных научных заметок, набросков к письмам и статьям, формулировок и доказательств теорем, иногда нуждающихся в уточнении чертежей, задач и выкладок, часто не доведенных до конца. Однако каждая запись отражает определенную стадию работы Эйлера над той или иной проблемой и между ними, несомненно, существуют внутренние связи. Можно с уверенностью сказать, что если удастся выявить эти связи, то окажутся выясненными многие важные стороны математического творчества Эйлера, которые нельзя осветить, исходя лишь из его опубликованных работ. Более того, результаты изучения записных книжек могут дать материал для интересных выводов относительно психологии научного творчества вообще.

В записных книжках Эйлера четко отражен ход его работы над многими научными проблемами, окончательное решение которых известно по опубликованным трудам. Встречается также немало заметок, где рассматриваются вопросы, не затронутые в печатных работах; такие записи, естественно, вызывают наибольший интерес. Часто заметки из записных книжек касаются решения задач, обсуждавшихся Эйлером в его переписке с учеными. В таких случаях оказывается возможным с достаточной точностью датировать эти и соседние записи и, судя по содержанию писем, выяснить, когда и в какой связи перед Эйлером встала та или иная математическая проблема. Сопоставление записей с соответствующими письмами предоставляет богатые возможности для изучения его творческого метода. Иногда удается проследить, как, развивая возникшую идею, он приходит к совершенно новой постановке вопроса, далекой от первоначальной и дающей результаты, видимо неожиданные и для него самого.

В записных книжках Эйлер, по-видимому, фиксировал результаты сразу после их получения. Некоторые, вероятно наиболее актуальные с его точки зрения и не вызывавшие у него сомнений, он тут же сообщал адресатам. Другие же он долго проверял: они вновь и вновь повторяются в записных книжках (иногда в несколько измененном виде) и значительно позднее всплывают в переписке. В этом смысле заметки оказываются черновыми набросками для писем.

В записных книжках наглядно проявляется стиль научной работы Эйлера и прежде всего его целеустремленность, сохранение основной идеи в течение многих лет и настойчивый поиск решения задачи, несмотря ни на какие промахи и неудачи на этом пути. В них также ясно отражено, насколько важное значение имело для Эйлера сочетание теории и научного эксперимента: занятие прикладными вопросами давало ему очевидный стимул к развитию теории. Первый шаг при исследовании записных книжек заключался в датировке и общем обзоре каждой из них. Впервые это, как было сказано выше, сделал в 1913 г. Г. Энестрём. Впоследствии датировка уточнялась, а содержание каждой книжки освещалось более полно [32, 49, 51, 146 и др.].

Следующий, более сложный этап работы требует классификации материала по отдельным дисциплинам и подробного ознакомления с содержанием соответствующих записей. Это весьма сложная задача ввиду огромного количества заметок и их разнообразия, затрудняющего полный обзор и глубокий научный анализ в одно и то же время. Поэтому возможен двоякий подход к ее решению. Можно рассматривать записные книжки в целом, не углубляясь в частности и не разбирая подробно отдельные проблемы, что позволяет лучше проследить процесс творчества в целом. С другой стороны, можно выделить все записи по какому-либо одному вопросу, подробно изучая каждую заметку, и полнее осветить таким образом историю творчества Эйлера в этой узкой области.

Наши исследования, начатые в 1954 г. по инициативе и под руководством В. И. Смирнова, который обратил внимание на важность изучения записных книжек Эйлера, были посвящены заметкам по теории чисел [21, 37—43, 143] и, в частности, по диофантову анализу. Они составляют значительную часть общего объема записных книжек (около 800 страниц текста). Был дан общий обзор материала, предложена его классификация и на основании анализа записей сделаны выводы о неопубликованных рукописях Эйлера арифметического содержания [40—42]. Однако текст заметок в основном остается до сих пор неопубликованным ни в латинском оригинале, ни в переводе (исключение составили записи о совершенных числах [38], постулате Бертрана [43], partitio numerorum [21], многоугольных числах [37], функции Эйлера [66], удобных числах [46, 47]). В ходе этих работ у Г. П. Матвиевской и Е. П. Ожиговой и родилась идея издать книгу с русскими переводами записей Л. Эйлера по теории чисел. Теперь этот замысел воплощается в жизнь.

В записных книжках встречаются также записи, которые не носят, как кажется на первый взгляд, чисто научного характера, но содержат ценные биографические сведения. Примером может служить запись в книжке, датируемой приблизительно 1749—1755 г. (СПбФА РАН, ф. 136, оп. 1, № 134). Здесь содержится каталог книг библиотеки Эйлера, озаглавленный: «Каталог моих книг» (Catalogue Librorum meorum). Он бегло упоминается в статье Г. К. Михайлова [49, с. 88]. Однако этот каталог заслуживает внимательного изучения, так как набор книг в библиотеке красноречиво говорит об интересах и склонностях ее владельца. Список занимает 20 страниц записной книжки (л. 192—201 об.) и включает 539 названий сочинений на разных языках — латинском, немецком, французском, английском, греческом, русском. Книги описаны без какой-либо определенной системы и подразделены только на издания in folio и in quarto. Даже беглый обзор каталога показывает, что к 1750 г. Эйлер владел богатой библиотекой. В ней были представлены не только естественные, но и гуманитарные науки, а также религиозная и художественная литература, главным образом классическая.

Изучение записных книжек Эйлера теперь ведется интенсивно. В той или иной мере затрагивались заметки по механике, теории чисел, алгебре, геометрии, физике, астрономии (Ю. А. Белый, Р. И. Галченкова, А. А. Киселев, Г. П. Матвиевская [20, 21], И. Г. Мельников [45—47], Л. С. Минченко, Г. К. Михайлов [49—51, 145, 146], Н. И. Невская [54—60, 147], Е. П. Ожигова [64—66, 143], но основную работу еще предстоит проделать. Теперь возможностей для использования записных книжек в качестве материала для научной биографии Эйлера значительно больше, чем, скажем, 25 лет назад.

За это время основательно изучена история Петербургской академии наук XVIII в., написаны научные биографии многих ученых, сотрудничавших с Эйлером, опубликована их переписка, на основании архивных документов сделаны новые выводы о ходе исследований в Академии и т. д. Сопоставление полученных данных с заметками из записных книжек Эйлера может облегчить расшифровку и датировку отдельных записей, объяснить причину их появления и сделать более понятной связь разных заметок между собой. Дальнейшее изучение записных книжек Эйлера, несомненно, даст новый ценный материал для его научной биографии. Надеемся, что и наша книга также будет полезна.

РУКОПИСНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Публикация рукописного наследия Эйлера по теории чисел

Теория чисел занимает большое место в творчестве Эйлера. Примерно 1/6 часть его опубликованных трудов содержит результаты, методы, приложения теории чисел. Такое же соотношение характерно и для рукописей и переписки Эйлера, хранящейся в архивах России. Неопубликованные рукописи Эйлера привлекли внимание ученых еще в XVIII в. После смерти Эйлера осталось много таких работ. В 1783—1785 гг. Н. И. Фус опубликовал два тома его неизданных ранее статей, среди которых было 11 по теории чисел (E550—E562, E586—E600). Затем он подготовил к печати 8 работ, изданных уже после его смерти, в 1830 г. (E772—E785).

Большое место занимает теория чисел и в изданной в 1843 г. П. Н. Фусом переписке нескольких выдающихся геометров XVIII в., особенно в переписке Эйлера с X. Гольдбахом [138]. В 1849 г. П. Н. Фус, В. Я. Буняковский и П. Л. Чебышев выпустили два тома «Арифметических сочинений» Эйлера, где собрали наряду с напечатанными ранее также и нигде не публиковавшиеся, среди них — большой трактат по теории чисел из 16 глав. В первом томе они поместили очень ценный систематический указатель на французском языке всех работ Эйлера, включенных в это издание. Наконец, в 1862 г. П. Н. Фус и Н. И. Фус издали собрание посмертных трудов Эйлера, также в двух томах, куда вошли и фрагменты рукописей по теории чисел [109].

Интерес к рукописному наследию Эйлера оживился в конце XIX—начале XX в. в связи с юбилейными датами. На международных конгрессах математиков в Цюрихе (1897 г.) и Риме (1908 г.) ставился вопрос о необходимости издания Полного собрания сочинений Эйлера. При подготовке к празднованию 200-летия со дня рождения великого математика в Швейцарии, Германии и России были созданы комиссии, изучавшие пути и возможности такого издания. Русские ученые (Д. К. Бобылев, А. М. Ляпунов, О. А. Баклунд, А. А. Марков, Н. Я. Сонин и др.) проявили большой интерес к трудам Эйлера и подчеркивали важность издания всего его научного наследия. В конце концов заботу об издании Полного собрания сочинений Эйлера приняло на себя Швейцарское общество естествоиспытателей.

Полное собрание сочинений, которое начало выходить в 1911 г., предполагалось издать в трех сериях, поместив в первую труды по математике, во вторую — по механике и астрономии, в третью — по физике и прочие. При подготовке издания этих серий использовались почти исключительно рукописи печатных трудов Эйлера — для сверки и уточнения текста. Изучение же рукописного наследия продолжало оставаться настоятельно необходимым для исследования в полном объеме творчества Эйлера, но было отложено на долгое время.

В 1947—1948 гг. рукописи Эйлера были возвращены из Швейцарии в Ленинград, в Архив Академии наук СССР. По инициативе В. И. Смирнова было начато планомерное изучение рукописного наследия Эйлера. Первые результаты этого изучения были сообщены В. И. Смирновым на юбилейной сессии Академии наук СССР 16 апреля 1957 г. и опубликованы в статьях В. И. Смирнова и Г. К. Михайлова, а также в других работах. Большую роль в дальнейшем исследовании и публикации рукописных материалов Эйлера сыграл и А. П. Юшкевич.

Начатое в 1911 г. издание свода сочинений Эйлера продолжается и по сей день и представляет собой пример плодотворного международного сотрудничества в области науки. В последние десятилетия самое активное участие в этой работе, как в организации (В. И. Смирнов, А. Т. Григорьян, Г. К. Михайлов, А. П. Юшкевич), так и непосредственно в исследовании архивных материалов (Ю. А. Белый, Р. И. Галченкова, А. А. Киселев, Т. Н. Кладо, Г. А. Князев, Ю. Х. Копелевич, М. В. Крутикова, Т. А. Лукина, Г. П. Матвиевская, И. Г. Мельников, Л. С. Минченко, Г. К. Михайлов, Н. И. Невская, Е. П. Ожигова, Н. М. Раскин, В. И. Смирнов, А. П. Юшкевич), приняли ученые нашей страны. В частности, в 1957—1960 гг. было начато изучение рукописей Эйлера по теории чисел (А. А. Киселев, Г. П. Матвиевская, И. Г. Мельников), причем для комментирования использовались и некоторые рукописные материалы из записных книжек Эйлера. В связи с близким завершением издания трех серий трудов Эйлера началась публикация четвертой серии, в которую включается научное рукописное и эпистолярное наследие ученого. В рамках этой работы в 1983 г. Г. П. Матвиевская, И. Г. Мельников и Е. П. Ожигова вновь обратились к рукописям Эйлера по теории чисел.

Обзор рукописных материалов Эйлера по теории чисел

Рукописные материалы Эйлера по теории чисел, как и другие его рукописи, можно разделить на три группы: черновики опубликованных работ; фрагменты, содержание которых уже печаталось полностью или частично; фрагменты, до сих пор не публиковавшиеся, а потому и представляющие особый интерес. Изучение этих материалов было начато с рассмотрения всех рукописей Эйлера и отбора фрагментов теоретико-числового содержания. Эти записи постепенно расшифровываются, переводятся с латинского языка на русский, выясняется их математическое содержание. После этого материал систематизируется по темам, проводится сравнение фрагментов с соответствующими печатными работами Эйлера, чтобы установить, публиковались ли эти фрагменты, верно ли они воспроизведены, если печатались. Затем составляются комментарии к отдельным фрагментам или к нескольким тематически объединенным заметкам.

Свыше 1000 страниц записных книжек содержат записи по теории чисел. Обычно они соседствуют с другими, ничего общего с теорией чисел не имеющими, но есть страницы, целиком посвященные теории чисел. Внимательное изучение записных книжек показало, что периодами наиболее интенсивного творчества Эйлера в области теории чисел были годы его пребывания в Петербурге (1736—1741 и 1767—1783), но даже в те годы, когда Эйлер почти не публиковал теоретико-числовых работ, он продолжал усиленно заниматься этой тематикой. Некоторые известные результаты он получил задолго до их публикации.

Вопросы теории чисел рассматриваются и в других рукописях Эйлера — разрозненных черновых записях и в многочисленных письмах. Анализ всего этого материала может показать, каким путем шел ученый к своим результатам. Иногда он проводил исследование какой-либо проблемы в течение многих лет. Часто он приходил к выводам на основании наблюдений над числами после длинных вычислений и составления таблиц. Он констатировал замеченный им математический факт, а впоследствии вновь возвращался к тому же вопросу: неоднократно пытался доказать высказанное им утверждение, полученное эмпирически, до тех пор пока не приходил, наконец, к строгому доказательству, и только после этого считал вопрос исчерпанным. Правда, некоторые его теоремы удалось доказать лишь после его смерти.

Такую особенность творческого метода Эйлера можно заметить и при чтении опубликованных сочинений, но в рукописях она проявляется наиболее четко. Одну и ту же задачу Эйлер решал разными способами, один и тот же метод он часто применял в различных вопросах. Например, он использовал средства математического анализа при решении задач теории чисел и пользовался средствами теории чисел в своих исследованиях по дифференциальному и интегральному исчислению. В рукописях отразился не только путь исследований, но и различные сомнения, возникавшие при этом у Эйлера, и разрешение их. Большую роль при этом играли примеры.

Методика работы и результаты

Как и в издании 1849 г. (Е791), рукописные материалы Эйлера по теории чисел распределены нами тематически следующим образом: 1) делимость чисел; 2) разложение чисел на суммы различного вида; 3) диофантов анализ; 4) приложения теории чисел к математическому анализу и математического анализа к теории чисел; 5) прочие вопросы. Каждый раздел разбивается на более мелкие. Например, раздел о делимости чисел включает малую теорему Ферма и теорему Эйлера, функцию Эйлера, делители, вычеты, простые числа. Каждый из них в свою очередь делится еще на более узкие. Так, раздел о вычетах содержит квадратичные вычеты, степенные вычеты, первообразные корни, закон взаимности.

Записи по диофантову анализу, составляющие большинство всех теоретико-числовых заметок Эйлера, сгруппированы (как у Л. Е. Диксона) в 10 разделов: 1) Многоугольные числа; 2) Уравнение $ax^2 + bx + c = \square$; уравнение Пелля; 3) Задачи о треугольниках; 4) Отдельные уравнения 2-й степени; 5) Системы неопределенных уравнений 2-й степени; 6) Неопределенные уравнения и системы уравнений 3-й степени; 7) Неопределенные уравнения 4-й степени; 8) Квадраты, находящиеся в арифметической прогрессии; 9) Великая теорема Ферма; 10) Целочисленные решения уравнения $x^y = y^x$. Каждый из этих разделов подразделяется на более мелкие.

Приведем несколько конкретных примеров из разных разделов, упомянутых выше. Лист 18 в записной книжке № 131 целиком посвящен теории чисел. Он начинается формулировкой задачи: «Установить, является ли предложенное число простым». Для этой цели Эйлер берет число $2^{n-1} - 1$ и делит его на n. Он считает, что если остаток при делении равен нулю, то число n — простое; если остаток не равен нулю, то число n — составное. По-видимому, такой способ проверки чисел «на простоту» (является число простым или составным) возник у Эйлера после знакомства с малой теоремой Ферма: «Если p — простое число и a не делится на p, то разность $a^{p-1} - 1$ делится на p». Эйлер упоминает эту теорему в своей первой печатной работе по теории чисел «Замечания по поводу теоремы Ферма и другие, относящиеся к рассмотрению простых чисел», которая в списке Энестрёма числится под № 26 (Е26).

Впоследствии Эйлер дал четыре доказательства этой теоремы (Е54, Е134, Е262, Е271) и установил теорему, ныне носящую имя Эйлера, которая представляет собой обобщение малой теоремы Ферма (Е271). О печатных работах Эйлера по этому вопросу писал Л. Е. Диксон, издатели арифметических томов, комментаторы переписки Эйлера с Гольдбахом А. А. Киселев, И. Г. Мельников и другие авторы [88 и др.].

Сформулированное на л. 18 утверждение Эйлера не доказано. Он хочет проверить его на примерах. Но сразу же возникает вопрос: как быть, когда числа, которые надо проверять на простоту, очень велики. Эйлер предлагает для таких чисел проверять, какой остаток получается при делении 2^{n-1} на n. Остаток равен единице, если число простое. Тут же Эйлер формулирует еще одну теорему: «Если 2^m при делении на n дает в остатке p, то при делении 2^{m+1} на n получается в остатке $2p$, а при делении 2^{2m} на n получается в остатке p^2».

Эйлер проверяет высказанное утверждение на примерах (рассматривает числа 61 и 34), используя прием, сформулированный им в виде теоремы 2. Если записать свойство делимости числа $2^m - p$ на n в виде сравнения $2^m \equiv p(\mathrm{mod}\, n)$, то теорема 2 представляет собой два свойства сравнений: если $2^m \equiv p(\mathrm{mod}\, n)$, то $2^{m+1} \equiv 2p(\mathrm{mod}\, n)$ и $2^{2m} \equiv p^2(\mathrm{mod}\, n)$.

Как известно, теория сравнений в окончательной форме была дана К. Ф. Гауссом в 1801 г. [5], но эти свойства сравнений (конечно, без современной символики) были известны Эйлеру еще в самом начале его занятий теорией чисел, поскольку записная книжка № 131 относится к 1736—1740 гг., а ее начало — к 1736 г. В более общей форме утверждение, составляющее теорему 2, было опубликовано Эйлером в 1761 г. в работе «Теоремы о вычетах, получающихся при делении степеней» (E262): «Если a^μ при делении на p дает остаток r, то $a^{2\mu}$ при делении на p дает остаток r^2, а $a^{3\mu}$ при делении на p дает остаток r^3 и т. д.». Это утверждение Эйлер использовал при установлении того, что если a^μ при делении на p дает остаток 1, то и $a^{2\mu}$, $a^{3\mu}$, $a^{4\mu}$, ... при делении на p дают в остатке 1 (E262) [108, сер. I, т. 2, с. 496].

Но вернемся к л. 18 записной книжки № 131. У Эйлера остаются сомнения, верна ли сформулированная им теорема (критерий простоты чисел). На л. 18 об. он записывает, что это правило выполняется не всегда. Если взять, например, число $n = 2^{32} + 1$, то оно делится на 641, т. е. оно составное, а в то же время разность $2^{2^{32}} - 1$ на это число $2^{32} + 1$ делится без остатка. Таким образом, предполагаемое правило установления простоты числа не годится. Эйлер делает вывод, что если деление без остатка невозможно, то отсюда следует только, что число n не может быть простым. Если же деление возможно, то еще неизвестно, каким числом является делитель — простым или составным.

Подобные вопросы интересовали Эйлера и до того, как он начал свою записную книжку № 131. Он касался делимости чисел $2^n - 1$, $2^n + 1$ и, в частности, деления числа $2^{2^5} + 1$ на 641 в письмах к X. Гольдбаху (4 и 25 июня 1730 г. и позднее — 28 октября 1752 г.) [138, с. 30, 34, 357]. О делимости чисел $2^n + 1$, $2^n - 1$ он писал в ряде статей (E26, E134, E271). Записные книжки показывают, что с самого начала занятий теорией чисел Эйлер изучал ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^s}$ (где s — натуральное число), который обозначается $\zeta(s)$ и носит название «дзета-функции Римана». В записной книжке № 131 имеется запись, относящаяся к предыстории изучения Эйлером этой функции. Об этом направлении см., например, работу Е. П. Ожиговой «Развитие теории чисел в России» [65, с. 52—56], где указана литература по данному вопросу.

К наиболее ранним задачам теории чисел, рассмотренным Эйлером, как свидетельствуют те же записные книжки Эйлера, относятся задачи диофантова анализа. Среди начальных записей в той же записной книжке № 131 имеется следующая: «Определить, сколько раз данное число содержится среди всех многоугольных чисел». Эйлер называет эту задачу «задачей Баше» и решает ее здесь своим способом. Через 16 лет в письме к Гольдбаху от 3 апреля 1753 г. Эйлер сообщает решение этой задачи [138, с. 369]. В записной книжке № 132 (л. 110) Эйлер исследует вопрос о нахождении пятиугольных чисел, которые в то же время являются квадратами. Эта задача была решена им в «Универсальной арифметике» (E388, т. 2, § 89), но решение в записной книжке было проведено другим способом.

Первая заметка, относящаяся к теореме о представлении натурального числа в виде суммы четырех квадратов, находится в записной книжке № 131 (л. 61 об.). Эйлер высказывает утверждение, что всякое число вида $8n - 1$ может быть разложено на четыре квадрата, дает правило для такого разложения и иллюстрирует его примерами. Однако можно указать примеры, опровергающие это утверждение. Очевидно, Эйлер обнаружил такие случаи и потому не включил указанное утверждение в печатные работы. В том же месте Эйлер рассматривает последовательно вопрос о разложении чисел вида $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2)$, $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \times (p^2 + q^2 + r^2)$, $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)$ на сумму четырех квадратов. Устанавливая каждый раз возможность такого разложения, он указывает значения «корней» этих квадратов (число a — «корень» величины a^2) и приходит в последнем случае к своей знаменитой формуле:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = (ap + bq + cr + ds)^2 +$$
$$+ (bp - aq + dr + cs)^2 + (cp - dq - ar + bs)^2 + (dp + cq - br - as)^2.$$

В этой заметке хорошо виден ход рассуждений Эйлера, о чем трудно было бы судить по опубликованным работам. При этом запись в книжке № 131 сделана значительно раньше, чем сообщение в письме Гольдбаху от 4 мая 1748 г. [138, с. 288—291], поскольку тетрадь № 131 относится к 1736—1740 гг.

Эйлер неоднократно возвращался к этому вопросу. В записной книжке № 132 (л. 142 об.) он сформулировал и доказал теорему: «Если дано число a, не разложимое на четыре квадрата, которое, однако, является делителем числа $P = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$, то существует число $b < a$, также не разложимое на четыре квадрата, которое является делителем суммы четырех квадратов $Q < P$ ». После доказательства теоремы дается следствие: «Нет числа, не разложимого на четыре квадрата, которое является делителем суммы четырех квадратов, т. е. всякое число, являющееся делителем суммы четырех квадратов, само есть сумма четырех квадратов». Это следствие и его доказательство совпадают с теоремой 4 из статьи о разложении чисел на квадраты (E445), на которой основано доказательство теоремы о четырех квадратах, данное в этой работе. Эта статья относится к 1772 г. В несколько измененном виде эта теорема публиковалась и в 1862 г., где она доказывалась на основе рукописного фрагмента Эйлера [109]. Записи же в книжке № 132 относятся к 1740—1744 гг.

Таким образом, можно сказать, что доказательство этой важной теоремы Эйлер имел уже в 1750-х гг., т. е. почти за 30 лет до публикации. Правда, доказательство это не было завершено. После публикации Лагранжем в 1772 г. своего доказательства теоремы о четырех квадратах

[132] Эйлер вернулся к доказательству, начатому им много лет назад, и тем же методом, что и в книжке № 132, доказал теорему. Это доказательство было проще, чем у Лагранжа. К тому же вопросу относятся и другие заметки в записных книжках. Там были обнаружены две заметки, свидетельствующие о том, что Эйлер почти за 100 лет до Ж. Бертрана сформулировал так называемый постулат Бертрана [43]. Обе заметки находятся в записной книжке № 134 и могут быть датированы 1752—1755 гг.

На л. 120 в книжке № 134 Эйлер формулирует теорему: «От какого угодно числа a вплоть до его удвоения $2a$ существует хоть одно простое число». (Очевидно, Эйлер предполагает число a натуральным и бо́льшим единицы). Для проверки высказанного утверждения Эйлер ищет в промежутке между целым a и $2a$ все числа, кратные простым числам, меньшим a; остальные числа в этом промежутке будут простыми, т. е. Эйлер применяет для решения этого примера метод решета Эратосфена. Он рассматривает случай $a = 24$. Среди натуральных чисел между 24 и 48 на 2 делятся двенадцать чисел, на 3 делятся восемь чисел (среди них четыре четных числа, которые уже учтены при делении на 2), пять чисел делятся на 5 (среди них три числа уже учтены при делении на 2 и 3), на 7 делятся три числа (все они уже встречались при предыдущих делениях), на 11 делятся два числа, также уже встречавшихся. Общее количество составных чисел между 24 и 48 равно 18:

$$12 + 8 - 4 + 5 - 3 = 18.$$

Следовательно, в рассматриваемом промежутке — шесть простых чисел, а именно: 29, 31, 37, 41, 43 и 47.

Вторая заметка находится на л. 205 об.—206 в книжке № 134. Эйлер повторяет высказанное ранее утверждение о том, что между n и $2n$ существует хоть одно простое число, и рассматривает два примера: находит количество простых и составных чисел между 30 и 60, а затем между 50 и 100. Результат вычислений он записывает в виде таблицы. Во втором и третьем столбцах таблицы приведено количество чисел в интервалах $(0, n)$ и $(n, 2n)$, кратных простым числам из промежутка $(0, n)$, причем учитываются лишь те числа, которые не встречались среди предыдущих. В дальнейших рассуждениях Эйлер пытается дать более общий способ подсчета количества простых чисел в рассматриваемом интервале и указать некоторую закономерность в распределении простых чисел (на основании приведенных таблиц), но ему это не удается.

Затем он рассматривает частный случай $n = 2p^2$, т. е. интервал вида $(2p^2, 4p^2)$. Эйлер предполагает, что простых чисел между $\sqrt{2n}$ и n столько же, сколько между n и $2n$, иными словами, что количество простых чисел между $2p$ и $2p^2$ равно количеству простых чисел между $2p^2$ и $4p^2$. Но, проверяя это предположение на примерах для $p = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15$, он убеждается, что предположение неверно уже для $p = 5$.

Рукописные материалы Эйлера значительно расширяют наше представление о творчестве ученого в теории чисел. Неопубликованные рукописи Эйлера по теории чисел, предлагаемые русскому читателю, предполагается опубликовать также и в IV серии «Opera omnia» в виде отдельного тома [108].

Глава I

ДИОФАНТОВ АНАЛИЗ

Диофантов анализ, или теория неопределенных уравнений, изучает решения (в целых или рациональных числах) алгебраических уравнений или систем уравнений, в которых число неизвестных превосходит число уравнений. Свое начало, как и свое название, эта теория ведет от Диофанта (III в.), который посвятил ей значительную часть трактата «Арифметика» и изучил некоторые простейшие виды неопределенных уравнений [90, т. 1]. Однако содержание понятия «диофантов анализ» не оставалось неизменным на протяжении истории развития науки. Сам Диофант искал лишь положительные рациональные решения и допускал недостаточную их общность (удовлетворяясь отдельным численным решением); к XVII в. появилось требование решения неопределенных уравнений в целых числах, что значительно усложнило задачу и вызвало к жизни ряд новых проблем и теоретико-числовых методов. В своем развитии теория диофантовых уравнений привела к созданию новых ветвей математики. Отсюда ведут свое начало алгебраическая теория чисел, теория квадратичных форм и другие направления, в которых находят применение результаты и методы диофантова анализа. Кроме этого теоретического применения теория неопределенных уравнений имеет некоторые приложения и в практических областях науки, например в физике.

В следующий после Диофанта период добились интересных результатов в области неопределенных уравнений индийские математики, которые, обладая более усовершенствованной по сравнению с Диофантом символикой, уже умели решать уравнения и системы в целых числах и владели, например, методом решения уравнения Пелля. Большой вклад в диофантов анализ внесли ученые Среднего и Ближнего Востока. Следует назвать китайских математиков, которым принадлежит первенство в достижении некоторых результатов (решение неопределенных уравнений 1-й степени, магические квадраты). В эпоху средневековья отдельные ученые (Леонардо Пизанский, XIII в.; Региомонтан, XV в., и др.) занимались наряду с другими вопросами и неопределенными уравнениями. Однако быстрое развитие теории чисел и, в частности, диофантова анализа начинается в XVI в., когда издания сочинений Диофанта пробудили в Европе интерес к арифметическим исследованиям. Член Парижской академии наук Баше де Мезириак (1587—1638) в своих примечаниях к изданию трудов Диофанта завершил общую теорию неопределенных уравнений 1-й степени; он потребовал значительно большей общности в решении уравнений и, главное, выделил вопрос о решении неопределенных уравнений в целых числах.

Наиболее замечательных результатов достиг Пьер Ферма (1601—1665). Вопросы диофантова анализа в трудах Ферма занимают очень большое место. Изучая Диофанта, он поставил новые задачи, подобные задачам греческого математика, но значительно более сложные. В своих письмах и оставшихся неопубликованными при его жизни заметках он предложил, не приводя доказательств, ряд теорем, что дало стимул к занятиям диофантовым анализом как его современникам, так и математикам позднейших времен.

Особый интерес к диофантовым уравнениям проявил Эйлер, неизменно возвращаясь к ним на протяжении всей своей научной деятельности. Интерес этот можно наблюдать в многолетней переписке Эйлера с Гольдбахом, где почти в каждом письме обсуждаются такого рода вопросы. О нем свидетельствует и то, что почти треть своей «Алгебры»* Эйлер посвятил неопределенным уравнениям, которые являются предметом второй части сочинения, наиболее интересной по содержанию. Об этом же, наконец, говорят почти 50 работ Эйлера, где решаются проблемы анализа Диофанта. Такое внимание объясняется, в частности, существованием многочисленных приложений диофантова анализа к задачам неопределенного интегрирования, что широко использовалось Эйлером при разработке вопросов интегрального исчисления. Работы Эйлера дали чрезвычайно много для развития теории неопределенных уравнений. Результаты, полученные в этом направлении в трудах Лагранжа, Коши, Гаусса и более поздних математиков, можно смело считать возникшими на почве, подготовленной Эйлером.

Круг вопросов диофантова анализа, затронутых Эйлером, необыкновенно широк. В «Алгебре» изложены основы теории неопределенных уравнений. Впоследствии (1774 г.) к «Алгебре» были присоединены примечания Лагранжа [134], и в таком виде эта работа сыграла большую роль в распространении интереса к диофантовым уравнениям. В «Алгебре» Эйлера дана теория уравнений 1-й степени, решаются уравнения 2-й, 3-й и 4-й степени, а кроме того, доказана великая теорема Ферма для случая $n = 3$. В других сочинениях Эйлер решает общее уравнение 2-й

* См.: *Euler L.* Vollständige Anleitung zur Algebra... SPb., 1770. T. 1. (В русском переводе XVIII в. — «Универсальная арифметика...») (E387, E388). Далее: Алгебра.

степени $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ и рассматривает его частные случаи. Так, решение неопределенного уравнения $ax^2 + bx + c = y^2$ сводится им к решению так называемого уравнения Пелля: $ax^2 + 1 = y^2$, где a не равно квадрату. Это уравнение решается методом разложения $\sqrt{a}$ в непрерывную дробь, и находится связь решения с периодичностью этой дроби. Кроме того, Эйлер дал таблицу наименьших решений уравнения Пелля для всех $a < 100$ (a не равно квадрату) и $a = 103, 109, 113, 157, 367$. Много внимания Эйлер уделил доказательству теоремы Баше о представимости всякого натурального числа в виде суммы не более чем четырех квадратов. Часто Эйлер обращался к задачам диофантова анализа, поставленным в геометрической форме, — задачам о треугольниках, элементы которых находятся в определенной связи. Среди них заслуживает внимания задача о нахождении целочисленного прямоугольного треугольника, у которого как сумма катетов, так и гипотенуза являются квадратами; она была поставлена Ферма и явилась обобщением теоремы Пифагора. Эйлер в свою очередь обобщил ее на случай многих чисел: $x + y + z + ... = u^2$, $x^2 + y^2 + z^2 + ... = v^4$.

Нередко мы сталкиваемся у Эйлера и с проблемами, касающимися так называемых многоугольных чисел: здесь наряду с задачами, поставленными предшественниками Эйлера, им выдвигаются и решаются новые вопросы. Например, к этому разделу относится доказательство теоремы: «Треугольное число $\frac{x^2 + x}{2}$ ни при каких значениях, кроме $x = 0$, $x = 1$, не может быть ни кубом, ни биквадратом»; или решение задачи: «Найти треугольное число, равное квадрату». Как уже упомянуто, Эйлер доказал великую теорему Ферма для случая $n = 3$; ему же принадлежит доказательство и для случая $n = 4$. Можно также упомянуть доказательство невозможности решения уравнения $x^3 + 1 = y^2$ ни в целых, ни в рациональных числах (кроме случаев $x = 0$, $x = 2$). Помимо перечисленных результатов Эйлеру принадлежит решение огромного числа неопределенных уравнений 2-й, 3-й и 4-й степени. При этом им применяются разнообразные методы, например широко используется так называемый метод спуска, идущий от Евклида и введенный в теорию чисел Ферма; в работах Эйлера метод непрерывных дробей применяется к решению задач диофантова анализа.

Рукописи Санкт-Петербургского филиала Архива РАН, в которых Эйлер рассматривает вопросы диофантова анализа, распределяются по двум разделам: первый из них объединяет заметки из недавно обнаруженных четырех томов рукописей, второй заключает записи по диофантову анализу в записных книжках Эйлера.

Материалы по теории чисел находятся главным образом в последнем из указанных томов (№ 158), рукописи которого трактуют только вопросы анализа Диофанта и могут быть естественно подразделены на следующие три группы: 1) законченные фрагменты, ранее не опубликованные; 2) законченные фрагменты, относящиеся к опубликованным работам Эйлера; 3) незаконченные отрывки. Наибольший интерес представляют рукописи первой группы, поэтому они будут рассмотрены более подробно.

ЗАКОНЧЕННЫЕ ФРАГМЕНТЫ, РАНЕЕ НЕ ОПУБЛИКОВАННЫЕ

В этой группе насчитывается несколько отдельных отрывков различного объема. Прежде всего обращают на себя внимание два больших фрагмента.

I. Первый законченный отрывок (№ 177, л. 1—4 об.) относится к решению задачи: «Найти треугольное число, которое, будучи увеличено на данную величину, становится квадратом целого числа». Если корень искомого треугольного числа есть a и данная величина d, то условие задачи выражается следующим образом: $\frac{a^2+a}{2}+d=b^2$; отсюда корень треугольного числа имеет вид

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{8b^2-8d-1}}{2}.$$

Решение поставленной задачи проводится постепенно (отдельно для частного случая $d=0$ и отдельно для общего случая). Изложение несистематично: весь фрагмент распадается на четыре части.

1. Прежде всего Эйлер рассматривает случай $d=0$ (т. е. задача может быть сформулирована проще: «Найти треугольное число, которое в то же время есть квадрат»). В этом виде задача встречается в опубликованных статьях Эйлера E29, E739. В обеих статьях задача приводится в качестве примера, иллюстрируя собой общие методы, изложенные в указанных работах. В рассматриваемой же рукописи метод решения, применяющийся также и в случае $d \neq 0$, совершенно оригинален.

При $d=0$ корень искомого треугольного числа имеет вид

$$a=\frac{-1+\sqrt{8b^2+1}}{2}. \qquad (1)$$

Для уничтожения иррациональности в выражении для a Эйлер применяет метод, называемый им методом Пелля. Сначала полагается

$$\sqrt{8b^2+1}=2b+c, \qquad (2)$$

откуда

$$4b^2=4bc+c^2-1 \qquad (3)$$

и, следовательно, $2b>2c$. Затем Эйлер полагает

$$b = c + e \tag{4}$$
и значение для b подставляет в (2). Отсюда $c^2 = 4ce + 4e^2 + 1$ и, наконец,
$$c = 2e + \sqrt{8e^2 + 1}. \tag{5}$$

Вводится в рассмотрение некоторое треугольное число, для которого предполагается, что корень его t и оно равно квадрату числа e, т. е. $\frac{t^2 + t}{2} = e^2$; тогда
$$t = \frac{-1 + \sqrt{8e^2 + 1}}{2}.$$

Пользуясь выражениями (2), (4) и (5), можно получить искомые величины a и b в виде
$$a = \frac{-1 + 8e - 3\sqrt{8e^2 + 1}}{2}, \quad b = 3e + \sqrt{8e^2 + 1}$$
или, выражая e через t,
$$a = 1 + 3t + 4\sqrt{\frac{t^2 + t}{2}}, \quad b = 1 + 2t + 3\sqrt{\frac{t^2 + t}{2}}.$$

Таким образом, может быть сделан вывод: если треугольное число, корень которого есть t, является квадратом, то квадратом будет и треугольное число, корень которого есть
$$1 + 3t + 4\sqrt{\frac{t^2 + t}{2}}.$$
Подставляя последнее выражение для a и используя формулу для b, получаем следующее выражение:
$$8 + 17t + 24\sqrt{\frac{t^2 + t}{2}},$$
которое связано с $1 + 3t + 4\sqrt{\frac{t^2 + t}{2}}$ только что указанной зависимостью. Продолжая таким образом далее и используя получающиеся последовательно выражения для a_n и b_n, приходим к ряду: t; $1 + 3t + 4\sqrt{\frac{t^2 + t}{2}}$; $8 + 17t + 24\sqrt{\frac{t^2 + t}{2}}$; $49 + 99t + 140\sqrt{\frac{t^2 + t}{2}}$ и т. д., для членов которого верно утверждение: если треугольное число, корень которого есть a_{n-1}, является квадратом, то квадратом будет и треугольное число, корень которого есть a_n. Для образования членов a_n этого ряда дается следующая рекуррентная формула: $a_n = 2 + 6a_{n-1} - a_{n-2}$. Отсюда получен численный ряд корней треугольных чисел, удовлетворяющих условию задачи: $a = 0$, 1, 8, 46, 288, 1681 и т. д., а также ряд соответствующих им корней квадратных: $b = 0$, 1, 6, 35, 204, 1189 и т. д. Этот результат приводится и в обеих упомянутых выше статьях.

2. Далее Эйлер переходит к общему случаю, когда $d \neq 0$ и

$$a = -1 + \frac{\sqrt{8b^2 - 8d + 1}}{2}.$$

Применяя опять метод Пелля, аналогично предыдущему, Эйлер вводит в рассмотрение величину e, квадрат которой равен некоторому треугольному числу $\frac{t^2+t}{2} + d$, причем e и t связаны с исходными величинами a и b зависимостью, аналогичной предыдущему случаю. Как и прежде, он выражает a и b через e, а затем через t, получая окончательно

$$a = 1 + 3t + 4\sqrt{\frac{t^2+t+2d}{2}}, \quad b = 1 + 2t + 3\sqrt{\frac{t^2+t+2d}{2}}. \qquad (6)$$

После этого, как и раньше, получается рекуррентный ряд для a и b и приводятся численные значения для частного случая $d = 4$.

3. В следующей части рукописи Эйлер возвращается к первому случаю $d = 0$. Он приводит формулу общего члена y полученного ранее ряда 0, 1, 6, 36, 204 и т. д. (где $\frac{x^2+x}{2} = y$):

$$y = \frac{(3+2\sqrt{2})^{n-1} - (3-2\sqrt{2})^{n-1}}{4\sqrt{2}}$$

и общую формулу

$$x = \frac{(3+2\sqrt{2})^{n-1} + (3-2\sqrt{2})^{n-1} - 2}{4}.$$

Эти формулы даются здесь без доказательства; выведены они полностью во второй упомянутой выше статье и применены в ней для решения этой же задачи.

4. В последнем разделе статьи Эйлер выводит уже полученные формулы (6) для случая $d \neq 0$ несколько другим, более общим способом, ставя задачу: «Если выражение $\alpha b^2 + \beta b + \gamma$ есть квадрат при $b = x$, найти все значения b, при которых $\alpha b^2 + \beta b + \gamma$ будет также квадратом».

Здесь дословно повторяются все рассуждения, встречающиеся в § 3—7 первой из названных статей, и те же выводы: если выражение $\alpha b^2 + \beta b + \gamma$ является квадратом в случае $b = x$, то оно также будет квадратом в случае

$$b = \frac{-\beta + \beta\sqrt{1+\alpha\lambda^2}}{2\alpha} + x\sqrt{1+\alpha\lambda^2} + \lambda\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma},$$

где λ выбирается так, чтобы $1 + \alpha\lambda^2$ было квадратом, т. е. λ есть решение уравнения Пелля $\alpha\lambda^2 + 1 = \mu^2$.

Применяя этот результат к данной задаче, т. е. если $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = d$, Эйлер получает $\lambda = y$ и $\sqrt{1 + \frac{1}{2}\lambda^2} = 3$. И тогда: если выражение $\frac{b^2+b}{2} + d$ есть квадрат в случае $b = x$, то оно будет квадратом и в случае

$$b = 1 + 3x + 4\sqrt{\frac{t^2+t}{2} + d}$$

и при этом

$$\sqrt{\frac{b^2+b}{2} + d} = 1 + 3x + 3\sqrt{\frac{x^2+x}{2} + d}.$$

Таким образом, получается уже найденный результат. Последним рассматривается случай, когда α в выражении $\alpha b^2 + \beta b + \gamma$ равна квадрату. Тогда возможно единственное решение в целых числах при $\gamma = \frac{\beta^2}{4\alpha}$.

Этой рукописи предшествуют замечания П. Н. Фуса и копия, сделанная его рукой. Из замечаний видно, что рукопись не была опубликована в 1849 г., так как издатели сочли, что по содержанию своему она полностью повторяет определенные части упомянутых выше опубликованных мемуаров.

Однако это утверждение неверно, так как поставленная задача была разрешена Эйлером в опубликованных мемуарах лишь для случая $d = a^2 + a$. Кроме того, в данном фрагменте чрезвычайно интересен именно метод решения (1-я и 2-я части рукописи), который в опубликованных статьях не применяется. Время написания рукописи (судя по почерку) можно ориентировочно определить как 1736—1738 гг.

II. Вторая рукопись (№ 180, л. 1—4) представляет собой отрывок неизвестной работы, в котором содержатся 17 параграфов (§ 32—48), посвященных исследованию тех случаев, когда корень 3-й и 4-й степени из полинома от x при некоторых значениях x становится рациональным. По содержанию своему этот фрагмент сходен с главой X (§ 147—161) «Алгебры» Эйлера, но здесь рассмотрен также ряд вопросов, которые в «Алгебре» не затрагиваются.

Из первых слов § 32 можно заключить, что в отсутствующей части статьи речь шла о приведении рациональных выражений к квадрату и правилах этого приведения. От этой части, очевидно, сохранился только один параграф, именно § 32. В нем Эйлер упоминает особые случаи, которые хотя и не подчинены какому-либо общему правилу приведения, но для которых это приведение не представляет трудностей. В качестве примера дается выражение

$$a^2 + bx + \left(2ac + \frac{b^2}{4a^2}\right)x^2 + \frac{bcx^3}{a} + dx^4 + ex^5,$$

становящееся квадратом при $x = \frac{c^2 - d}{2}$. Действительно, эта подстановка обращает данное выражение в следующее:

$$\left[a + \frac{b}{2a^2}\frac{c^2-d}{e} + \frac{c(c^2-d)^2}{e^2}\right]^2.$$

В следующих параграфах Эйлер переходит к рассмотрению более сложных вопросов.

Так, § 33—38 посвящены приведению иррациональности, содержащейся под знаком корня кубического.

Прежде всего ставится вопрос о приведении выражения $ax^2 + bx + c$ к кубу при различных значениях свободного члена (§ 33, 34).

Сначала Эйлер рассматривает случай $c = d^3$. Он полагает

$$ax^2 + bx + d^3 = \left(d + \frac{bx}{3d^2}\right)^3.$$

Отсюда

$$ax^2 = \frac{b^2x^2}{3d^3} + \frac{b^3x^3}{27d^6}$$

и, следовательно,

$$x = \frac{27ad^6 - 9b^2d^3}{b^3}.$$

Приведение выражения $ax^2 + bx + c$ к кубу возможно и при значении свободного члена

$$c = \frac{b^2}{4a^2} + e^3 - af^2.$$

Тогда, полагая

$$\sqrt[3]{ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - e^3 - af^2} = y,$$

можно получить

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{y^3 - e^3}{a} + f^2.$$

Следовательно,

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{y^3 - e^3}{a} + f^2}.$$

Если при этом $y = e$, то $x = f - \frac{b}{2a}$. Исходя из этого, подстановкой $x = y + f - \frac{b}{2a}$ приводим данное уравнение к предыдущему случаю.

Далее Эйлер переходит к приведению выражения $\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d}$ и посвящает этому четыре параграфа. Эта часть интересна тем, что она почти полностью повторяет содержание § 147—151 «Алгебры» и доказывает тем самым связь рукописи с данным сочинением. А именно, здесь излагается метод приведения выражения $ax^3 + bx^2 + cx + d$ к кубу для значений: $a = e^3$, $d = g^3$. Он был введен Ферма, и Эйлер в «Алгебре», как и здесь, излагает существо этого метода.

В § 35 выражение $\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d}$ рассматривается при значении $a = e^3$. В «Алгебре» эта задача решена в § 150. Эйлер полагает

$$\sqrt[3]{e^3x^3 + bx^2 + cx + d} = cx + \frac{b}{3e^2}.$$

Отсюда

$$cx + d = \frac{b^2x}{3e^3} + \frac{b^3}{27e^6}$$

и окончательно

$$x = \frac{b^3 - 27de^6}{27ce^6 - 9b^2e^3}.$$

Эта величина, подставленная в подкоренное выражение, дает

$$\left(\frac{9bce^3 - 27de^6 - 2b^3}{27ce^5 - 2b^2e^2}\right)^3.$$

В § 36 разобран второй случай: $d = e^3$. Здесь, полагая

$$\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + e^3} = e + \frac{cx}{3e^2},$$

Эйлер получает:

$$ax^3 + bx^2 = \frac{c^2x^2}{3e^3} + \frac{c^3x^3}{27e^6}.$$

Отсюда

$$x = \frac{9c^2e^3 - 27be^6}{27ae^6 - c^3}.$$

В «Алгебре» этому параграфу соответствует § 149.

§ 37 посвящен рассмотрению случая, когда как коэффициент при x^3, так и свободный член являются кубами, т. е. $a = e^3$, $d = f^3$. В этом случае полагается

$$\sqrt[3]{e^3x^3 + bx^2 + cx + f^3} = cx + f,$$

откуда

$$bx^2 + cx = 3e^2fx^2 + 3ef^2x, \qquad x = \frac{3ef^2 - c}{b - 3e^2f}.$$

Таким образом, при $a = e^3$, $d = f^3$, кроме двух полученных в § 35 и 36 решений, имеет место еще и $x = \dfrac{3ef^2 - c}{b - 3e^2f}$. В «Алгебре» этот вопрос рассматривается в § 151.

В § 38 Эйлер говорит, что из этих трех правил ни одно не будет выполнено, если и b, и c равны нулю. В этих случаях он предлагает опытным путем найти одно частное решение, с помощью которого далее следует искать другие. Такого рода примеры Эйлер рассматривает в § 152—159 второй части «Алгебры», применяя этот метод, новый по сравнению с предложенным Ферма. В данном же фрагменте он ограничивается указанным замечанием.

Кроме того, здесь он упоминает также другой особый случай, когда подкоренное выражение делится на квадрат. Тогда полагается

$$\sqrt[3]{(x + a)^2(bx + c)} = (x + a)y,$$

откуда

$$bx + c = xy^3 + ay^3, \qquad x = \frac{ay^3 - c}{b - y^3}.$$

§ 39—42 посвящены приведению корня 4-й степени, когда подкоренное выражение есть полином 2-й степени от x. Это приведение производится путем двух последовательных приведений (сначала требуется, чтобы подкоренное выражение стало квадратом, а затем корень квадратный из него в свою очередь превращается в квадрат). В § 39 замечено, что такое приведение допускают лишь формулы, в которые неизвестная входит не выше, чем во 2-й степени (при этом разумеется, что фигурирует только одна неизвестная).

Первый пример рассматривается в § 40 и 41: требуется привести к 4-й степени выражение

$$ax^2 + bx - bd - ad^2 + e^2.$$

Сначала оно должно стать квадратом, для чего Эйлер ссылается на отсутствующий § 16 и применяет метод, изложенный в этом параграфе. Он полагает

$$ax^2 + bx + bd - ad^2 + e^2 = \left[e + (x + d)y\right]^2,$$

откуда легко видеть (здесь сделана ссылка на § 17), что

$$x = \frac{dy^2 + 2ey + ad - b}{a - y^2}$$

и

$$\sqrt{ax^2 + bx + bd - ad^2 + e^2} = \frac{ey^2 + 2ady - by + a}{a - y^2};$$

последнее выражение в свою очередь должно быть сведено к квадрату. Эта задача решается в § 41: прежде всего выражение

$$ey^2 + 2ady - by + ae$$

умножается и делится на $a - y^2$; тогда получается, что к квадрату должно быть сведено выражение

$$-ey^4 - 2ady^3 + 2a^2dy + a^2e + by^3 - aby.$$

Эйлер утверждает, что это возможно, если e^2 есть 4-я степень, и полагает $e^2 = f^4$. Отсюда делается вывод, что первоначальное выражение может быть сведено к 4-й степени, если оно имеет вид

$$ax^2 + bx + bd - ad^2 + f^4.$$

В § 42 рассматривается второй случай (опять со ссылкой на § 16):

$$a + bx + (bd - ad^2 + e^2)x^2$$

должно стать биквадратом. Как и в § 40, оно сначала сводится к квадрату. При этом, используя результат § 16, Эйлер получает

$$x = \frac{a - y^2}{ey + dy^2 - b + ad},$$

$$\sqrt{a + bx + (bd - ad^2 + e^2)x^2} = \frac{2ady - by + ac}{ey + dy^2 - b + ad}.$$

Это выражение опять должно быть сведено к квадрату.

Рассуждая аналогично § 41, Эйлер приходит к заключению: чтобы данное приведение имело место, необходимо, чтобы в получающемся при этом выражении отсутствовал член, содержащий y^2.

§ 43 и 44 посвящены случаям, когда известно одно значение, при котором иррациональность уничтожается, но нахождение других представляет затруднения. Эйлер предлагает избегать этих затруднений подстановкой $x = \frac{my + n}{y + e}$ и приводит пример (§ 44): «Пусть требуется свести к квадрату

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,$$

причем один случай такого приведения известен (при $x = m$). Подставляя $x = \frac{my + n}{y + e}$, можно получить выражение, которое сводится к квадрату, если

$$a + bm + cm^2 + dm^3 + em^4$$

равно квадрату, что выполнено по условию».

В § 45 начинается рассмотрение нового вопроса. До сих пор, говорит Эйлер, давалась одна формула, для которой определяется неизвестная, приводящая ее к рациональности. Теперь же ищется величина неизвестной, уничтожающая иррациональность у более чем одной формулы.

Сначала (§ 46) рассматривается вопрос об одновременном приведении к квадрату двух линейных функций от одной неизвестной: $ax + b$, $cx + d$. Для этого полагается $ax + b = y^2$, откуда $x = \frac{y^2 - b}{a}$, а следовательно,

$$cx + d = \frac{cy^2 - bc + ad}{a}.$$

Теперь квадратом должно стать выражение

$$acy^2 - abc + a^2d,$$

а каким образом это может быть сделано и в каких случаях, ясно из § 16.

В § 47 и 48 речь идет об одновременном приведении к квадрату трех выражений $ax + b$, $cx + d$, $ex + f$. Здесь используются рассуждения предыдущего параграфа, а также отсутствующего § 16.

На этом рукопись обрывается. Относительно того, когда, с какой целью она была написана и каково содержание отсутствующих параграфов, можно высказать несколько предположений.

1. Из текста рукописи следует, что в отсутствующей части (§ 1—31) шла, в частности, речь о решении уравнения $\sqrt{ax^2 + bx + c} = y$. При этом рассматривались случаи: а) $a = f^2$; б) $c = bd - ad^2 + e^2$. В последнем из них подкоренное выражение приравнивалось $[e + (x + d)y]^2$ и отсюда находилось

$$x = \frac{dy^2 + 2ey + ad - b}{a - y^2},$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + bd - ad^2 + e^2} = \frac{ey^2 + 2ady - by + a}{a - y^2}.$$

2. Ориентировочно можно предположить, что этот отрывок есть часть первоначального наброска «Алгебры», задуманного более широко, чем осуществленный вариант.

3. Время написания можно отнести к 1735—1740 гг., так как почерк Эйлера в этой рукописи тот же, что и в записной книжке № 131.

III. К разделу законченных фрагментов следует также отнести записи на л. 12—12 об., озаглавленные «Решения арифметических задач, предложенных де Билли». Эти задачи были, очевидно, опубликованы в труде Ж. де Билли.

Записи относятся к решению шести задач, но ход решения излагается лишь для первой из них.

Задача I состоит в определении x, которое обращало бы выражение $x^4 - x^3 - x$ в квадрат.

Эйлер приводит решение этой задачи. Вначале предполагается

$$x^4 - x^3 - x = \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)^2.$$

Из решения этого уравнения получается значение $x = -4$. Далее $x^4 - x^3 - x$ предполагается равным $\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\right)^2$, откуда получается

$a = -\frac{1}{72}$. Наконец, полагая $x = y - 4$, Эйлер приходит к значению $y = \frac{2444}{287}$ и, наконец, к $x = \frac{1296}{287}$, что удовлетворяет условию задачи (при подстановке в выражение $x^4 - x^3 - x$ получается $\frac{36^2 \cdot 40879^2}{287^4}$).

В задачах II и III приводятся только условия

$$x^4 + x^3 - x = \square, \qquad x^4 + x^3 + x = \square$$

и делается замечание: «Решаются сходным образом».

Для остальных трех задач после формулировки приводится только окончательное решение, ход же рассуждения остается неизвестным. Ниже изложено содержание этих записей.

«Задача IV. Пусть даны числа a, ab, ab^2, найти число x, чтобы $x^2 + ax$, $x^2 + abx$, $x^2 + ab^2x$ были бы квадратами».

Полагая $y = \frac{1}{x}$, Эйлер приходит к уравнениям

$$1 + ay = \square,\ 1 + aby = \square, \qquad 1 + ab^2y = \square$$

и дает

$$y = \frac{-8(a + ab - ab^2)(a - ab + ab^2)(ab^2 + ab - a)}{(a^2 + a^2b^2 + a^2b^4 - 2a^2b - 2a^2b^2 - 2a^2b^3)^2}.$$

Отсюда

$$x = \frac{a(1 + b^2 + b^4 - 2b - 2b^2 - 2b^3)^2}{8(b^2 - b - 1)(b^2 - b + 1)(b^2 + b - 1)}$$

или

$$x = \frac{a(1 + b + b^2)^2(b^2 - 3b + 1)^2}{8(b^2 - b - 1)(b^2 - b + 1)(b^2 + b - 1)}.$$

Для частного случая $b = 2$ имеем $x = \frac{48a}{120}$. (При подстановке в исходные уравнения это значение дает $x^2 + ax = \frac{7^2 \cdot 13^2 \cdot a^2}{120^2}$, $x^2 + abx = \frac{7^2 \cdot 17^2 \cdot a^2}{120^2}$, $x^2 + ab^2x = \frac{7^2 \cdot 23^2 \cdot a^2}{120^2}$).

«Задача V. Пусть три числа, находящихся в гармонической пропорции, суть $a^2 - ab$, $a^2 - b^2$, $a^2 + ab$. Найти число x, чтобы $x^2 + (a^2 - ab)x = \square$, $x^2 + (a^2 - b^2)x = \square$, $x^2 + (a^2 + ab)x = \square$».

Приводится ответ:

$$x = \frac{(b^4 + 6a^2b^2 - 3a^4)^2}{8(b^2 + 2ab - a^2)(a^2 + b^2)(a^2 + 2ab - b^2)}.$$

Для частного случая $a = 2$, $b = 1$ имеем $x = \frac{529}{280}$.

«Задача VI. Пусть три числа, находящихся в арифметической пропорции, суть $a - b$, a, $a + b$. Найти число x, чтобы было $x^2 + (a - b)x = \square$, $x^2 + ax = \square$, $x^2 + (a + b)x = \square$».

Дается ответ:

$$x = \frac{(4b^2 - 3a^2)^2}{8\cdot(2b - a)\cdot(2b + a)}.$$

Для частного случая $a = 3$, $b = 2$ имеем $x = \frac{121}{168}$.

IV. К законченным заметкам, не опубликованным ранее, относится задача (л. 14 об.): «Найти прямоугольный треугольник в рациональных числах, чтобы как гипотенуза минус площадь, так и один из катетов минус площадь образовывали бы квадраты, или (в обозначениях Эйлера):

$$AB - \frac{1}{2}AC \cdot BC = \square,$$

$$AC - \frac{1}{2}AC \cdot BC = \square,$$

где A, B и C — вершины прямоугольного треугольника». Подобные задачи, строящиеся на различных соотношениях сторон прямоугольного треугольника и его площади, очень часто встречаются в теоретико-числовой литературе до Эйлера. Они ставились и решались Диофантом, Баше, Билли, Озанамом и др. [90, 148].

Данная задача была предложена и решалась Ферма [121]. В опубликованной работе Эйлера (E167) есть сходная задача, которая в приведенных выше обозначениях может быть сформулирована так: «Найти прямоугольный треугольник ABC, для которого $AC - \frac{1}{2}AC \cdot BC = \square$, $BC - \frac{1}{2}AC \cdot BC = \square$». Но данная задача среди опубликованных не встречается.

После формулировки задачи и чертежа Эйлер приводит решение в общем виде:

$$AB = \frac{p^2 + 1}{p + m^2(p^2 + 1)}, \quad AC = \frac{p^2 - 1}{p + m^2(p^2 - 1)}, \quad BC = \frac{2p}{p + m^2(p^2 - 1)},$$

причем в этих формулах следует брать либо $p = \frac{m^2}{2}$, либо $p = \frac{m^{16} + 12m^8 + 16}{4m^{14} + 8m^6}$. Например, при $m = 2$ $AB = \frac{5}{14}$, $AC = \frac{3}{14}$, $BC = \frac{4}{14}$, тогда площадь $= \frac{3}{98}$, AB – площадь $= \left(\frac{4}{7}\right)^2$, AC – площадь $= \left(\frac{3}{7}\right)^2$. При $m = 4$, $p = 8$ $AB = \frac{65}{1016}$, $AC = \frac{63}{1016}$, $BC = \frac{16}{1016}$, отсюда площадь $= \frac{63}{8\ 127^2}$. При подстановке этих значений получается: AB – площадь $= \frac{32^2}{127^2}$, AC – площадь $= \frac{63^2}{127^2}$. При $m = 1$, $p = \frac{29}{12}$ $AB = \frac{985}{1045}$, $AC = \frac{697}{1045}$, $BC = \frac{696}{1045}$. Далее оказывается: площадь $= \frac{697\,348}{1045^2}$, AB – площадь $= \frac{887^2}{1045^2}$, AC – площадь $=$ $= \frac{697^2}{1045^2}$.

V. На этом же листе (л. 14) находится задача: «Найти бесчисленные прямоугольные треугольники в рациональных числах, площади которых были бы равны между собой». Эйлер дает следующее решение. Пусть для одного треугольника гипотенуза $= a(b^2 + 1)$, для другого треугольника гипотенуза $= n(p^2 + 1)$, катеты $= \begin{cases} a(b^2 - 1), \\ 2ab \end{cases}$ и $\begin{cases} n(p^2 - 1), \\ 2np \end{cases}$. Тогда для решения задачи берется

$$n = \frac{8ab^2(b^2 - 1)^2}{(b^2 + 1)(b^4 - 6b^2 + 1)}, \qquad p = \frac{(b^2 + 1)^2}{4b(b^2 - 1)}.$$

VI. К рассматриваемой группе рукописей можно также отнести решение находящейся на л. 9 задачи: «Найти два числа, из которых каждое минус их произведение дает квадрат». Если искомые числа обозначить $\frac{q}{n}$, $\frac{r}{n}$, то условие задачи примет вид

$$nq - qr = a^2, \qquad nr - qr = b^2.$$

Произведя ряд преобразований над n, Эйлер получает, что требование задачи выполняется при значении

$$n = \frac{(q + r)(q^2 - 6qr + r^2)}{(q - r)^2}.$$

Действительно, первое выражение при этом оказывается равным $\frac{q^2(q + 3r)^2}{(q - r)^2}$, второе $\frac{r^2(r + 3q)^2}{(q - r)^2}$.

VII. Сюда относится и одна из задач, находящихся в другом томе рукописей (№ 155, л. 426 об.). Под общим заголовком* «Решение некоторых вопросов из книги VIII „Алгебры" г-на Озанама» [148] даны три задачи, из которых решенной можно считать вторую:

$$x^2 + xy = \square, \qquad y^2 + xy = \square.$$

Для нее приводится решение:

$$y = p(1 - n^2)^2, \qquad x = 4pn^2.$$

VIII. Наконец, к этой же группе можно отнести и находящиеся на л. 9—9 об. (№ 263) отрывки, которые также не относятся к напечатан-

* Заголовок приведен в русском переводе.

ным работам. В них рассматривается вопрос о нахождении значения неизвестной, при котором полином 3-й степени обращается в квадрат. При этом получается результат, аналогичный тому, к которому Эйлер приходит в отношении полинома 2-й степени: если известен один случай, в котором полином 3-й степени обращается в квадрат, то из него при помощи приводимой формулы оказывается возможным получить другие значения, для которых выполнено то же условие.

Хотя численные примеры подтверждают правильность следующих результатов, однако ход рассуждения, которым Эйлер пришел к ним, остается совершенно неизвестным.

а) «Если $ax^3 + bx^2 + 2cdx + d^2$ есть квадрат в случае, когда $x = q$, то оно будет квадратом также в случае

$$x = \frac{2d^2 + 2cdq + 2d\sqrt{aq^3 + bq^2 + 2cdq + q^2}}{aq^2}».$$

б) «Если $ay^3 + by^2 + cy + d$ является квадратом в случае $y = p$, то оно будет квадратом также в случае

$$y = \frac{a^2p^4 - 2acp^2 - 8adp + c^2 - 4bd}{4a^2p^3 + 4abp^2 + 4acp + 4ad}».$$

ЗАКОНЧЕННЫЕ ФРАГМЕНТЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ОПУБЛИКОВАННЫМ РАБОТАМ

Здесь нужно упомянуть отрывочные заметки, находящиеся в записной книжке № 263, л. 11—11 об., 12—12 об., а также в № 177, л. 3 об. и 4—4 об. Все они относятся к уже названной статье E29; их содержание также воспроизводится в переписке Эйлера [89, т. 1, с. 37].

Прежде всего (л. 11) формулируется уже встречавшийся в рукописи результат: «Если $ax^2 + bx + c$ есть квадрат в случае $x = m$, то оно также становится квадратом в случае $x = m\sqrt{at^2 + 1} + \frac{b\sqrt{at^2 + 1} - b}{2a} + t\sqrt{am^2 + bm + c}$, если вместо t берется такое число, чтобы $at^2 + 1$ сделалось квадратом, и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ становится равным $atm + \frac{bt}{2} + \sqrt{at^2 + 1}\sqrt{am^2 + bm + c}$; следовательно, величины, которые должны быть подставлены вместо x, получатся (если положить $\sqrt{at^2 + 1} = s$):

1) m;

2) $sm + \frac{bs - b}{2} + t\sqrt{am^2 + bm + c}$;

3) $-m + 2s^2m + bt^2 + 2st\sqrt{am^2 + bm + c}$».

На л. 12 об. даются значения, получаемые самой величиной $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Кроме того, на л. 11 приводятся три примера, иллюстрирующих сформулированную теорему. Например, один их них: «Найти значения x, при которых $2x^2 + 1$ станет квадратом; искомый ряд значений: 0, 2, 12, 70, 408 и т. д.».

Л. 11 об.—12 посвящены методу рационализации выражения вида $\sqrt{ax^2 + b}$, который Эйлер называет методом Пелля. Об этом методе идет речь в уже названной статье и рассмотренной ранее рукописи (№ 177, л. 1—2). Здесь же под общим заголовком* «Примеры на метод Пелля» приведены три примера применения этого метода.

НЕЗАКОНЧЕННЫЕ ОТРЫВКИ

К последней группе рукописей были отнесены те, в которых задача ставится, но остается нерешенной. Она в свою очередь может быть разделена на два раздела: 1) опубликованные отрывки; 2) отрывки, относящиеся к опубликованным работам.

1. Сюда относится поставленная на л. 1 (№ 263) задача, которая, как явствует из заголовка, была предложена Ж. де Билли. Она формулируется следующим образом: «Найти прямоугольный треугольник, в котором удвоенная площадь, будучи вычтена из отдельных сторон, составляет квадраты».

Решение начато несколько раз, но не закончено. Среди опубликованных работ Эйлера эта задача не встречается.

Кроме того, начата, но не кончена задача (№ 180, л. 6): «Найти четыре числа, чтобы сумма двух каких-нибудь была квадратом».

2. К отрывкам, относящимся к напечатанным работам, принадлежат находящиеся на л. 5 об. № 158, л. 1—7 № 263 попытки решения двух задач.

1) «$2n^4 - 1 = \square$». Эта задача решалась Эйлером не один раз, в частности в «Алгебре» (§ 140).

2) «Найти два числа, сумма которых есть квадрат и сумма квадратов — биквадрат». Эта задача поставлена Ферма и решалась Лейбницем. Эйлер приводит ее решение в нескольких мемуарах.

---

* Заголовок приведен в русском переводе.

ЗАМЕТКИ ПО ДИОФАНТОВУ АНАЛИЗУ В ЗАПИСНЫХ КНИЖКАХ ЭЙЛЕРА

Рассмотрим содержание заметок из записных книжек, касающихся диофантова анализа.

Поскольку такое большое внимание было уделено Эйлером уравнениям Диофанта в опубликованных мемуарах, неудивительно, что и в записных книжках он возвращается к вопросам диофантова анализа чрезвычайно часто. Можно сказать, что из всех заметок теоретико-числового содержания примерно половина, т. е. около 300 записей, относится к этому разделу. Все эти записи составляют 10 рассмотренных далее разделов.*

МНОГОУГОЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Определение многоугольного числа дано впервые во II в. до н. э. Гипсиклом Александрийским. Он называет n-м m-угольным числом (P_m^n) сумму n членов арифметической прогрессии, первый член которой есть 1, а разность $m-2$, т. е.

$$P_m^n = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}.$$

Название связано с геометрической интерпретацией.

Предшественники Эйлера, начиная с глубокой древности, проявляли к теории многоугольных чисел постоянный интерес. Ей посвящали свои работы Никомах Геразский (I в.), Диофант (III—IV вв.), Боэций (ок. 480—524), Кардано (1501—1576), Штифель (1487—1567), Баше де Мезириак (1587—1638), Ферма (1601—1665), Декарт (1596—1650), Валлис (1616—1703). Поэтому внимание, проявленное Эйлером к этой теории,** не вызывает удивления. Среди вопросов, рассматривавшихся в работах Эйлера, можно назвать доказательство теоремы Ферма о том, что никакое треугольное число, кроме единицы, не может быть кубом, исследование многоугольных чисел, являющихся в то же время квадратами, и др. В записных книжках № 131, 132, 133, 138 многоугольным числам посвящен ряд заметок, из которых опубликованы в «Opera omnia» [108] только записи из книжки № 138.

В записной книжке № 131 (л. 21—21 об.) решается следующая задача: «Определить, сколько раз данное число A содержится среди всех много-

* В качестве образца классификации использовано подразделение материала по неопределенному анализу, данное во II томе универсальной монографии Диксона [88].

** Задачи о многоугольных числах решаются в работах E29, E98, E256, E387, E388, E394, E445, E542, E558, E566, E586, E739, E806.

угольных чисел». Ей предпослан заголовок «Задача Баше, решенная другим способом». Приведя общую формулу для многоугольного числа, Эйлер сводит вопрос к определению целых чисел m и n, для которых

$$\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}=A\ .$$

Из последнего уравнения получается

$$m=2-\frac{2A}{n}+\frac{2A-2}{n-1}$$

и дается следующее правило: пишутся в ряд все делители числа 24, затем делители числа $2A-2$; из первого ряда выделяются те числа, которые на единицу больше какого-либо числа из второго ряда; они и дадут те значения n, которые нужно подставить в выражение для m. Отсюда: 1) всякое число A содержится в ряду двуугольных чисел; 2) число A всегда является вторым A-угольным числом. В качестве примера Эйлер рассматривает число 105 и находит

$$105=P_2^{105}=P_3^{14}=P_{12}^{3}=P_{105}^{2}\ .$$

Заметка относится, очевидно, к 1736—1737 гг.; только в 1753 г., т. е. почти через 16 лет, в письме к Гольдбаху [138, с. 372—375] Эйлер сообщил решение этой задачи.

В записной книжке № 132 (л. 110) Эйлер исследует вопрос о нахождении пятиугольных чисел, которые в то же время являются квадратами. Решена эта задача в «Алгебре» (§ 88), но в записной книжке решение проведено другим способом; в то время как в «Алгебре» задача решается непосредственно, здесь она рассматривается как частный случай задачи

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\square.$$

Вопрос сводится к отысканию решения неопределенного уравнения $6x^2-2x=\square$: так как пятиугольное число выражается формулой $\frac{3x^2-x}{2}$ и по условию оно должно быть квадратом, то и $6x^2-2$ должно быть квадратом. Для решения уравнения $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\square$ Эйлер всегда исходит из одного известного решения и получает при этом рекуррентные формулы для определения последующих решений. Применяя такой метод в данном случае и обозначая буквами $a, b, c, \ldots$ ряд значений для x, буквами $A, B, C, \ldots$ ряд значений для $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, Эйлер делает вывод: если при $x=a$

$$\sqrt{\alpha a^2+\beta a+\gamma}=A,$$

то другие решения уравнения $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\square$ даются формулами:

$$b=(\alpha m^2+n^2)a+\beta m^2+2mnA,$$
$$B=2\alpha mna+\beta mn+(\alpha m^2+n^2)A,$$

$$c = (\alpha m^2 + n^2)b + \beta m^2 + 2mnB,$$
$$C = 2\alpha mnb + \beta mn + (\alpha m^2 + n^2)B$$

и т. д., где $n = \sqrt{\alpha m^2 + 1}$, т. е. m, n являются решениями уравнения Пелля. Таким образом, оказывается возможным по двум последовательным решениям определить третье. После ряда преобразований выражения для c и C принимают вид

$$c = 2(2n - 1)b - a + 2\beta m^2, \qquad C = 2(2n^2 - 1)B - A.$$

Отсюда, находя для данного случая $n = 5$, $m = 2$, Эйлер получает следующие частные и общее решение:

x	1	81	7921	$abc = 98b - a - 15$
$\sqrt{6x^2 - 2x}$	2	198	19402	$ABC = 98B - A$

Как общая формула, так и третье частное решение в «Алгебре» отсутствуют.

Эта же записная книжка (№ 132) содержит на л. 149 об. теорему, в которой рассматривается часто фигурирующее в переписке Эйлера с Гольдбахом выражение $4mn - m - n$, для которого здесь утверждается, что оно не может ни при каких m и n стать треугольным числом. Доказательство ведется от противного. Пусть $4mn - m - n = \frac{p^2 - p}{2}$. Тогда $32mn - 8m - 8n = 4p^2 - 4p$, отсюда $32mn - 8m - 8n + 1 = (2p - 1)^2$. Но $32mn - 8m - 8n + 2 = 2(4m - 1)(4n - 1)$. Таким образом, $2(4m - 1)(4n - 1) = 1 + (2p - 1)^2$, но в то же время сумма этих двух квадратов не делится на $4m - 1$, так как по доказанной Эйлером теореме $a^2 + b^2$ делится на число вида $4m - 1$ только в том случае, если a и b делятся на это число; в данном же примере $a = 2p - 1$, $b = 1$. Поэтому полученное равенство невозможно, и теорема доказана. Заметка относится к письму Эйлера к Гольдбаху от 8 мая 1742 г., где речь идет о данной теореме, но доказательство ее отсутствует.

В записной книжке № 133 (л. 19) ставится задача: «Найти все числа, которые могут быть представлены двумя способами в виде суммы двух треугольных чисел». Эйлер утверждает следующее: «Если A есть сумма двух неравных треугольных чисел, то число $n^2 + (1 + 4n^2)A$ представляется в виде суммы двух треугольных чисел двумя способами». Далее приводится ряд решений для значений A = 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 21, 22. Кроме этого, здесь же Эйлер замечает, что числа 81 и 106 представляются тремя способами в виде суммы двух треугольных чисел, а именно: $81 = 78 + 3 = 66 + 15 = 45 + 36$; $106 = 105 + 1 = 91 + 15 = 78 + 28$.

Ряд заметок посвящен доказательству теоремы Ферма о представимости натуральных чисел в виде сумм многоугольных чисел: «Всякое число есть либо треугольное, либо сумма двух или трех треугольных; всякое число есть либо квадратное, либо сумма двух, трех или четырех квадратных чисел и аналогично для пяти-, шести- и вообще n-угольных чисел». Эту теорему, которую доказал в общем виде Коши в 1815 г., Эйлер доказал для случая квадратов, носящего обычно название теоремы Баше. Вопросы, связанные с доказательством, на протяжении 20 лет (с 1730 по 1751 г.) постоянно встречаются в переписке Эйлера с Гольдбахом. Теореме Баше посвящены также мемуары E242, E445. В записях 28 заметок, касающихся этого вопроса, распределяются между книжками № 131, 132, 133, 134, 138, т. е. приходятся на годы с 1736 по 1757 (они чаще всего отражают предмет переписки с Гольдбахом), а затем с 1767 по 1775.

На л. 61 об.—62 книжки № 131 Эйлер высказывает утверждение: «Всякое число вида $8n - 1$ может быть разложено на четыре квадрата» — и дает правило такого разложения, иллюстрируя его примерами. Однако можно найти примеры, опровергающие это утверждение, что, очевидно, было замечено самим Эйлером, так как в опубликованных работах оно не встречается.

На л. 62—62 об. книжки № 131 Эйлер рассматривает последовательно вопрос о разложении чисел вида

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2),$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2),$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)$$

на сумму четырех квадратов. Утверждая каждый раз возможность такого разложения, он дает значения корней из этих квадратов и приходит для последнего случая к своей знаменитой формуле (см. мемуары E241, E610):

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = (ap + bq + cr + ds)^2 +$$

$$+ (bp - aq + dr + cs)^2 + (cp - dq - ar + bs)^2 + (dp + cq - br - as)^2.$$

Эта заметка интересна тем, что в ней отчетливо виден ход мысли Эйлера при выводе формулы, что уже не отразилось в опубликованных мемуарах (см. мемуары E241, E610, а также E787). При этом нужно отметить, что если впервые Эйлер сообщает полученные результаты Гольдбаху в 1748 г., то в записных книжках они появились значительно раньше (1736—1740 гг.).

На л. 116 об. этой же книжки Эйлер снова возвращается к рассматриваемому вопросу. Формулируется (без доказательства) теорема: «Если все простые числа могут быть разложены на четыре квадрата, то вместе с этим все вообще числа допускают такое разложение». Далее доказывается утверждение: «Если из четырех квадратов, на которые может быть разложено число p, два равны, то и число $p + 2$ может быть разложено на четыре квадрата» (если $p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, где $a = b$, то $p + 2 = (a + 1)^2 + (a - 1)^2 + c^2 + d^2$). Наконец, здесь же доказана теорема: «Всякое число вида $x^2 + x + 1$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $3x^2 + x + 1$ может быть разложено на четыре квадрата». Действительно,

$$x^2 + x + 1 = \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4},$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x + x^2\right)^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4},$$

$$3x^2 + x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

На л. 117 об. записной книжки № 131, а также в книжке № 132 (л. 82) Эйлер ставит и решает задачу: «Сумму четырех квадратов $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ представить в виде суммы четырех других квадратов $v^2 + x^2 + y^2 + z^2$». Предлагается подстановка:

$$v = a - pu, \quad x = b - qu, \quad y = c - ru, \quad z = d - su.$$

Отсюда

$$0 = 2ap - p^2u + 2bq - q^2u + 2cr - r^2u + 2ds - s^2u,$$

$$u = \frac{2ap + 2bq + 2cr + 2ds}{p^2 + q^2 + r^2 + s^2}.$$

В заметке из записной книжки № 132 (л. 82—82 об.) предлагается другая задача: «Найти в наиболее общем виде четыре квадрата, сумма которых $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ есть квадрат». Решение проведено с помощью подстановки:

$$a = n^2 + p^2 - q^2 - r^2 - s^2 + 2p(q + r + s + 2n),$$

$$b = n^2 - p^2 + q^2 - r^2 - s^2 + 2q(p + r + s + 2n),$$

$$c = n^2 - p^2 - q^2 + r^2 - s^2 + 2r(p + q + s + 2n),$$

$$d = n^2 - p^2 - q^2 - r^2 + s^2 + 2s(p + q + r + 2n).$$

Тогда

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 2n^2 + 2p^2 + 2q^2 + 2r^2 + 2s^2 + 2n(p + q + r + s).$$

Если рассматривать половины взятых значений для a, b, c, d, то

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = n^2 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + n(p + q + r + s).$$

Полагая $n = -p - q - r - s$, Эйлер получает:

$$a = pq + pr + qr - s^2, \qquad b = pq + ps + qs - r^2,$$

$$c = pr + ps + rs - q^2, \qquad d = qr + qs + rs - p^2,$$

и тогда

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = p^2 + q^2 + r^2 + s^2.$$

На л. 99 об.—102 записной книжки № 132 сформулированы и доказаны следующие две теоремы:

1) «Если $3n + 1$ есть простое число, то $3n + 1 + 2p^2$ может быть разложено на четыре квадрата». Для доказательства Эйлер ссылается на полученный им ранее результат: «Если $3n + 1$ есть простое число, то $3n + 1 = 3x^2 + y^2$». Тогда

$$3n + 1 + 2p^2 = x^2 + y^2 + 2(p^2 + x^2) = x^2 + y^2 + (x + p)^2 + (x - p)^2.$$

2) «Если $3n + 1$ есть простое число, то выражение $3n + 1 + 2(f^2 + fq + q^2)p^2$ может быть разложено на четыре квадрата.

Доказательство. Если $3n + 1$ есть простое число, то $3n + 1 = 3a^2 + b^2$; тогда

$$3n + 1 + 2(f^2 + fq + q^2)p^2 = [a + (f + q)p]^2 + (a - fp)^2 + (a - qp)^2 + b^2\text{».}$$

Обе эти записи относятся, очевидно, к 1741—1742 гг.

На л. 102 этой же книжки приводится следующая теорема: «Если всякое число n разложимо на четыре квадрата, то в уравнении

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - n)x^2 - cx + d = 0$$

буквы a, c, d могут быть выбраны так, чтобы все корни уравнения были рациональны; и обратно, если a, c, d могут быть выбраны так, чтобы все корни, скажем $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, были рациональны, тогда $2n = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, откуда

$$4n = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 + (\gamma + \delta)^2 + (\gamma - \delta)^2,$$

и потому

$$n = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma + \delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma - \delta}{2}\right)^2,$$

т. е. n есть сумма четырех квадратов».

В записной книжке № 132 на л. 142 об. формулируется и доказывается теорема: «Если дано число a, не разложимое на четыре квадрата, которое, однако, является делителем числа $P = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$, то существует число $b < a$, также не разложимое на четыре квадрата, которое является делителем суммы четырех квадратов $Q < P$». После доказательства теоремы было сделано заключение, в котором на основании этого доказательства сделан вывод: «Нет числа, не разложимого на четыре квадрата, которое является делителем числа, разложимого на четыре квадрата» (т. е. всякое число, являющееся делителем суммы четырех квадратов, само есть сумма четырех квадратов). Эта теорема и ее доказательство полностью совпадают с теоремой 4 из мемуара Лагранжа [132], на которой и основывается доказательство теоремы Баше, приведенное в этой работе. В мемуаре теорема сформулирована следующим образом: «Если N является делителем какой-либо суммы четырех квадратов, т. е. формы $p^2+q^2+r^2+s^2$, в которой отдельные квадраты не делятся на N, то N есть точно сумма четырех квадратов». В несколько измененном виде эта же теорема фигурирует и в «Opera omnia»[108, сер. I, т. 1, с. 197—201], где также доказывается теорема Баше. Если сопоставить даты написания этих работ, то оказывается, что мемуар E445 относится к 1773 г., доказательство Лагранжа (1772 г.) [132] — примерно к тому же времени, а заметка из записной книжки № 132 — к 1740—1744 гг.

Таким образом, можно сделать вывод, что доказательство этой важной теоремы Эйлер имел уже в 1750-х гг., т. е. почти за 30 лет до его опубликования. В то же время полученный результат не привел его к доказательству теоремы Баше, но попытка в этом направлении была сделана, о чем свидетельствует запись на той же странице: «Вообще нет чисел, которые не разложимы на четыре квадрата». Доказательство, начатое здесь с помощью метода от противного, остается незаконченным. К своей теореме Эйлер возвращается в 1772 г., после опубликования доказательства теоремы Баше, предложенного Лагранжем; об этом свидетельствует упомянутая заметка из «Новых мемуаров» Берлинской академии, где вначале было приведено доказательство Лагранжа [134]. Эйлер вновь идет тем же путем, что и в записи из книжки № 132, т. е. прежде всего возобновляет приведенное здесь доказательство формулированной теоремы, а затем на ее основе получает доказательство теоремы Баше, более простое, чем у Лагранжа.

Кроме рассмотренных записей, к этому разделу относится еще ряд заметок из книжек № 132—134, представляющих собой черновики писем Эйлера к Гольдбаху и не содержащих нового по сравнению с этими письмами.

УРАВНЕНИЕ $ax^2+bx+c=\square$; УРАВНЕНИЕ ПЕЛЛЯ

Одним из наиболее существенных вопросов диофантова анализа является решение в целых числах уравнений $ax^2+bx+c=\square$ и $Dx^2+1=y^2$ (при $D>0$, $D\neq\square$), последнее из которых носит название уравнения Пелля. Этим задачам на протяжении развития теории чисел посвящено большое число работ. Объясняется это тем, что решение многих других задач диофантова анализа сводится в конечном счете к решению указанных уравнений. Особый интерес всегда вызывало уравнение Пелля (получившее свое название от Эйлера, ошибочно приписавшего его решение Пеллю). Сформулировал задачу в окончательном виде Ферма в 1657 г. Он же утверждал, что если D есть любое число, не равное квадрату, то существует бесконечное множество целых решений уравнения $y^2 - Dx^2 = 1$. Метод решения (сначала в рациональных, а затем и в целых числах) этого уравнения был предложен Брункером и Валлисом [154].

Эйлер исследует уравнение Пелля в нескольких своих мемуарах (E29, E279, E323, E559) и не раз возвращается к нему в переписке с Гольдбахом [138]. При этом он всегда исходит из одного имеющегося решения и ставит цель найти при его помощи все остальные решения. Основной результат Эйлера для уравнения Пелля приведен в работе E323 (1765 г.), а именно дан метод решения уравнения $Dx^2 + 1 = y^2$, основанный на разложении в непрерывную дробь $\sqrt{D}$. На численных примерах Эйлер находит связь периодичности этой дроби с решением уравнения в целых числах, однако не доказывает, что она всегда периодична, т. е. что уравнение имеет решение при любом D. (Это было доказано в 1768 г. Лагранжем, что и завершило решение проблемы Пелля). Эйлер, кроме того, в своих работах привел таблицы наименьших решений уравнения Пелля: для всех $D \leqslant 68\ (\neq \square)$ — в мемуаре E29; для всех $D < 100\ (\neq \square)$ и $D = 103, 109, 113, 157, 367$ — в мемуаре E323.

В записных книжках имеется десять заметок, связанных с рассматриваемыми вопросами. Они распределяются между записными книжками № 131, 133, 134, 135, 138 и почти все относятся к опубликованным работам: это либо небольшие отрывки из этих работ, либо иллюстрирующие их примеры. Наибольшее число заметок приходится на время с 1736 по 1753 г.

Шесть заметок (записные книжки № 131, л. 54 об.—55; № 132, л. 109—109 об., 112—112 об., 247 об.—248; № 133, л. 134, 152 об., 148 об., 175 об.; № 135, л. 45) воспроизводят рассуждения из мемуара E29, с помощью которого находится решение в целых числах уравнения $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \square$.

Эйлер считает известным одно решение: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ есть квадрат в случае $x = a$ — и утверждает, что это выражение будет квадратом и при

$$x = \frac{\beta(\zeta - 1)}{2\alpha} + \zeta a + \lambda\sqrt{\alpha a^2 + \beta a + \gamma},$$

где $\zeta = \sqrt{\alpha\lambda^2 + 1}$ (т. е. ζ, λ суть решения уравнения Пелля). При этом дается общая формула, при помощи которой по двум предыдущим значениям находится каждое следующее его значение:

$$a, b, \ldots, A, B, 2\zeta B - A + \frac{\beta(\zeta - 1)}{2},$$

а также формула для определения последовательных значений для $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$:

$$p,\ q, \ldots,\ C,\ D,\ 2\zeta D-C.$$

Кроме того, в этих заметках Эйлер рассматривает примеры, не встречающиеся в опубликованных работах:

$$3x^2+2x+1=y^2\ (x=0,\ y=1;\ 6, 11;\ 88, 153;\ 1230, 1231, \ldots),$$

$$2x^2+2x=y^2\ (x=0,\ y=0;\ 1, 2;\ 8, 12;\ 49, 70;\ 288, 408, \ldots),$$

$$3x^2-66=y^2\left[x=\frac{5+\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{5-\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^n,\right.$$

$$\left.y=\frac{5\sqrt{3}+3}{2}(2+\sqrt{3})^n-\frac{5\sqrt{3}-3}{2}(2-\sqrt{3})^n\right] \text{ и др.}$$

В записной книжке № 133 (л. 30) Эйлер рассматривает задачу отыскания значения x, которое при данных a и b обратило бы выражение ax^2+b в квадрат.

Пусть $\sqrt{ap^2+1}=q$. Тогда решение уравнения в общем виде выражается с помощью формулы, выведенной Эйлером в мемуаре E279:

$$x=M(q+p\sqrt{a})^n-N(q-p\sqrt{a})^n.$$

Подставляя это значение x в данное уравнение, он получает:

$$ax^2+b=aM^2(q+p\sqrt{a})^{2n}-aN^2(q-p\sqrt{a})^{2n}-2aMN+b=\square.$$

Если положить $b=4aMN$, то отсюда

$$\sqrt{ax^2+b}=M\sqrt{a}(q+p\sqrt{a})^n+N\sqrt{a}(q-p\sqrt{a})^n.$$

Пусть известно значение $x=q$, для которого $\sqrt{ag^2+b}=h$.
Положив при этом $n=0$, Эйлер получает: $M-N=g$, $M+N=\frac{h}{\sqrt{a}}$, откуда

$$M=\frac{h+g\sqrt{a}}{2\sqrt{a}},\quad N=\frac{h-g\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}.$$

Следовательно,

$$x=\frac{h+g\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}(q+p\sqrt{a})^n-\frac{h-g\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}(q-p\sqrt{a})^n,$$

$$\sqrt{ax^2+b}=\frac{h+g\sqrt{a}}{a}(q+p\sqrt{a})^n+\frac{h-g\sqrt{a}}{a}(q-p\sqrt{a})^n.$$

ЗАДАЧИ О ТРЕУГОЛЬНИКАХ

Во многих работах Эйлер подобно другим математикам обращается к теоретико-числовым задачам, поставленным в геометрической форме. Чаще всего в них фигурирует треугольник, прямоугольный или произвольный, с целыми или рациональными сторонами, для которого заданы определенные соотношения между элементами. Среди таких задач можно, например, указать задачу отыскания чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = z^2$, т. е. задачу исследования прямоугольного треугольника с катетами x, y и гипотенузой z. Такого рода вопросам Эйлер посвящает много страниц своих записных книжек.

Одна из наиболее интересных проблем данного раздела: задача о нахождении двух положительных целых чисел, сумма которых есть квадрат, а сумма квадратов — биквадрат, — рассматривается в записных книжках № 131 (л. 60 об.), 132 (л. 76), 136 (л. 11), 140 (л. 64 об.). Задача впервые была поставлена Ферма в письме к Сен-Мартену и Френиклю от 31 мая 1643 г. в геометрической форме: «Найти прямоугольный треугольник, гипотенуза которого, равно как и сумма катетов, были бы полными квадратами». При этом Ферма высказал мысль, что наименьший треугольник такого вида есть треугольник с катетами: 4 565 486 027 761, 1 061 652 293 520. После Ферма решением этой задачи занимались Озанам, Лейбниц, а затем Эйлер и Лагранж. Эйлер возвращается к ней не раз в опубликованных трудах, называя ее то задачей Лейбница, то задачей Ферма: она решается в «Алгебре» (§ 240) и в мемуарах E560, E763, E769, E772, а также в [108]. В этих работах он дает решение задачи и подтверждает, что решение, предложенное Ферма, удовлетворяет условию. (Что это решение наименьшее положительное, доказал позднее Лагранж, который дал метод построения всех решений). Заметки из записных книжек воспроизводят рассуждение, известное по опубликованным работам; ищутся положительные числа a, b такие, что $a + b = c^2$, $a^2 + b^2 = d^4$. Сначала находится решение уравнения $a^2 + b^2 = \square$:

$$a = p^2 - q^2, \quad b = 2pq,$$

тогда

$$a^2 + b^2 = (p^2 + q^2)^2.$$

Затем решается задача: $p^2 + q^2 = \square$, для чего принимается $p = x^2 - y^2$, $q = 2xy$ и отсюда $a^2 + b^2 = (x^2 + y^2)^2$. После того как второе условие удовлетворено, ищутся x, y, удовлетворяющие также первому условию; подставляя полученные значения a, b, Эйлер приходит к уравнению

$$a + b = x^4 + 4x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 = \square$$

и утверждает, что решение его есть $x = 1469$, $y = 84$, а тогда $p = 2\,150\,905$, $q = 246\,792$, откуда $a = 4\,565\,486\,047\,761$, $b = 1\,061\,652\,293\,520$.

В третьей заметке Эйлер, как и в мемуаре E560, сводит задачу к новой: $2a^4 - b^4 = \square$.

Три записи (записная книжка № 132, л. 148 об.—149; № 140, л. 61—61 об.), из которых две не закончены, а последняя опубликована в «Opera omnia» [108, сер. I, т. 1, с. 250—252], посвящены задаче нахождения прямоугольных треугольников, имеющих равную площадь. Во второй заметке Эйлер предлагает три треугольника с равной площадью:

$$(88, \frac{57}{2}, \frac{185}{2}), \quad (\frac{152}{3}, \frac{99}{2}, \frac{425}{6}), \quad (\frac{132}{5}, \frac{95}{5}, \frac{493}{5}).$$

Несколько заметок касаются задачи: «Найти два прямоугольных треугольника, площади которых находятся между собой в данном отношении». Такого рода вопросы Эйлер рассматривает в мемуарах E466, E773 и в «Opera omnia» [108]. Последние записи взяты из записных книжек № 138 (л. 148 об.—149 об.) и 140 (л. 62, 72—72 об.). Кроме того, в записной книжке № 132 на л. 88 об. и 149 Эйлер также ставит эту задачу. Рассматривая прямоугольные треугольники с катетами $2ab$, a^2-b^2 и $2mn$, m^2-n^2, для которых площади соответственно равны $ab(a^2-b^2)$ и $mn(m^2-n^2)$, он требует сделать выражение $\frac{ab\,(a^2-b^2)}{mn\,(m^2-n^2)}$ равным данному числу f. В качестве решения предлагается:

$$a=(2f-1)\,(8f-1), \quad b=8f^2-20f-1;$$

$$m=4(f+1)\,(2f-1), \quad n=8f^2-20f-1.$$

В записной книжке № 132 (л. 146 об.) Эйлер решает задачу, не встречающуюся в опубликованных мемуарах: «Найти прямоугольный треугольник, в котором площадь плюс гипотенуза есть куб, а периметр равен квадрату». Пусть площадь треугольника есть A, гипотенуза z, катеты x, y, тогда $2A=xy$. Если $x=2$, то $y=A$, $z=\sqrt{A^2+4}$. По условию $z+A=$ $=p^2$; подставляя сюда значение z, имеем: $p^6-2Ap^3=4$, откуда $A=$ $=\frac{p^6-4}{2p^3}$. Периметр треугольника $x+y+z=p^3+2$, и по условию $p^3+2=$ $=\square$. При $p=q-1$ это условие принимает вид $q^3-3q^2+3q+1=\square$. Эйлер полагает $q^3-3q^2+3q+1=(1+\frac{3}{2}q)^2$, а отсюда $q=\frac{21}{4}$. Тогда определяются значения A, y, z, x, и задача, таким образом, решена.

На этом же листе решается другая задача: «Найти прямоугольный треугольник, у которого площадь в сумме с одним катетом образует куб, а периметр есть квадрат». Рассматривается треугольник с катетами $\frac{2a^2+2a}{a+1}$, $\frac{2a+1}{a+1}$ и гипотенузой $\frac{2a^2+2a+1}{a+1}$, площадь его есть $\frac{2a^2+a}{a+1}$. По условию $\frac{2a^2+a}{a+1}+\frac{2a+1}{a+1}=2a+1$ = кубу, а периметр $4a+2$ = квадрату. Следовательно, $2a+1=8p^6$, а отсюда

$$a=\frac{8p^6-1}{2}.$$

На л. 146 об.—147 поставлена следующая задача: «Найти прямоугольный треугольник, у которого периметр есть квадрат и, будучи сложен с площадью, образует куб».

Пусть катеты треугольника $2na$ и $n(a^2-1)$, гипотенуза $n(a^2+1)$, тогда площадь равна $n^2a(a^2-1)$, а периметр равен $2na^2+2na$. По условию $2na^2+2na=\square=a^2q^2$, отсюда $a=\dfrac{2n}{q^2-2n}$ и периметр $\dfrac{4n^2q^2}{(q^2-2n)^2}$. Следовательно, периметр + площадь равны кубу, т. е.:

$$\frac{2n^2q^2(2q^2-4n+4n^2-nq^2)}{(q^2-2n)^3}=\text{кубу}.$$

Это получится, если $n=1$ или $n=2$. Тогда должно быть: либо $2q$ = кубу, либо q = кубу.

На л. 147 ставится задача: «Найти прямоугольный треугольник, у которого периметр равен кубу и в сумме с площадью образует квадрат». Предлагается следующее численное решение: периметр = 64, стороны = $=\dfrac{16\,252}{225}, \dfrac{16\cdot 275}{225}, \dfrac{16\cdot 373}{225}$, а площадь $=\dfrac{512\cdot 77}{225}$.

Наконец, на л. 149 этой же книжки рассматривается еще одна, сходная с предыдущими, задача: найти прямоугольный треугольник $\left(\dfrac{p^2+q^2}{n}, \dfrac{p^2-q^2}{n}, \dfrac{2pq}{n}\right)$, площадь которого, увеличенная на данное число a, будет квадратом. По условию $pq(p^2-q^2)+n^2a=\square$. Если положить $p=qz^2$, то

$$q^4z^2(z^4-1)+n^2a=\square.$$

Пусть $n=mq^2z^2$. Тогда предыдущее условие примет вид z^4-1+ $+m^2az^2=\square$; положим это выражение равным $(z^2+v)^2=z^4+2vz^2+v^2$. Таким образом, получим $m^2az^2=2vz^2+v^2+1$ или $m^2a^2z^2=2avz^2+$ $+a(v^2+1)$. Если при этом $v=2at^2$, то отсюда

$$m^2a^2z^2=4a^2t^2z^2+a(4a^2t^4+1).$$

Положим, далее,

$$4a^2t^2z^2+a(4a^2t^4+1)=(2atz+x)^2.$$

Тогда

$$z=\frac{a(4a^2t^4+1)-x^2}{4atx}, \qquad maz=2atz+x,$$

$$m=2t+\frac{x}{az}=2t+\frac{4tx^2}{a(4a^2t^4+1)-x^2}=\frac{2at(4a^2t^4+1)+2tx^2}{a(4a^2t^4+1)-x^2}.$$

Следовательно,

$$n=\frac{2t[a(4a^2t^4+1)+x^2]}{a(4a^2t^4+1)-x^2}, \qquad p=\frac{a(4a^2t^4+1)-x^2}{4atx}, \qquad q=\frac{4atx}{a(4a^2t^4+1)-x^2}.$$

Таким образом, задача оказывается решенной.

Кроме ряда записей, являющихся черновиками к опубликованным работам, к данному отделу может быть отнесена также находящаяся в записной книжке № 134 (л. 191 об.) задача: «Найти треугольник, в котором прямые, делящие отдельные углы пополам, выражаются рационально». Решение этой же задачи, поставленной несколько более широко (требуется, чтобы, кроме биссектрис, и площадь была рациональной), опубликовано в 1813 г. П. Фусом.* В работах Эйлера подобная задача не обнаружена.

Обозначая стороны искомого треугольника a, b, c и применяя формулы для биссектрисы

$$l_{<ab} = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b},$$

Эйлер получает три условия:

$$ab(a+b+c)(a+b-c) = \square,$$

$$ac(a+b+c)(a-b+c) = \square,$$

$$bc(a+b+c)(-a+b+c) = \square.$$

Полагая

$$a = p(r^2 + pq),$$

$$b = q(r^2 + pq),$$

$$c = (p+q)(r^2 - pq),$$

он получает:

$$ab(a+b+c)(a+b-c) = 2^2p^2q^2r^2(r^2+pq)^2(p+q)^2 = \square,$$

$$ac(a+b+c)(a-b+c) = 2^2p^2r^2(r^2+pq)(p+q)^2(r^2-pq)(r^2-q^2),$$

$$bc(a+b+c)(-a+b+c) = 2^2q^2r^2(p+q)^2(r^2+pq)(r^2-pq)(r^2-p^2).$$

Для обращения в квадрат двух последних выражений Эйлер полагает

$$(r^2+pq)(r^2-pq)(r^2-q^2) = (r^2+pq)^2t^2.$$

Отсюда

$$r^2(r^2-p^2) - pq(r^2-q^2) = r^2t^2 + pqt^2, \quad p = \frac{r^2(r^2-q^2-t^2)}{q(r^2-q^2+t^2)}.$$

Придавая численные значения величинам, входящим в полученные выражения, Эйлер приводит пример искомого треугольника: $a = 14$,

---

* *Fuss P. N.* Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII-ème siècle. SPb., 1813.

$b = 25$, $c = 25$. Этот пример фигурирует и в вышеупомянутой работе Фуса. Кроме этого, даются еще два примера: $a = 646$, $b = 975$, $c = 975$; $a = 1369$, $b = 1183$, $c = 1914$.

ОТДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-Й СТЕПЕНИ

В записной книжке № 131 (л. 174 об.) Эйлер доказывает следующее утверждение: «Выражение $5a^2 + 2b^2$ ни при каких целых a, b не может быть квадратом». Доказательство ведется от противного методом «неопределенного спуска». Пусть $5a^2 + 2b^2 = \square$, тогда b должно делиться на 5, так как иначе левая часть была бы числом вида $5k \pm 2$, которое квадратом быть не может. Таким образом, $b = 5d$ и $5a^2 + 2 \cdot 25d^2 = \square$. Последнее справедливо лишь в случае $a = 5c$. После подстановки данное выражение будет иметь вид $5c^2 + 2d^2$, где $c < a$, $d < b$. Следовательно, если оно может стать квадратом в больших числах, то также может стать квадратом и в меньших, и это рассуждение можно неограниченно продолжить. Поскольку это в целых числах невозможно, утверждение доказано.

Сходного типа задача решается на л. 26 записной книжки № 135: выражение $mt^2 + nu^2$ сделать квадратом, если известно «$ma^2 + nb^2 = c$». Эйлер полагает $t = ax + rz$, $u = bx + sz$, а затем подстановкой этих выражений в $mt^2 + nu^2$ получает решение $t = mar^2 - 2nbrs - nas^2$ и $u = mbr^2 + 2mars - nbs^2$, для которого $\sqrt{mt^2 + nu^2} = c\,(mr^2 + ns^2)$.

Четыре заметки из записной книжки № 132 посвящены доказательству теорем о том, что выражения $3a^2 + 3b^2 + 7c^2$ и $2a^2 + 6b^2 + 21c^2$ не могут стать квадратами ни при каких целых значениях a, b, c. Обе теоремы сформулированы в письме Эйлера к Гольдбаху от 8 мая 1742 г. [138], однако доказательство их в письме отсутствует. Это доказательство мы находим в записной книжке среди подготовительных заметок к названному письму. На л. 147 доказывается первая теорема: $3a^2 + 3b^2 + 7c^2 \neq \square$.

Рассматриваются три возможности: 1) a, b четные; 2) одно из чисел a, b нечетно; 3) оба числа a, b нечетны. В первом случае $a^2 + b^2 = 4n$; если c четно, то $3\,(a^2 + b^2) + 7c^2 = 4n + 3$ и квадратом быть не может; если c нечетно, то $7c^2$ есть число вида $8n + 7$ или $4n + 3$ и все выражение $3\,(a^2 + b^2) + 7c^2$ опять имеет вид $4n + 3$, т. е. не может быть квадратом. Во втором случае $a^2 + b^2 = 4n + 1$ и $3a^2 + 3b^2 = 4n + 3$. Следовательно, если c четное, то $3\,(a^2 + b^2) + 7c^2 = 4n + 3$ и не может быть квадратом; если же c нечетное, то $c^2 = 8n + 1$, $7c^2 = 8n + 7 = 4n + 3$, откуда $3a^2 + 3b^2 + 7c^2 = 4n + 6$ — число нечетно-четное, которое квадратом стать не может. Наконец, в третьем случае $a^2 + b^2 = 8n + 2$ и $3a^2 + 3b^2 = 8n + 6$. Если c четное, то получится нечетно-четное число; если c нечетное, то $c^2 = 8n + 7$, $7c^2 = 8n + 7$, откуда $3\,(a^2 + b^2) + 7c^2 = 8n + 5$, что квадратом быть не может. Теорема доказана.

На л. 83, 144, 147 об. Эйлер возвращается ко второй теореме. Он утверждает, что a должно делиться на 3: действительно, иначе $2a^2 = 3n + 2$, $2a^2 + 6b^2 + 21c^2 = 3m + 2$, т. е. не может быть квадратом. Пусть $a = 3d$ и $18d^2 + 6b^2 + 21c^2 = \square = 9e^2$, откуда $6d^2 + 2b^2 + 7c^2 = 3e^2$. Далее, полагается $e = b - f$. Тогда $6d^2 + 7c^2 = b^2 - 6fb + 3f^2$ и $b = 3f \pm \pm \sqrt{6f^2 + 6d^2 + 7c^2}$. Если положить $f = \frac{g+h}{2}$, $d = \frac{g-h}{2}$, то, подставляя эти значения, получим, что подкоренное выражение равно $3g^2 + 3h^2 + 7c^2$ и в то же время должно быть квадратом, а это по предыдущей теореме невозможно.

Восемь записей относятся к доказательству теоремы: «$4pmn - m - n \neq \square$ ни при каких целых положительных p, m, n». Этот вопрос возник в переписке Эйлера с Гольдбахом; первое упоминание о нем (для случая $p = 1$) встречается в письме Эйлера от 9 сентября 1741 г. [138, с. 85—88], а затем его решение обсуждается не менее чем в 36 письмах, вплоть до 1745 г. При этом задача ставится все более широко (например, утверждается, что $4pmn - m - n^{\alpha} \neq \square$, или ищутся числа e, для которых $emn - m - n = \square$). Кроме того, Эйлер занимается решением этой задачи в двух мемуарах: E164, E241. Первая запись находится в записной книжке № 131 и относится ко времени начала переписки Эйлера с Гольдбахом по поводу этого вопроса; шесть записей содержатся в записной книжке № 132. Таким образом, все эти записи относятся к периоду переписки Эйлера с Гольдбахом и, как показывает их изучение, по существу являются подготовительными к некоторым письмам. Это позволяет уточнить датировку записной книжки № 132.

Г. Энестрём не указывает даты ее окончания, Г. К. Михайлов определяет эту дату как 1744 г. [32, с. 115]. Однако заметка, относящаяся к решению задачи $emn - m - n = \square$, находится на л. 243 об.—244 (всего в записной книжке 261 лист). Письма же, соответствующие этой записи по содержанию, датированы 17 ноября 1744 г. и 16 февраля 1745 г. Поэтому можно предположить, что записная книжка была закончена полностью не в 1744 г., а по крайней мере в начале 1745 г. Последняя запись находится в записной книжке № 139 (л. 100—106 об.) и опубликована в «Opera omnia» [108, сер. I, т. 1, с. 55].

Как уже сказано, шесть заметок (№ 131, л. 119; № 132, л. 187—197 об., 220, 221, 243 об.—244) являются черновиками к ряду писем Эйлера к Гольдбаху 1742—1745 гг. В них воспроизводятся рассуждения Гольдбаха и дана критика этих рассуждений или приведено доказательство Эйлера, известное по письмам. Интерес представляет последняя запись (записная книжка № 132, л. 243 об.—244), которая посвящена общему случаю рассматриваемой задачи: найти все целые положительные значения e, при которых выражение $emn - m - n$ может стать квадратом.

Вопрос впервые ставится таким образом в письме Гольдбаха в декабре 1743 г. [138, с. 188—189]. Эйлер приходит к выводу, что эта формула не может стать квадратом только для значений $e = 4k$, $e = 8k - 1$, и сообщает этот результат в письме от 17 ноября 1744 г. [138, с. 207—209], но не дает доказательства. В следующем письме от 16 февраля 1745 г. [138, с. 211—213] он замечает, что свою теорему получил только по индукции. Доказательство, предложенное Гольдбахом, подтверждает правильность его вывода. В данной заметке из записной книжки содержится, очевидно, именно то не опубликованное нигде индуктивное рассуждение, которое привело Эйлера к его результату. Предполагая $emn - m - n = a^2$, он получает отсюда $e = \frac{a^2 + m + n}{mn}$ и исследует частные случаи $n = 1, 2, 3, 5, 6$. Например, для $n = 1$ имеем $e - 1 = \frac{\alpha^2 + 1}{m}$ и, следовательно, $e - 1$ равно делителям формы $a^2 + 1$. Но всякий делитель формы $a^2 + 1$ имеет вид $p^2 + q^2$, таким образом $e = p^2 + q^2 + 1$.

Отсюда для e получаются следующие значения: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 17, 18, 19, 21, 26, 27, 30, 35, 37, 38, 41, 42, 50, 51, 53, 54, 59, 62, 65, 66, 69, 73, 74, 75, 81, 82, 83. Далее Эйлер рассматривает случаи $n = 2$, $n = 3$, $n = 5$, $n = 6$ и приходит к ряду числовых значений, которые может принимать e, а отсюда — к ряду значений, которых e принимать не может: 4, 7, 8, 12, 15, 16, 20, 23, 24, 28, 31, 32, 36, 39, 40, 44, 47, 48, 52, 56, 60, 63, 64, 68, 71, 72, 76 и т. д. Из этого сделан вывод, что выражение $emn - m - n$ никогда не сможет стать квадратом, если $e = 8k - 1$ или $e = 4k$; в остальных случаях оно может быть сделано квадратом.

СИСТЕМЫ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ 2-Й СТЕПЕНИ

Задачи этого раздела чрезвычайно разнообразны по характеру и многочисленны.

1. Три заметки (записные книжки № 132, л. 165 об.; № 138, л. 23 об.—24, 24 об.—25) посвящены задаче нахождения положительных чисел a и b, для которых $ab \pm a = \square$, $ab \pm b = \square$. Эти заметки являются подготовительными к мемуару E466. По ним можно проследить, как, начав решать данную задачу в 1740 г., Эйлер возвращается к ней вновь уже в 1770 г. и заканчивает посвященный ее решению мемуар в 1774 г. Во второй записи Эйлер получает частное решение, которое в мемуаре отсутствует: $a = \frac{25}{24}$, $b = \frac{1442401}{117600}$. Здесь же он дает решение $x = \frac{841}{840}$, $y = \frac{1369}{840}$, $z = \frac{12769}{3360}$ более общей задачи: $xy \pm x = \square$, $xy \pm y = \square$, $xz \pm x = \square$, $xz \pm z = \square$, $yz \pm y = \square$, $yz \pm z = \square$.

2. Задача: «Найти такие целые положительные числа a, b, для которых $ab \pm a \pm b = \square$» — рассматривается в записных книжках № 137 (л. 373), 138 (л. 7—7 об., 74 об.—75, 76 об.—77). Эти заметки являются подготовительными к мемуарам E405, E774, E793. В них, как и в опубликованном решении, задача сводится к новой: ищутся числа p, q, r, s, удовлетворяющие условию $\frac{pq\,(p^4 - q^4)}{rs\,(r^4 - s^4)} = \square$. Новыми являются таблицы численных значений выражения $xy\,(x^4 - y^4)$, которые приводятся в первой и последней заметках.

3. В записной книжке № 133, л. 144 об. Эйлер решает задачу нахождения чисел r и s, для которых $r + s^2 = \square, s + r^2 = \square$. Метод решения отличается от метода, которым решена эта задача в «Алгебре» (§ 23). Полагая $r = \frac{a}{x}$, $s = \frac{b}{x}$ и подставляя r и s в исходные уравнения, имеем после почленного перемножения $abx^2 + (a^3 + b^3)x + a^2b^2 = \square$. Правую сторону Эйлер полагает равной $(ab + px)^2$, откуда $x = \frac{a^3 + b^3 - 2abp}{ab - p^2}$. Тогда $ax - b^2 = \frac{(a^2 - bp)^2}{ab - p^2}$, и так как по условию должно быть $ax - b^2 = \square$, то должно быть и $ab - p^2 = \square$.

Если положить $p = \pm\frac{m}{n}$, то $x = \frac{n^2(a^3 + b^3) \pm 2mnab}{m^2 - n^2ab}$, причем требуется, чтобы $-n^2ab + m^2 = k^2$. (Эйлер говорит, что это уравнение решается легко). Отсюда

$$s = \frac{bk^2}{n^2(a^3 + b^3) \pm 2mnab}, \quad r = \frac{ak^2}{n^2(a^3 + b^3) \pm 2mnab}.$$

В частности, при $m = 5$, $k = 1$, $n = 2$, $a = 2$, $b = 3$ получается:

$$r = \frac{2}{20}, \quad s = \frac{3}{20}.$$

4. Задача, сходная с предыдущей (ищутся числа x, y, для которых $y - x^2 = \square$, $x - y^2 = \square$), в опубликованных работах Эйлера не встречается; в записных книжках ей посвящены четыре заметки. Первая заметка находится на л. 123 об. записной книжки № 131. Эйлер предполагает, что искомые числа имеют вид $\frac{1}{r}$, $\frac{q}{r}$. Тогда условия задачи примут вид $r - q^2 = \square$, $qr - 1 = \square$. Пусть, далее, $r = q^2 + s^2$; первое условие при этом окажется выполненным, второе перепишется: $q^3 + qs^2 - 1 = \square$. Требуется определить s. Эйлер замечает, что в общем виде решить полученное уравнение невозможно, и утверждает, что это можно сделать в следующих случаях: либо q есть квадрат, либо известен случай $aq^2 + q^3 - 1 = \square$, либо q есть сумма двух квадратов. Так, если $aq^2 + q^3 - 1 = b^2$, то, подставляя

полученное отсюда значение q в уравнение и приравнивая левую часть уравнения выражению $[\frac{b}{a}s + (\frac{s}{a} - 1)t]^2$, получим:

$$s = \frac{a(1 + t^2 - q^2)}{r^2 + 2bt + q^3 - 1} = \frac{a(a^2q - b^2 + t^2)}{b^2 + t^2 + 2bt - a^2q},$$

а тогда, используя $r = q^2 + s^2$, получаем значение r. Если предположить $q = 1 + a^2$, то получится решение

$$\frac{1}{1 + 3a^2 + a^4}, \qquad \frac{1 + a^2}{1 + 3a^2 + a^4}.$$

В этом месте сделана приписка: «Ozanami solutio»,* из которой можно заключить, что данная задача встречается у Ж. Озанама.

Вторая заметка, касающаяся данного вопроса, находится в записной книжке № 133 (л. 144 об.); задача решается методом, изложенным при рассмотрении предыдущей задачи. При этом, предположив $r = \frac{a}{x}$, $s = \frac{b}{x}$, Эйлер, рассуждая, как и раньше, получает:

$$x = \frac{n^2(a^3 + b^3) \pm 2mnab}{n^2ab - m^2},$$

где $n^2ab - m^2 = k^2$; отсюда окончательно:

$$r = \frac{ak^2}{n^2(a^3 + b^3) \pm 2mnab}, \quad s = \frac{bk^2}{n^2(a^3 + b^3) \pm 2mnab}, \quad t = \frac{k(na^2 + mb)}{n^2(a^2 + b^2) \pm 2mnab}.$$

В частности, для $m = 1$, $k = 1$, $n = 1$, $a = 1$, $b = 2$ либо $r = \frac{1}{5}$, $s = \frac{2}{5}$, либо $r = \frac{1}{13}$, $s = \frac{2}{13}$.

На л. 145 об. этой же записной книжки помещается третья запись. Здесь формулируется теорема, которая дает условие разрешимости поставленной задачи, а именно: если $(p^2 + q^2)(x^2 + y^2) - 2(p^4 - q^4)xy + 2q^2(p^2 - q^2)(x + y) + q^4 = 0$. Полагая $x = t + u$, $y = t - u$, Эйлер подставляет эти значения в уравнение и, произведя ряд преобразований, получает:

$$x = \frac{m^2 + 2mn + 5n^2}{10(m^2 + n^2)}, \quad y = \frac{m^2 - 2mn + 5n^2}{10(m^2 + n^2)}.$$

Последняя, четвертая, запись, обнаруженная в записной книжке № 136 (л. 85 об.), воспроизводит рассуждение первой заметки, относящейся к данному вопросу.

5. Три записи из записных книжек Эйлер посвящает задаче: «Найти такие положительные числа x, y, z, для которых $x \pm y = \Box$, $x \pm z = \Box$, $y \pm z = \Box$». До Эйлера этой задачей занимался Лейбниц (в неопубликованных рукописях). Решение Эйлера было опубликовано в «Алгебре» (§ 234)

---

* В русском переводе: «Решение Озанама».

и в мемуаре E753. В записной книжке № 132 (л. 143, 147 об.) имеются две заметки, относящиеся к этому решению, где дается два численных примера, которых нет в названных работах: 1) $x = 77\ 764\ 850$, $y = 664\ 755\ 250$, $z = 20\ 126\ 386$; 2) $x = 2\ 399\ 057$, $y = 2\ 288\ 168$, $z = 1\ 873\ 432$.

Для первого решения $x + y = 12\,010^2, x - y = 3360^2, x + z = 9894^2, x - z = 7592^2, y + z = 9306^2, y - z = 6808^2$; для второго решения $x + y = 2165^2, x - y = 333^2, x + z = 2067^2, x - z = 725^2, y + z = 2040^2, y - z = 644^2$.

В записной книжке № 140 (л. 64) находится решение этой же задачи. Запись можно признать относящейся к вышеупомянутому мемуару (очевидно, поэтому она и не была опубликована в «Opera omnia» [108], однако ход рассуждения здесь отличается от опубликованного решения.

Пусть $A + B = x^2, A + C = y^2, B + C = z^2$, тогда $B - C = x^2 - y^2$. Отсюда же $2B = x^2 + z^2 - y^2, 2C = z^2 + y^2 - x^2, 2A = x^2 + y^2 - z^2$, а также $A - B = y^2 - z^2, A - C = x^2 - z^2, B - C = x^2 - y^2$; причем три последних выражения должны быть квадратными. Чтобы были квадратами $x^2 - z^2, x^2 - y^2$, необходимо, чтобы x можно было представить двумя способами в виде суммы двух квадратов. Пусть $x = p^2 + q^2 = r^2 + s^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. Если положить $z = 2pq, y = 2rs, x^2 - z^2 = (p^2 - q^2)^2$, то $\sqrt{A - C} = p^2 - q^2$. Также $x^2 - y^2 = (r^2 - s^2)^2$, следовательно $\sqrt{B - C} = r^2 - s^2$. Остается $y^2 - z^2 = \square = 4(r^2s^2 - p^2q^2) = A - B$. Из предыдущего $p = ac + bd, q = ad - bc, r = ad + bc, s = ac - bd$. Поэтому $rs + pq = 2cd\,(a^2 - b^2)$, $rs - pq = 2ab\,(c^2 - d^2)$, откуда $A - B = 16abcd\,(a^2 - b^2) \cdot (c^2 - d^2)$, и дело, таким образом, сводится к отысканию таких двух значений формулы $fq\,(f^2 - g^2)$, чтобы их произведение было равно квадрату. Эти значения предлагается находить по таблице, находящейся на л. 61 этой же записной книжки. После этого Эйлер рассматривает пример: $a = 6$, $b = 1$, $c = 5$, $d = 2$. Для этих значений $A - B = 840^2, A + B = 1073^2$, $A - C = 975^2$, $A + C = 952^2$, $B - C = 495^2, B + C = 448^2$. Отсюда найдены $A = \frac{1\,859\,929}{2}$, $B = \frac{445\,729}{2}, C = \frac{44\,321}{2}$. В конце записи замечено, что другим методом можно получить другие значения: $A = 733\ 025$, $B = 418\ 304$, $C = 488\ 000$, т. е. решение данной задачи, приведенное в мемуаре E753.

6. Две незаконченные заметки (записные книжки № 129, л. 50—51 об.; № 131, л. 61 об.) касаются этой же задачи, поставленной для четырех переменных. Этот случай в опубликованных работах Эйлера не рассматривается.

В первой записи предлагаются следующие значения для искомых величин: $a, a + x^2, a + y^2, a + z^2$ — и ищутся их разности: $z^2 - x^2 =$

$= (z-p)^2$, отсюда $z = \frac{p^2+z^2}{2p}$; таким же образом полагается $z^2 - y^2 = (z-q)^2$, откуда $y = \frac{2qz}{1+q^2}$.

Наконец,

$$\sqrt{y^2 - x^2} = \frac{1}{p+q^2p}\sqrt{(p-x^2q)^2 - x^2(p+p^2q)(p+pq^2)}.$$

Запись не окончена.

Во второй заметке дается решение: если a, b, c, d — искомые числа, а

$$p = \frac{xz^2+2rz-x}{z^2+1}, \qquad q = \frac{xy^2+2ry-x}{y^2+1},$$

то

$$a = \frac{p^2+q^2-x^2}{2}, \qquad b = \frac{p^2+q^2+x^2}{2}, \qquad c = \frac{q^2-p^2+x^2}{2},$$

$$d = \frac{2r^2-p^2-q^2+x^2}{2}.$$

7. Задача: «Найти два числа x, y, чтобы было $x^2+y^2=\square$, $x^2-y^2+2=\square$» — не встречается в опубликованных работах Эйлера. Ей посвящена заметка из записной книжки № 133 (л. 29 об.—30). Для решения рассматривается прямоугольный треугольник с катетами $x = 2nab$, $y = n(a^2-b^2)$ при различных значениях n. В результате Эйлер приходит к выводу: «Из любого прямоугольного треугольника могут быть найдены бесчисленные пары целых чисел x, y, решающих данную задачу».

8. Пять заметок (записные книжки № 133, л. 145, 146 об.; № 137, л. 358; № 138, л. 140 об., 142—142 об.) относятся к решению различных случаев задачи: «Найти четыре положительных числа a, b, c, d, для которых при данном n выполняются условия $ab+n=\square$, $ac+n=\square$, $ad+n=\square$, $bc+n=\square$, $bd+n=\square$, $cd+n=\square$». Эта задача решалась и до Эйлера. Баше рассматривал ее для $n = 3$, Ферма и де Билли для $n = 4$. Эйлер решает ее в мемуарах E793, E560 и в «Алгебре» (§ 233—234). В первой заметке из записной книжки приводится ряд численных решений для случая $n = 1$: (2, 12, 4, 420), (2, 12, 24, 2380), (3, 8, 1, 120), (3, 8, 21, 2080), (3, 5, 16, 1008).

Во второй записи рассмотрен общий случай, когда число, прибавляемое по условию к произведениям двух чисел, есть n. Пусть $c = a + b + 2\sqrt{ab-n}$, $d = b + c + 2\sqrt{bc-n}$, $ad - n = \square$. Пусть, далее, $ab - n = p^2$. Тогда $b = \frac{p^2+n}{2}$, $c = a + \frac{p^2+n}{a} + 2p$, $bc - n = \frac{(p^2+n)^2}{a^2} + p^2 + \frac{2p}{a}(p^2+n) = \left[\frac{(p^2+n)^2}{a} + p\right]^2$.

Следовательно, $d = \frac{4(p^2+n)}{a} + 4p + a$. Далее, должно быть выполнено условие $ad - n = 4p^2 + 4ap + a^2 + 3n = \Box$ или $(2p+a)^2 + 3n = \Box$. После этого Эйлер приводит «пример Диофанта» — случай $n = 10$. Для этого случая $(2p+a)^2 + 30 = \Box$, и, решая уравнение, Эйлер получает два решения: 1) $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{22}{5}$, $c = \frac{49}{10}$, $d = \frac{161}{10}$; 2) $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{22}{3}$, $c = \frac{41}{6}$, $d = \frac{161}{6}$.

В третьей заметке для случая $n = 80$ Эйлер дает решение: $a = 1$, $b = 41$, $c = 64$, $d = 209$. Остальные две заметки являются подготовительными к мемуару E560.

9. В записной книжке № 132 (л. 145 об.) имеется заметка, касающаяся задачи: «Найти такие три числа x, y, z, чтобы $xy \pm (x+y+z) = 0$, $xz \pm (x+y+z) = \Box$, $yz \pm (x+y+z) = \Box$». (В опубликованных работах эта задача ставится для четырех неизвестных). Эйлер полагает $x + y + z = 2abct^2$, после чего решение оказывается найденным, если $xy = (a^2b^2 + c^2)t^2$, $xz = (a^2c^2 + b^2)t^2$, $yz = (b^2c^2 + a^2)t^2$. Произведя ряд преобразований, он получает решение в следующем виде:

$$x = (1 + a^2)t,$$

$$y = \frac{(1+a^2)^2 - 2(1-a^2)p^2 + p^4}{4p^2}\, t,$$

$$z = \frac{(1+a^2)^2 + 2(1-a^2)p^2 + p^4}{4}\, t,$$

где

$$t = \frac{1 + a^2 + p^2}{a(1 + a^2 - p^2)}.$$

10. В записной книжке № 132 (л. 148 об.) Эйлер останавливается на задаче: «Найти три квадрата, разности которых суть квадраты» (см.: Алгебра, § 236—237) — и дает два численных решения. Он утверждает, что задачу $z^2 - x^2 = \Box$, $z^2 - y^2 = \Box$, $y^2 - x^2 = \Box$ решают числа: 1) $x = 2040$, $y = 2067$, $z = 2165$; 2) $x = 756$, $y = 756$, $z = 925$. Действительно, 1) $z^2 - x^2 = 725^2$, $z^2 - y^2 = 644^2$, $y^2 - x^2 = 333^2$; 2) $z^2 - x^2 = 533^2$, $z^2 - y^2 = 533^2$, $y^2 - x^2 = 0$.

11. Задача: «Найти три квадрата x^2, y^2, z^2 так, чтобы $x^2 + y^2 = \Box$, $x^2 + z^2 = \Box$, $y^2 + z^2 = \Box$». Этой задачей занимался до Эйлера Саундерсон (1682—1739), который получил решение $x = 117$, $y = 44$, $z = 240$. Эйлер решает ее в «Алгебре» (§ 238) и в мемуарах E427 и E799. В записных книжках он касается данной задачи шесть раз.

В книжке № 131 (л. 61) дается решение, отличающееся от всех опубликованных. Искомые числа обозначены a^2, b^2, c^2.

Пусть $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$, тогда $a^2 + b^2 = (p^2 + q^2)^2$, $b^2 + c^2 = 4p^2q^2 + c^2$. Полагаем $4p^2q^2 + c^2 = (c^2 + 2r)^2$, откуда $c = \frac{p^2q^2 - r^2}{r}$. Подставляем полученное в третье условие: $a^2 + c^2 = \square$ — и приходим к уравнению $p^4r^2 - 4p^2q^2r^2 + q^4r^2 + p^4q^4 + r^4 = \square$.

Пусть $p = mq$, $r = nq^2$. Тогда уравнение примет вид $m^4n^2 - 4m^2n^2 + n^2 + n^4 = \square$. Если, далее, положить $m = n + x$, то получится новое уравнение: $n^2(n^2 - 1)^2 + 4n^3(n^2 - 1)x + n^2(6n^2 + 2)x^2 + 4n(n^2 + 1)x^3 + (n^2 + 1)x^4 = \square$.

Правую часть Эйлер полагает равной $\left[n(n^3 - 1) + 2n^2x + \frac{n(n^2 + 1)}{n^2 - 1}x^2\right]^2$ и получает $x = \frac{4n^3 - n}{1 - 3n^2}$. Отсюда $m = \frac{n^3 - 3n}{1 - 3n^2}$, $p = \frac{n^3 - 3n}{1 - 3n^2}q$, $r = nq^2$. Если считать $q = 1 - 3n^2$, то $p = n^3 - 3n$, $r = n - 6n^3 + 9n^5$ и окончательно $a = n^6 - 15n^4 + 15n^2 - 1$, $b = 6n^5 - 20n^3 + 6n$, $c = 8n^5 - 8n$. При $n = 2$ Эйлер приходит к известному решению: $a = 177$, $b = 44$, $c = 240$.

Во второй записи (записная книжка № 132, л. 143) задача решается методом, также отличным от опубликованных. Ищутся числа x^2, y^2, z^2. Пусть $x^2 + z^2 = (x + p)^2$, откуда $x = \frac{z^2 - p^2}{2p}$, $y^2 + z^2 = (y + q)^2$, откуда $y = \frac{z^2 - q^2}{2q}$. Следовательно,

$$x^2 + y^2 = \frac{q^2(z^2 - p^2)^2 + p^2(z^2 - q^2)^2}{4p^2q^2} = \square.$$

В качестве решения последнего уравнения Эйлер приводит:

$$p = (3 - m^2)n, \quad q = (3 - m^2)mn, \quad z = (3m^2 - 1)n.$$

Далее в этой заметке, как и в трех следующих (записные книжки № 134, л. 211 об.; № 140, л. 561), даются численные решения рассматриваемой задачи, из которых отличаются от опубликованных следующие: (3120, 2035, 828), $(16 \cdot 33 \cdot 100 \cdot 29 \cdot 131,\ 299 \cdot 101 \cdot 97 \cdot 233,\ 12 \cdot 33 \cdot 10 \cdot 97 \cdot 233)$, $(32 \cdot 3 \cdot 5,\ 4 \cdot 5 \cdot 7,\ 9 \cdot 7 \cdot 11)$, $(16 \cdot 9 \cdot 11,\ 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17,\ 11 \cdot 17)$, $(21 \cdot 23 \cdot 25,\ 48 \cdot 41,\ 44 \cdot 25)$. Последняя запись не закончена.

12. Одна заметка из книжки № 132 (л. 149—149 об.) посвящена задаче: «Найти такие три числа x, y, z, чтобы $x^2 \pm (x + y + z) = \square$, $y^2 \pm (x + y + z) = \square$, $z^2 \pm (x + y + z) = \square$», — не встречающейся среди опубликованных работ. Эйлер дает численные решения: 1) $\frac{2125 \cdot 3929}{297 \cdot 7600}$, $\frac{2775 \cdot 3929}{297 \cdot 7600}$, $\frac{2958 \cdot 3929}{297 \cdot 7600}$; 2) $\frac{406}{96}$, $\frac{518}{96}$, $\frac{791}{96}$, — причем отмечает, что второе решение наименьшее.

13. Одна запись (записная книжка № 133, л. 152) посвящена решению задачи: «Найти три таких числа a, b, c, чтобы $ab + ac + bc = \square$, $a^2 + b^2 + c^2 = \square$».

Пусть $ab + ac + bc = p^2$, $a^2 + b^2 + c^2 = q^2$, тогда $p = 2mn$, $q = 2m^2 - n^2$ (так как $2p^2 + q^2 = \square$), $a + b + c = 2m^2 + n^2$. Пусть, далее, $b + c = 2t$, $b - c = 2u$. Произведя ряд подстановок, Эйлер получает значения m, n, а затем следующее решение: $a = x^4 - 2x^2y^2 + 4y^4$, $b = 2xy(x^2 + 2xy - 2y^2)$, $c = 2xy(2y^2 + 2xy - x^2)$, где $\sqrt{3} - 1 < \frac{x}{y} < \sqrt{3} + 1$.

Остальные заметки из этого раздела (всего в нем насчитывается 61 запись) в основном, за исключением нескольких незаконченных, относятся к опубликованным работам Эйлера и не содержат нового по сравнению с этими работами.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ

К данному разделу относится 41 заметка из записных книжек Эйлера, из них 15 оказались касающимися задач, либо ранее неизвестных, либо решенных новыми методами. Приводим наиболее интересные.

1. Задача нахождения двух чисел x, y, для которых $x^3 + y^3 = \square$, решается Эйлером в мемуаре E255. В записной книжке № 134 (л. 118) имеется небольшая заметка, интересная не столько решением задачи (которое, отличаясь от опубликованного, не является строгим и даже не закончено), сколько тем, что здесь приведены некоторые вычисления и виден ход мысли Эйлера при решении задачи; в других заметках чаще всего дается лишь готовый результат. После формулировки задачи ($A^3 + B^3 = \square$) предлагается подстановка $A = \frac{p+q}{2}$, $B = \frac{p-q}{2}$, при которой условие принимает вид $\left(\frac{p+q}{2}\right)^3 + \left(\frac{p-q}{2}\right)^3 = \square$ или $p(p^2 + 3q^2) = \square$. Далее рассматриваются два случая: 1) p не делится на 3; 2) p делится на 3. В первом для выполнения условия $p^2 + 3q^2 = \square$ предполагается: $p^2 + 3q^2 = (a^2 + 3b^2)^2$; при этом Эйлер считает $p = \pm \frac{a^2 - 3b^2}{n} = \square$, $q = \frac{2ab}{n}$. Во втором случае $p = 3r$ и условие перепишется в виде $r(3r^2 + q^2) = \square$. Для этого последнего $q = \pm \frac{a^2 - 3b^2}{n}$, $r = \frac{2ab}{n} = \square$. Сначала Эйлер придает a, b, n различные численные значения и получает ряд значений для A, B, из которых часть задаче не удовлетворяет. После этого, записав строку численных значений для a^2, а под ней строку значений для $3b^2$, Эйлер производит испытания для тех значений выражения $a^2 - 3b^2$, которые являются квадратами. Таким образом, он получает решения: 10, –6; 8, –7; 65, 56; 450, 34.

2. В записной книжке № 131 (л. 176 об., 177 об.) приводятся следующие две теоремы (без доказательства): 1) «Если $\alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta$ становится квадратом при $x = a$, так что $\sqrt{\alpha a^3 + \beta a^2 + \gamma a + \delta} = b$, то это же выражение также будет квадратом в случае $x = \frac{(\alpha a^2 - \gamma)^2 - 4\delta(\alpha a + \beta)}{4ab^2}$, и тогда $\sqrt{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta} = \frac{2b^2 + (x - a)(3\alpha a^2 + 2\beta a + \gamma)}{2b}$; 2) если $1 + 2az + bz^2 + 2cz^3$ становится квадратом при $z = a$, при котором $\sqrt{1 + 2au + bu^2 + 2cu^3} = s$, то оно выполнено и для $z = \frac{c - 2ay \pm (c - 2ay + 4y^2u)}{4y^2}$, где $y = \frac{-au - 1 \pm s}{2u^2}$. При этом $\sqrt{1 + 2az + bz^2 + 2cz^3} = 1 + az + 2z^2y$».

3. В записной книжке № 131 (л. 174) Эйлер доказывает теорему: «$x^3 \pm 1$ не может стать квадратом ни при каком x, кроме $x = 2$». Этот вопрос рассматривается в «Алгебре» (§ 121), но данная запись заслуживает внимания, так как доказательство в ней проводится способом, совершенно отличным от опубликованного. Пусть $a^3 + 1 = \square$, т. е. $(a + 1)(a^2 - a + 1) = \square$, где оба сомножителя взаимно просты. Таким образом, должно быть одновременно $a + 1 = 0$, $a^2 - a + 1 = \square$. Это оказывается выполнимым, если оба выражения равны, т. е. $a^2 = 2a$, откуда либо $a = \square$, либо $a = 2$. Теорема для этого случая доказана. Рассматривается второй случай: $a^3 - 1 = \square$. Тогда должно быть $(a - 1)(a^2 + a + 1) = \square$, где сомножители либо взаимно просты, либо равны. Первое оказывается невозможным, так как тогда одновременно должно быть $a - 1 = \square$, $a^2 + a + 1 = \square$, но $(a^2 + 1)^2 > a^2 + a + 1 > a^2$ и, следовательно, $a^2 + a + 1 \neq \square$. Остается второе, откуда $a^2 + 2 = \square$, что невозможно. Теорема доказана.

Здесь же доказывается теорема, которая утверждает, что выражение $x^3 + x$ не может стать квадратом даже при дробном значении x. Доказательство проведено методом неопределенного спуска.

4. Задача: «Найти числа x, y, z, для которых $xyz \pm (x+y+z)$ = кубу» — рассматривается на л. 149—149 об. книжки № 133. Если искомые числа суть $\frac{a}{s}$, $\frac{b}{s}$, $\frac{c}{s}$, то, полагая $abc \pm (a + b + c)s^2 = (p \pm q)^2$ и произведя ряд операций, Эйлер получает следующие частные решения:

$$1)\ \frac{a}{s} = \frac{60 \cdot 104}{73 \cdot 127}, \quad \frac{b}{s} = \frac{6529 \cdot 164}{73^2 \cdot 127}, \quad \frac{c}{s} = \frac{3 \cdot 164}{127};$$

$$2)\ \frac{a}{s} = \frac{24 \cdot 73}{11 \cdot 43}, \quad \frac{b}{s} = \frac{313 \cdot 73}{8 \cdot 11 \cdot 43}, \quad \frac{c}{s} = \frac{3 \cdot 73}{43}.$$

5. В записной книжке № 132 имеются две записи (л. 83, 86), в которых Эйлер предлагает два решения задачи, не встречающейся в опубликован-

ных работах: «Найти четыре куба A^3, B^3, C^3, D^3, чтобы их сумма равнялась бы данному числу n». Первое решение:

$$A = (3y^2z + 3yz^2 + n) : 6yz\,, \quad B = (-3y^2z - 3yz^2 + n) : 6yz\,,$$

$$C = (3y^2z - 3yz^2 - n) : 6yz\,, \quad D = (-3y^2z + 3yz^2 - n) : 6yz\,.$$

Второе решение:

$$A = \frac{an + 6af(ad+bc)^2 + 12ab^3f^2(ad+bc) + 2af^3(a^6 - b^6)}{12abf(ad+bc)},$$

$$B = \frac{-an - 6af(ad+bc)^2 + 12ab^3f^2(ad+bc) - 2af^3(a^6 - b^6)}{12abf(ad+bc)},$$

$$C = \frac{bn + 6b(ad+bc)^2 - 12a^3bf^2(ad+bc) + 2bf^3(a^6 - b^6)}{12abf(ad+bc)},$$

$$D = \frac{-bn + 6bf(ad+bc)^2 - 12a^3bf^2(ad+bc) - 2bf^3(a^6 - b^6)}{12abf(ad+bc)}.$$

При этом отмечается особый случай:

$$n = \left(\frac{n}{6c^2} + a\right)^2 + \left(\frac{n}{6c^2} - a\right)^2 + \left(\frac{-n}{6a^2}\right)^2 + \left(\frac{-n}{6a^2}\right)^2.$$

6. В записной книжке № 132 (л. 103) Эйлер рассматривает две задачи, которые также в опубликованных работах не обнаружены: «Найти два числа x, y, чтобы их сумма, произведение и разность (сумма) квадратов находились бы в геометрической прогрессии». В качестве решения первой задачи предлагается:

$$x = \frac{(m-n)(m+n)^2}{mn^2}, \quad y = \frac{(m-n)(m+n)^2}{m^2n};$$

решение второй:

$$x = \frac{(m+n)(m^2+n^2)}{mn^2}, \quad y = \frac{(m+n)(m^2+n^2)}{m^2n}.$$

7. Задачу нахождения трех чисел, для которых выполнены условия: «$x - xyz = \square$, $y - xyz = \square$, $z - xyz = \square$», — в опубликованных мемуарах Эйлера найти не удалось. Она формулируется и решается в записной книжке № 131 (л. 78 об.). Сначала Эйлер полагает $x - xyz = a^2x^2$, откуда

$$x = \frac{1 - yz}{a^2}.$$

Второе условие примет вид $y - xyz = y - \dfrac{yz - y^2z^2}{a^2} = \square$. Это выражение полагается равным b^2y^2. Тогда

$$y = \frac{a^2 - z}{a^2b^2 - z^2}, \quad x = \frac{b^2 - z}{a^2b^2 - z^2}, \quad xyz = \frac{z(a^2 - z)(b^2 - z)}{(a^2b^2 - z^2)^2}.$$

Третье условие теперь перепишется следующим образом: $z(a^2b^2 - z^2) - z(a^2 - z)(b^2 - z) = \square$. Пусть $b = na$. Тогда $mn^3a^4(1 - m^2)^2 - m(1 - mn)(n - m)$ должно равняться квадрату, который Эйлер считает равным $\left[m - \frac{n(1 + m^2)}{2}\right]^2$.

Произведя соответствующие преобразования, он получает:

$$\frac{(1 + m)^2}{4} = m^2 + mna^4(1 - m^2)^2.$$

Отсюда

$$n = \frac{1}{4ma^4}, \quad b = \frac{1}{4ma^3}, \quad ab = \frac{1}{4ma^2}, \quad z = \frac{1}{4a^2}.$$

Наконец, подставив полученные значения в выражения для x и y, он приходит к следующему:

$$y = \frac{4m^2a^2(4a^4 - 1)}{1 - m^2}, \quad x = \frac{1 - 4m^2a^4}{a^2(1 - m^2)}.$$

Далее Эйлер приводит два численных решения задачи:

1) $z = \frac{4}{9}, \quad y = \frac{3 \cdot 17}{4 \cdot 4 \cdot 4 \quad 4}, \quad x = \frac{175}{3 \cdot 4 \cdot 9};$

2) $z = \frac{9216}{9 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 16}, \quad y = \frac{4131}{9 \quad 9 \cdot 16 \cdot 16}, \quad x = \frac{33600}{9 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 16}.$

8. Задаче: «Найти три положительных числа x, y, z, для которых $xyz \pm x = \square$, $xyz \pm y = \square$, $xyz \pm z = \square$» — посвящена заметка из записной книжки № 138 (л. 25—25 об.). Вначале Эйлер полагает: $yz = \frac{p^2 + 1}{2p}$, $xz = \frac{q^2 + 1}{2q}$, $xy = \frac{r^2 + 1}{2r}$. Тогда $x^2y^2z^2 = \frac{(p^2 + 1)(q^2 + 1)(r^2 + 1)}{8pqr}$ и правая часть последнего равенства, следовательно, должна быть квадратом; таким образом, получено первое условие. Далее, подставляя значение yz в условие задачи $x(yz + 1) = \square$, Эйлер получает $\frac{x(p + 1)^2}{2p} = \square$, т. е. $\frac{x}{2p} = \square$. Таким же образом оказывается $\frac{y}{2q} = \square$, $\frac{z}{2r} = \square$. Тогда, используя введенные ранее значения для yz и перемножая почленно два последних равенства, Эйлер получает $\frac{yz}{4gr} = \frac{p^2 + 1}{8pqr} = \square$ или $\frac{p^2 + 1}{2pqr} = \square$. Таким же образом $\frac{q^2 + 1}{2pqr} = \square$, $\frac{r^2 + 1}{2pqr} = \square$. Эти три условия включают в себя первое. Далее, полагая $p = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$, $q = \frac{c^2 - d^2}{2cd}$, $r = \frac{f^2 - g^2}{2fg}$, имеем для выполнения полу-

ченных трех условий: $p^2 + 1 = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2b^2}$, $q^2 + 1 = \frac{(c^2 + d^2)^2}{4a^2b^2}$, $r^2 + 1 = \frac{(f^2 + g^2)^2}{4a^2b^2}$, т. е. числители являются квадратами. Следовательно, квадратом должен быть и их общий знаменатель, т. е.

$$2pqr = \frac{(a^2 - b^2)(c^2 - d^2)(f^2 - g^2)}{4abcdfg}.$$

Таким образом, вопрос сводится к нахождению трех значений формулы $mn(m^2 - n^2)$, произведение которых есть квадрат. Поэтому Эйлер приводит следующие значения:

m	n	$mn(m^2 - n^2)$
2	1	2 3
3	2	2 3 5
4	1	2 2 3 5
5	3	2 2 2 3 5
5	2	2 3 5 7
5	4	2 2 3 3 5
6	1	2 3 5 7

В конце заметки приводится численное решение. Пусть $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 2$, $f = 5$, $g = 4$. Тогда $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{5}{12}$, $r = \frac{9}{40}$, $yz = \frac{25}{24}$, $xz = \frac{169}{120}$, $xy = \frac{1681}{720}$. Отсюда $xyz = \frac{13 \cdot 41}{32 \cdot 9 \cdot 3}$ и, наконец, $x = \frac{13 \cdot 41}{3 \cdot 4 \cdot 25}$, $y = \frac{5 \cdot 41}{3 \cdot 4 \cdot 13}$, $z + \frac{5\ \ 13}{2 \cdot 41}$. Запись кончается проверкой этого решения.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ 4-Й СТЕПЕНИ

Заметки из записных книжек, отнесенные к этому разделу, охватывают широкий круг вопросов. Таких заметок насчитывается 64. Рассмотрение их показывает, что, как и записи из других разделов, по своему значению они неравноценны: если одни из них представляют собой только черновые наброски к опубликованным работам, то другие содержат вопросы, не встречающиеся в этих работах, и поэтому имеют самостоятельный интерес. Последних насчитывается 31 заметка. Остановимся на тех, которые представляются наиболее интересными.

1. Задача: «Найти целые числа x, y, z, для которых $x^4 + y^4 + z^4 = \square$». Эта задача впервые формулируется и решается Диофантом, который получает для нее решение: $x = 12$, $y = 15$, $z = 20$ и $12^4 + 15^4 + 20^4 = 481^2$. Ею же занимался Э. Варинг (1736—1798), воспроизведя в 1770 г. решение Диофанта без доказательства [155]. В конце XIX в. к ней возвраща-

ются Мартин и Адкок, которые устанавливают, что решение Диофанта есть наименьшее решение в целых числах. В опубликованных работах Эйлера эта задача не встречается, но в своих записных книжках он обращается к ней несколько раз, а именно: № 132, л. 144; № 133, л. 151 об.; № 134, л. 80—81; № 136, л. 83, 84 об.—85. Первая запись (записная книжка № 132, л. 144) представляет собой повторение решения Диофанта. Предлагается подстановка $x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + a)^2$, и отсюда получается $x^2 = \frac{y^4 + z^4 - a^2}{a}$; полагая $a = y^2 - z^2$, имеем $x = \frac{yz}{\sqrt{y^2 - z^2}}$. Далее, если положить $y = n(p^2 + q^2)$, $z = n(p^2 - q^2)$, то $x = \frac{n(p^4 - q^4)}{2pq}$. При $n = 2pq$ получим $x^4 + y^4 + z^4 = (p^8 + 14p^4q^4 + q^8)^2$. Если, в частности, $p = 2$, $q = 1$, получается решение $x = 15$, $y = 20$, $z = 12$. Запись кончается словами: «Это предложение Диофанта». В следующих, большей частью незаконченных заметках Эйлер пытается решить задачу несколько иными методами, которые приводят, однако, только к уже найденному решению.

В записной книжке № 134 (л. 81) дается подстановка $x^2 = 2n(a^2 + b^2 - c^2)$, $y^2 = 4nac$, $z^2 = 4nbc$ и рассматривается при $n = \frac{1}{4}$; для предлагаемых Эйлером значений $a = 25$, $b = 9$, $c = 16$ получается прежнее решение.

В записной книжке № 136 (л. 83) Эйлер приводит новое решение, говоря: «Чтобы было $a^4 + b^4 + c^4 = \square$, кроме решения $a = 15$, $b = 20$, $c = 12$, имеются

$$(*)\ \begin{aligned} a &= 130\,111, \\ b &= 5 \cdot 120 \cdot 481, \\ c &= 3 \cdot 120 \cdot 481 \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} a &= 88\,639, \\ b &= 5 \cdot 120 \cdot 481, \\ c &= 4 \cdot 120 \cdot 647\text{».} \end{aligned}$$

Наконец, в последней записи в этой же записной книжке, на л. 85 Эйлер замечает без доказательства, что задачи $x^4 + y^4 + z^4 = v^2$ получаются из него при помощи следующих общих формул:

1) $x = 2acd$, $y = 2bcd$, $z = a^4 + b^4 - c^4$. Действительно, тогда $(x^4 + y^4 + z^4) = (d^4 + 4d^2c^4 - 4c^8)^2$. Если рассматривать решение $a = 20$, $b = 12$, $c = 15$ как известное, то эти формулы приводят к решению (*).

2) $x = 2acd(d + c^2)$, $y = 2bcd(d + c^2)$, $z = (d - c^2)(d^2 + 2c^4)$.

Таким образом, записи данного раздела представляют несомненный интерес, особенно заметки из записной книжки № 136 (л. 83, 85), как не встречающиеся в опубликованных работах Эйлера и содержащие новые результаты.

2. Задача: «Найти числа x, y, z, v, для которых $x^4 + y^4 + z^4 + v^4 = \square$» — встречается в записной книжке № 132 (л. 82 об., 83,

143 об.). Она формулируется на л. 82 об., и здесь же приводится следующее решение: «Чтобы было $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = \square$, следует взять:

$$a = 7g^4 + 30g^2h^2 + 9h^4,$$

$$b = 7g^4 + 12g^2h + 30g^2h^2 - 12gh^3 + 9h^4,$$

и тогда будет

$$\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 + d^4} = 2(7g^4 + 30g^2h^2 + 9h^4) \times$$

$$\times (7g^4 + 18g^2h^2 + 21h^4) + 144h^2(3g^3 + 5h^2)(h^2 - g^2)^2 \text{»}.$$

Так, если четыре корня суть: $a = 241$, $b = 169$, $c = 313$, $d = 169$, — будет $\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 + d^4} = 120\,842 = 2 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 71$; другие четыре корня получаются, если положить $g = 3$, $h = 1$, тогда $a = 141$, $b = 189$, $c = 93$, $d = 109$. Каким путем Эйлер приходит к этим результатам, остается неизвестным.

На л. № 143 об. дается короткая заметка: «Квадратные числа, меньшие чем 3000, которые являются совокупностями четырех биквадратов, есть 4, 49, 64, 289, 324, 529, 784, 1024, 2500». Кроме того, здесь же приводится решение: $199^4 + 281^4 + 343^4 + 559^4 = 344\,162^2$.

Все это, очевидно, получено путем непосредственных вычислений. В опубликованных работах ничего, связанного с данной задачей, обнаружить не удалось, и потому заметки этого раздела следует отметить особо.

3. В записной книжке № 131, л. 176 предлагается следующая теорема: «Если $x^4 + \alpha x^2y^2 + \beta y^4$ есть квадрат, то квадратом будет также форма $a^4 + \alpha a^2b^2 + \beta b^4$, если $a = x^4 - \beta y^4$, $b = 2xy\sqrt{x^4 + \alpha x^2y^2 + \beta y^4}$».

На л. 179 этой же книжки формулируются еще две теоремы: 1) «Если $a^4 + ma^2b^2 + b^4$ не может быть квадратом, то не будут квадратами и следующие выражения:

$$\alpha^3\beta(2 - m)p^4 - 2\alpha^2\beta^2mp^2q^2 - \alpha\beta^3(2 + m)q^4,$$

$$\alpha^3\beta p^4 - 2\alpha^3\beta^2mp^2q^2 - (m^2 - 4)\alpha\beta^3q^4\text{»};$$

2) «Если $ap^4 + \dfrac{an^2 + cm^2 - ac - d^2}{mn + d}p^2q^2 + cq^4 = \square$, то должно быть либо $\dfrac{p^2}{q^2} = \dfrac{mn + d}{a - m^2}$, либо $\dfrac{p^2}{q^2} = \dfrac{c - n^2}{mn + d}$».

4. В нескольких записях Эйлер рассматривает отдельные уравнения 4-й степени и предлагает ряд решений:

1) $x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2cx + d^2 = \square$, $x \dfrac{2c - 2ad}{a^2 - b + 2d}$ (записная книжка № 132, л. 196 об.);

2) $a^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 = \square$, $a = 39$, $b = 2$; $a = 64$, $b = 1469$ (записная книжка № 133, л. 135 об.);

3) $a^2x^4 + 2abx^3y + cx^2y^2 + 2dexy^3 + e^2y^4 = \Box$, $x = 2e(d + b)$, $y = b^2 - c - 2ae$ (записная книжка № 133, л. 142 об.);

4) $a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = \Box$ (записная книжка № 134, л. 94; № 137, л. 314 об.);

5) $ax^4 + 4abx^3y + (4b^2 + 2ac - 4mn)x^2y^2 + 4bcxy^3 + c^2y^4 = \Box$ (записная книжка № 140, л. 68—68 об.);

6) $(a^2 - x^2y^2)(x^2 - y^2) = \Box$, $x = \frac{5a^2p - 2ap^3 + p^5}{a^2 - 2ap^2 + 5p^4}$, $y = \frac{a^2 - 6ap^2 + p^4}{4p(a + p^2)}$; $x = \frac{a^3 - 2a^2p^2 + 5ap^4}{5a^2p - 2ap^3 + p^5}$, $y = \frac{4ap(a + p^2)}{a^2 - 6ap^2 + p^4}$.

5. Ряд заметок Эйлер посвящает доказательству двух утверждений: 1) «Выражение $a^4 - a^2b^2 + b^4$ не может быть квадратом, кроме случаев $a = 0$, $b = 0$ и $a = b$»; 2) «Выражение $a^4 + a^2b^2 + b^4$ не может быть квадратом, кроме случаев $a = 0$, $b = 0$». Первая теорема доказана попутно с другими вопросами в мемуаре E758, однако в записных книжках доказательство проводится иным способом.

В первой заметке (записная книжка № 133, л. 146) дано доказательство первого утверждения. Предполагая, что одно из чисел a, b четно, другое нечетно, Эйлер считает

$$a^4 - a^2b^2 + b^4 = \Box = (a^2 - \frac{c}{d} b^2)^2.$$

Отсюда $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2 - d^2}{d(2c - d)}$, и так как $(c, d) = 1$, то d нечетно. Тогда берется $a^2 = c^2 - d^2$, $b^2 = d(2c - d)$. Чтобы было $c^2 - d^2 = \Box$, Эйлер полагает $c = p^2 + q^2$, $d = p^2 - q^2$, а потому $2c - d = p^2 + 3q^2$. Таким образом, должно быть одновременно $p^2 - q^2 = 0$, $p^2 + 3q^2 = \Box$. Отсюда, производя подстановку $p + q = r^2$, $p - q = s^2$, Эйлер получает $p^2 + 3q^2 = r^4 - r^2s^2 + s^4 = 0$. Следовательно, если бы $a^4 - a^2b^2 + b^4$ было квадратом, то также квадратом стало бы и выражение $r^4 - r^2s^2 + s^4$, причем r, s меньше, чем a, b. Отсюда, как обычно, сделан вывод, что решение в целых числах невозможно, кроме случаев $a = 0$, $b = 0$, $a = b$.

В следующей заметке (записная книжка № 134, л. 214—214 об.) методом неопределенного спуска доказана вторая теорема, а также сделана новая попытка доказать первую теорему, несколько иным способом. Здесь же (л. 215) Эйлер рассматривает общее уравнение $a^2A^4 + \lambda A^2B^2 + \beta B^4 = \Box$ и доказывает (тем же методом), что его частные случаи

$$A^4 + 3A^2B^2 + B^4 = \Box, \quad A^4 + 4A^2B^2 + B^4 = \Box$$

неразрешимы.

В записной книжке № 136 (л. 9 об.—10) Эйлер снова возвращается к обеим теоремам. Он предполагает, например, что

$$a^4 - a^2b^2 + b^4 = \square = (p^2q^2 - r^2s^2)^2 + 4p^2q^2r^2s^2.$$

Тогда оказывается, что будет справедливо и следующее уравнение: $t^4 - t^2u^2 + u^4 = \square$, где t, u — числа, значительно ме́ньшие, чем a, b, — а отсюда что предположение неверно. Так же доказана и вторая теорема.

6. В записной книжке № 134 (л. 77 об.) решается задача: «Найти числа x, y, z, для которых $(z^2 + x^2)^2 + (z^2 + y^2)^2 = \square$, если известен случай $(a^2 + b^2)^2 + (c^2 + d^2)^2 = \square$». Эйлер полагает: $z^2 + x^2 = (a^2 + b^2)(m^2 + n^2)$, $z^2 + y^2 = (c^2 + d^2)(m^2 + n^2)$. Отсюда $z = am + bn = cm + dn$, $x = an - bm$, $y = cn - dm$, $\frac{m}{n} = \frac{b-d}{c-a}$.

Тогда получаются два решения:

$$\begin{array}{ll} z = bc - ad, & z = bc + ad, \\ x = a^2 + b^2 \pm (ac + bd), & x = a^2 + b^2 \pm (ac - bd), \\ y = c^2 + d^2 \pm (ac + bd); & y = c^2 + d^2 \pm (ac - bd). \end{array}$$

КВАДРАТЫ, НАХОДЯЩИЕСЯ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Задача: «Найти четыре числа, квадраты которых находятся в арифметической прогрессии» — была поставлена Ферма (в 1640 г.), высказавшим утверждение, что она неразрешима в целых числах. Доказательство этого утверждения принадлежит Коллинсу (1625—1683), Эйлеру, Барлоу (род. 1776). Эйлер получил свой результат попутно при решении других вопросов в мемуаре Е758. Как показывает изучение записных книжек, интерес к данной задаче сохранялся у него на протяжении 14 лет; записи, к ней относящиеся, встречаются в книжках № 131, 133, 136. Посвящено этой задаче пять заметок; из них первая и последняя содержат полное решение задачи, отличное от опубликованного.

1. В первой записи (записная книжка № 131, л. 177 об.—178) дается доказательство невозможности существования четырех квадратов, находящихся в арифметической прогрессии. Сначала идет неудачная попытка решения задачи, далее дано строгое доказательство.

Обозначая искомые квадраты $2a^2 - b^2 = \square_1$; a^2, b^2; $2b^2 - a^2 = \square_2$, Эйлер получает отсюда:

$$\square_1 + \square_2 = a^2 + b^2,$$

$$\square_1 - \square_2 = 3(a^2 - b^2).$$

Таким образом, число $a^2 + b^2$ оказывается представленным в виде суммы двух квадратов двумя способами. Тогда по доказанной Эйлером теореме

$$a^2 + b^2 = (m^2 + n^2)(p^2 + q^2).$$

Полагая $a = mp + nq$, $b = np - mq$, получаем:

$$\sqrt{2a^2 - b^2} = np + mq, \quad \sqrt{2b^2 - a^2} = mp - nq.$$

Подставляя в $\sqrt{2b^2 - a^2}$ значения a и b, имеем:

$$(n^2 - m^2)(p^2 - q^2) = 2mnpq.$$

Отсюда

$$p^2 = \frac{2mnpq + n^2q^2 - m^2q^2}{n^2 - m^2}$$

и, решая квадратное уравнение, окончательно получаем:

$$\frac{p}{q} = \frac{mn \pm \sqrt{n^4 - m^2n^2 + m^4}}{n^2 - m^2}.$$

Таким образом, вопрос сводится к доказательству того факта, что подкоренное выражение не может быть квадратом; это доказано Эйлером особо, и доказательство приведено в предыдущем разделе статьи. Здесь оно приводится еще раз.

2. Во второй заметке (записная книжка № 131, л. 181 об.) продолжается рассмотрение этой задачи, причем сделана ссылка на предыдущую запись. Утверждается, что равенство $(n^2 - m^2)(p^2 - q^2) = 2mnpq$ невозможно, однако доказательство остается незаконченным.

3. В записной книжке № 131 (л. 183) дано другое доказательство. Рассматриваются четыре квадрата A, B, C, D, находящихся в арифметической прогрессии, с разностью, равной $mabc$. Для этого квадраты берутся равными:

$$A = \frac{1}{4}(mab - c)^2,$$

$$B = \frac{1}{4}(mab + c)^2 = \frac{1}{4}(mac - b)^2,$$

$$C = \frac{1}{4}(mac + b)^2 = \frac{1}{4}(mbc - a)^2,$$

$$D = \frac{1}{4}(mbc + a)^2,$$

причем $(a, b, c) = 1$. Сравнивая оба выражения для B, а затем для C, Эйлер получает: $ma = \frac{b + c}{b - c}$, $mc = \frac{a + b}{b - a}$; чтобы эти выражения были целыми, должно быть $C = b^{+2}_{-1}$ и $b + a^{+2}_{+1}$ или $a = b^{-2}_{-1}$.

Рассматривая затем каждый случай в отдельности (четыре случая), Эйлер приходит к выводу, что ни один из них невозможен. Запись кончается замечанием о том, что при данном доказательстве рассмотрен только частный случай.

В последней записи (записная книжка № 136, л. 10 об.) Эйлер формулирует и доказывает утверждение: «Два выражения $2a^2 - b^2$, $2b^2 - a^2$ одновременно квадратами стать не могут». Другими словами, он доказывает, что невозможно найти четыре квадрата $2a^2 - b^2$, a^2, b^2, $2b^2 - a^2$, находящихся в арифметической прогрессии (с разностью, равной $a^2 - b^2$). Таким образом, решается та же задача, что и в заметке 1. Метод решения полностью совпадает с методом, применявшимся в этой заметке.

ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

Из имеющихся в записных книжках пятнадцати записей по поводу доказательства великой теоремы Ферма («уравнение $x^n + y^n = z^n$ не может быть разрешено в целых числах для $n \geqslant 3$») восемь опубликованы в «Opera omnia» [108]. Остальные семь находятся в записных книжках № 131—134 и относятся, следовательно, к 1736—1757 гг. Все они касаются доказательства теоремы для случая $n \geqslant 2$. Две заметки (записные книжки № 132, л. 168—168 об.; № 133, л. 147) воспроизводят рассуждения, которые применил Эйлер при доказательстве теоремы в «Алгебре» (§ 243). Две заметки (записные книжки № 134, л. 206; № 136, л. 322) представляют собой незаконченные наброски. В записях из книжек № 131 (л. 179), 132 (л. 80—80 об.) и 133 (л. 146) доказательство проведено одним и тем же способом, причем оно полностью завершено в двух последних заметках.

Если ищутся a и b такие, чтобы $a^3 + b^3$ = кубу, то должны выполняться условия: $a^2 - ab + b^2$ = кубу, $a + b$ = кубу. Для выполнения первого условия Эйлер предлагает подстановку:

1) $a = x^3 + y^3 - 3x^2y$, $b = x^3 + y^3 - 3xy^2$ (тогда $a^2 - ab + b^2 = (x^2 - xy + y^2)^3$) или

2) $a = x^3 - x^2y + xy^2$, $b = y^3 - xy^2 + x^2y$.

Теперь нужно удовлетворить второму условию. Для предложенных подстановок получаются следующие значения:

1) $a + b = 2x^3 + 2y^3 - 3x^2y - 3xy^2$ = кубу;

2) $a + b = x^3 + y^3$ = кубу.

Рассмотрение второго случая приводит к исходной задаче, а потому Эйлер останавливается только на первом.

Как и раньше, вводится подстановка $y = z - x$. Тогда требуемое условие приобретает вид $2z^3 - 9xz^2 - 9x^2z$ = кубу. Это выражение полагается равным u^3v^2. Отсюда

$$z = \frac{9x + 3x\sqrt{4u^3 + 1}}{4 - 2u^3}.$$

(Если положить $u = \frac{m}{n}$, то получается новая задача: $n(4m^3 + n^3) = \square$). Далее полагается $\sqrt{4u^2 - 1} = \frac{r}{s}$; отсюда $4u^3 = \frac{r^2 - s^2}{s^2}$, $8u^3 = \frac{2s(r^2 - s^2)}{s^3}$, а тогда выражение $2s(r - s)(r + s)$ должно быть кубом и $(r, s) = 1$.

Исходя их этого Эйлер рассматривает случай, когда из чисел r и s одно четно, другое нечетно, и считает $r - s = f^3$, $r + s = g^3$. Отсюда $r = \frac{f^3 + g^3}{2}$, $s = \frac{g^3 - f^3}{2}$, и условие $2s$ = кубу будет выглядеть так: $q^3 - f^3 =$ = кубу, т. е. получена исходная задача для чисел, меньших, чем данные. Рассуждение кончается словами: «Так как для того, чтобы $a^3 + b^3$ могло стать кубом, требуется, чтобы имелись два меньших куба, сумма которых есть куб, то следует, что так как такого рода двух меньших кубов не имеется, то и большие не существуют». Таким образом, здесь доказательство проведено методом неопределенного спуска.

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $x^y = y^x$

Относительно данного вопроса в записных книжках имеются две заметки (записная книжка № 130, л. 37, 39), которые являются подготовительными к § 519 первой части «Введения в анализ бесконечных» [102].

Глава II

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЕЛ ВИДА $a^2+b^2, a^2+2b^2, a^2+3b^2, a^2+b^2+c^2+d^2$

Вопрос в том, является ли данное число простым или составным, относится к основым вопросам теории чисел, важным как для вычислительной практики, так и для теоретических исследований. При его решении еще в глубокой древности был получен ряд общих результатов, среди которых первое место занимает так называемая основная теорема арифметики, принадлежащая Евклиду. Согласно этой замечательной теореме всякое составное число единственным образом разлагается на простые множители. Был найден также практический метод выделения простых чисел из натурального ряда, носящий название «решета Эратосфена».

В XVII в., когда теория чисел переживала начало нового расцвета, поисками критерия простоты натурального числа занимались Пьер Ферма и другие ученые, в том числе М. Мерсенн, Б. Френикль де Бесси. Интерес к исследованию природы чисел с этой точки зрения проявился в трудах Л. Эйлера, Х. Гольдбаха, Ж. Л. Лагранжа.

Вопросы, связанные с изучением природы чисел, Эйлер рассматривал постоянно, на протяжении десятилетий. Он доказал ряд утверждений Ферма, остававшихся недоказанными, поставил и решил новые важные проблемы теории чисел. Исследование критериев простоты числа привело его, с одной стороны, к созданию основ теории бинарных квадратичных форм, с другой — к доказательству малой теоремы Ферма и созданию теории степенных вычетов. Заметки из его записных книжек позволяют показать, каким путем Эйлер пришел к своим результатам.

Изучение свойств натуральных чисел и, в частности, поиски критерия для определения простоты числа привели его к необходимости исследования чисел определенного вида, например таких, которые могут быть представлены в виде суммы двух или более квадратов, выражениями вида a^2+2b^2, a^2+3b^2 и т. д., вида $pa^2 \pm qb^2$ и др. Такого рода вопросы чрезвычайно занимали еще Ферма и его современников. В записных книжках Эйлера им посвящено много страниц. В данном разделе мы приводим ряд заметок, которые являются подготовительными к некоторым статьям Эйлера, сыгравшим важную роль в истории теории чисел. Речь, в частности, идет о трактатах, опубликованных в 1758—1773 гг.: «О числах, которые являются соединением двух квадратов» (E228), «Доказательство теоремы Ферма о том, что всякое простое число вида $4n + 1$ является суммой двух квадратов» (E241), «Новые доказательства о разложении чисел на квадраты» (E445).

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЕЛ ВИДА $a^2 + b^2$

Числа, которые могут быть представлены суммой двух взаимно простых квадратов, вызывали у математиков особый интерес. В письмах и заметках Ферма сформулировано несколько теорем, касающихся чисел такого вида. Среди них прежде всего следует назвать сообщенное в 1641 г. в письме к Френиклю де Бесси утверждение: «Всякое простое число вида $4n + 1$ есть сумма двух квадратов»; по словам Ферма, оно играет основную роль в теории пифагоровых треугольников [121]. В тесной связи с ним находится и другая теорема Ферма, сформулированная им в письме к Робервалю в 1640 г.: «Ни одно простое число вида $4n - 1$ не может быть делителем суммы двух взаимно простых квадратов» [121].

Свойства чисел, представимых суммой двух квадратов, привлекли внимание Эйлера уже в ранние годы. Занимаясь этим вопросом в течение долгого времени, он не только предложил доказательство теорем Ферма, упомянутых выше, но и использовал полученные при этом факты в дальнейших теоретико-числовых исследованиях. Заметки из записных книжек, дополняющие статьи Эйлера и опубликованные письма, позволяют более отчетливо проследить ход его работы.

ТЕОРЕМА ФЕРМА: «НИКАКОЕ ЧИСЛО ВИДА $4n - 1$ НЕ МОЖЕТ БЫТЬ ДЕЛИТЕЛЕМ СУММЫ ДВУХ ВЗАИМНО ПРОСТЫХ КВАДРАТОВ»

Хотя Ферма, сообщая эту теорему Робервалю, утверждал, что ему известно ее доказательство, он своего доказательства не оставил. Через сто лет после формулировки теоремы она была доказана Эйлером. Доказательство он сообщил Гольдбаху в письме от 6 марта 1742 г. [138, с. 94—97], а в 1750 г. опубликовал его в мемуаре «Теоремы относительно делителей чисел» (E134).

В записной книжке Эйлера № 132, на л. 141 об. находится запись, в которой Эйлер впервые обращается к доказательству этой теоремы. По-видимому, это подготовительная заметка к упомянутому письму, но в ней приводятся два доказательства, одно из которых неизвестно по опубликованным сочинениям и переписке Эйлера.

Оно проведено методом от противного. Рассматривая сумму двух взаимно простых квадратов $a^2 + b^2$, Эйлер допускает, что она делится на простое число $4n - 1$ (предполагая при этом, что ни a, ни b на него не делятся). Тогда, указывает он, выражение $a^{2i} + b^{2i}$ также будет делиться на $4n - 1$, если i — нечетное число.

Действительно,

$$(a^2 + b^2)^i = a^{2i} + ia^{2(i-1)}b^2 + \frac{i(i-1)}{2}a^{2(i-2)}b^4 + \dots + \frac{i(i-1)}{2}a^4b^{2(i-2)} +$$
$$+ ia^2b^{2(i-1)} + b^{2i}.$$

В правой части этого выражения, где число членов четное, так как i нечетно, суммы попарно взятых, равноотстоящих от концов членов (кроме $a^{2i} + b^{2i}$) делятся на $a^2 + b^2$. Следовательно, $a^{2i} + b^{2i}$ также должно делиться на $a^2 + b^2$ и, согласно предположению, на $4n - 1$.

Тогда $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ должно делиться на $4n - 1$.

Однако это невозможно, так как $a^{4n-2} + b^{4n-2} = (a^{4n-2} - b^{4n-2}) + 2b^{4n-2}$ и по фундаментальной теореме (так Эйлер называет малую теорему Ферма) выражение $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ делится на $4n - 1$. Следовательно, $(a^{4n-2} - b^{4n-2}) + 2b^{4n-2}$ на $4n - 1$ делиться не может.

Отсюда ясно, что первоначальное предположение несостоятельно, т. е. $a^2 + b^2$ не делится ни на какое простое число вида $4n - 1$.

Второе доказательство совпадает с приведенным в упомянутом письме Эйлера к Гольдбаху и мемуаре E134. Отмечено, что поскольку $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ делится на простое число вида $4n - 1$, то ни выражение $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ и ни один из его сомножителей на это число не делится. Но $a^2 + b^2$ есть сомножитель $a^{4n-2} + b^{4n-2}$. Следовательно, $a^2 + b^2$ не делится на простое число вида $4n - 1$.

Отсюда Эйлер делает следующие выводы (королларии):

1) «Число вида $a^2 + b^2$ не делится ни на какое число вида $4n - 1$, простое или составное.

2) Сумма двух взаимно простых квадратов не допускает других делителей, кроме тех, которые содержатся в форме $4n + 1$».

В письме далее следует еще один королларий: «Если сумма двух квадратов $a^2 + b^2$ не может делиться ни на какое другое число, которое не является суммой двух квадратов (что, я надеюсь, можно доказать), то отсюда следует, что всякое простое число $4n + 1$ разлагается на два квадрата». Это утверждение обсуждалось в нескольких письмах к Гольдбаху и в мемуарах E228 и E241.

В рассматриваемой заметке Эйлер переходит далее (л. 142) к вопросу о делимости суммы двух биквадратов на простое число вида $4n + 1$ и утверждает, что это невозможно, если n нечетно. Запись кончается утверждением о том, что всякий простой делитель числа вида $a^{2^m} + b^{2^m}$ содержится в форме $2^{m+1}n + 1$.

Ниже приводим полный текст записи (записная книжка № 132, л. 141 об.—142).

«Теорема. Сумма двух квадратов $aa + bb$ не делится ни на какое простое число такого вида $4n - 1$, если только одновременно и a, и b на него же не делятся.

Доказательство. Предположим, что $aa + bb$ делится на $4n - 1$; тогда также $a^{2i} + b^{2i}$ будет делиться на $4n - 1$, если при этом i обозначает нечетное число. Пусть $i = 2n - 1$. Тогда $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ будет делиться на $4n - 1$. Но по фундаментальной теореме $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ делится на $4n - 1$; следовательно, $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ и поэтому $aa + bb$ делиться [на $4n - 1$] не может. Ч[то] и т[ребовалось] д[оказать].

Иначе. Так как $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ делится на простое число $4n - 1$, то, следовательно, $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ на то же простое число делиться не может, и при этом никакой множитель формулы $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ [на него] делиться не будет. Но $aa + bb$ является делителем этой формулы и отсюда $aa + bb$ не может делиться на $4n - 1$. Что и требовалось доказать.

Королл[арий]. Если $4n - 1$ не является простым числом, оно будет делиться на простое число вида $4n - 1$. Вот почему сумма двух квадратов $aa + bb$ не может делиться ни на какое число вида $4n - 1$, ни на простое, ни на непростое.

Королл[арий]. Следовательно, сумма двух квадратов, взаимно простых, не допускает других делителей, кроме содержащихся в форме $4n + 1$.

Сумма двух биквадратов $a^4 + b^4$ не может делиться на простое число вида $4n + 1$, если n есть нечетное число: так как она не может делиться на $4n - 1$, то отсюда следует, что все простые делители формы $a^4 + b^4$ содержатся в форме $8n + 1$. Ибо вместе с тем, что $a^{4n} + b^{4n}$ не имеет делителя $4n + 1$, если n — нечетное число, также и $a^4 + b^4$ не будет иметь делителя $4n + 1$.

А поэтому всякий простой делитель формы $2^{2^m} + b^{2^m}$ содержится в форме $2^{m+1}n + 1$».

Приводим также некоторые другие заметки на ту же тему в записных книжках.

№ 134, л. 51 об.

«Теорема. Форма $a^2 + b^2$ не делится ни на какое число вида $4n - 1$.

Док[азательство]. Если бы было $a^2 + b^2 = 4A + 1$, то было бы $4A + 1 = (4n - 1)(4p - 1)$ и $4p - 1 < 4n - 1$. Следовательно, наименьшее число вида $4n - 1$ было бы делителем формы $a^2 + b^2$.

К о р о л л [а р и й]. Следовательно, если квадраты 1, 4, 9,... делились бы на число $4n - 1$, среди невычетов были бы -1, -4, -9,...».

№ 134, л. 65 об.

«Т [е о р е м а]. Число вида $4n - 1$ не является делителем формы $aa + bb$, если имеет место $\frac{a}{b} < \frac{4n-1}{2}$ и $aa + bb < \frac{1}{2}(4n - 1)(an - 1)$.

Д о к [а з а т е л ь с т в о]. Ибо если $4n - 1$ было бы делителем, то $(4n - 1)(4m - 1) = aa + bb$, а потому $4m - 1 < 4n - 1$ было бы делителем формы $aa + bb$. Далее делителем было бы $4p - 1 < (4m - 1)^3$ и так далее, что абсурдно».

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

Названная теорема играет важную роль как в теории делимости, так и в других областях высшей арифметики. Ее впервые сформулировал А. Жирар (1595—1632) в письме к Френиклю де Бесси в 1641 г. Однако, как и многие другие утверждения Ферма, она осталась без доказательства.

Эту теорему доказал Эйлер, уже в ранние годы полностью оценивший ее значение. При попытках доказательства теоремы он исследовал целый ряд вопросов, прямо или косвенно с ней связанных. Сюда относится, например, утверждение о том, что делителем суммы двух квадратов может быть лишь число, также представимое суммой двух квадратов; эта теорема, доказанная Эйлером, также имеет самостоятельное значение. Он дал также доказательство обратной теоремы: если число вида $4n + 1$ представляется единственным способом в виде суммы двух взаимно простых квадратов, причем это представление является собственным (т. е. $4n + 1 = x^2 + y^2$, где x и y взаимно просты),* то это число простое. При этом он разработал удобный практический метод определения того, является данное число вида $4n + 1$ простым или составным.

Результаты, полученные в этой области, Эйлер сообщил в письмах к Гольдбаху [138] от 6 марта 1742 г. (с. 94—97) , 30 июня того же года (с. 107—112), 9 июля 1743 г. (с. 168—173), 16 февраля 1745 г. (с. 211—213), 6 мая 1747 г. (с. 270—273), 13 февраля 1748 г. (с. 285—287).

Первые попытки Эйлера доказать теорему Ферма обобщены в мемуаре E228, сданном в печать в 1752—1753 гг. (соответствующий том «Новых комментариев Петербургской академии» был опубликован в 1758 г.).

Вначале Эйлер приводит таблицу чисел до 200, являющихся суммой двух квадратов, а затем доказывает ряд вспомогательных предложений.

---

* Эта уточненная формулировка теоремы дана И. Г. Мельниковым в статье «Открытие Эйлером удобных чисел» [46], в которой содержится подробный анализ всех вопросов, связанных с проблемой удобных чисел.

«I. Если число p есть сумма двух квадратов, то и числа $9p$, $16p$ и вообще n^2p будут также суммами двух квадратов.

II. Если число p есть сумма двух квадратов, то $2p$ и вообще $2n^2p$ будут также суммой двух квадратов.

III. Если четное число $2p$ будет суммой двух квадратов, то его половина будет также суммой двух квадратов».

Далее приводится доказательство теорем, важных, по утверждению Эйлера, для «раскрытия природы чисел, являющихся суммами двух квадратов».

Первая из них следующая:

«Теорема. Если p и q суть два числа, каждое из которых есть сумма двух квадратов, их произведение pq будет также суммой двух квадратов.

Доказательство. Пусть $p = a^2 + b^2$, $q = c^2 + d^2$. Тогда $pq = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$. Возможно, также $pq = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. Формулы совпадают при $a = b$ или $c = d$».

После этого Эйлер замечает, что обратный вывод не вытекает непосредственно из приведенного утверждения и требует особого доказательства. Оно проводится с помощью нескольких предложений.

«Предложение I. Если произведение pq есть сумма двух квадратов и один из сомножителей p есть простое число и в то же время сумма двух квадратов, второй сомножитель q также будет суммой двух квадратов.

Доказательство. Пусть $pq = a^2 + b^2$, $p = c^2 + d^2$, причем $(c, d) = 1$, так как p — простое. Будет $q = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$, и так как q — целое, то числитель делится на знаменатель.

Поскольку $c^2(a^2 + b^2) = a^2c^2 + b^2c^2$ делится на $c^2 + d^2$ и $a^2(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2$ делится на $c^2 + d^2$, то вычитая, получим, что и $b^2c^2 - a^2d^2$ делится на $c^2 + d^2$.

Так как $c^2 + d^2$ — простое число, то и $bc + ad$. Таким образом, получим:

$$bc \pm ad = mc^2 + md^2. \qquad (*)$$

Выразим b и a в виде $b = mc + x$, $a = \pm md + y$, где x и y — целые (положительные или отрицательные). Подставив их в (*), получим:

$$mc^2 + cx + md^2 \pm dy = mc^2 + md^2 \quad \text{или} \quad cx \pm dy = 0.$$

Отсюда $\frac{x}{y} = \pm\frac{d}{c}$, и так как $(c, d) = 1$, будет $x = nd$, $y = \mp nc$, откуда следует $a = \pm md \mp nc$, $b = mc + nd$.

Таким образом,

$$pq = m^2d^2 - 2mncd + n^2c^2 + m^2c^2 + 2mncd + n^2d^2 = (m^2+n^2)(c^2+d^2),$$

где $p = c^2 + d^2$, $q = m^2 + n^2$.

Предложение II. Если произведение pq есть сумма двух квадратов, но его сомножитель q не есть сумма двух квадратов, тогда другой сомножитель p, если он является простым числом, не есть сумма двух квадратов. Если оно не является простым, то наверняка содержит простой множитель, который не есть сумма двух квадратов.

Предложение III. Если сумма квадратов двух взаимно простых чисел $a^2 + b^2$ делится на число p, всегда можно найти сумму двух других квадратов $c^2 + d^2$, делящуюся на то же число p, такую, что эта сумма $c^2 + d^2$ не будет больше, чем $\frac{1}{2}p^2$.

Доказательство. Пусть $a^2 + b^2$ делится на p и a, b — сколь угодно большие. Так как a и b не имеют общего делителя p, то $a = mp \pm c$, $b = np \pm d$, где m и n выбраны так, чтобы c и d не превышали $\frac{1}{2}p$.

Тогда $a^2 + b^2 = m^2p^2 \pm 2mpc + c^2 + n^2p^2 \pm 2npd + d^2$, откуда следует, что $c^2 + d^2$ делится на p.

Так как $c, d \leqslant \frac{1}{2}p$, то $c^2 + d^2 \leqslant 2 \cdot \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{2}p^2$.

Предложение IV. Сумма двух взаимно простых квадратов не может делиться ни на какое число, которое само не является суммой двух квадратов.

Доказательство. Допустим противное: пусть при взаимно простых a и b выражение $a^2 + b^2$ делится на p, где p не является суммой двух квадратов.

На основании предыдущего предложения можно найти такую сумму двух квадратов $c^2 + d^2$, что $c^2 + d^2 \leqslant p$ и $c^2 + d^2$ делится на p.

Пусть $c^2 + d^2 = pq$. Так как p не является суммой двух квадратов, то (согласно предложению III) либо q не есть сумма двух квадратов, либо имеет делитель r, не равный сумме двух квадратов.

Но так как $pq < \frac{1}{2}p^2$ и $q < \frac{1}{2}p$, то тем более $r < \frac{1}{2}p$. Так как $c^2 + d^2$ делится на $r < \frac{1}{2}p$, то (по предложению IV) можно найти такую сумму двух взаимно простых квадратов $e^2 + f^2$, что она делится на r^2 и $e^2 + f^2 < \frac{1}{2}r^2 < \frac{1}{8}p^2$. А так как r не есть сумма двух квадратов, можно прийти к меньшим суммам двух квадратов, которые делятся на числа, не являющиеся суммами двух квадратов. Поэтому, поскольку в меньших числах не существует суммы двух взаимно простых квадратов, которые делились бы на число, не являющееся суммой двух квадратов, это невозможно и в больших числах.

Предложение V (теорема Ферма). Всякое простое число вида $4n + 1$ есть сумма двух квадратов».

Следующее ниже рассуждение Эйлер называет «попыткой доказательства».

«Пусть $4n + 1$ — простое число, a и b — взаимно простые числа. Тогда $a^{4n} - b^{4n}$ делится на $4n + 1$. Так как $a^{4n} - b^{4n} = (a^{2n} - b^{2n})(a^{2n} +$

$+ b^{2n}$), то отсюда либо $a^{2n} - b^{2n}$ делится на $4n + 1$, либо $a^{2n} + b^{2n}$ делится на $4n + 1$.

Следует брать те a и b, для которых $a^{2n} - b^{2n}$ не делится на $4n + 1$. В этих случаях $a^{2n} + b^{2n}$ делится на $4n + 1$. Если положить $a^n = p$, $b^n = q$, то $p^2 + q^2$ делится на $4n + 1$.

Королларий 1. Это доказательство было бы совершенным, если только можно доказать, что всегда существуют величины, которые должны быть подставлены вместо a и b и для которых формула $a^{2n} - b^{2n}$ не делится на простое число $4n + 1$; в этих случаях формула $a^{2n} + b^{2a}$ необходимо делится на $4n + 1$.

Королларий 2. Полагая $b = 1$, сводим предыдущий вопрос к случаю $a^{2n} - 1$.

Предложение VI. Если число вида $4n + 1$ единственным образом допускает разложение на два квадрата, тогда оно точно есть простое число».

Здесь следует повторить упоминавшееся выше уточнение формулировки этой теоремы: речь идет, как обратил внимание И. Г. Мельников, о собственном представлении числа вида $4n + 1$ суммой двух квадратов $x^2 + y^2$, т. е. о случае, когда x и y взаимно просты.

«Доказательство. Допустим противное: пусть представимое в виде суммы двух квадратов число вида $4n + 1$ не является простым. Тогда его делители также представимы в виде суммы двух квадратов, т. е. $4n + 1 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Тогда возможны два разложения:

I. $4n + 1 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$;

II. $4n + 1 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$.

Эти разложения всегда различны, если не окажется, что либо $ac + bd = ad + bc$, либо $ac + bd = ac - bd$.

В первом случае $ac + bd - ad - bc = 0$ или $(a - b)(c - d) = 0$, т. е. либо $a = b$, либо $c = d$. Отсюда либо $a^2 + b^2$, либо $c^2 + d^2$ является четным числом, которое не может быть делителем.

Во втором случае будет либо $b = 0$, либо $d = 0$. Тогда $4n + 1$ имеет вид $a^2(c^2 + d^2)$ или $c^2(a^2 + b^2)$ и, следовательно, представляется суммой двух квадратов, которые, вопреки предположению, не являются взаимно простыми.

Предложение VII. Если число может быть представлено двумя или более способами в виде суммы двух квадратов, оно не простое, но состоит по крайней мере из двух сомножителей.

Доказательство. Пусть $N = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, где $a > b$, $c > d$. Эти разложения различны, кроме случая $a = c$, $b = d$.

Пусть $a > c$, тогда $b < d$. Положим $a = c + x$, $d = b + y$. Тогда по условию $2cx + x^2 = 2by + y^2$, а так как одна часть этого равенства делится на x, а другая — на y, то можно записать: $2cx + x^2 = 2by + y^2 = xyz$. Отсюда $c = \frac{yz - x}{2}$, $b = \frac{xz - y}{2}$, $a = \frac{yz + x}{2}$, $d = \frac{xz + y}{2}$ и, следовательно, $N = a^2 + b^2 = \frac{x^2z^2 + y^2 + y^2z + x^2}{4} = \frac{(y^2 + x^2)(1 + z^2)}{4}$».

Нестрогость этого доказательства заключается в том, что результат может оказаться дробным числом.

Вторая часть мемуара посвящена разработке метода факторизации чисел вида $4n + 1$ при помощи представления их суммами двух квадратов.

В мемуаре E241, сданном в печать в 1754—1755 гг., опубликованном в 1760 г., Эйлер продолжает рассмотрение поставленного вопроса и получает строгое доказательство теоремы Ферма о представимости всякого простого числа вида $4n + 1$ суммой двух квадратов. Оно проведено с помощью метода конечных разностей. Следует заметить, что это первый случай применения названного метода для решения теоретико-числовых задач. В мемуаре E241 Эйлер также впервые разрабатывает основы теории квадратичных вычетов.

Статья начинается изложением «попытки доказательства» теоремы Ферма, которая была сделана в мемуаре E228. Эйлер говорит, что, исследуя числа, возникающие от сложения двух квадратов, он доказал многие свойства, которыми эти числа обладают, но его рассуждения оказались недостаточными, чтобы солидно обосновать справедливость этой теоремы. Однако попытка оказалась полезной для дальнейшей работы.

Как показано в предложении VI и королларии 1 из мемуара E228, теорема будет доказана, если докажем, что всегда могут быть найдены такие a и b, для которых выражение $a^{2n} - b^{2n}$ не делится на простое число вида $4n + 1$. Чтобы доказать это, Эйлер рассматривает ряд с общим членом a^{2n}, где $\alpha = 1, 2, 3, \dots 4n$, т. е. $1, 2^{2n}, 3^{2n}, 4^{2n}, 5^{2n}, \dots, (4n)^{2n}$, затем ряд первых разностей $2^{2n} - 1, 3^{2n} - 2^{2n}, \dots, 4n^{2n} - (4n - 1)^{2n}, \dots$, ряд вторых разностей и т. д. до ряда разностей порядка $2n$.

Эйлер доказывает, что, во-первых, разности порядка $2n$ равны между собой и, во-вторых, они равны $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n$.

Для этого он рассматривает некоторый ряд $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots$ и вычитает его почленно из ряда $A(x + 1)^m + B(x + 1)^{m-1} + C(x + 1)^{m-2} + \dots$

В полученный ряд первых разностей x входит в старшей степени $m - 1$, так как он имеет вид: $A[(x + 1)^m - x^m] + B[(x + 1)^{m-1} - x^{m-1}] + \dots$

В ряд вторых разностей он будет входить в степени $m - 2$, в ряд третьих разностей — в степени $m - 3$, в ряд n-х разностей — в степени $m - n$ и, наконец, в ряд m-х разностей — в степени $m — m = 0$. Следовательно, общий член последнего ряда будет постоянной величиной и все разности порядка m будут равны между собой.

Далее Эйлер рассматривает последовательность 1, 2^m, 3^m, ..., x^m,... Для нее общий член последовательности первых разностей имеет вид: $(x + 1)^m - x^m$; вторых разностей: $(x + 2)^m - 2(x + 1)^m + x^m$; третьих разностей: $(x + 3)^m - 3(x + 2)^m + 3(x + 1)^m - x^m$ и т. д.

Общий член m-х разностей есть

$$(x+m)^m - m(x+m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(x+m-2)^m -$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(x+m-3)^m + \ldots$$

По доказаннному, все m-е разности равны между собой при любом x. Если положить $x = 0$, то получим:

$$m^m - m(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3)^m + \ldots;$$

если положить $x = 1$, то

$$(m+1)^m - mm^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-1)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-2)^m + \ldots$$

Далее Эйлер рассматривает $m = 1, 2, 3,\ldots$ При $m = 1$ (т. е. для последовательности 1, 2, 3, 4, 5,...) общий член первых разностей есть $1^1 - 1\cdot 0 = 1$ или $2^1 - 1\cdot 1^1 = 1$.

При $m = 2$ (т. е. для последовательности 1^2, 2^2, 3^2, 4^2,...) общий член вторых разностей есть $2\cdot 1$ и, следовательно, все вторые разности равны $2\cdot 1$.

При $m = 3$ (т. е. для последовательности 1^3, 2^3, 3^3, 4^3,...) общий член третьих разностей и, следовательно, все третьи разности равны $3\cdot 2\cdot 1$.

Продолжая таким же образом далее, положим $m = m$. Тогда для последовательности 1^m, 2^m, 3^m, 4^m,... будем иметь: если обозначить через P общий член порядка m, а через Q — общий член порядка $m + 1$, то

$$P = (m+1)^m - mm^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-1)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-2)^m + \ldots,$$

$$Q = (m+1)^{m+1} - (m+1)m^{m+1} + \frac{(m+1)^m}{1\cdot 2}(m-1)^{m+1} +$$

$$+\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-2)^{m+1} + \ldots$$

Оба выражения имеют одинаковое число членов, и каждый член выражения P относится к соответствующему члену выражения Q как 1 к $m + 1$; так, $(m + 1)^m : (m + 1)^{m+1} = 1 : (m + 1)$; $m^{m+1} : (m + 1)^{m+1}m = 1 : (m + 1)$ и т. д.

Таким образом, $P : Q = 1 : (m + 1)$, т. е. $Q = (m + 1)P$. Из предыдущего следует, что для $1, 2^{2n}, 3^{2n}, 4^{2n},...$ разность порядка $2n$ есть $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2n$.

«Таким образом, — заключает Эйлер, — мы показали, что у последовательности степеней $1, 2^{2n}, 3^{2n}, 4^{2n}, 5^{2n}$ и т. д. разности порядка n не только постоянны, но также равняются произведению $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2n$».

После этого он продолжает доказательство теоремы Ферма о том, что всякое простое число вида $4n + 1$ есть сумма двух квадратов.

Так как $4n + 1$ — простое, то, согласно малой теореме Ферма, для любых a и b следует, что $a^{4n} - b^{4n}$ делится на $4n + 1$. Тогда

$$(a^{2n} - b^{2n})(a^{2n} + b^{2n}) \qquad (**)$$

делится на $4n + 1$.

Нужно доказать, что «не все числа, содержащиеся в форме $a^{2n} - b^{2n}$, делятся на $4n + 1$», т. е. что существуют числа a и b, для которых это выражение не делится на $4n + 1$.

Рассматриваем $1, 2^{2n}, 3^{2n}, 4^{2n}, 5^{2n},..., (4n)^{2n}$. Если допустить, что все разности делятся на $4n + 1$, то и вторые, третьи разности и т. д. до разности порядка $2n$ делятся на $4n + 1$. Но все разности порядка $2n$ равны между собой и равны $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2n$. Это выражение на $4n + 1$ не делится. Противоречие.

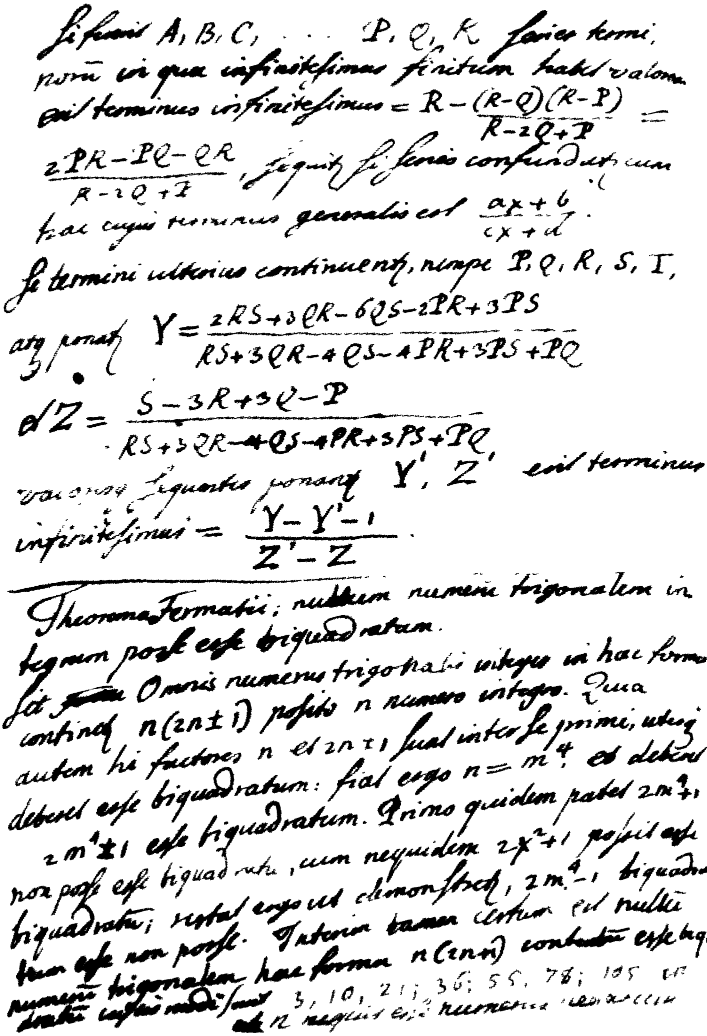
Следовательно, не все разности членов данного ряда делятся на $4n + 1$. Найдется разность, скажем $a^{2n} - (a - 1)^{2n}$, которая не делится на $4n + 1$, причем $a \leqslant 2n + 1$. Подставляя эту разность в выражение (**), т. е. полагая $a - 1 = b$, получаем, что $(a^{2n} - b^{2n})(a^{2n} + b^{2n})$ делится на $4n + 1$, но сомножитель $a^{2n} - b^{2n}$ на $4n + 1$ не делится. Тогда $a^{2n} + b^{2n}$ делится на $4n + 1$. Но сумма двух квадратов может делиться только на сумму двух квадратов, а, следовательно, простое число вида $4n + 1$ всегда есть сумма двух квадратов.

ТЕОРЕМА ФЕРМА В ЗАПИСНЫХ КНИЖКАХ Л. ЭЙЛЕРА

Записные книжки Эйлера свидетельствуют о том, что он обратился к вопросам, связанным с теоремой Ферма, задолго до обнародования первых результатов. Об этом говорят записи из книжки № 131, которая датируется 1736—1740 гг. (л. 57—60).

№ 131, л. 57—60

Рассмотрим заметку подробно, так как из нее видно, что уже в начале пятилетия 1736—1740 гг. (объем записной книжки — 271 лист) Эйлер


Si fuerint A, B, C, ... P, Q, R series termi-
norum in qua infinitesimus finitum habet valorem
erit terminus infinitesimus $= R - \frac{(R-Q)(R-P)}{R-2Q+P} =$
$\frac{2PR-PQ-QR}{R-2Q+P}$, sequitur si series confunderetur cum
ea cujus terminus generalis est $\frac{ax+b}{cx+d}$.
Si termini ulterius continuentur, nempe P, Q, R, S, T,
atque ponatur $Y = \frac{2RS+3QR-6QS-2PR+3PS}{RS+3QR-4QS-4PR+3PS+PQ}$
et $Z = \frac{S-3R+3Q-P}{RS+3QR-4QS-4PR+3PS+PQ}$,
vocenturque sequentes ponantur Y', Z' erit terminus
infinitesimus $= \frac{Y-Y'-1}{Z'-Z}$.

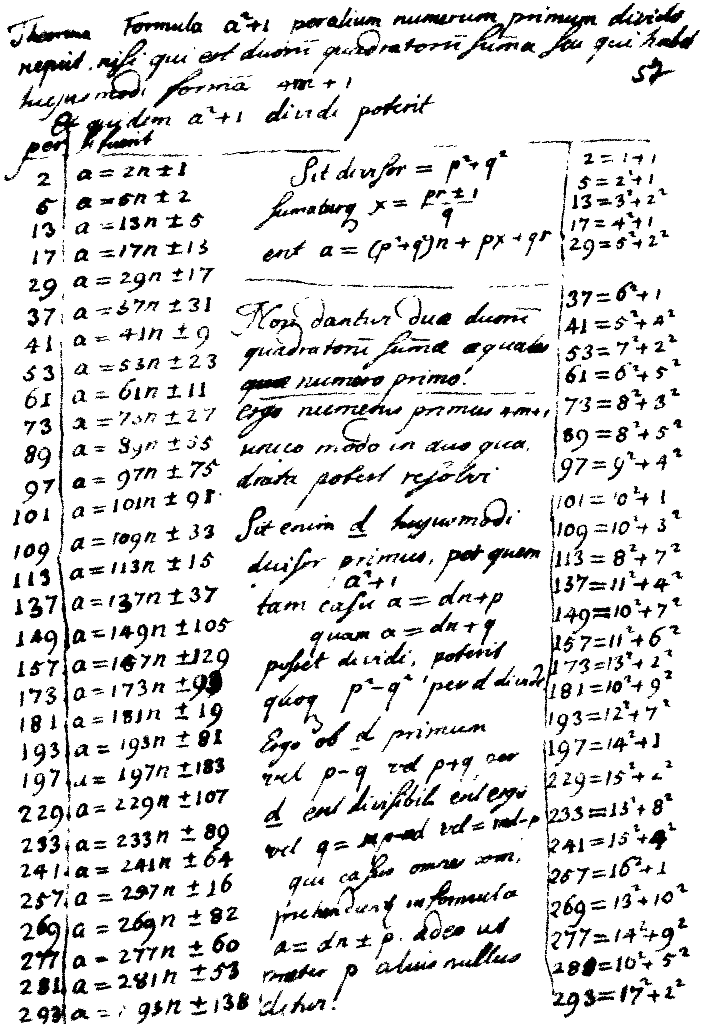
Theorema Fermatii; nullum numerum trigonalem in-
tegrum posse esse biquadratum.
Sit Omnis numerus trigonalis integer in hac forma
continetur $n(2n \pm 1)$ posito n numero integro. Qua
...

Рис. 8. Лист 152 об. из записной книжки Эйлера № 131 с записями о теореме Ферма.

сформулировал основные положения, на базе которых впоследствии решил ряд вопросов, связанных с доказательством этой теоремы Ферма.

Часть результатов заметки Эйлер привел значительно позже в письме к Гольдбаху от 9 июля 1743 г. [138, с. 168—173], а затем в различных статьях, например в мемуаре «Об очень больших простых числах» (E283).

Запись начинается с рассмотрения тех чисел a, для которых выражение $a^2 + 1$ делится на простое число вида $4n + 1$. При этом Эйлер исходит из того, что числа такого вида представимы суммой двух квадратов.



Theorema. Formula a^2+1 nullum numerum primum dividere nequit, nisi qui est duorum quadratorum summa seu qui habet huiusmodi formam $4m+1$ 57

Et quidem a^2+1 dividi poterit per si fuerit

2	$a = 2n \pm 1$	$2 = 1+1$
5	$a = 5n \pm 2$	$5 = 2^2+1$
13	$a = 13n \pm 5$	$13 = 3^2+2^2$
17	$a = 17n \pm 13$	$17 = 4^2+1$
29	$a = 29n \pm 17$	$29 = 5^2+2^2$
37	$a = 37n \pm 31$	$37 = 6^2+1$
41	$a = 41n \pm 9$	$41 = 5^2+4^2$
53	$a = 53n \pm 23$	$53 = 7^2+2^2$
61	$a = 61n \pm 11$	$61 = 6^2+5^2$
73	$a = 73n \pm 27$	$73 = 8^2+3^2$
89	$a = 89n \pm 55$	$89 = 8^2+5^2$
97	$a = 97n \pm 75$	$97 = 9^2+4^2$
101	$a = 101n \pm 91$	$101 = 10^2+1$
109	$a = 109n \pm 33$	$109 = 10^2+3^2$
113	$a = 113n \pm 15$	$113 = 8^2+7^2$
137	$a = 137n \pm 37$	$137 = 11^2+4^2$
149	$a = 149n \pm 105$	$149 = 10^2+7^2$
157	$a = 157n \pm 129$	$157 = 11^2+6^2$
173	$a = 173n \pm 93$	$173 = 13^2+2^2$
181	$a = 181n \pm 19$	$181 = 10^2+9^2$
193	$a = 193n \pm 81$	$193 = 12^2+7^2$
197	$a = 197n \pm 183$	$197 = 14^2+1$
229	$a = 229n \pm 107$	$229 = 15^2+2^2$
233	$a = 233n \pm 89$	$233 = 13^2+8^2$
241	$a = 241n \pm 64$	$241 = 15^2+4^2$
257	$a = 257n \pm 16$	$257 = 16^2+1$
269	$a = 269n \pm 82$	$269 = 13^2+10^2$
277	$a = 277n \pm 60$	$277 = 14^2+9^2$
281	$a = 281n \pm 53$	$281 = 16^2+5^2$
293	$a = 293n \pm 138$	$293 = 17^2+2^2$

Sit divisor $= p^2+q^2$, sumatur $x = \frac{pr \pm 1}{q}$, erit $a = (p^2+q^2)n + px + qr$

Non dantur duae duorum quadratorum summae aequales numero primo. Ergo numerus primus $4m+1$ unico modo in duo quadrata potest resolvi.

Sit enim d huiusmodi divisor primus, per quem a^2+1 tam casu $a = dn+p$ quam $a = dn+q$ possit dividi, poterit quoque p^2-q^2 per d dividi. Ergo ob d primum vel $p-q$ vel $p+q$ per d est divisibile, ergo vel $q = p$ vel ... qui casus omnes ... in formula $a = dn \pm p$, ideo ut praeter p alius nullus detur!

Рис. 9. Лист 57 из записной книжки Эйлера № 131 с таблицей по теории чисел.

Как мы видим, здесь он уже использует теорему: «a^2+1 не может делиться ни на какое другое простое число, кроме того, которое есть сумма двух квадратов». Доказательство этого важного утверждения, сформулированного Ферма, Эйлер впервые сообщил Гольдбаху 6 мая 1747 г. [138, с. 270—275], а опубликовал, как было показано выше, в мемуаре E228.

В рассматриваемой заметке, как и в письме к Гольдбаху от 9 июля 1743 г., показано, что a^2+1 делится на p^2+q^2 в случае, если $a = (p^2+q^2)n + px + qr$, где $px - qx = \pm 1$.

Далее Эйлер формулирует высказанное М. Мерсенном в 1647 г. [142, с. 360] утверждение о единственности разложения простого числа на сумму двух квадратов («Не существует двух сумм двух квадратов, равных простому числу») и на его основании доказывает единственность найденного представления для a.

Наконец, в этой записи задолго до опубликования в Е283 приводится таблица значений a, для которых $a^2 + 1$ делится на простое число вида $p^2 + 1 = 4n + 1$. Можно предположить, что этой таблицей, фигурирующей в записных книжках, Эйлер пользовался в своих числовых экспериментах.

Приводим заметку полностью, так как из нее видно, что, хотя Эйлер в этот период еще не владел доказательством теоремы Ферма о том, что всякое простое число вида $4n + 1$ представимо и притом единственным образом суммой двух квадратов, он с успехом использовал ее и связанные с ней факты для своей практической — вычислительной работы.

№ 131, л. 57

«Теорема. Формула $a^2 + 1$ не может делиться ни на какое другое простое число, кроме того, которое есть сумма двух квадратов или которое имеет такую форму $4n + 1$.

$a^2 + 1$ может делиться на	если будет	
2	$a = 2n \pm 1$	$2 = 1 + 1$
5	$a = 5n \pm 2$	$5 = 2^2 + 1$
13	$a = 13n \pm 5$	$13 = 3^2 + 2^2$
17	$a = 17n \pm 13$	$17 = 4^2 + 1$
29	$a = 29n \pm 17$	$29 = 5^2 + 2^2$
37	$a = 37n \pm 31$	$37 = 6^2 + 1$
41	$a = 41n \pm 9$	$41 = 5^2 + 4^2$
53	$a = 53n \pm 23$	$53 = 7^2 + 2^2$
61	$a = 61n \pm 11$	$61 = 6^2 + 5^2$
73	$a = 73n \pm 27$	$73 = 8^2 + 3^2$
89	$a = 89n \pm 55$	$89 = 8^2 + 5^2$
97	$a = 97n \pm 75$	$97 = 9^2 + 4^2$
101	$a = 101n \pm 91$	$101 = 10^2 + 1$
109	$a = 109n \pm 33$	$109 = 10^2 + 3^2$
113	$a = 113n \pm 15$	$113 = 8^2 + 7^2$
137	$a = 137n \pm 37$	$137 = 11^2 + 4^2$
149	$a = 149n \pm 105$	$149 = 10^2 + 7^2$
157	$a = 157n \pm 129$	$157 = 11^2 + 6^2$
173	$a = 173n \pm 93$	$173 = 13^2 + 2^2$
181	$a = 181n \pm 19$	$181 = 10^2 + 9^2$
193	$a = 193n \pm 81$	$193 = 12^2 + 7^2$
197	$a = 197n \pm 183$	$197 = 14^2 + 1$

229	$a = 229n \pm 107$	$229 = 15^2 + 2^2$
233	$a = 233n \pm 89$	$233 = 13^2 + 8^2$
241	$a = 241n \pm 64$	$241 = 15^2 + 2^2$
257	$a = 257n \pm 16$	$257 = 16^2 + 1$
269	$a = 269n \pm 82$	$269 = 13^2 + 10^2$
277	$a = 277n \pm 60$	$277 = 14^2 + 9^2$
281	$a = 281n \pm 53$	$281 = 16^2 + 5^2$
293	$a = 293n \pm 138$	$293 = 17^2 + 2^2$

Пусть делитель равен $p^2 + q^2$ и берется $x = \frac{pr \pm 1}{2}$. Тогда будет $a = (p^2 + q^2)n + px + qr$.

Не существует двух сумм двух квадратов, равных простому числу. Следовательно, простое число $4n + 1$ единственным образом может быть разложено на два квадрата.

Пусть d есть такого рода простой делитель, на который $a^2 + 1$ может разделиться как в случае $a = dn + p$, так и в случае $a = dn + q$. На d может также разделиться $p^2 - q^2$. Следовательно, поскольку d простое, то либо $p - q$, либо $p + q$ будет делиться на d. Следовательно, либо $q = p - md$, либо $q = md - p$, каковые случаи все содержатся в формуле $a = dn \pm p$. Отсюда, кроме p, никакое другое [число] не существует».

№ 131, л. 57 об.

«Теорема. Формула $a^2 + a + 1$ может делиться на $p^2 + pq + qq$ в случаях, когда

$$a = n(p^2 + pq + q^2) + (p + q)y + p\left(\frac{py \pm 1}{q}\right) \begin{matrix} +0 \\ -1 \end{matrix}$$

или

$$a = n(p^2 + pq + q^2) - (p + q)y - p\left(\frac{py \mp 1}{q}\right) \begin{matrix} +0 \\ -1 \end{matrix}.$$

Следовательно, для такого y должно быть найдено число, которое сделает целым [выражение] $\frac{py \pm 1}{q}$. В последнем случае a priori сами y различаются только знаком.

Задача. Найти случай, в котором формула $a^2 + \beta ab^2 + \gamma b^2$ может делиться на такую формулу: $p^2 + \beta pq + \gamma q^2$.

Решение. Получается

$$\frac{a^2 + \beta ab + \gamma b^2}{p^2 + \beta pq + \gamma q^2} = x^2 + \beta xy + \gamma y^2,$$

а также

$$2a + \beta b = \sqrt{4(p^2 + \beta pq + \gamma q^2)(x^2 + \beta xy + \gamma y^2) + (\beta^2 - 4\gamma)b^2} =$$

$$= (2p + \beta q)x + z .$$

Тогда будет: $z = (\beta p + 2\gamma q)y$, а $x = \frac{py \pm b}{q}$.

Итак, если взять какое-либо число вместо y, которое сведет $\frac{py \pm b}{q}$ к целому числу, будет получена величина для x, найдя которую, получим:

$$a = (\beta p + \gamma q)y + p\left(\frac{py \pm b}{q}\right)\begin{matrix}+0\\-\beta b\end{matrix},$$

а также частное

$$x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = \frac{(p^2 + \beta pq + \gamma q^2)y^2 \pm 2(p \pm \beta q)by + b^2}{q^2}.$$

Здесь следует заметить, что вместо y может быть взято как отрицательное, так и положительное число. Если найдена одна величина для a и ввести в рассмотрение v, то [условию] также удовлетворяет такая форма: $a = (p^2 + \beta pq + \gamma q^2)n + v$. Что и требовалось доказать».

№ 131, л. 58

«З а д [ач а]. Исследовать, имеет ли $2^{2n} + 1$ делители, и определить их. Ищем numerus pronicus, положим $A^2 + A$, число, которое, будучи отнято от 2^{2n-2}, дает в остатке квадрат: B^2.

Тогда будет либо 1) $py = A$, либо 2) $py = A + 1$ и $qy = 2^{n-1} \pm B$. Далее в 1-м случае $\frac{py \pm 1}{q}$, а во 2-м случае $\frac{py - 1}{q}$ должно быть простым числом; если найти для p, q и y целые числа, делитель будет $p^2 + q^2$. Что и требовалось доказать.

И л и к о р о ч е. Ищем величины p, q, y и z [такие], чтобы было $py = A$, $qz = A + 1$, $qy = 2^{n-1} \pm B$. И будет в целых числах $p^2 + q^2$ делителем самого $2^{2n-1} \pm B$».

№ 131, л. 58 об.

«З а д а ч а. Найти делители самого $4c^2 + 1$.

Р е ш е н и е. Пусть $a = 2c$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $b = 1$. Поэтому будет

$$2c = qy + \frac{p^2y + p}{q} \quad \text{или} \quad q^2 = \frac{2cq - p^2y - p}{y}.$$

И отсюда

$$q = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - p^2y^2 - py}}{y}.$$

Итак, ищем numerus pronicus $A^2 + A$, которое, будучи отнято от c^2, дает в остатке квадрат, положим B^2. Тогда ищем целые числа p, q, y и z [такие], чтобы было $py = A$, $qz = A + 1$, $qy = c \pm B$. Если они будут найдены, $p^2 + q^2$ будет делителем самого $4c^2 + 1$. Ч[то] и т[ребовалось] д[оказать].

Следовательно, p должно быть делителем самого A, а q — делителем как самого $A + 1$, так и самого $c \pm B$ и также y должно быть делителем как самого A, так и самого $c \pm B$. И далее z — делитель самого $A + 1$.

Пусть должны быть найдены делители числа 10 001; будет $c = 50$, $A = 32$, $B = 38$, откуда:

I. $py = 32$, $qz = 33$, $qy = 12$. Следовательно, $y = \begin{cases} 1 \\ 2, \\ 4 \end{cases}$ а $q = \begin{cases} 12 \\ 6 \\ 3 \end{cases}$; будет, следовательно, $y = 4$, $z = 11$, $q = 3$, $p = 8$. Итак, делитель будет $p^2 + q^2 = 73$.

II. $py = 32$, $qz = 33$, $qy = 88$. Следовательно, $q = \begin{cases} 1 \\ 11 \end{cases}$, а $y = \begin{cases} 88 \\ 8 \end{cases}$. Итак, $q = 11$, $y = 8$, $p = 4$. Следовательно, другой делитель будет 137.

Итак, 101 не имеет делителя, так как никакое numerus pronicus, будучи отнято от $25 = c^2$, не дает в остатке квадрата.

Иначе. Для нахождения делителей самого $4c^2 + 1$ ищем четный квадрат $4BB$, который, будучи отнят от $4c^2 + 1$, даст в остатке квадрат $(2A + 1)^2$. Когда это проделано, будет, как раньше: $py = A$, $qz = A + 1$, $qy = c \pm B$. В целых числах делителем будет $p^2 + q^2$.

Задача. Найти делители формулы $a^2 + 1$.

Решение. Ищем квадрат B^2, который, будучи отнят от $a^2 + 1$, дает в остатке нечетный квадрат $(2A + 1)^2$. Тогда $py = A$, $qz = A + 1$ и $qy = \frac{a \pm B}{2}$. Если a есть нечетное число $2n + 1$, то было $B = 1$, $A = n$, а также $py = n$, $qz = n + 1$ и $qy = n$, а следовательно, $q = 1$, $y = n$, $p = 1$. Следовательно, делитель равен 2.

Или $py = n$, $qz = n + 1$, $qy = n + 1$. Следовательно, $y = 1$, $p = n$, $q = n + 1$. Итак, делитель есть $2n^2 + 2n + 1$».

№ 131, л. 59

«Так как $\sqrt{a^2 + 1 - B^2}$ есть квадрат, ищем такое четное число C, чтобы $1 + 2aC - C^2$ было квадратом, равным $(2A + 1)^2$ и $B = a - C$. И тогда станет, как раньше, $py = A$, $qz = A + 1$ и $qy = \frac{a \pm B}{2}$; $p^2 + q^2$ будет делителем самого $a^2 + 1$.

Пусть дано число 40 001. Будет $a = 200$ и станет $C = 24$ и $A = 47$, а также $B = 176$. Следовательно, должно быть $py = 47$, $qz = 48$ и $qy = 12$ или $qy = 188$. Следовательно: I. $y = 1$, $p = 47$ и $q = 12$ и делитель 2353; II. $y = 47$, $p = 1$, $q = 4$ и делитель 17.

Задача. Найти делители формулы $a^2 + \beta ab + \gamma b^2$.

Решение. В первом случае имеет место $aq = \beta pqy + \gamma q^2 y + p^2 y + bp$ и q есть делитель самого $py + b$. Будет, следовательно,

$$q = \frac{a - \beta py \pm \sqrt{(a^2 - 2\beta apy + \beta^2 p^2 y^2 - 4ybpy - 4\gamma p^2 y^2)}}{2\gamma y}.$$

Пусть $py = A$. Ищем величину самого A, чтобы $a^2 - 2\beta\alpha A - 4\gamma bA + (\beta^2 - 4\gamma)A^2$ было квадратом, скажем B^2. Тогда найдутся величины в целых числах для p, q, y и z, чтобы получилось $py = A$, $qz = A + b$ и $2\gamma qy = a - \beta A \pm B$. Для A должно быть взято такое число, чтобы $a - \beta A \pm B$ делилось на 2γ, что в специальных случаях может быть легко получено. Ч[то] и т[ребовалось] д[оказать].

По-другому, а также чтобы получалось легче. Так как в первом случае $2qay - 2\gamma q^2 y^2 - 2\beta pqy^2 - 2\beta py = 2p^2 y^2$, будет

$$py = \frac{-b - \beta qy \pm \sqrt{bb \pm 2\beta bqy + (\beta^2 - 4\gamma)q^2 y^2 + 4aqq}}{2}.$$

Полагаем $qy = C$ и ищем величину самого C, чтобы $bb + 2\beta bC + 4aC + (\beta^2 - 4\gamma)C^2$ стало квадратом B^2 так, чтобы $-b - \beta C \pm B$ было четным числом.

Будет

$$py = \frac{-b - \beta C \pm B}{2}, \quad qz = \frac{b - \beta C \pm B}{2}, \quad qy = C.$$

Если будут найдены целые величины для p, q, y и z, будет $p^2 + \beta pq + \gamma q^2$ делителем самого $a^2 + \beta ab + \gamma b^2$.

В другом случае [это] дает $aq = \beta py + \gamma q^2 y + p^2 y - bp - \beta bq$, где q является делителем самого $pq - b$. Будет, следовательно,

$$2aqy - 2\gamma q^2 y^2 + 2\beta bqy - 2\beta pqy^2 + 2bpy = 2p^2 y^2,$$

а также

$$py = \frac{b - \beta qy \pm \sqrt{b^2 + a\beta bqy + \beta^2 q^2 y^2 - 4\gamma q^2 y^2 + 4aqy}}{2}.$$

№ 131, л. 59 об.

«Полагается $qy = C$ и ищем величину для C, чтобы $b^2 + 2\beta bC + 4aC + (\beta^2 - 4\gamma)C^2$ стало квадратом B^2, чтобы $b - \beta C \pm B$ было четным числом.

Будет далее

$$py = \frac{b - \beta C \pm B}{2}, \quad qz = \frac{-b - \beta C \pm B}{2}, \quad qy = C.$$

Если будут найдены целые величины p, q, y и z, будет $p^2 + \beta pq + \gamma q^2$ делителем самого $a^2 + \beta ab + \gamma b^2$, что является вторым [делителем].

Будет, следовательно, также делитель $z^2 + \beta zy + \gamma y^2$, который дает первое решение; одно и то же действие представляют два делителя.

Пример. Ищем делители числа $475^2 + 1$. Так как это число четное, оно делится на 2 и ищем делители частного $228^2 + 229^2$. Станет, следовательно, $a = 228$, $b = 229$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$. Должен быть получен квадрат $229^2 + 4 \cdot 228C - 4C^2 = B^2$. Полагается $C = 114 + D$; будет

$$B = \sqrt{229^2 + 228^2 - 4D}, \quad py = \frac{229 + B}{2}, \quad qz = \frac{B - 229}{2}, \quad qy = 114 + D,$$

а также делители $p^2 + q^2$ и $y^2 + z^2$».

№ 131, л. 60

[Задача]. «Найти делители самого $4c^2 + b^2$. Будет $\beta = 0$, $a = 2c$, $\gamma = 1$. Следовательно, $B = \sqrt{b^2 + Bbc - 4C^2}$.

Полагается $c - C = D$ или $C = c - D$; будет

$$B = \sqrt{4c^2 + b^2 - 4D^2}, \quad py = \frac{b + B}{2}, \quad qz = \frac{B - b}{2}, \quad qz = c - D,$$

и делители $p^2 + q^2$ и $y^2 + z^2$.

Чтобы найти делители числа $4177 = 4 \cdot 32^2 + 9^2$, положим $py = \frac{9 + B}{2}$, $qz = \frac{B - 9}{2}$, $qy = 32 - D$, и $B = \sqrt{4177 - 4D}$ будет простым.

Чтобы найти делитель самого $9631 = 4 \cdot 110^2 + 219^2$, пусть будет $D = 72$, $B = 275$, $C = 110$, а также $b = 219$, $py = \frac{494}{2} = 247$, $qz = 28$, $qy = 38$.

Итак, $q = 2$, $y = 19$, $p = 13$, $z = 14$. Следовательно, делители суть $p^2 + q^2 = 173$ и $z^2 + y^2 = 557$.

Задача. Найти делители самого $a^2 + \gamma b^2$. Пусть будет $\beta = 0$ и $b^2 + 4aC - 4\gamma C^2 = B^2$.

Так же $C = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + \gamma b^2 - \gamma B^2}}{2\gamma}$. Если $a^2 + \gamma b^2 = A^2 + \gamma B^2$, будет $C = \frac{a \pm A}{2\gamma}$.

Так же $py = \frac{b + B}{2}$, $qz = \frac{B - b}{2}$, $qy = \frac{a \mp A}{2\gamma}$. Поэтому, если данное число двояким способом может быть разложено в такого рода форму, оно не будет простым.

Итак, если бы данное число N было [равно] $a^2 - b^2 = A^2 - B^2$, берется: $py = \frac{b + B}{2}$, $qz = \frac{B - b}{2}$ и $qy = \frac{A - a}{2}$; будет: $N = (pp - qq)(zz - yy)$.

Поэтому простое число в единственном случае может быть разностью двух квадратов».

Вторая запись, касающаяся этого круга вопросов, начинается с формулировки теоремы Ферма: «Простое число такой формы $4n + 1$ всегда может быть разложено на два квадрата, и если число $4n + 1$ не может быть разложено на два квадрата, то оно не простое». Эйлер сразу же добавляет: «Доказательство до сих пор отсутствует».

Далее следуют рассуждения, в которых легко усмотреть наброски к приведенной выше «попытке доказательства» этой теоремы из мемуара E228. Внимание Эйлера сразу привлекла теорема, впервые сообщенная Гольдбаху 6 мая 1747 г. [138, с. 272] и являющаяся основным пунктом этого доказательства: «Сумма двух взаимно простых квадратов не может делиться на число, которое не может быть разложено на два квадрата». Из записи явствует, что уже в это время, т. е. примерно в 1738 г., Эйлер владел в общих чертах ее строгим доказательством и во всяком случае стоял на верном пути.

Прежде всего доказано утверждение, которое содержится в предложении III мемуара E228: «Пусть $a^2 + b^2$ есть сумма двух квадратов и a и b взаимно просты; и также z — число, не разложимое на два квадрата. Полагается $a = mz \pm p$, $b = nz + q$. Должно будет $pp + qq$ делиться на z и $p < \frac{1}{2}z$, $q < \frac{1}{2}z$. Следовательно, $pp + qq < \frac{1}{2}zz$».

После этого Эйлер кратко формулирует следующий отсюда конечный результат, к которому в мемуаре E228 он приходит после ряда рассуждений, применяя метод неопределенного спуска (предложение III). Неполноту приведенного здесь доказательства Эйлер подчеркивает словами: «Не достаточно (non sufficit)».

Далее Эйлер переходит к другой теореме, которая в E228 не приводится и молчаливо предполагается доказанной: «Если какое-либо целое число не может быть разложено на два квадрата в целых числах, то и в дробях оно не может быть разложено». Он пишет: «Должно быть так. Если данное число $a = \frac{p^2 + q^2}{r^2}$, то будет $ar^2 = p^2 + q^2$. Следовательно, сумма двух квадратов делится на a. Если бы, следовательно, не существовало двух целых квадратов $p^2 + q^2$, когда p и $q < \frac{1}{2}a$, делящихся на a, то и на два дробных квадрата a также не могло быть разложено».

Продолжение этой записи на л. 118 об. позволяет проследить, как Эйлер шел к доказательству своей теоремы о том, что делитель суммы двух квадратов также является суммой двух квадратов. Испробовав доказательство, приведенное выше в данной записи и не удовлетворившее его, он подходит к вопросу с новой точки зрения.

Сделано следующее наблюдение: «Сумма двух квадратов, которая имеет делитель, есть $(a(pp + qq) + (mp + nq))^2 + (b(pp + qq) + np - mq)^2$. Делители же суть $pp + qq$, а также $(ap + bq + m)^2 + (bp + aq + n)^2$».

Эйлер предлагает новый путь исследования: «Поэтому, если можно доказать, что не существует никаких других сумм двух квадратов, имеющих делители, то одновременно следует, что всякий делитель суммы двух квадратов есть также сумма двух квадратов». В дальнейшем, однако, он возвращается на прежний путь.

Заметка завершается замечанием: «Если $pp + qq$ имеет делитель z, также $a^2 + 1$ будет иметь тот же делитель, потому что если бы было $qx - py \pm 1 = 0$, то будет $a = m(pp + qq) + (px + qy)$, поэтому будет $a^2 + 1 = m^2(p^2 + q^2)^2 + 2m(px + qy)(pp + qq) + (ppxx + qqyy + 2pqxy + 1)(pp + qq)(xx + yy)$, а также $2pqxy = qqxx + ppyy - 1$».

На следующей странице (л. 119) Эйлер отмечает, что если p и q взаимно просты, то всегда можно найти такие числа x и y, что $x = \frac{py \pm 1}{2}$. Для того чтобы $a^2 + b^2$ имело делитель $p^2 + q^2$, должно быть $a = m(p^2 + q^2) + px + qy$, причем $qx - py \pm c = 0$.

Данная запись интересна своим исследовательским характером. Она является первой по времени заметкой, в которой Эйлер непосредственно приступает к изучению вопросов, связанных с доказательством рассматриваемой теоремы Ферма. Если в первой из приведенных выше записей он коснулся этой теоремы лишь попутно, составив нужную ему для вычислений таблицу, то здесь уже ясно намечаются те способы, которыми она впоследствии доказана.

№ 132, л. 142

В этой записи Эйлер получает строгое доказательство теоремы Ферма, совпадающее с сообщенным в письме к Гольдбаху от 6 мая 1747 г. и в мемуаре E228. Доказательство проводится методом от противного.

Приводим содержание заметки.

«Т е о р [ем а]. Всякий делитель суммы двух взаимно простых квадратов сам является суммой двух квадратов. Предполагается, что делитель a данной суммы двух квадратов $A^2 + B^2$, где A и B взаимно просты, не может быть представлен суммой двух квадратов. Тогда и частное $\frac{A^2 + B^2}{a}$ не будет суммой двух квадратов. Поскольку $A^2 + B^2$ делится на a, то найдется другая сумма двух квадратов P, такая, что $P < \frac{1}{2}a^2$, и делящаяся на a. Если положить $\frac{P}{a} = b$, то $b < \frac{1}{2}a$ и b не будет суммой двух квадратов, т. е. $b \neq x^2 + y^2$.

Тогда найдется новая сумма двух квадратов $Q < \frac{1}{2}b^2$, делящаяся на b. Отсюда $\frac{Q}{a} = c$, $c < \frac{1}{2}b$ и c не является суммой двух квадратов.

Таким же способом получим сумму двух квадратов R, такую, что $R < \frac{1}{2}c^2$, $\frac{R}{c} = d$ и d не является суммой двух квадратов.

Продолжая таким образом, придем к меньшему числу, которое само не может быть представлено в виде суммы двух квадратов, но на которое делится сумма двух взаимно простых квадратов. В конце концов придем к сумме двух квадратов, делящейся на 3 (т. е. наименьшее число, не представимое суммой двух квадратов), которая в то же время $< \frac{1}{2} 9$, что невозможно. Теорема доказана».

В виде короллария Эйлер записывает: «Если какое-либо число измеряет сумму двух квадратов, оно само есть сумма двух квадратов».

Поскольку записная книжка № 132 датируется 1740—1745 гг., отсюда следует, что результаты, сообщенные в письме к Гольдбаху от 6 мая 1747 г., были получены значительно раньше. Об этом свидетельствует и следующая запись, находящаяся двумя листами ниже.

№ 132, л. 143 об.—144

В начале заметки сформулировано утверждение: «Сумма двух квадратов $a^2 + b^2$ не делится на $m^2 + n^2$, если не будет $a = mp + nq$ и $b = np - mq$, откуда следует, что, если сумма двух квадратов $a^2 + b^2$ делится на сумму двух квадратов $m^2 + n^2$, частое будет равно $p^2 + q^2$ и вследствие этого будет суммой двух квадратов».

Для доказательства этого утверждения Эйлер прежде всего доказывает теорему: «Если $a^2 + b^2$ делится на простое число $m^2 + n^2$, то либо $ma + nb$, либо $ma - nb$ делится на $m^2 + n^2$.

Действительно, пусть $a^2 + b^2$ делится на $m^2 + n^2$. Тогда на $m^2 + n^2$ будут делиться также $m^2a^2 + n^2a^2$ и $n^2a^2 + m^2b^2$. Производя почленное вычитание, получим, что выражение $m^2a^2 - n^2b^2$ делится на $m^2 + n^2$. Но $m^2a^2 - n^2b^2 = (ma + nb)(ma - nb)$. Следовательно, теорема доказана.

Отсюда легко выводится (королларий 1), что если $a^2 + b^2$ делится на простое число $m^2 + n^2$, то на это последнее будет также делиться либо $na - mb$, либо $na + mb$.

Действительно, тогда $m^2a \pm mnb$ делится на $m^2 + n^2$. Отнимая $m^2a \mp mnb$ от $m^2a + n^2a$, также делящегося на $m^2 + n^2$, получим, что $n^2a \pm mnb$ и, следовательно, $n^2a \pm mnb$ и $na \pm mb$ делятся на $m^2 + n^2$».

В королларии 2 Эйлер, полагая $\frac{ma \pm nb}{m^2 + n^2} = p$ и $\frac{na \mp mb}{m^2 + n^2} = q$, получает: $mp + nq = a$ и $np - mq = \pm b$. Следовательно, $a^2 + b^2 = (m^2 + n^2)(p^2 + q^2)$.

Таким образом (королларий 3), ясно, что если сумма двух взаимно простых квадратов делится на число вида $m^2 + n^2$, то частное будет также суммой двух квадратов.

В королларии 4 замечено: «Не может быть, чтобы произведение простого числа вида $m^2 + n^2$ на число z (не являющееся суммой двух квадратов в целых числах) было суммой двух квадратов».

№ 132, л. 258—260

Первые три листа записи занимает таблица тех простых чисел a, при которых выражение $a^2 + 1$ имеет данный простой делитель. В таблице приведены все простые числа вида $4n + 1$, представленные суммами двух квадратов, кончая числом 2297, и все значения a, для которых выражение $a^2 + 1$ делится на указанные числа.

Таким образом, Эйлер второй раз составляет таблицу (см. описанную выше заметку из записной книжки № 131, л. 57), однако по сравнению с первой она намного более обширна: в первом случае она доведена до $293 = 17^2 + 2^2$, $a = 293n \pm 138$, во втором — до $2297 = 19^2 + 44^2$, $a = 2297n \pm 365$.

Следует заметить, что эта таблица, опубликованная в мемуаре E283 («Об очень больших простых числах»), также меньше, чем в данной заметке: она содержит значения до $1997 = 29^2 + 34^2$. В заметке Эйлер приводит также простое число $178\,481 = 160^2 + 391^2$ и значение $a = 178\,481n \pm 10\,042$, при котором $a^2 + 1$ делится на это число. В опубликованной работе оно не встречается.

Отсюда ясно видно, что Эйлер составлял таблицы по ходу работы, для необходимых ему экспериментов с числами.

Здесь же, как и в первой заметке, Эйлер повторяет рассуждение, воспроизведенное затем в мемуаре E283: «Пусть простое число $4m + 1 = p^2 + q^2$, ищем подходящую дробь $\frac{p}{q}$ так, чтобы было $\frac{p}{q} \neq \frac{f}{g}$ и $pg - fq = 1$. Тогда $a = (4m + 1)n \pm (fp + gq)$». Рассуждение подробно иллюстрируется на примере числа $853 = 18^2 + 23^2$, для которого оказывается $a = 853n \pm (7 \cdot 18 + 9 \cdot 23)$.

В данной записи рассматриваются и более общие задачи: 1) найти a и b, чтобы $a^2 + pb^2$ делилось на $m^2 + pn^2$; 2) найти p и q, чтобы $p^2 + pq + q^2$ делилось на $a^2 + ab + b^2$. На этих задачах мы остановимся позднее.

№ 132, л. 258 об.

Здесь решается задача, которая по опубликованным работам известна лишь для частного случая: «Найти a, b, для которых выражение $a^2 + pb^2$ делится на $m^2 + pn^2$». Эйлер утверждает, что, для того чтобы $a^2 + pb^2$ делилось на $m^2 + pn^2$, должно быть $a = \alpha m - \gamma pn = \alpha m + \gamma pn$, $b = \gamma m - \alpha n = \alpha n - \gamma m$.

Если $b = 1$, то дроби $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{m}{n}$ должны быть подходящими, откуда $a = \alpha m - \gamma np$.

Положим, что b — данное число. Пусть $\frac{r}{s}$ есть подходящая дробь к $\frac{m}{n}$, следовательно, $rn - ms = \pm 1$. Тогда $brn - bms = \pm b$ и $a = bmr - bspn$.

Далее рассматривается пример: $a^2 + 3$ должно делиться на $m^2 + 3n^2$. Ищем подходящую дробь $\frac{r}{s} \neq \frac{m}{n}$, и тогда $a = mr + 3ns$. В частности, если $m^2 + 3n^2 = 37 = 5^2 + 3{\cdot}2^2$, то $\frac{r}{s} = \frac{2}{1}$ и $a = 2{\cdot}5 + 3{\cdot}2 = 16$.

Выражение $a^2 + 3 = 259$ делится на 37».

№ 132, л. 260

Задача. «Найти x, чтобы $xx + aa$ делилось на $mm + nn$». (Предполагается, очевидно, что $m^2 + n^2$ — простое).

Для решения задачи используется полученный ранее результат: «Если $x^2 + a^2$ делится на $m^2 + n^2$, то найдутся числа p и q такие, что $x = mp + nq$ и $\pm a = mq - np$. Тогда $p = \frac{mq \pm a}{n}$. Далее m делится на n и частные будут α, β, γ, δ».

ТЕОРЕМА: «ЕСЛИ ЧИСЛО ДВОЯКИМ ОБРАЗОМ ПРЕДСТАВИМО В ВИДЕ СУММЫ ДВУХ КВАДРАТОВ, ТО ОНО НЕ ПРОСТОЕ»

Вопрос о разложении на множители числа, которое может быть представлено в виде суммы двух квадратов двояким способом, впервые предложил Френикль де Бесси в письме к Ферма от 2 августа 1641 г. [121, т. 2, с. 232]. Теорему о том, что такое число является составным, сформулировал в 1647 г. Мерсенн [142, с. 360].

Доказательство этой теоремы принадлежит Эйлеру. В уже упоминавшихся письмах к Гольдбаху от 16 февраля 1745 г. и 6 мая 1747 г. он утверждает, что число $N = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ — составное, причем

$$N = \frac{[(a-c)^2 + (b-d)^2][(a+c)^2 + (b-d)^2]}{4(b-d)^2}.$$

В мемуаре E228 Эйлер дал доказательство теоремы. Полагая $N = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ ($a > b$, $c > d$, $a \neq c$, $b \neq d$), он принимает $a = c + x$, $d = b + y$. Тогда $2cx + x^2 = 2by + y^2 = xyz$. Отсюда $c = \frac{yz - x}{2}$, $b = \frac{xz - y}{2}$, $a = \frac{yz + x}{2}$, $d = \frac{xz + y}{2}$. Таким образом,

$$N = a^2 + b^2 = \frac{x^2z + y^2z + y^2 + x^2}{4} \quad \text{или} \quad N = \frac{(y^2 + x^2)(1 + z^2)}{4}.$$

Если $x^2 + y^2$ не делится на 4, то $x^2 + y^2$ — делитель N. Если $x^2 + y^2$ делится на 4, то его сомножитель является делителем N.

В своем незаконченном «Трактате по теории чисел» (E792) Эйлер привел два доказательства этой теоремы.

«1. Пусть $N = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Отсюда $a^2 - c^2 = d^2 - b^2$, $d + b = \frac{m(a + c)}{n}$, $d - b = \frac{n(a - c)}{m}$. Следовательно, $b = \frac{m(a + c)}{2n} - \frac{n(a - c)}{2m}$, откуда

$$N = a^2 + b^2 = \frac{m^2 + n^2}{4m^2n^2}\left[n^2(a - c)^2 + m^2(a + c)^2\right] =$$

$$= \frac{m^2 + n^2}{4m^2}\left[(a - c)^2 + (b + d)^2\right],$$

где знаменатель не может делить другие сомножители».

2. Второе доказательство приводится на полях: «Так как $a^2 - b^2 = d^2 - b^2$, то $(a + c)(a - c) = (b + d)(b - d) = pqrs$, откуда $a = \frac{pq + rs}{2}$, $b = \frac{pr - qs}{2}$ и $a^2 + b^2 = \frac{1}{4}(p^2 + s^2)(q^2 + r^2)$».

В записных книжках мы встречаем три заметки, в которых рассматривается данная теорема.

№ 131, л. 118

«Пусть $N = p^2 + q^2 = r^2 + s^2$, где p, q, r, s различны. Положим $r = p + m$, $s = q - n$. Тогда $2nq = 2mp + m^2 + n^2$ и $q = \frac{2mp + m^2 + n^2}{2n}$. Следовательно, $p^2 + q^2 = \frac{4p^2(m^2 + n^2) + 4mp(m^2 + n^2) + (m^2 + n^2)^2}{4n^2}$».

Отсюда Эйлер делает вывод, что $N = p^2 + q^2$ имеет делитель $m^2 + n^2$.

№ 134, л. 60

Эта запись интересна тем, что в ней содержится доказательство теоремы, фигурирующее только в «Трактате по теории чисел» (E792), время написания точно неизвестно. Заметка, очевидно, является подготовительной к трактату.

Однако заметка более обширна, чем опубликованное рассуждение. В ней Эйлер показывает также, что предполагаемый способ доказательства не может применяться для более общего случая.

«Пусть $N = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, тогда будет $a^2 - c^2 = d^2 - b^2 = mnpq$, где $a - c = mn$, $a + c = pq$, $d - b = mp$, $d + b = nq$.

Следовательно, $a = \frac{mn + pq}{2}$, $b = \frac{nq - mp}{2}$ и отсюда $a^2 + b^2 = \frac{(m^2 + n^2)(n^2 + p^2)}{4}$».

Далее Эйлер замечает: «Если $N = a^2 + \alpha b^2 = c^2 + \alpha d^2$ и будет $a^2 - c^2 = \alpha(d^2 - b^2) = \alpha mnpq$, то $a - c = \alpha mn$, $a + c = pq$, $d - b = mp$, $d + b = nq$, следовательно,

$$N = \frac{\alpha^2 m^2 n^2 + p^2 q^2 + n^2 q^2 + \alpha m^2 p^2}{4} = \frac{(\alpha m^2 + q^2)(\alpha n^2 + p^2)}{4}.$$

Но если α отрицательно, может оказаться, что один из сомножителей равен 4, и тогда отсюда не следует, что N — составное».

№ 134, л. 74

«Теорема. Если $N = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, множители будут $(a \pm c)^2 + (b \pm d)^2$, $(a \pm d)^2 + (b \pm c)^2$».

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЕЛ ВИДА $x^2 + 2y^2$

Числа, представимые формой $x^2 + 2y^2$, Эйлер исследовал теми же методами, что и числа вида $x^2 + y^2$. Их свойства рассматриваются в нескольких его статьях, в том числе в мемуарах «Теоремы о делителях, содержащихся в такой форме: *paa* $\pm$ *qbb*» (E164), «О пользе наблюдений в чистой математике» (E256) и др. Немало внимания уделено им и в переписке Эйлера с Гольдбахом.

В первом из названных сочинений, где числа вида $x^2 + 2y^2$ рассматриваются как частный случай чисел $pa^2 + qb^2$, доказаны три теоремы:

«1) Все простые делители чисел, содержащихся в форме $a^2 + 2b^2$, суть либо 2, либо числа, содержащиеся в форме $8m + 1$, либо в $8m + 3$.

2) Обратно, все простые числа, содержащиеся в форме $8m + 1$ либо $8m + 3$, суть числа формы $a^2 + 2b^2$.

3) Никакое число вида $a^2 + 2b^2$ не может делиться ни на какое число такой $8m - 1$ или такой $8m - 3$ формы».

В мемуаре E256 Эйлер доказывает следующие основные теоремы:

«I. Если число N есть число вида $2a^2 + b^2$, то $2N$ будет числом того же вида.

Королларий. Если N представимо в виде $2a^2 + b^2$ несколькими способами, то и $2N$ имеет то же свойство.

II. Если четное число $2N$ есть число вида $2a^2 + b^2$, то также его половина есть число той же формы.

III. Если числа M и N имеют вид $2a^2 + b^2$, то их произведение также есть число той же формы. При этом MN представимо в виде $2a^2 + b^2$ двояким способом. Если $M = N$, то $M^2 = 2p^2 + q^2$ при $p = 0$ и $q = 2a^2 + b^2$ или $p = 2ab$ и $q = 2a^2 - b^2$».

Как заметил И. Г. Мельников [46], следует учитывать только второе представление.

Соответственно для L, M, N, имеющих форму $2a^2 + b^2$, произведение $LMN = 2x^2 + y^2$ представимо в таком виде двояким способом. Отмечается также случай четырех сомножителей.

«IV. Число, представимое в виде $2a^2 + b^2$ двояким способом, не является простым.

V. Если число вида $2a^2 + b^2$ делится на простое число той же формы, то частное также есть число того же вида.

VI. Если число вида $2a^2 + b^2$ делится на число, которое не содержится в этой форме, тогда частное не является ни простым числом вида $2a^2 + b^2$, ни произведением простых сомножителей такого вида.

VII. Если число вида $2a^2 + b^2$ имеет делитель p (корни a и b делятся на p), то найдется другое число той же формы, которое $< \frac{3}{4}p^2$ и делится на p.

VIII. Если простое число не содержится в форме $2a^2 + b^2$, но является делителем какого-либо числа этого вида (a и b не делятся на него) , тогда можно найти другое число, также простое, меньшее первого и не содержащееся в этой форме, которое также является делителем какого-либо числа той же формы, не будучи делителем его корней.

IX. Не существует числа вида $2a^2 + b^2$, где a и b взаимно простые, которое делилось бы на какое-либо простое число, не содержащееся в той же форме.

X. Если число вида $2a^2 + b^2$ единственным образом может быть представлено в такой форме, причем a и b взаимно просты, то это число — простое или (как заметил И. Г. Мельников) квадрат простого.

XI. Никакое число, содержащееся в формулах $8n - 1$, $8n - 3$, не делится на число вида $2a^2 + b^2$, где a и b взаимно просты».

Отсюда следует, что простое число вида $2a^2 + b^2$ содержится либо в ряду $8n + 1$, либо в $8n + 3$.

«XII. Если какое-либо число, содержащееся в одной из форм $8n + 1$ и $8n + 3$, не может быть представлено в виде $2a^2 + b^2$, то оно не простое; если единственным способом, то простое; если более чем одним способом, то составное.

XIII. Если число n никаким способом не может быть представлено в виде совокупности квадрата и треугольного числа, то число $8n + 1$ не есть простое число.

XIV. Если число n не может быть никаким способом представлено в виде совокупности треугольного числа и удвоенного треугольного, то число $8n + 3$ точно не есть простое».

Здесь еще нет доказательства теоремы Ферма о том, что всякое простое число вида $8n + 1$ или $8n + 3$ выражается формой $2a^2 + b^2$. Она доказана в мемуаре E449.

Из опубликованных работ Эйлера видно, что исследованием чисел вида $x^2 + 2y^2$ он занимался на протяжении многих лет, интересуясь ими с разных точек зрения. Записные книжки подтверждают это и позволяют проследить ход его работы.

Ясно, что свойства чисел вида $x^2 + 2y^2$ Эйлер изучал одновременно с решением других вопросов, возникающих при исследовании чисел вида $mx^2 + ny^2$ для различных частных значений m и n. Общие результаты он нередко получал на основе наблюдений, казалось бы, относящихся к специальным случаям. Очевидно, что интерес к числам вида $x^2 + 2y^2$, $x^2 + 3y^2$ в значительной мере связан с попытками доказать теорему Баше—Ферма о представимости любого числа в виде суммы четырех или меньше квадратов (см. ниже).

Приводим некоторые из этих заметок.

№ 133, л. 133 об., 168 об.

Основные результаты, относящиеся к числам вида $2a^2 + b^2$, в данной записи Эйлер формулирует как королларии к общей теореме: «Если $\alpha a^2 + \beta b^2$ делится на простое число вида $\alpha p^2 + \beta q^2$, частное будет числом того же вида».

Формулируются следующие утверждения:

«1) Если $2a^2 + b^2$ делится на простое число вида $2p^2 + q^2$, то частное есть число вида $2m^2 + n^2$.

2) Следовательно, если частное $\frac{2a^2 + b^2}{2p^2 + q^2}$ не будет числом вида $2m^2 + n^2$, то $2p^2 + q^2$ не будет простым числом. Ибо если дано, что частное не есть число $2m^2 + n^2$, то $\frac{2a^2 + b^2}{\mathfrak{R}}$ не есть простое число вида $2p^2 + q^2$, $\frac{2a^2 + b^2}{2p^2}$.

3) Так как a и b могут быть выбраны так, что $2a^2 + b^2 < \frac{3}{4}(2p^2 + q^2)^2$, то, следовательно, $\mathfrak{R} < \frac{3}{4}(2p^2 + q^2)$». Эта формулировка не точна. Здесь имеется в виду теорема VII из мемуара E256. «Если число вида $2a^2 + b^2$ делится на p, причем a и b не делятся на p, то найдется другое число того же вида, меньшее $\frac{3}{4}p^2$ и делящееся на p».

Далее приведены рассуждения, которые затем воспроизводятся в следствии из этой теоремы: «$\frac{2a^2 + b^2}{2p^2 + q^2} = \mathfrak{R}$. Найдется другое число $2k^2 + l < 2a^2 + b^2$, такое, что $2k^2 + l^2 < \frac{3}{4}(2p^2 + q^2)^2$ и $(2k^2 + l):(2p^2 + q^2)$.

Отсюда $\dfrac{2k^2+l^2}{2p^2+q^2} < \dfrac{3}{4}(2p^2+q^2)$, но $2k^2+l^2 < 2a^2+b^2$ и поэтому $\mathfrak{N} = \dfrac{2a^2+b^2}{2p^2+q^2} < \dfrac{2k^2+l^2}{2p^2+q^2} < \dfrac{3}{4}(2p^2+q^2)$».

4) Доказана теорема: «Если произведение двух сомножителей есть число вида $2a^2+b^2$ и один из этих множителей есть простое число такого вида, то и второй множитель есть число такого же вида».

«Пусть N обозначает число вида $2p^2+q^2$ и $2a^2+b^2=\alpha\beta$. Если α равно простому числу вида N, то и β будет простым числом вида N. Если β не есть число вида N, тогда и α не будет ни числом вида N, ни произведением чисел вида N.

Действительно, пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ суть простые числа вида $2m^2+n^2$. Если бы было $\alpha = \mathfrak{C}\mathfrak{B}$ и β не имело бы вида N, то было бы $2a^2+b^2 = \mathfrak{C}\mathfrak{B}$; поэтому $\mathfrak{B}\beta$ имеет форму N».

Здесь Эйлер имеет в виду составное число вида $2k^2+l^2$. «Следовательно, — заключает он, — β будет иметь также ту же форму, что противоречит предположению».

5) Если A, B, C, D — простые числа вида $2m^2+n^2$ и доказано, что $\dfrac{A}{\mathfrak{B}} = B$ или $A = \mathfrak{B}B$, то имеет место теорема: «Пусть $2a^2+b^2$ делится на $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$; частное есть A».

Имеется в виду, что если число вида $2a^2+b^2$ делится на произведение простых чисел такого вида, то частное есть также число того же вида.

Доказательство. Пусть частное $\dfrac{2a^2+b^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = \mathfrak{D}$. Следовательно, $\dfrac{2a^2+b^2}{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}\mathfrak{D} = A$. Что произведение двух простых чисел вида $2m^2+n^2$ есть число того же вида, Эйлер считает известным и отсюда, согласно предыдущему, получает $\mathfrak{D} = \dfrac{A}{\mathfrak{B}} = B$. Таким же образом, если $\dfrac{2a^2+b^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}$, то $\mathfrak{D} = A$.

Далее следуют два короллария:

«1) Пусть A', B', C', D' — числа, не содержащиеся в форме $2m^2+n^2$, тогда частное не будет равно $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$... и будет, следовательно, иметь простой сомножитель $\mathfrak{A}$». Другими словами, если число, представимое $2a^2+b^2$, имеет делитель, не содержащийся в форме $2a^2+b^2$, то и частное не содержится в этой форме.

«2) Так как $\dfrac{2a^2+b^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}$ или $\dfrac{2a^2+b^2}{\mathfrak{A}} = A$, где A есть либо простое, либо составное число, [тогда] если A простое, то $A = \mathfrak{B}$, если составное, то либо $A = \mathfrak{A}\mathfrak{D}$, либо $A = \mathfrak{A}'\mathfrak{D}$. В первом случае $\mathfrak{D} = B$, во втором $\mathfrak{D}$ — простое и потому равно 2, либо не простое, а потому, очевидно, должно исследоваться не этим способом».

№ 133, л. 134, 134 об., а также № 131, л. 156, 118; № 138, л. 109, 151; № 139, л. 94 об., 97; № 140, л. 91

В заметке предлагается доказательство теоремы: «Если $N = 2a^2 + b^2$ и $N = 2a^2 + d^2$, то оно не является простым числом». Доказательство то же, что и в мемуаре E256.

№ 133, л. 168

Прежде всего сформулирована теорема: «Сумма двух биквадратов $a^4 + b^4$ есть число вида $p^2 + 2q^2$, потому что $a^4 + b^4 = (a^2 - b^2)^2 - 2a^2b^2$.

Так как число $p^2 + 2q^2$ не имеет другого простого делителя, кроме чисел ряда $x^2 + 2y^2$, то всякое простое число вида $8n + 1$ имеет вид $x^2 + 2y^2$.

Действительно, $a^{8n} - b^{8n}$ делится на $8n + 1$, согласно малой теореме Ферма. Но $a^{8n} - b^{8n} = (a^{4n} - b^{4n})(a^{4n} + b^{4n})$, следовательно, в некоторых случаях $a^{4n} + b^{4n}$, т. е. сумма двух биквадратов, делится на простое число вида $8n + 1$. Однако, по доказанному, сумма двух биквадратов есть число вида $p^2 + 2q^2$, а все делители таких чисел содержатся в той же форме. Следовательно, и простое число $8n + 1$ есть число вида $p^2 + 2q^2$».

Таким образом, из этой записи следует, что Эйлер пытался доказать теорему Ферма о том, что всякое простое число вида $8n + 1$ выражается формулой $p^2 + 2q^2$, нестрогим способом, аналогичным тому, какой он применил в E228 для доказательства теоремы о том, что всякое простое число вида $4n + 1$ есть сумма двух квадратов. Эта «попытка доказательства» для данного случая была опубликована в мемуаре E256, где Эйлер замечает: «Каким образом это можно доказать, я все еще не представляю».

Теорему о представимости всякого простого числа вида $8n + 1$ формой $p^2 + 2q^2$ Эйлер доказал в 1774 г. в мемуаре «Доказательства об остатках, получающихся от деления степеней на простые числа» (E449). Рассматриваемая запись внесена между 1749 и 1753 гг.

№ 134, л. 62

В этой записи среди других приводится теорема, сформулированная в мемуаре E256: «Если $8n + 1 = pp + 2qq$ есть простое число, то равенство утверждает, что $n = \frac{aa \pm a}{2} + bb$. Следовательно, если n не является совокупностью квадрата и треугольного числа, то $8n + 1$ не будет простым». На следующем листе приведена таблица этих чисел.

№ 134, л. 65

Формулируется теорема: «Никакое число вида $8n - 1$ или $8n - 3$ не является делителем числа $2aa + bb$».

Доказательство проводится от противного: «Так как $2aa + bb$ может быть взято $< \frac{3}{4}$, делитель, частное, если деление проведено, будет меньше делителя и формы $8n - 1$ или $8n - 3$; тогда будут существовать меньшие числа формы $8n{}^{-1}_{-3}$, которые были бы делителями формы $2aa + bb$; они имеют форму $8N{}^{+1}_{-3}$, что нелепо».

Заметка по содержанию связана с предыдущими, и поэтому они должны рассматриваться вместе. Как и предыдущая заметка, они относятся к мемуару E256.

№ 134, л. 74

При условии, что $N = a^2 + 2b^2 = c^2 + 2d^2$ и, следовательно, N не является простым, ищутся его множители. Сделана попытка доказательства теоремы: «Если $N = aa + 2bb = cc + 2dd$, множитель будет $(a \pm \pm c)^2 + 2(b \pm d)$, следовательно, множитель $aa \pm 2ac + cc + 2bb \pm 4bd + + 2dd = aa + 2bb \pm ac \pm 2bd$ или множитель $a(a \pm c) + 2b(b \pm d)$».

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЕЛ ВИДА $a^2 + 3b^2$

В сданном в печать в 1744—1746 гг. и опубликованном в 1751 г. мемуаре «Теоремы о делителях чисел, содержащихся в такой форме: $pa^2 \pm qb^2$» (E164) Эйлер привел без доказательства утверждение, впервые сформулированное Ферма [121, т. 2, с. 403], о том, что числа вида $a^2 + 3b^2$ выражаются в виде $6n + 1$ и не могут быть выражены в виде $6n - 1$.

Использованы свойства чисел вида $a^2 + 3b^2$ и в работе «Общее решение некоторых диофантовых задач, которые обычно считаются допускающими только частные решения» (E255) при решении задачи о нахождении троек кубов целых чисел, сумма которых есть куб. Здесь (также без доказательства) Эйлер утверждал, что числа вида $a^2 + 3b^2$ не имеют других делителей, кроме тех, которые содержатся в той же форме.

В мемуаре «Дополнение некоторых арифметических теорем, которые нередко лежат в основе доказательства» (E272), опубликованном в 1763 г., Эйлер строго доказал все теоремы о свойствах чисел вида $a^2 + 3b^2$, аналогичных доказанным им относительно чисел вида $a^2 + b^2$ и $a^2 + 2b^2$.

К этим вопросам он возвращался в трактате E241 и в работах «Новые доказательства о разложении чисел на квадраты» (E445) и «Доказательства об остатках, возникающих при делении степеней на простые числа» (E449), опубликованных в 1773—1774 гг.

Как уже отмечалось, вопрос о числах вида $a^2 + 3b^2$ связан с решением задачи о представимости чисел в виде сумм четырех или менее квадратов.

В записных книжках наиболее ранняя заметка, касающаяся чисел вида $a^2 + 3b^2$ и датированная примерно 1741—1742 гг., внесена Эйлером в связи с решением задачи о представлении чисел в виде суммы трех квадратов. Приведем эту большую запись полностью, так как из нее наиболее ясно видна связь между отдельными вопросами этого круга.

№ 132, л. 98 об.—102

«Теорема. Всякое простое число вида $3n + 1$ представимо такого вида формой: $a^2 + ab + b^2$.

Доказательство. Если $3n + 1$ есть простое число, то $p^{3n} - q^{3n}$ делится на $3n + 1$. Следовательно, либо $p^n - q^n$, либо $p^{2n} + p^n q^n + q^{2n}$ может на него разделиться. Так как $p^n - q^n$ не всегда делится на $3n + 1$, найдутся случаи, в которых $p^{2n} + p^n q^n + q^{2n}$ или $x^2 + xy + y^2$ будет делиться на $3n + 1$; но эта форма не допускает других делителей, кроме тех, которые содержатся в форме $a^2 + ab + b^2$. Следовательно, простое число вида $3n + 1$ всегда содержится в форме $a^2 + ab + b^2$. Что и требовалось доказать.

Королларий. Следовательно, всякое простое число вида $3n + 1$ может быть разложено на четыре квадрата, из которых три равны между собой.

Задача. Найти случаи, в которых форма $a^2 + a + 1$ делится на простое число вида $3n + 1$.

Решение. Простое число вида $3n + 1$ представляется в форме $p^2 + pq + q^2$, и берутся целые числа y и z так, чтобы $z = \frac{py + 1}{q}$, тогда $a = (3n + 1) + qy + p(y + z)$ и форма $a^2 + a + 1$ делится на $3n + 1$. Что и требовалось доказать.

Пример 1. Пусть $3n + 1 = 19 = 3^2 + 2\cdot3 + 2^2$. Будет $p = 3$, $q = 2$, $z = \frac{3y + 1}{2}$. Будет $y = -1$ и z либо 1, либо 2, т. е. $y + z = 3$, следовательно, $a = 19m + 11$. Если $y = -1$, будет $z = -1$; если $p = 2$, $q = 3$, $z = \frac{2y + 1}{3}$, будет $y = 1$, $z = 1$ и $a = 19m + 7$.

Пример 2. Пусть $3n + 1 = 79 = 7^2 + 3\cdot7 + 3^2$. Будет $p = 7$, $q = 3$ и $z = \frac{7y + 1}{3}$, откуда $y = 2$, $z = 5$, $y + z = 7$ и $a = 79m + 35$. Или берется $p = 3$, $q = 7$, будет $z = \frac{3y + 1}{7}$ и $y = 2$, $z = 1$, $y + z = 3$, откуда $a = 79m + 23$.

Королларий. Если, следовательно, $a^2 + a + 1$ делится на $3n + 1$ в случае $a = (3n + 1)m + s$, то оно также сможет делиться в случае $a = (3n + 1)m + 3n - s$.

Теорема. Если $a^2 + ma + 1$ может делиться на $\alpha n + \beta$ в случае $a = s$, оно также сможет делиться в случае $a = \alpha n + \beta - m - s$.

Теорема. Пусть $4n + 3$ есть простое число, на него будет делиться $a^{4n+2} - 1$, т. е. либо $a^{2n+1} + 1$, либо $a^{2n+1} - 1$. Поэтому будет либо $2 \cdot 2^n + 1$ делиться на $4n + 3$, в каковом случае $4n + 3$ будет делителем формы $2a^2 + 1$, т. е. будет содержаться в форме $2p^2 + q^2$, либо $\frac{2p^2 + q^2}{2}$; и в этом случае также будет $4n + 3$ суммой четырех квадратов. Если же $2 \cdot 2^{2n} - 1$ делится на $4n + 3$, то исследуется, делится ли $5^{2n+1} + 1$ или $5^{2n+1} - 1$ на $4n + 3$. Если $5^{2n+1} + 1$ или $5 \cdot 5^{2n} + 1$ делится, то $4n + 3$ будет делителем формы $5a^2 + b^2$, т. е. $4n + 3$ будет числом вида $5p^2 + q^2$ или $\frac{5p^2 + q^2}{2}$, т. е. разлагается на четыре квадрата.

Если же $5 \cdot 5^{2n} - 1$ делится на $4n + 3$, тогда будет число $a \cdot a^{2n} + 1$ делящимся на $4n + 3$; и будет к тому же $4n + 3$ числом вида $ap^2 + q^2$ или $\frac{ap^2 + q^2}{2}$. Поэтому если a есть число, разлагающееся на три квадрата, то $4n + 3$ может быть разложено на четыре квадрата».

И далее: «Теорема. Если $a = 4n + 2$, то $a^{2n+1} + 1$ будет делиться на $4n + 3$, если оно — простое число. Потому что если $a = -1$, то $a^{2n} + 1$ может делиться на $4n + 3$, поэтому также $((4n + 3)m - 1)^{2n+1} + 1$ может [на него] делиться. Что и требовалось доказать.

Королларий. Следовательно, существует форма $((4n + 3)m - 1)a^2 + 1$, делящаяся на $4n + 3$, т. е. $4n + 3$ есть число вида $((4n + 3)m - 1)p^2 + q^2$ или его множитель. [Оно] будет содержаться в таких формах: $(4n + 2)p^2 + q^2$; $(8n + 5)p^2 + q^2$; $(3n + 2)p^2 + q^2$.

Теорема. Поскольку простое число $8n + 3$ есть делитель самого $2^{4m+1} + 1$, оно будет делителем формы $2a^2 + b^2$, т. е. само будет содержаться в форме $2p^2 + q^2$ и отсюда — разрешимо в трех квадратах.

Теорема. Поскольку всякое простое число вида $8n + 3$ представляется тремя нечетными квадратами, из которых два равны (и это единственным способом), и доказательство следует из предыдущего, т. е. $3 = 1 + 1 + 1$, $11 = 1 + 1 + 9$, $19 = 1 + 9 + 9$, $43 = 9 + 9 + 25$, $59 = 9 + 25 + 25$, $67 = 9 + 9 + 49$, $83 = 1 + 1 + 81$, $107 = 49 + 49 + 9$, $131 = 25 + 25 + 81$, то числа этой формы, которые не являются простыми, либо не могут быть представлены такого рода тремя квадратами, либо, если могут, это может быть сделано более чем одним способом, если вообще три квадрата не равны [между собой]: $27 = 1 + 1 + 25 = 9 +$

$+ 9 + 9$, $51 = 1 + 1 + 49 = 1 + 25 + 25$; $75 = 25 + 25 + 25$ и $147 = 49 + 49 + 49$ единственным образом; $123 = 1 + 1 + 121 = 25 + 49 + 49$; 91 не может [быть разложено]; $99 = 49 + 49 + 1 = 9 + 9 + 81 = 25 + 25 + 49$.

Теорема. Если $8n + 3 = 2(2p + 1)^2 + (2q + 1)^2$, будет $8n + 11 = (2p + 3)^2 + (2p - 1)^2 + (2q + 1)^2$, т. е. сумме трех квадратов.

Теорема. Если $8n + 3$ есть простое число, то всегда $8n + 3 + 2s^2$ или $8n^2 + 2r^2 - 4r + 5$ может быть разложено на три квадрата.

Доказательство. Если $8n + 3$ есть простое число, оно всегда $2(2p + 1)^2 + (2q + 1)^2$, т. е. будет $8n + 2r^2 - 4r + 5 = 2(2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 + 2r^2 - 4r + 2 = 8p^2 + 8p + 4 + 2r^2 - 4r^2 + (2q + 1)^2 = (2q + 1)^2 + (2p + r)^2 + (2p + 2 - r)^2$.

Королларий. Если, следовательно, $8n + 3$ есть простое число, то на три квадрата могут быть разложены эти числа: $8n + 11$, $8n + 5$, $8n + 21$, $8n + 35$, $8n + 53$ и т. д.

Королларий. Если, следовательно, от числа такой формы $8m + 3$ можно отнять удвоенный нечетный квадрат, чтобы остаток был простым числом $4n + 3$, то число $8m + 3$ может быть представлено тремя квадратами.

Теорема. Если $3n + 1$ есть простое число, оно содержится в форме $a^2 + ab + b^2$, т. е. будет суммой квадрата и утроенного другого квадрата.

Теорема. Если $3n + 1$ есть простое число, то $3n + 1 + 2p^2$ может быть разложено на четыре квадрата.

Доказательство. Так как будет $3n + 1 = 3x^2 + y^2$, то $3n + 1 + 2p^2 = x^2 + y^2 + 2(p^2 + x^2) = x^2 + y^2 + (x + p)^2 + (x - p)^2$. Что и требовалось доказать.

Королларий. Простое число формы $8n - 1$, разделенное на 3, оставляет либо $+1$, либо -1. В первом случае, следовательно, [оно] раскладывается на четыре квадрата, из которых три равны между собой. Во втором случае [оно] содержится в форме $24n - 1$, которая будет раскладываться на четыре квадрата, если $24n - 1 - 2p^2$ есть простое число вида $6m + 1$ или если положить $p = 3q \pm 1$, если $8n - 6q^2 \pm 4q - 1$ есть простое число вида $6m + 1$.

Следовательно, такой вопрос о разложении простых чисел на четыре квадрата ставится относительно тех [чисел], которые содержатся в форме $24n - 1$. Относительно этих [чисел] очевидно, что они могут быть сведены к формам $4m + 1 + p^2 + q^2$ или $6m + 1 + 2p^2$, где либо $4m + 1$, либо $6m + 1$ есть простое число. Или $24n - 1$ может быть разложено на четыре квадрата, если содержится в форме $2m + 1 + 6q^2 + 12q$, если существует $6m + 1$ — простое число. Следовательно, берется $m = 12n - 1 - 3q^2 - 6q$ или $m = 12n + 2 - 3r^2$ и исследуется, есть ли среди этих величин самого m одно, которое сводит $6m + 1$ к простому числу;

так, если спрашивается о числе $71 = 3 \cdot 24 - 1$, то будет $n = 3$ и $m = 38 - 3r^2$.

Следовательно, величины для m и $6m + 1$ суть:

$m = 38$, $6m + 1 = 729$ — простое,
$m = 35$, $6m + 1 = 211$ — простое,
$m = 26$, $6m + 1 = 157$ — простое,
$m = 11$, $6m + 1 = 67$ — простое.

Пример. Спрашивается о числе $167 = 7 \cdot 24 - 1$, где $n = 7$. Следовательно, $m = 86 - 3r^2$; величины же для m и $6m + 1$ будут такими:

$m = 86$, $6m + 1 = 517 = 11 \cdot 47$,
$m = 83$, $6m + 1 = 449$ — простое,
$m = 74$, $6m + 1 = 445 = 5 \cdot 89$,
$m = 59$, $6m + 1 = 355 = 5 \cdot 71$,
$m = 38$, $6m + 1 = 229$ — простое,
$m = 11$, $6m + 1 = 67$ — простое.

Пример. Пусть $191 = 24 \cdot 8 - 1$, будет:

$m = 23$, $6m + 1 = 139$ — простое,
$m = 50$, $6m + 1 = 301 = 7 \cdot 43$.

Теорема. Все простые делители формы $a^2 - 2b^2$ содержатся в $8n + 1$.

Теорема. Все простые делители этой формы $a^2 - 3b^2$ содержатся в $12n \pm 1$.

Теорема. Все простые делители этой формы $a^2 - 5b^2$ содержатся в $20n \pm 1$, $20n \pm 9$.

Теорема. Все простые делители этого выражения $a^2 - 7b^2$ содержатся в $28n \pm 1$, $28n \pm 9$, $28n \pm 25$.

Королларий. Если, следовательно, p есть простое число, эта форма $a^2 - pb^2$ не может иметь других делителей, кроме содержащихся в следующих формулах: $\cancel{4pn \pm 1}$, $\cancel{4pn \pm 9}$, $\cancel{4pn \pm 25}$, ..., $\cancel{4pn \pm (p-2)^2}$.*

Хотя эти нечетные квадраты продолжаются далее, но эти последующие формулы возвращаются к первым.

Следует, однако, заметить, что для a и b должны быть взяты взаимно простые числа: если из них и то и другое не четны, то формула $a^2 - pb^2$ будет иметь делитель 2; и если a будет кратным самого p, то, кроме того, будет иметь делитель p.

Пусть p и q — простые числа, а также [пусть] формула $a^2 - pqb^2$ будет иметь делители, которые содержатся в этих формулах: $\cancel{4pn \pm 1}$,

---

* Здесь и далее зачеркнуто Эйлером.

$\cancel{4pqn \pm 9}$, $\cancel{4pqn \pm 25}$, ..., $\cancel{4pqn - r^2}$, если r есть нечетное число, не намного меньшее, чем pq, где, однако, по выбору берутся те, которые имеют делители, применяющиеся, если r не взаимно просто с p и q.

Кроме того, формула $a^2 - pqb^2$ делится на другие числа, которые содержатся в таких формах: $4pqn \pm \frac{(p-q)}{m}$, $4pq \pm \frac{(4p-q)}{m}$, $4pq \pm \frac{(4q-p)}{m}$, $4pq \pm \frac{(9p-q)}{m}$ и т. д., где m обозначает какой-либо делитель числителя.

Отсюда следует, что формула $a^2 - pqb^2$ имеет те же делители, что и формула $pa^2 - qb^2$, и наоборот.

Так, [для] формул $a^2 - pqb$ простые делители содержатся в $a^2 - 2{\cdot}3b^2$, $24n \pm 1$, $24n \pm 5$».

Далее Эйлер приводит таблицу делителей:

«$a^2 - 2{\cdot}5b^2$, $40n \pm 1$, $40n \pm 9$, $40n \pm 3$, $40n \pm 13$;

$a^2 - 2{\cdot}7b^2$, $56n \pm 1$, $56n \pm 9$, $56n \pm 25$, $56n \pm 5$, $56n \pm 13$;

$a^2 - 2{\cdot}11b^2$, $88n \pm 1$, $88n \pm 9$, $88n \pm 25$, $88n \pm 49$, $88n \pm 81$, $88n \pm 3$, $88n \pm 13$, $88n \pm 21$, $88n \pm 61$, $88n \pm 29$;

$a^2 - 3{\cdot}5b^2$, $60n \pm 1$, $60n \pm 49$, $60n \pm 7$, $60n \pm 17$;

$a^2 - 3{\cdot}7b^2$, $84n \pm 1$, $84n \pm 25$, $84n \pm 37$, $84n \pm 5$, $84n \pm 41$, $84n \pm 17$;

$a^2 - 3{\cdot}11b^2$, $132n \pm 1$, $132n \pm 25$, $132n \pm 49$, $132n \pm 37$, $132n \pm 35$, $132n \pm 17$, $132n \pm 29$, $132n \pm 41$, $132n \pm 39$, $132n \pm 65$.

Простые делители формулы $a^2 - 2{\cdot}3{\cdot}5b^2$ содержатся в формах: $120n \pm 1$, $120n \pm 49$, $120n \pm 7$, $120n \pm 13$, $120n \pm 37$, $120n \pm 29$, $120n \pm 19$.

Простые делители этой формулы $a^2 - 2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7b^2$ или $a^2 - 210b^2$ содержатся в формах: $840n \pm 1$, $840n \pm 121$, $840n \pm 169$, $840n \pm 289$, $840n \pm 361$, $840n \pm 529$, $840n \pm 11$, $840n \pm 349$, $840n \pm 179$, $840n \pm 179$, $840n \pm 181$, $840n \pm 229$, $840n \pm 61$, $840n \pm 19$, $840n \pm 221$, $840n \pm 149$, $840n \pm 389$, $840n \pm 139$, $840n \pm 29$, $840n \pm 209$, $840n \pm 89$, $840n \pm 41$, $840n \pm 79$, $840n \pm 151$, $840n \pm 319$, $840n \pm 23$, $840n \pm 263$, $840n \pm 313$, $840n \pm 73$, $840n \pm 97$, $840n \pm 407$, $840n \pm 253$, $840n \pm 373$, $840n \pm 83$, $840n \pm 37$, $840n \pm 227$, $840n \pm 277$, $840n \pm 403$, $840n \pm 43$, $840n \pm 67$, $840n \pm 293$, $840n \pm 163$, $840n \pm 173$, $840n \pm 233$, $840n \pm 367$, $840n \pm 103$, $840n \pm 137$, $840n \pm 113$, $840n \pm 223$».

«Простые делители формулы $a^2 - 13{\cdot}5b^2$ содержатся в форме $260n \pm (1, 7, 49, 83, 61, 93, 131, 123, 81, 47, 69, 37)$, каковые числа образуют геометрическую прогрессию в отношении 7, если подставляются остатки вместо больших чисел, которые получаются от деления на 260.

А также простыми делителями формулы $a^2 - pqb^2$, если p и q — простые числа, будут $4pqn \pm (1 + s + s^2 + s^4 + s^5 + s^6 + ...)$, если существует простое число s, являющееся делителем $pq - 1$ или $pq - 4$, или

$p - q$, или $4p - q$, или $pq - 9$ и т. д., пока не появится маленький и удобный делитель; соответственно берется какой-либо.

Если же формула будет $a^2 - pqrb^2$, нужно найти два простых делителя, самых простых, как s и t, и тогда формула $\frac{1}{(1-s)(1-t)}$, разложенная в ряд, даст все числа, присоединяемые к $4pqrn$ соответствующим знаком, чтобы иметь столь многие формулы $4pqrn \pm A$, которые заключают в себе все простые делители формулы $a^2 - pqrb^2$.

Все простые делители формы $a^2 + 5b^2$ содержатся в $20n + (1, 3, 7, 9)$, и, обратно, простые числа этой формы суть делители формулы $a^2 + 5b^2$.

Все простые делители других формул будут находиться в таком состоянии:

Формулы	Форма простых делителей
a^2+b^2	$4n + 1 \ldots 4n + m^2$
a^2+2b^2	$8n + (1 + 3)$
a^2+3b^2	$12n + (1 + 7) \ldots 6n + 1 \ldots 6n + m^2$
a^2+4b^2	$16n + (1 + 5 + 9 + 1) \ldots 4n + 1$
a^2+5b^2	$20n + (\cancel{1} + 3 + \cancel{9} + 7)$
a^2+6b^2	$24n + (1 + 5 + 7 + 11) \ldots 14n + m^2$
a^2+7b^2	$28n + (\cancel{1} + 11 + \cancel{9} + 15 + \cancel{25} + 23) \ldots 14n + (1 + 11 + 9)$
a^2+11b^2	$44n + (\cancel{1} + 3 + \cancel{9} + 27 + \cancel{37} + 23 + \cancel{25} + 31 + \cancel{5} + 15)$ или $22n + (1 + 3 + 9 + 5 + 15)$
a^2+15b^2	$60n + (1 + 17 + 49 + 53 + 19 + 23 + 31 + 47)$ или $30n + (1 + 17 + 19 + 23)$
a^2+13b^2	$52n + (\cancel{1} + 7 + \cancel{49} + 31 + \cancel{9} + 11 + \cancel{25} + 19 + \cancel{29} + 47 + \cancel{17} + 15)$
a^2+17b^2	$68n + (\cancel{1} + 3 + \cancel{9} + 27 + \cancel{13} + 39 + \cancel{49} + 11 + \cancel{33} + 31 + \cancel{25} + 7 + \cancel{21} + 63 + \cancel{55} + 23)$

Теор[ема]. Если простое число $4pn + s$ есть делитель формы $a^2 + pb^2$, тогда также простое число формы $4pn + s^2$ и более общее $4pn + s^{\nu}$ будет делителем формы $a^2 + pb^2$.

Теор[ема]. Если простые числа $4pn + s$ и $4pn + t$ суть делители формы $a^2 + pb^2$, тогда также все простые числа, [содержащиеся] в формуле $4pn + s^{\mu}t^{\nu}$, будут делителями формы $a^2 + pb^2$.

Теор[ема]. Если простое число $4pn + s$ есть делитель формы $a^2 - pb^2$, тогда также простые числа формы $4pn \pm s^{\nu}$ будут делителями той же формы $a^2 - pb^2$. И если два простых числа s и t суть делители формы $a^2 - pb^2$, тогда также все простые числа, содержащиеся в форме $4pn \pm s^{\gamma}t^{\nu}$, будут делителями той же формы.

Если $2^{31} - 1$ имеет делитель, это будет простое число формы $248p + 1$, $248p + 63$.

Если $2^{8n+1}-1$ имеет делитель, если $8n+1$ является простым числом, он (т. е. делитель) будет содержаться в одной из этих форм: $8p(8n+1)+1$, $8p(8n+1)+6(8n+1)+1$.

Если $2^{8n+3}-1$ имеет делитель, если $8n+3$ является простым числом, он будет содержаться в одной из этих форм: $8p(8n+3)+1$, $8p(8n+3)+2(8n+3)+1$.

Если $2^{8n+5}-1$ имеет делитель, если $8n+5$ является простым числом, он будет содержаться в одной из форм: $8p(8n+5)+1$, $8p(8n+5)+6(8n+5)+1$.

Если $2^{8n+7}-1$ имеет делитель, если $8n+7$ является простым числом, он будет содержаться в одной из этих форм: $8p(8n+7)+1$, $8p(8n+7)+2(8n+7)+1$».

Кроме этой большой заметки, которую мы привели полностью, в записных книжках имеется множество заметок, касающихся затронутых здесь вопросов и, в частности, вопроса о представимости чисел в виде a^2+3b^2 (например, № 133, л. 168 об.; № 134, л. 51 об., 65 об.; № 135, л. 39 об.—40). Все они входят в круг проблем, связанных с теорией делимости — с доказательством малой теоремы Ферма, с теорией вычетов и т. д. Ниже мы остановимся на одной из них.

ТЕОРЕМА О ТОМ, ЧТО ВСЯКОЕ ЧИСЛО ЕСТЬ ЛИБО КВАДРАТНОЕ ЧИСЛО, ЛИБО СУММА ДВУХ, ТРЕХ ИЛИ ЧЕТЫРЕХ КВАДРАТНЫХ ЧИСЕЛ

Утверждение о том, что всякое целое число есть либо квадрат, либо сумма двух, трех или четырех целочисленных квадратов, принадлежит Баше де Мезириаку. Он сформулировал его в своем издании «Арифметики» Диофанта как примечание к задаче о нахождении таких чисел a, b, c, d, что $(a^2+b^2+c^2+d^2)\pm(a+b+c+d)$ равно целому числу. Из рассуждений Диофанта можно заключить, что ему представлялась очевидной возможность представить всякое целое число в виде четырех рациональных квадратов [90, т. 1, с. 111—112, 242].

Комментируя примечание Баше, Ферма привел открытую им впервые теорему, которую он назвал «прекраснейшим и наиболее общим утверждением» [90, т. 1, с. 242—243]: «Всякое число есть либо треугольное число, либо сумма двух или трех треугольных чисел; либо квадратное число, либо сумма двух, трех или четырех квадратных чисел; либо пятиугольное число, либо сумма двух, трех или четырех или пяти пятиугольных чисел и так далее для шестиугольных, семиугольных и вообще любых многоугольных чисел». Заметив, что ее доказательство «зависит от многочисленных и сокровеннейших тайн науки о числах», Ферма высказал намерение посвятить теореме особый труд, но оно осталось неосуществленным. В 1654 г. в письме к Паскалю он упомянул, что его доказательство основано на факте представимости любого простого числа вида $4n + 1$ суммой двух квадратов [121, т. 1, с. 395].

Теорема Ферма вызывала большой интерес у ученых, но доказать ее для общего случая удалось лишь О. Коши в 1815 г. Тем не менее предпринятые ранее попытки доказательства и доказательства, предложенные для частных случаев теоремы, дали много важных результатов, послуживших развитию теории чисел в XVIII в.

Особое значение имели исследования, связанные с теоремой Ферма для случаев квадратов — часто ее называют теоремой Баше. Она была доказана Эйлером и Лагранжем.

Об интересе Эйлера к теореме Баше свидетельствует переписка с Гольдбахом, в которой на протяжении 20 лет (с 1730 по 1751 г.) постоянно обсуждались вопросы, касающиеся этой теоремы [138, с. 31, 39, 35, 43—45, 288—292, 343 и др.]. Не раз он возвращался к ней и в опубликованных работах. В вышедших в 1760 г. мемуарах E241 (см. выше) и E242 («Доказательство теоремы Ферма о том, что всякое число, либо целое, либо дробь, является суммой четырех или меньше квадратов») Эйлер доказал, что каждое целое число есть сумма четырех или менее рациональных квадратов. Спустя много лет, в 1773 г., в мемуаре E445 он дал общее доказательство для случая целых чисел, более простое, чем доказательство Лагранжа, опубликованное годом раньше.

Многочисленные заметки из записных книжек Эйлера, касающиеся теоремы Баше, приходятся главным образом на 1726—1757 и 1767—1775 гг. Записи, которые можно датировать приблизительно 1736—1755 гг., отражают чаще всего предмет переписки с Гольдбахом этого времени.

Относительно случая теоремы Ферма для треугольных чисел Эйлер ограничился утверждением, что в этом случае она эквивалентна теореме о том, что если целое число вида $8n + 3$ есть сумма трех квадратов, то n является суммой трех треугольных чисел. Оно встречается в мемуарах E566, E586 и неоднократно в переписке с Гольдбахом [138, с. 185, 271, 286, 288—289, 302].

Ниже мы приводим ряд заметок из записных книжек, относящихся к теореме Баше и другим частным случаям теоремы Ферма.

№ 131, л. 61 об.—62

Первая из приведенных в этой заметке теорем — о том, что всякое число вида $8n - 1$ может быть представлено суммой четырех квадратов, в опубликованных работах Эйлера не встречается. Эйлер показывает, что для разложения числа вида $8n - 1$ на четыре квадрата нужно из $4(8n - 1)$ вычесть ближайший нечетный квадрат и т. д. Такая операция приведет к четырем квадратам, составляющим в сумме $4\cdot(8n - 1)$.

Сделанное во второй части заметки обобщение: «Всякое нечетное число этим методом раскладывается точно на четыре квадрата» — также не фигурирует в статьях и переписке Эйлера. Этот вывод неверен, так как можно найти опровергающие его примеры. Так, $4\cdot 17\,119 = 4\cdot(8\cdot 2140 - 1) = (261)^2 + (17)^2 + 7^2 + 3^2 + 8$.

Ниже приводим текст заметки.

«Теорема. Всякое число вида $8n - 1$ может быть разложено на четыре квадрата.

Доказательство. Берется $32n - 4$ или учетверение самого $8n - 1$, отсюда вычитается ближайший нечетный квадрат, от остатка (и если уж не ближайший, но следующий меньший нечетный) — также ближайший нечетный квадрат; и наконец, [вычтенный] от остатка ближайший нечетный квадрат составит квадрат. Эти четыре квадрата образуют $(8n - 1)\cdot 4$. Что и требовалось доказать.

Чтобы разложить 55 на 4 квадрата, берется 220, чтобы следовало

$$\begin{array}{r} 220 \\ \underline{-169} \\ 51 \\ \underline{-49} \\ 2 \\ \underline{-1} \\ 1 \end{array}$$

Следовательно, $55 = \frac{169 + 49 + 1 + 1}{4}$. Более того, это разложение вполне подходит для всех нечетных чисел.

Чтобы число 101 было разрешимым в четырех квадратах, берется учетверение 404 и поступают следующим образом:

$$\begin{array}{r} 404 \\ \underline{-361} \\ 43 \\ \underline{-25} \\ 18 \\ \underline{-9} \\ 9 \end{array}$$

Следовательно, $101 = \frac{361 + 25 + 9 + 9}{4}$. Всякое, следовательно, нечетное число этим методом [разлагается] на четыре квадрата.

Если предлагаемое есть 205,

$$\begin{array}{r} 820 \\ \underline{-729} \\ 91 \\ \underline{-81} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 1 \end{array}$$

Следовательно, $205 = \frac{729}{4} + \frac{81}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}$».

№ 131, л. 62—62 об.

В данной заметке последовательно рассматриваются произведения вида $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2)$, $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2)$, $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$ и утверждается, что каждое из них представимо суммой четырех квадратов. Эйлер дает выражение для корней из этих квадратов в каждом случае и в последнем получает свою знаменитую формулу:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) =$$
$$= (ap+bq+cr+ds)^2+(bp-aq+dr+cs)^2+(cp-dq-ar+bs)^2+$$
$$+(dp+cq-br-as)^2 .$$

Впервые она приводится в письме к Гольдбаху от 4 мая 1748 г. [138, с. 289], а затем в мемуарах E241 и E445, опубликованных соответственно в 1760 и 1773 гг. Рассматриваемая запись свидетельствует о том, что Эйлер получил этот важный результат значительно раньше, так как записная книжка датируется 1736—1740 гг.

Здесь же сформулировано утверждение: «Если $8n+3$ можно разложить на три квадрата, то n есть сумма трех треугольных чисел». Его, как упоминалось выше, Эйлер повторил в трактате E566, опубликованном в 1775 г.

«Число вида $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2)$ может быть разложено на четыре квадрата многими способами.

В самом деле, корнями квадратов будут:

I. $ap \pm bq$, $bp \mp aq$, $cp \pm dq$, $cq \mp dp$;

II. $ap \pm cq$, $cp \mp aq$, $bp \mp dq$, $dp \mp bq$ и т. д.

Теорема. Если $8n+3$ можно разложить на три нечетных квадрата, то $(2p+1)^2+8n+3$ можно будет разложить на четыре квадрата.

Но $\dfrac{(8n+3)+(2p+1)^2}{4}$ содержит все нечетные числа.

Но, если $8n+3$ можно разложить на три нечетных квадрата, тогда n будет суммой трех треугольных чисел. А потому если всякое число есть сумма трех треугольных чисел, тогда всякое число будет суммой четырех квадратов.

Сумма четырех квадратов, умноженная на сумму трех квадратов, разложима на четыре квадрата. Потому что

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2)=$$
$$=(ap+bq+cr)^2+(bp-aq+dr)^2+(cp-dq-ar)^2+(dp+cq-br)^2,$$

что можно видоизменять многими способами.

Таким образом,

$$(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = (ap + bq)^2 + (bp - aq)^2.$$

Далее, полученное от [умножения] суммы четырех квадратов на сумму четырех квадратов разложимо на четыре квадрата.

Действительно,

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = (ap + bq + cr + ds)^2 +$$

$$+ (bp - aq + dr - cs)^2 + (cp - dq - ar + bs)^2 + (dp + cq - br - as)^2.$$

Если $\pm a \pm b \pm c \pm d = 0$, [то]

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1 = (a \pm \tfrac{1}{2})^2 + (b \pm \tfrac{1}{2})^2 + (c \pm \tfrac{1}{2})^2 + (d \pm \tfrac{1}{2})^2\text{».}$$

№ 131, л. 116 об.

«Теорема. Если все простые числа могут быть разложены на четыре квадрата, одновременно все вообще числа допускают такое разложение. Произведение же из двух чисел, которые можно разложить на четыре квадрата, может быть разложено подобным образом.

Если из четырех квадратов, на которые может быть разложено данное число p, два были бы равны, также $p + 2$ можно будет разложить на четыре квадрата. Потому что если $p = a^2 + a^2 + c^2 + d^2$, будет $p + 2 = (a + 1)^2 + (a - 1)^2 + c^2 + d^2$».

№ 131, л. 117 об.

«Разложить сумму четырех квадратов $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ на четыре других: $v^2 + x^2 + y^2 + z^2$.

Пусть $v = a - pu$, $x = b - qu$, $y = c - ru$, $z = d - su$; будет $0 = 2ap - ppu + 2bq - qqu + 2cr - rru + 2ds - ssu$, а также $u = \dfrac{2ap + 2bq + 2cr + 2ds}{pp + qq + rr + ss}$.

Ч[то] и т[ребовалось] д[оказать].

Пусть $v + x + y + z = 0$; тогда будет $u = \dfrac{a + b + c + d}{p + q + r + s}$ и $app + bqq + crr + dss + 2apq + 2bpq + 2cpr + 2dps - bpp - cqq - drr - ass + 2apr + 2bqr + 2cqr + 2dqs - cpp - dqq - arr - bss + 2aps + 2bqs + 2crs + 2drs - dpp - aqq - brr - css = 0$».

№ 132, л. 82—82 об.

«Зад[ача]. Сумму четырех квадратов $aa + bb + cc + dd$ разложить на другие четыре квадрата: $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta$.

Общее решение выглядит так:

$$\alpha = \frac{-app + aqq - arr + ass - 2bpq - 2cpr - 2dps}{pp + qq + rr + ss},$$

$$\beta = \frac{bpp - bqq + brr + bss - 2apq - 2cqr - 2dqs}{pp + qq + rr + ss},$$

$$\gamma = \frac{cpp + cqq - crr + css - 2apr - 2bqr - 2drs}{pp + qq + rr + ss},$$

$$\delta = \frac{dpp + dqq + drr - dss - 2aps - 2bqs - 2crs}{pp + qq + rr + ss}.$$

Ч[то] и т[ребовалось] д[оказать].

Зад[ача]. Найти самым общим образом четыре квадрата, сумма которых $aa + bb + cc + dd$ есть квадрат.

Решение. Берется

$$a = nn + pp - qq - rr - ss + 2p(q + r + s + 2n),$$

$$b = nn - pp + qq - rr - ss + 2q(p + r + s + 2n),$$

$$c = nn - pp + qq - rr - ss + 2r(p + q + s + 2n),$$

$$d = nn - pp - qq - rr + ss + 2s(p + q + r + 2n).$$

И будет

$$\sqrt{(aa + bb + cc + dd)} = 2nn + 2pp + 2qq + 2rr + 2ss + 2n(p + q + r + s).$$

Если для a, b, c, d будут взяты половины найденных величин, будет установлено

$$\sqrt{(aa + bb + cc + dd)} = nn + pp + qq + rr + ss + n(p + q + r + s),$$

и этот корень может быть как нечетным числом, так и четным.

Если полагается $n = -p - q - q - r - s$, будут получены корни четырех квадратов:

$$a = pq + pr + qr - ss,$$

$$b = pq + ps + qs - rr,$$

$$c = pr + ps + rs - qq,$$

$$d = qr + qs + rs - pp,$$

а также, [что] корень квадратный суммы квадратов есть $pp + qq + rr + ss$.

Ибо если, следовательно, это разложение было бы общим, так как всякое квадратное число можно разложить на четыре квадрата, если [это] ищется, [то] также все корни содержатся в форме $pp + qq + rr + ss$; это значит, что всякое число есть сумма четырех квадратов. Но это решение равным образом является общим, как предыдущее, а также корень суммы четырех их квадратов равным образом есть сумма четырех квадратов».

№ 132, л. 98 об.—100

«Теор[ема]. Всякое простое число вида $3n + 1$ представляется в такого рода форме: $aa + ab + bb$.

Док[азательство]. Если $3n + 1$ есть простое число, тогда $p^{3n} - q^{3n}$ делится на $3n + 1$. Следовательно, либо $p^n - q^n$, либо $p^{2n} + p^n q^n + q^{2n}$ на него сможет делиться, но вместе с тем не всегда $p^n - q^n$ может делиться на $3n + 1$ и будут случаи, в которых $p^{2n} + p^n q^n + q^{2n}$ или $xx + xy + yy$ будет делиться на $3n + 1$; но эта форма не допускает других делителей, кроме имеющих форму $aa + ab + bb$; следовательно, простое число формы $3n + 1$ всегда содержится в такой форме $aa + ab + bb$. Ч[то] и т[ребовалось] д[оказать].

Королл[арий]. Всякое, следовательно, простое число формы $3n + 1$ может быть разложено на три (четыре) квадрата, из которых три равны».

Полностью запись приведена в предыдущем разделе.

№ 132, л. 102

«Т[еорема]. Если число n будет раскладываться на четыре квадрата $aa + bb + cc + dd$ при условии, что сумма корней $a + b + c + d = 0$, тогда число n будет суммой трех квадратов.

Доказат[ельство]. Пусть $a = p + t$, $b = p - t$, $c = q + u$, $d = q - u$, сумма корней будет $2p + 2q$ и сумма квадратов или $n = 2pp + 2qq + 2tt + 2uu$. Тотчас же будет сумма корней $= 0$, т. е. $q = -p$, будет $n = 4pp + 2tt + 2uu$. И тем самым $n = 4pp + (t + u)^2 + (t - u)^2$ будет суммой трех квадратов. Ч[то] и т[ребовалось] д[оказать].

Т[еорема]. Если всякое число n разложимо на четыре квадрата, тогда в этом уравнении $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - cx + d = 0$ буквы a, c и d могут быть определены так, чтобы все корни уравнения были рациональны. И обратно, если a, c, d могут быть определены так, что все корни станут рациональными, если положить их α, β, γ, δ, будет $2n = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, а также $4n + (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 + (\gamma + \delta)^2 + (\gamma - \delta)^2$, и тем самым будет $n = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma + \delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma - \delta}{2}\right)^2$, т. е. n будет суммой четырех квадратов.

Королл[арий]. Если, следовательно, $a = 0$, тогда все корни уравнения не могут быть рациональными, если только $2n$ не является суммой трех квадратов.

Королл[арий]. Таким образом, в уравнении $x^4 = 2(8m - 1)xx + cx - d$, какие бы буквы c и d ни взять, нельзя сделать так, чтобы все корни стали рациональными.

Т[еорема]. Если $3n + 1$ — простое число, тогда $\sqrt{3n + 1 + 2(ff + fg + gg)pp}$ можно разложить на четыре квадрата.

Док[азательство]. Ибо если $3n + 1$ есть простое число, тогда оно будет равно $3aa + bb$ и тем самым

$$3n + 1 + 2(ff + fg + gg)pp = (a + (f + g)p)^2 + (a - fp)^2 + (a - gp)^2 + b^2.$$

Следовательно, если $3n + 1$ и $3m + 1$ суть простые числа, тогда сумма четырех квадратов будет как такой формы: $3n + 1 + 2pp(3m + 1)$, так и такой: $3n + 1 + 6pp(3m + 1)$».

№ 132, л. 142 об.

Приведенная ниже заметка, которая датируется приблизительно 1742—1743 гг., содержит лемму, на основании которой Эйлер доказал в 1772 г. (мемуар Е445) теорему Баше о разложимости всякого числа на сумму четырех квадратов. Таким образом, ясно, что доказательство этой леммы он получил почти за 30 лет до его опубликования.

Заметка показывает, что в 1742—1743 гг. Эйлер, доказав свою лемму, пытался доказать и теорему Баше, но начатое доказательство, проводившееся методом от противного, осталось незаконченным. К этой теореме Эйлер вернулся в 1772 г., после появления доказательства Лагранжа. Как видно из поздней записной книжки № 138, л. 89—93, 169 об., Эйлер обдумал статью Лагранжа, а затем, повторив тот же ход рассуждений, что и много лет назад в рассмотренной ниже записи, получил свое доказательство теоремы Баше, отличное от доказательства Лагранжа.

«Теорема. Если бы существовало число a, не разлагающееся на четыре квадрата, и оно было бы делителем числа $P = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$, тогда существовало бы также число $b < a$, заведомо не разлагающееся на четыре квадрата, которое, однако, было бы делителем суммы четырех квадратов.

Док[азательство]. Если $A^2 + B^2 + C^2 + D^2$ делится на a, могут быть обнаружены четыре квадрата $pp + qq + rr + ss$, делящиеся на a, такие, что отдельные корни p, q, r, s будут меньше $\frac{1}{2}a$.

Следовательно, будет существовать сумма четырех квадратов $P < aa$, делящаяся на a, и если $\frac{P}{a} = b$, будет $b < a$. Поскольку же a не есть число, разложимое на 4□, и b не будет разлагаться на 4□. Потому что, если бы b разлагалось, тогда и a разлагалось бы.

Следовательно, из делителя a числа P, разложимого на четыре □, получается меньшее число b, заведомо являющееся делителем самого P, которое, однако, не разлагается на 4□. Ч[то] и т[ребовалось] д[оказать].

Королл[арий]. Следовательно, из числа a, не разложимого на 4□, которое, однако, является делителем суммы 4□, получится сколько угодно других чисел такого рода. Откуда, поскольку это абсурдно, следует, что не существует чисел, не разложимых на 4□, которые, однако, были бы делителями чисел, разложимых на 4□.

Теорема. Вообще нет числа, которое не разлагается на четыре квадрата.

Доказательство. Пусть a — число (если такое существует), которое не разлагается на четыре квадрата; оно будет либо четным, либо нечетным. Если бы оно было четным, нашлось бы нечетное число того же рода, которое равно $(2p + 3)$, откуда $(2p + 3)^2$ будет делящимся на $2p + 3$. Но $(2p + 3)^2$ разлагается на 4□, следовательно, и $2p + 3$ есть число, разложимое на 4□. Ч[то] и т[ребовалось] д[оказать]».

№ 133, л. 11 об.—12

Нижеследующая запись является подготовительной к письму Эйлера к Гольдбаху от 16 июня 1749 г. [138, с. 314—317].

«Т[еорема] знам[енитейшего] Гольдбаха. $aa + bb + dd + \frac{1}{4}(kk - bb)^2 + 1$ есть сумма четырех квадратов.

Док[азательство]. Ибо $bb + 1 + \frac{1}{4}(kk - bb)^2$ есть сумма двух квадратов $\left(\frac{1}{2}(kk - bb)^2 - 1\right)^2 + kk = -\frac{1}{4}(kk - bb)^2 - kk + bb + 1 + kk$. Ч[то] и т[ребовалось] д[оказать].

Другая теорема. Если [число] $8m + 4$ есть сумма четырех нечетных квадратов, тогда оно также есть сумма четырех четных квадратов.

Док[азательство]. Пусть $8m + 4 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2 + (2d + 1)^2$; тогда будет $4m + 2 = (a + b - 1)^2 + (a - b)^2 + (c + d + 1)^2 + (c - d)^2$ и среди этих квадратов два четных, два нечетных, так что будет $4m + 2 = (2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 + 4rr + 4ss$; отсюда будет $(2m + 1) = (p + q + 1)^2 + 4(p - q)^2 + 4(r + s)^2 + 4(r - s)^2$, следовательно, $8m + 4 = 4(p + q + 1)^2 + 4(p - q)^2 + 4(r + s)^2 + 4(r - s)^2$. Ч[то] и т[ребовалось] д[оказать].

М[оя] т[еорема]. Если $3A$ есть сумма четырех квадратов, будет также A суммой четырех квадратов.

Док[азательство]. Пусть $3A = (1 + 3a)^2 + (1 + 3b)^2 + (1 + 3c)^2 + 9dd$, будет

$$\begin{aligned} A = 1 &+ 2a + 3aa \\ &+ 2b + 3bb + 3dd = (1 + a + b + c)^2 + (a - b + d)^2 + (a - c - d)^2 + (b - c + d)^2 \\ &+ 2c + 3cc. \end{aligned}$$

М[оя] т[еорема]. Если $5A$ есть сумма четырех квадратов, будет также A суммой четырех квадратов.

Док[азательство]. Либо $5A=(1+5a)^2+(2+5b)^2+25cc+25dd$ и $A = 1 + 2a + 4b + 5aa + 5bb + 5cc + 5dd$, либо $5A = (1 + 5a)^2 + (2 + 5b)^2 + (1 + 5c)^2 + (2 + 5d)^2$ и $A = (1 + a + 2b)^2 + (2a - b)^2 + (1 + c + 2d)^2 + (2c - d)^2$.

М[оя] т[еорема]. Если $7A$ есть сумма четырех квадратов, будет также A суммой четырех квадратов.

Если $7A = (1 + 7a)^2 + (1 + 7b)^2 + (1 + 7c)^2 + (2 + 7d)^2$, $A = 1 + 2a + 2b + 2c + 4d + 7aa + 7bb + 7cc + 7dd$, будет $A = (1 + a + b + c + 2d)^2 + (a - b - 2c + d)^2 + (a + 2b - c - d)^2 + (2a - b + c - d)^2$.

Т[еорема]. Если все числа $8n + 1$, $8n + 3$, $8n + 5$ являются суммами $4\square$, то также числа $8n + 7$ являются суммами $4\square$.

Док[азательство]. Будет ведь $3(8n + 7) = 8m + 5 = 4\square$, следовательно, $8n + 7 = \frac{\square + \square + \square + \square}{3} = 4\square$.

Королларий 1. Следовательно, если всякое число $8n + 5$ есть $4\square$, тогда также всякое число $8n + 7$ есть $4\square$.

Королл[арий]. Если всякое число $8n + 1$ есть $4\square$, то также всякое число $8n + 3$ есть $4\square$, потому что $3(8n + 3) = 8m + 1$.

Королларий. Если всякое число $8n + 1$ есть $4\square$, то также $8n + 5$ есть $4\square$, потому что $5(8n + 5) = 8m + 1 = 4\square$, следовательно, и $8n + 5$ есть $4\square$.

Теорема. Положим $aa+bb+cc+dd=m$, если число $mA=\boxed{4}$, будет также число A суммой четырех квадратов.

Доказательство. Пусть $mA=(f+mp)^2+(g+mq)^2+(h+mr)^2+(k+ms)^2$, будет $ff + gg + hh + kk$ либо m, либо будет делиться на m и частное будет меньше, чем m, которое является суммой четырех квадратов. Следовательно, будет $ff + gg + hh + kk = m(xx + yy + zz + vv) = (aa + bb + cc + dd)(xx + yy + zz + vv)$, откуда получится $A = xx + yy + zz + vv + 2(fp + gg + hr + ks) + m(pp + qq + rr + ss)$ и будет $A = (ap + bq + cr + ds + x)^2 + (aq - bp + cs - dr - y)^2 + (ar - bs - cp + dp - r)^2 + (as + br - cy - dp - v)^2$ и $f = ax + by + cz + dv$, $g = bx - ay - dz + cv$, $h = cx + dy - az - bv$, $k = dx - cy + bz - av$.

Эти величины дадут $ff + gg + hh + kh = (aa + bb + cc + dd)(xx + yy + zz + vv)$, откуда находится $x = \frac{af + bg + ch + dk}{aa + bb + cc + dd}$, $y = \frac{bf - ag + dh - ck}{aa + bb + cc + dd}$, $z = \frac{cf - dg - ah + bk}{aa + bb + cc + dd}$, $v = \frac{df + cg - bh - ak}{aa + bb + cc + dd}$».

№ 133, л. 19 об.—20

«Если $p = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, $q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ и $P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$, $Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2$, будет $(P - p)^2 = Q - q$.

Далее, если $p = \alpha$, будет $q = \alpha^2 = p^2$, откуда $Q = rp^2 - 2Pp + P^2$ и $2Q = (2p - P)^2 + PP = aa + PP$. В общем, если $q = (m - 1)pp + A$, будет $Q = A + P^2 - 2Pp + mpp$ и $mQ = mA - mmpp - 2mPp + mPP$. Следовательно, $mQ = mA + (mp - P)^2 + (m - 1)PP = mA + aa + (m - 1)PP$, или $Q = A + \frac{1}{m} aa + \frac{m-1}{m} PP$.

Если α, β, γ, δ — положительные числа, будет $q < pp$. Далее, если p будет равно сумме корней и q будет равно сумме квадратов, и число корней будет равно □.

Если $n = 1$, $q = pp$, $A = 0$, $m = 2$; если $n = 2$, $q = \frac{1}{2}pp + \frac{1}{2}aa$, $A = \frac{1}{2}aa$, $m = \frac{3}{2}$; если $n = 3$, $q = \frac{1}{2}pp + \frac{1}{2}aa + \frac{2}{3}bb$, $A = \frac{1}{2}aa + \frac{2}{3}bb$, $m = \frac{4}{3}$; если $n = 4$, $q = \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}aa + \frac{2}{3}bb + \frac{3}{4}cc$, $A = \frac{1}{2}aa + \frac{2}{3}bb + \frac{3}{4}cc$, $m = \frac{5}{4}$; если $n = 5$, $q = \frac{1}{5}pp + \frac{1}{2}aa + \frac{2}{3}bb + \frac{3}{4}cc + \frac{4}{5}dd$; если $n = 6$, $q = \frac{1}{6}pp + \frac{1}{2}aa + \frac{2}{3}bb + \frac{3}{4}cc + \frac{4}{3}dd + \frac{5}{6}ee$.

Чтобы всякое число A было суммой трех треугольных чисел, требуется, чтобы было $\frac{PP - p}{2} - A = \frac{1}{2}pp - \frac{1}{6}pp - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{3}bb$ и $A = aa + \frac{pp + 3p}{6} + \frac{1}{3}bb$, следовательно, либо $A = aa + \frac{3bb + 3b}{2} + 3cc$ равно квадрату – три треугольника – три треугольных числа, либо $A = aa + \frac{3bb \pm b}{2} + 3cc \pm 2c$ равно квадрату – пятиугольное число – восьмиугольное число.

1. Далее, чтобы какое-либо число A было суммой трех треугольных [чисел, должно быть] $n = 3$ и из предыдущей книги $\frac{pp + p - 2A}{2} = \frac{pp - q}{2}$. Следовательно, $2A = p + q$ и $A = \frac{p + q}{2}$, если существуют $q < pp$, $A < \frac{pp + p}{2}$.

2. Чтобы A было суммой четырех квадратов, [должно быть] $\frac{2pp - 2A}{4} = \frac{pp - q}{2}$ и $A = q$, $n = 4$, $A < pp$.

3. Чтобы A было суммой пяти пятиуг[ольных чисел, должно быть] $\frac{3pp - p - 2A}{6} = \frac{3pp - 3q}{6}$, следовательно, $2A = 3q - p$, $n = 4$, $A < pp$.

4. Чтобы A было суммой шести шестиуг[ольных чисел, должно быть] $\frac{4pp - 2p - 2A}{8} = \frac{4pp - 4q}{8}$, следовательно, $2A = 4q - 2p$, $A < \frac{4pp - 2p}{2}$.

Более обще: чтобы A [было равно] сумме m-угольных [чисел, должно быть] $2A = (m-2)q - (m-4)p$, следовательно, или $A = \frac{(m-2)q - (m-4)p}{2}$, или $2A = \frac{m-2}{m}pp - (m-4)p + \frac{m-2}{2}aa + \frac{2(m-2)}{3}bb + \frac{3(m-2)}{4}cc + \ldots + {}$ $+ \frac{(m-1)(m-2)}{m}k$.

Следовательно, если $m = 2$, будет $2A = 2p$; если $m = 3$, будет $2A = \frac{1}{3}pp + p + \frac{1}{2}aa + \frac{2}{3}bb$; если $m = 4$, будет $2A = \frac{2}{4}pp + \frac{2}{2}aa + \frac{4}{3}bb + \frac{6}{4}cc$; если $m = 5$, будет $2A = \frac{3}{5}pp - p + \frac{3}{2}aa + \frac{6}{3}bb + \frac{9}{4}cc + \frac{12}{5}dd$; если $m = 6$, будет $2A = \frac{4}{6}pp - 2p + \frac{4}{2}aa + \frac{8}{3}bb + \frac{12}{4}cc + \frac{16}{5}dd + \frac{20}{6}ee$.

Найти сумму трех квадратов $AA + BB + CC$, чтобы сумма корней [равнялась] $3p$; она выразится таким образом: $3pp + Mqq + Nrr$. [Пусть] будет

$$A = p + mq + (m + 2n)r,$$

$$B = p + nq - (n + 2m)r,$$

$$C = p - (m + n)q + (m - n)r,$$

чтобы было

$$AA + BB + CC = 3pp + 2(mm + mn + nn)qq + 6(mm + mn + nn)rr.$$

Положим:

$$A = p + \alpha q + \delta r + \eta s,$$

$$B = p + \beta q + \varepsilon r + \theta s,$$

$$C = p - (\alpha + \gamma)q - (\delta + \zeta)r - (\eta + 2)s,$$

$$D = p - (\beta - \gamma)q - (\varepsilon - \zeta)r - (\theta - 2)s,$$

чтобы было

$$AA + BB + CC + DD = 4pp + Eqq + Frr + Gss$$

и

$$A + B + C + D = 4p;$$

$$E = 2\alpha\alpha + 2\beta\beta + 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma + 2\gamma\gamma,$$

$$\frac{\eta + \theta}{4}\alpha\beta\delta - \alpha\beta\varepsilon + \alpha\gamma\varepsilon + \beta\gamma\delta - \alpha\gamma\delta - \beta\gamma\varepsilon + \gamma\gamma\varepsilon - \alpha\alpha\delta - \gamma\gamma\delta + \beta\beta\varepsilon,$$

$$\frac{\eta - \theta}{4}\beta\beta\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\varepsilon - 2\beta\gamma\delta + 2\alpha\gamma\varepsilon - 2\beta\gamma\varepsilon + 2\gamma\gamma\varepsilon + 2\alpha\alpha\delta + 2\alpha\gamma\delta +$$

$$+ 2\gamma\gamma\delta + 2\beta\beta\varepsilon + \alpha\alpha\varepsilon,$$

$$\zeta = \frac{-2\alpha\delta - 2\beta\varepsilon - \gamma\delta + \gamma\varepsilon}{\alpha - \beta + 2\gamma},$$

$$\mathfrak{Q} = \begin{cases} -4\gamma\gamma\delta - 4\alpha\gamma\delta - 4\alpha\alpha\delta, \\ -4\gamma\gamma\varepsilon - 8\alpha\gamma\varepsilon - 4\alpha\alpha\varepsilon, \\ \qquad + 8\beta\gamma\delta - 4\beta\beta\delta, \\ \qquad + 4\beta\gamma\varepsilon - 4\beta\beta\varepsilon, \end{cases} \quad r = -4(\delta + \varepsilon)(\gamma\gamma + \alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha\alpha + \beta\beta) - 4\alpha\gamma\varepsilon + 4\beta\gamma\delta,$$

$$\frac{\eta + \theta}{4} = (\delta - \varepsilon)(\alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma - \gamma\gamma) - \alpha\alpha\delta + \beta\beta\varepsilon =$$
$$= (\delta - \varepsilon)(\alpha + \gamma)(\beta - \gamma) - \alpha\alpha\delta + \beta\beta\varepsilon,$$

$$\frac{\eta - \theta}{4} = (\delta + \varepsilon)(\beta\beta - \alpha\beta - 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma + 2\gamma\gamma + \alpha\alpha) + \beta\beta\varepsilon + \alpha\alpha\delta».$$

№ 133, л. 52 об.

«Теор[ема]. Если $2m - 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ и $2m + 1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, из корней a, b, c, d два будут превосходить на единицу два корня из α, β, γ, δ, двум же из них единицы будет недоставать, [то число] может быть разложено на такого рода четыре квадрата.

Или [пусть] всегда $2m - 1 = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$, чтобы было $2m + 1 = (p \pm 1)^2 + (q \pm 1)^2 + (r \pm 1)^2 + (s \pm 1)^2$, откуда любое нечетное число $2m - 1$ всегда может быть разложено на четыре такого рода квадрата $pp + qq + rr + ss$, чтобы было $\pm p \pm q \pm r \pm s = 1$.

Доказательство зависит от $8m - 5 = ff + gg + hh$, где f, g, h являются нечетными числами; следовательно, будет $8m - 4 = 1 + ff + gg + hh$ и $8m + 4 = 9 + ff + gg + hh$, $2m - 1 = \frac{1 + ff}{4} + \frac{gg + hh}{4} = \left(\frac{1 + f}{2}\right)^2 + \left(\frac{f - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{g + h}{2}\right)^2 + \left(\frac{g - h}{2}\right)^2$.

Т[еорема]. Если положить $(2er + 1)^2 + (fr + b)^2 + (gr + c)^2 + ((ee - 1)^2 + d)^2 = 1 + (fr - b)^2 + (gr - c)^2 + ((ee + 1)r + d)^2$, будет $d = e + bf + cg$.

Т[еорема]. Если положить $(2abx + p)^2 + (cx + q)^2 + (dx + r)^2 + ((aa - bb)x + s)^2 = pp + (cx - q)^2 + (dx - r)^2 + ((aa + bb)x + s)^2$, будет $abp + cq + dr - bbs = 0$».

№ 133, л. 80 об.

Приведенная ниже заметка является подготовительной к письму Эйлера к Гольдбаху от 3 июля 1751 г. [138].

«Чтобы $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + r$ было суммой четырех квадратов, полагается $\delta = k\alpha + m\beta + n\gamma - \frac{1}{2}x(kk + mm + mn + 1) + \frac{r}{2x}$, т. е.

$$4\square = (\alpha - kx)^2 + (\beta - mx)^2 + (\gamma - nx)^2 + (\delta + x)^2.$$

Так, чтобы было $\delta = k\alpha + m\beta + n\gamma + f$, [должно быть]

$$2fx = r - xx(kk + mm + nn + 1),$$

$$xx = \frac{-2fx + r}{kk + mm + nn + 1},$$

$$x = \frac{-f \pm \sqrt{(ff + r(kk + mm + nn + 1))}}{kk + mm + nn + 1}.$$

Здесь, чтобы было $r(kk + mm + nn + 1) = ab$, берется $f = \frac{a - b}{2}$.

Следовательно, k, m, n и f должны быть взяты так, чтобы $ff + r(kk + mm + nn + 1)$ стало квадратом.

В случае знам[енитейшего] Гольдбаха $r = 8$, следовательно, нужно сделать $ff + 8(kk + mm + nn + 1) =$ квадрату $= gg = \frac{1}{4}(a + b)^2$.

Следовательно, если $8(kk + mm + nn + 1) = ab = gg - ff$, $g - f = a$, $g + f = b$, $g = \frac{a + b}{2}$, откуда $f = \frac{b - a}{2}$, $x = \frac{(-f \pm g)8}{ab}$.

Следовательно, $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + 8$ есть сумма квадратов, если $\delta = k\alpha + m\beta + n\gamma + f$, но, положив $8(kk + mm + nn + 1) = ab$, получаем $f = \frac{a - b}{2}$, откуда следующие случаи:

I. $\delta = \alpha + f$	$16 = ab$	$f = 0, f = 3$
II. $\delta = 2\alpha + f$	$40 = ab$	$f = 3, f = 9$
III. $\delta = \alpha + \beta + \gamma + f$	$32 = ab$	$f = 2, f = 7$
IV. $\delta = 2\alpha + 2\beta + f$	$72 = ab$	$f = 3, f = 7, 17$
V. $\delta = 3\alpha + f$	$80 = ab$	$f = 1, f = 8, f = 19$

Чтобы было $f = 0$, должно быть $2(kk + mm + nn + 1) = \square$, следовательно, $kk + mm + nn = 1, \cancel{7}, 17, \cancel{31}, 49, \cancel{71} = 16\Delta + 1$.

Тогда, чтобы было $f = 0$:

I. $kk + mm + nn = 1$, $k = 0$, $m = 0$, $n = 0$;
II. $kk + mm + nn = 17$, $(k = 4, m = 1, n = 0)$, $(k = 3, m = 2, n = 2)$;
III. $kk + mm + nn = 49$, $(k = 7, m = 0, n = 0)$, $(k = 6, m = 3, n = 2)$;
IV. $kk + mm + nn = 97$, $(k = 9, m = 4, n = 0)$, $(k = 6, m = 6, n = 5)$.

Чтобы $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + 1$ было [равно] $4\square$ и $\delta = k\alpha + m\beta + n\gamma + f$, $kk + mm + nn + 1 = ab$, $f = \frac{a - b}{2}$, $kk + mm + nn = bb + 2bf - 1 = (b + f)^2 - ff - 1 = pp - 1 - ff$, [должно быть]:

I. $f = 1$, $kk + mm + nn = 2, 14, 34, 62, 98$;

II. $f = 0$, $kk + mm + nn = 0, 3, 8, 24, 35, 48, 80, 90$;

III. $f = 2$, $kk + mm + nn = 4, 11, 20, 44, 59, 76, 116$;

IV. $f = 3$, $kk + mm + nn = 6, \cancel{15}, 26, \cancel{39}, 54, \cancel{71}, 90, 111, 134$;

V. $f = 4$, $kk + mm + nn = 8, 19, 32, 47, 64, 83, 104, 127, 132$ и т. д

Глава III

ЗАПИСИ ЭЙЛЕРА ПО PARTITIO NUMERORUM

Аддитивная теория чисел в первый период своего развития носила название «partitio numerorum», т. е. «разбиение чисел».

Заслуга создания теории разбиения чисел принадлежит Эйлеру. До него было известно только несколько изолированных задач в этой области. Наиболее древнюю историю имеют задачи о представлении любого целого числа в виде суммы различных членов прогрессии 1, 2, 4, 8, 16,... или прогрессий ± 1, ± 3, ± 9, ± 27,... Возможность такого представления отмечали уже Леонардо Пизанский [139, с. 297] (прибл. 1170—1228), Мих. Штифель (1487—1567) и Франс ван Схоотен* [123, с. 410—419] (1615—1660), составившие таблицы выражения каждого числа, не большего 127, в виде суммы членов прогрессии 1, 2, 4, 8,... и каждого числа, не большего 121, в виде суммы членов прогрессии ± 1, ± 3, ± 9,... Первый из названных вопросов, который ставился в форме задачи о взвешивании всевозможных тяжестей наименьшим числом гирь, Эйлер приводит в качестве примера во «Введении в анализ бесконечных» (1748 г.) [102]. Следующая задача — сколькими способами данное целое число может быть разложено на сумму меньших целых чисел? — была впервые поставлена Лейбницем в 1647 г. [140]. В письме к И. Бернулли от 28 июля 1699 г. [136] Лейбниц предложил еще один вопрос — об исследовании числа способов, которыми данное число может быть разложено на две, три или более частей, и отметил, что эта задача кажется ему трудной, но важной [121, т. 2, с. 65].

Разбиению чисел посвящены, кроме 16-й главы 1-го тома «Введения в анализ бесконечных», несколько статей Эйлера и ряд его писем. В этих работах, а также в исследованиях о бесконечных рядах и произведениях, связанных с простыми числами, Эйлер впервые применил к задачам теории чисел методы анализа и заложил, таким образом, фундамент аналитической теории чисел. Полученные им результаты выходят далеко за рамки решения первоначальных задач. Они послужили исходным пунктом изысканий целого ряда математиков XIX и XX вв.

---

* Правильная транскрипция имени голландского математика F. van Schooten'a. Иногда его неверно называют Шутеном или Скаутеном.

Поводом к усиленным занятиям Эйлера вопросами разбиения чисел явилось письмо берлинского профессора Ноде (Philipp Naudé, 1684—1745) от 29 августа 1740 г., в котором он ставит перед Эйлером следующие задачи: «Имеется некоторая сумма денег b. Найти, сколькими различными способами она может быть разделена между c лицами так, чтобы их части все были не равны между собой, но все выражались бы только в целых числах.

Каковы абсолютно все способы, которыми 50 талеров могут быть распределены между 7 лицами, причем всегда в целых числах; т. е. сколькими совершенно различными способами это может происходить, будут ли все их части не равны между собой, или среди них будет сколько-то равных частей, или, наконец, число их равных частей также будет варьироваться каким-либо образом».*

У Эйлера позднее формулировка этих задач приобрела следующий вид:

1) найти, сколькими различными способами данное число может быть получено путем сложения между собой нескольких неравных целых чисел, число которых дано;

2) найти, сколькими различными способами данное число m может быть разбито на μ частей, как равных, так и не равных, или найти, сколькими различными способами данное число m может быть получено путем сложения между собой μ целых чисел, равных или не равных друг другу.

Ответ Эйлера на письмо Ноде датируется 12/23 сентября 1740 г. Эйлер пишет: «Задачи твои, славный муж, о разбиении чисел чрезвычайно понравились мне из-за их изящества и полезности для познания свойств чисел, и я тем более очень хотел бы видеть полное изложение этого вопроса, что сам я тоже напал на такую же задачу, но не мог найти достаточно удобного и легкого решения, какого я желал».**

Далее Эйлер приводит свое аналитическое решение, которое затем появилось в E158 (1741 г.).

Эйлер вводит в рассмотрение ряды

$$P = \frac{az}{1-az} + \frac{bz}{1-bz} + \frac{cz}{1-cz} + \ldots,$$

$$Q = \frac{az}{1+az} + \frac{bz}{1+bz} + \frac{cz}{1+cz} + \ldots$$

(a, b, c,... произвольны) и, развертывая каждый член в ряд, получает, что

$$P = Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots, \qquad Q = Az - Bz^2 + Cz^3 - \ldots,$$

* СПбФА РАН, ф. 1, оп. 3, л. 133—135. Перевод Ю. Х. Копелевич.

** СПбФА РАН, ф. 1, оп. 3, № 30, л. 65—73 об. Перевод Ю. Х. Копелевич.

где

$$A = a + b + c + \ldots, \quad B = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots, \quad C = a^3 + b^3 + c^3 + \ldots$$

Кроме того, вводятся произведения

$$R = (1 + az)(1 + bz)\ldots, \quad S = (1 - az)(1 - bz)\ldots,$$

для которых находится

$$R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \ldots, \quad S = 1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \ldots,$$

где

$$\alpha = a + b + c + \ldots, \ \beta = ab + ac + bc + \ldots, \ \gamma = abc + acd + abd + \ldots$$

Чтобы установить связь между R, S, P, Q, Эйлер логарифмирует выражения для R и S и получает:

$$\ln R = \ln(1 + az) + \ln(1 + bz) + \ln(1 + cz) + \ldots,$$

$$\ln S = \ln(1 - az) + \ln(1 - bz) + \ln(1 - cz) + \ldots,$$

а затем дифференцирует полученное:

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{dR}{dz} = \frac{a}{1 + az} + \frac{b}{1 + bz} + \ldots, \quad \frac{1}{S}\cdot\frac{dS}{dz} = -\frac{a}{1 - az} - \frac{b}{1 - bz} - \ldots,$$

откуда

$$Q = \frac{1}{R}\cdot\frac{zdR}{dz} \ \text{ и } \ P = -\frac{1}{S}\cdot\frac{zdS}{dz}.$$

С другой стороны,

$$\frac{zdR}{dz} = \alpha z + 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + \ldots,$$

поэтому

$$Q = \frac{\alpha z + 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + \ldots}{1 + \alpha z + \beta z^2 + \ldots} = Az - Bz^2 + \ldots$$

Сравнивая коэффициенты, Эйлер получает:

$$\alpha = A, \quad \beta = \frac{\alpha A - B}{2}, \quad \gamma = \frac{\beta A - \alpha B + C}{3}, \quad \delta = \frac{\gamma A - \beta B + \alpha C - D}{4}, \ \ldots \qquad (1)$$

Проводя аналогичное рассуждение для рядов $\frac{1}{S}$ и $\frac{1}{R}$, Эйлер приходит к ряду соотношений между α, β, γ, ...; A, B, C, ... и

$$\mathfrak{A} = a + b + c + \ldots,$$

$$\mathfrak{B} = a^2 + ab + b^2 + ac + \ldots,$$

$$\mathfrak{C} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + \ldots$$

После этого Эйлер подставляет вместо a, b, c, d величины n, n^2, n^3, ... и получает:

$$R = (1 + nz)(1 + n^2z)(1 + n^3z)... = 1 + \alpha z + \beta z^2 + ...$$

Тогда оказывается:

$$\alpha = n + n^2 + n^3 + n^4 + ...,$$
$$\beta = n^3 + n^4 + 2n^5 + 2n^6 + 3n^7 + ...,$$
$$\gamma = n^6 + n^7 + 2n^8 + 3n^9 + ...,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A = \frac{n}{1-n}, \quad B = \frac{n^2}{1-n^2}, \quad C = \frac{n^3}{1-n^3}, \dots$$

В выражении для β «любая степень встречается столько раз, сколько раз она может получиться умножением двух слагаемых ряда α; так как умножение степеней состоит в сложении показателей, то коэффициент любой степени n в ряду β показывает, сколькими различными способами показатель n может быть разделен на две неравные части». Аналогично в выражениях для γ, δ, ... коэффициент при n^s равен числу способов, каким s представляется суммой трех, четырех и более частей. Поэтому для решения первой задачи Ноде необходимо указать простой способ для вычисления α, β, γ, δ, ... Для этой цели Эйлер использует формулы (1) и непосредственным вычислением получает:

$$\alpha = \frac{n}{1-n} = A, \quad \beta = \frac{n^3}{(1-n)(1-n^2)} = AB, \quad \gamma = \frac{n^6}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)} = ABC, \dots$$

Подмеченную закономерность он доказывает следующим замечательным рассуждением: «В выражении для R заменим z на nz, получим:

$$(1 + n^2z)(1 + n^3z)(1 + n^4z)... = 1 + \alpha nz + \beta n^2z^2 + ...$$

Поэтому

$$R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + ... = (1 + nz)(1 + \alpha nz + \beta n^2z^2 + ...),$$

откуда

$$\alpha = \frac{n}{1-n}, \quad \beta = \frac{n^2}{1-n^2}\cdot\alpha = \frac{n^3}{(1-n)(1-n^2)},$$
$$\gamma = \frac{n^3}{1-n^3}\cdot\beta = \frac{n^6}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}$$

и т. д.».

Таким образом устанавливается, что количество разбиений m на μ неравных частей, которое Эйлер обозначает m^{μ}, равно коэффициенту при n^m в разложении $\dfrac{n^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}}}{(1-n)(1-n^2)...(1-n^{\mu})}$ в ряд по степеням n. Этот коэффициент, очевидно, также равен количеству разбиений числа $m - \dfrac{\mu(\mu+1)}{2}$ на слагаемые $\le \mu$.

Из алгебраического тождества

$$\frac{n^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}}}{(1-n)(1-n^2)...(1-n^{\mu})} - \frac{n^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}}}{(1-n)(1-n^2)...(1-n^{\mu})} = \frac{n^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}}}{(1-n)(1-n^2)...(1-n^{\mu-1})}$$

получается теперь формула

$$(m+\mu)^{(\mu)_i} = m^{(\mu)_i} m^{(\mu-1)_i}, \qquad (2)$$

которая вместе с условиями $m^{(1)_i} = 1$, $m^{(\mu)_i} = 0$ при $m < \frac{\mu(\mu+1)}{2}$ и $m^{(\mu)_i} = 1$ при $m = \frac{\mu(\mu+1)}{2}$ дает возможность быстро вычислять $m^{(\mu)_i}$.

Вторую задачу Ноде Эйлер решает, рассматривая выражения

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{(1-az)(1-bz)...} = 1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + ...,$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{(1+az)(1+bz)...} = 1 - \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 - \mathfrak{C}z^3 + ...$$

при $a = n$, $b = n^2$, $c = n^3$, ...

Тогда

$$\mathfrak{A} = n + n^2 + n^3 + n^4 + ...,$$

$$\mathfrak{B} = n^2 + n^3 + 2n^4 + 2n^5 + ...,$$

$$\mathfrak{C} = n^3 + n^4 + 2n^5 + 2n^6 + ...$$

Коэффициенты при n^s в $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ... показывают, сколькими способами s может быть разложено на одну, две, три и более равных или неравных частей. Обозначив через $m^{(\mu)}$ число способов, каким m может быть сделано суммой μ равных или неравных частей, Эйлер аналогичным способом получает формулу

$$m^{\mu} = (m-\mu)^{\mu} + (m+1)^{\mu-1} \qquad (3)$$

и доказывает, что $m^{(\mu)}$ также есть число способов, каким $m - \mu$ может быть получено сложением из 1, 2, 3, ...,μ.

Наконец, Эйлер впервые приводит в качестве наблюдения, строгого доказательства которого он дать еще не может, замечательное тождество

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - ... + (-1)^n x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}} + ... \qquad (4)$$

Ряд, стоящий справа, представляет особый интерес, так как он является одной из введенных К. Г. Якоби (1804—1851) θ-функций, на которых может быть основана вся теория эллиптических функций.

В 16-й главе 1-го тома «Введения в анализ бесконечных» наряду с уже содержащимися в названном ранее мемуаре результатами Эйлер получает, например, теорему о том, что число разбиений n на различные слагаемые равно числу разбиений n на любые нечетные слагаемые. Наконец, здесь же аналитически доказывается известный уже до Эйлера факт, что каждое натуральное число может быть единственным образом получено сложением различных членов прогрессии 1, 2, 4, 8, 16,... или прогрессий ± 1, ± 3, ± 9,...

В мемуаре E191 (1750 г.) Эйлер вывел формулу

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(\infty)} + (n-2)^{(\infty)} - (n-5)^{(\infty)} - (n-7)^{(\infty)} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{k-1}\left[\left(n - \frac{3k^2-k}{2}\right)^{(\infty)} + \left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right)^{(\infty)}\right] + \ldots,$$

где $n^{(\infty)}$ обозначает число всех разбиений n и где надо считать $x^{(\infty)} = 0$ при $x < 0$ и $(0)^{(\infty)} = 1$. Здесь же дана таблица функции $n^{(m)}$, т. е. количества разбиений n на части $\leq m$, для значений $n \leq 59$, $m \leq 20$ и $m = \infty$ (т. е. $m = n$).

В работах E175, E243, E244 (написана не позднее 1750 г., ибо ее содержание сообщается в июне 1750 г. Гольдбаху), E541 Эйлер приходит к доказательству тождества (1), а также к важным следствиям из него. В частности, в мемуаре E244 он доказывает замечательную рекуррентную формулу для $\sigma(n)$, т. е. суммы делителей числа n:

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-7) + \ldots +$$
$$+ (-1)^{k-1}\left[\sigma\left(n - \frac{3k^2-k}{2}\right) + \sigma\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right)\right] + \ldots, \qquad (5)$$

где надо считать $\sigma(x) = 0$ при $x < 0$ и $\sigma(0) = n$. Свой аналитический метод Эйлер применяет к более общим аддитивным проблемам в работах E394 и E586.

Несомненный интерес представляют двадцать записей в записных книжках Эйлера, раскрывающих историю исследований вопросов partitio numerorum (разбиения чисел). Большинство из них примыкает к известным работам Эйлера, однако есть и записи, не нашедшие отражения ни в его сочинениях, ни в опубликованной переписке. Записи показывают, что особый интерес к разбиению чисел сохранялся у Эйлера в 1740—1755 гг.; бóльшая часть заметок находится в записной книжке № 132 и внесена с 1740 по 1744 г. Записные книжки подтверждают, что поводом к занятию Эйлера разбиением чисел послужило письмо Ноде от 29 августа 1740 г.

В первых двух записях впервые встречается формулировка задач Ноде; датируются эти записи 1740 г.

№ 132, л. 17

«Задача. Найти, сколькими различными способами данное число может быть разложено на данное число частей так, чтобы отдельные части были не равны между собой.

Решение. Пусть дано число N, а число частей, на которые оно должно разделиться, равно n; вопрос сводится к тому, чтобы определить, сколькими различными способами число N может стать суммой n членов такого ряда: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$ Искомое число разложений обозначается следующим образом: $(N)^{(m)}$, так что эта запись обозначает, сколькими различными способами число N может быть разложено на n неравных частей.

Я говорю, что будет

$$(N)^{(n)} = (N - n)^{(n-1)} + (N - 2n)^{(n-1)} + (N - 3n)^{(n-1)} + \dots$$

или

$$(N)^{n} = (N - n)^{(n)} + (N - n)^{(n-1)}.$$

Нахождение, следовательно, одного какого-либо случая сводится к нахождению более простых случаев.

Всегда $(N)^{(1)} = 1$, а также если $N < \frac{n(n+1)}{2}$, то $(N)^{(n)} = 0$, и если $N = \frac{n(n+1)}{2}$, то $(N)^{(n)} = 1$. Из известных более простых разложений легко перейти к более сложным. Так как

$$(N - n)^{(n-1)} =$$
$$= (N - 2n + 1)^{(n-2)} + (N - 3n + 2)^{(n-2)} + (N - 4n + 3)^{(n-2)} + \dots,$$
$$(N - 2n)^{(n-1)} =$$
$$= (N - 3n + 1)^{(n-2)} + (N - 4n + 2)^{(n-2)} + (N - 5n + 3)^{(n-2)} + \dots,$$

то будет

$$(N)^{n} = (N - 2n + 1)^{(n-2)} + (N - 3n + 1)^{(n-2)} + (N - 4n + 1)^{(n-2)} + \dots +$$
$$+ (N - 3n + 2)^{(n-2)} + (N - 4n + 2)^{(n-2)} + \dots + (N - 4n + 3)^{(n-2)} + \dots».$$

№ 132, л. 17

«Задача. Найти, сколькими различными способами данное число N может быть разделено на n частей, равных или неравных.

Решение. Пусть искомое число этих разбиений обозначено значком $(N)^{(n)}$. Я говорю, что будет

$$(N)^{(n)} = (N - n)^{(n)} + (N - 1)^{(n-1)}$$

или же

$$(N)^{(n)} = (N-1)^{(n-1)} + (N-n-1)^{(n-1)} + (N-2n-1)^{(n-1)} + \ldots$$

Следовательно, из простейших разбиений получаются более сложные. Следует заметить, что $(N)^{(1)} = 1$, и если $N < n$, то $(N)^{(n)} = 0$, если $N = n$, то $(N)^{(n)} = 1$, и отсюда

$$(N)^{(n)} = (N-2)^{(n-2)} + (N-n-2)^{(n-2)} + (N-2n-2)^{(n-2)} +$$
$$+ (N-3n-2)^{(n-2)} + \ldots + (N-n-1)^{(n-2)} + (N-2n-1)^{(n-2)} +$$
$$+ (N-3n-1)^{(n-2)} + \ldots + (N-2n)^{(n-2)} + (N-3n)^{(n-2)} + \ldots +$$
$$+ (N-3n+1)^{(n-2)} + \ldots$$

Далее,

$$(N)^{(n)} = (N-n)^{(n)} + (N-n)^{(n-1)} + (N-n)^{(n-2)} + \ldots\text{».}$$

В данной записи, кроме того, фигурирует пример, где задача разбиения чисел на n частей (равных или неравных) решается в общем виде для $n \leq 3$. В опубликованных работах подобных примеров не обнаружено.

«Если $n = 1$ и $N = a$, то число разбиений $= 1$;

если $n = 2$, $N = 2a + 0$, a;

$N = 2a + 1$, a;

если $n = 3$, $N = 6a + 0$, $3a^2$;

$N = 6a + 1$, $3a^2 + a$;

$N = 6a + 2$, $3a^2 + 2a$;

$N = 6a + 3$, $3a^2 + 3a + 1$;

$N = 6a + 4$, $3a^2 + 4a + 1$;

$N = 6a + 5$, $3a^2 + 5a + 2$».

Эти результаты получены, по-видимому, применением формулы (2) непосредственно в каждом отдельном случае, что легко проверяется. К этой записи тесно примыкает следующая запись, внесенная значительно позднее.

№ 132, л. 87

Эйлер приводит примеры, аналогичные тем, которые рассматривались в предыдущей записи: ставится задача выражения в общем виде числа разбиений различных чисел на 2, 3 и 4 равные или неравные части:

Число частей	Число	Число способов
1	$n=x$	1
2	$n=2x$	$\frac{n}{2}+0$
	$n=2x+1$	$\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$
3	$n=6x$	$\frac{n^2}{12}+0+0$
	$n=6x+1$	$\frac{n^2}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$
	$n=6x+2$	$\frac{n^2}{12}+0-\frac{1}{3}$
	$n=6x+3$	$\frac{n^2}{12}+\frac{1}{4}+0$
	$n=6x+4$	$\frac{n^2}{12}+0-\frac{1}{3}$
.	$n=6x+5$	$\frac{n^2}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$
4	$n=12x$	$\frac{n^3}{144}+\frac{n^2}{48}+0\cdot n+0+0$
	$n=12x+1$	$\frac{n^3}{144}+\frac{n^2}{48}-\frac{n}{16}+\frac{2}{9}-\frac{3}{16}$
	$n=12x+2$	$\frac{n^3}{144}+\frac{n^2}{48}-0\cdot n+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}$
	$n=12x+3$	$\frac{n^3}{144}+\frac{n^2}{48}-\frac{n}{16}+0-\frac{3}{16}$
	$n=12x+4$	$\frac{n^3}{144}+\frac{n^2}{48}+0\cdot n+\frac{2}{9}+0$
	$n=12x+5$	$\frac{n^3}{144}+\frac{n^2}{48}-\frac{n}{16}+\frac{1}{9}-\frac{3}{16}$
	$n=12x+6$	$\frac{n^3}{144}+\frac{n^2}{48}-0\cdot n+0-\frac{1}{4}$

Из приведенных записей видно, что, приступив к решению задач, предложенных Ноде, Эйлер первоначально пытался решить их с помощью элементарных соображений и на этом пути установил простейшие рекуррентные соотношения. Кроме того, он нашел для количества представлений во второй задаче Ноде, когда число слагаемых не превосходит четырех, явные формулы, которые приведены в последней записи. Эти результаты, не встречающиеся в опубликованных работах и письмах Эйлера, были вновь получены английским математиком Морганом в 1843 г. [82], который указал и более краткий способ записи этих формул. Например, $(N)^{(3)}=\left\{\frac{N^2}{12}\right\}$ (где $\{x\}$ означает ближайшее к x целое число).

Свой аналитический метод решения задачи теории разбиения чисел Эйлер, как подтверждают записные книжки, разработал в конце 1740 г. К этому времени относятся первые записи, в которых встречается применение этого метода.

№ 132, л. 31

Кратко сформулированы результаты, приведенные в первом мемуаре Эйлера, посвященном разбиению чисел:

$$(1 + nz)(1 + n^2z)(1 + n^3z)(1 + n^4z)\ldots =$$
$$= 1 + nz + n^2z + n^4z + \ldots + n^3z^2 + n^4z^2 + 2n^5z^2 + \ldots;$$

коэффициент в каждом члене показывает, сколькими различными способами показатель степени у n разлагается на сумму неравных частей, число которых равно показателю степени у z в этом члене. Кроме того (как в E158), дается преобразование рассматриваемого выражения в следующее:

$$1 + \frac{nz}{1-n} + \frac{n^3z^2}{(1-n)(1-n^2)} + \frac{n^6z^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)} + \ldots \qquad (6)$$

Аналогично рассматривается

$$\frac{1}{(1-nz)(1-n^2z)(1-n^3z)\ldots} = 1 + nz + n^2z + n^3z + \ldots +$$
$$+ n^2z^2 + n^3z^2 + 2n^4z^2 + 2n^5z^2 + \ldots + n^3z^3 + n^4z^3 + 2n^5z^3 + \ldots$$

и утверждается, что коэффициент в каждом члене показывает, сколькими способами показатель степени у n может быть разложен на сумму частей (равных или неравных), число которых равно показателю степени у z в этом члене. Данное выражение, кроме того, может быть представлено в виде

$$1 + \frac{nz}{1-n} + \frac{n^2z^2}{(1-n)(1-n^2)} + \frac{n^3z^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)} + \ldots \qquad (7)$$

№ 132, л. 86 об.

Приведен тот же результат, что и в предыдущей записи, но в несколько другой формулировке.

№ 132, л. 88

Приводятся две формулы (6) и (7), и формулируется теорема, прямо вытекающая из формулы (7), которая известна также по первому мемуару: «Если ищется, сколькими различными способами данное число n может стать суммой p целых положительных чисел, и число способов равно N, то это число N будет одновременно обозначать, сколькими различными способами число $n - p$ может быть получено сложением из чисел 1, 2, 3, 4,..., p».

№ 132, л. 89

Эта запись представляет собой непосредственную подготовку к Е158. Вводятся ряды:

$$A = a + b + c + d + \ldots, \qquad \alpha = a + b + c + \ldots,$$
$$B = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots, \qquad \beta = ab + ac + ad + \ldots,$$
$$C = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \ldots, \qquad \gamma = abc + abd + \ldots,$$
$$D = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + \ldots, \qquad \delta = abcd + abce + bcde + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{A} = a + b + c + \ldots,$$
$$\mathfrak{B} = a^2 + ab + b^2 + ac + \ldots,$$
$$\mathfrak{C} = a^3 + a^2b + abc + ab^2 + \ldots,$$
$$\mathfrak{D} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + a^2bc + abcd + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и между ними устанавливаются следующие соотношения:

$$\alpha = A, \qquad \mathfrak{A} = A,$$
$$2\beta = \alpha A - B, \qquad 2\mathfrak{B} = \mathfrak{A}A + B,$$
$$3\gamma = \beta A - \alpha B + C, \qquad 3\mathfrak{C} = \mathfrak{B}A + \mathfrak{A}B + C,$$
$$4\delta = \gamma A - \beta B + \alpha C - D, \qquad 4\mathfrak{D} = \mathfrak{C}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{A}C + D,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Анализ записных книжек показывает, что Эйлер пришел к своему аналитическому методу, исходя из отношений между симметрическими функциями от бесконечного числа переменных. Однако эти соотношения применялись им значительно раньше к решению других задач. Еще в 1736 г. они были использованы для решения знаменитой проблемы об определении суммы ряда обратных квадратов [152]. Из писем к Гольдбаху [138] видно, что в 1739 г. Эйлер исследует с их помощью ряды $1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \ldots$, $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \ldots$ и др. Переписка Эйлера с Гольдбахом по этому вопросу отразилась в записной книжке № 131 (л. 245—246 об., 153). Подобные соотношения для конечного числа величин встречаются в более ранних записях книжки № 131 (л. 70 об., 77 об. и др.) в связи с исследованием решений обыкновенного алгебраического уравнения

$$x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \ldots = 0.$$

№ 132, л. 89 об.

Формулируется теорема: «Выражение $(1+z)(1+z^2)(1+z^4)\ldots$, будучи развернуто, дает геометрическую прогрессию: $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \ldots = \frac{1}{1-z}$». Другими словами, утверждается, что любое положительное число может быть представлено единственным способом в виде суммы членов прогрессии 1, 2, 4, 8, 16, ... Как было указано выше, эта задача была известна еще Леонардо Пизанскому. «Доказательство, — говорит Эйлер, — получается на том основании, что если в этом выражении положить z^2 вместо z и полученную форму умножить $1 + z$, получится данное выражение».

Таким образом, имеется в виду доказательство этой теоремы, приведенное Эйлером в § 328 16-й главы 1-го тома «Введения в анализ бесконечных» [102] (Е101) (1748 г.) и в Е191 (1750 г.). Как свидетельствует данная запись, доказательство этой теоремы появилось у Эйлера значительно раньше, в 1740—1741 гг.

№ 132, л. 97 об.

Здесь находится запись того же содержания, что и предыдущая заметка. Но кроме вышеуказанного соотношения без доказательства приведены следующие два, которые в опубликованных работах не фигурируют: «Геометрическая прогрессия $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$ получается при развертывании бесконечных произведений

$$(1 + x + x^2)(1 + x^3 + x^6)(1 + x^9 + x^{18})(1 + x^{27} + x^{54})\ldots$$

и

$$(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^4 + x^8 + x^{12})(1 + x^{16} + x^{32} + x^{48})\ldots».$$

Далее, на этом же листе Эйлер записывает в виде замечания еще два утверждения, из которых первое рассматривается во «Введении»: ряд

$$\ldots + x^{-5} + x^{-4} + x^{-3} + x^{-1} + 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$$

получается из

$$(1 + x + x^{-1})(1 + x^3 + x^{-3})(1 + x^9 + x^{-9})(1 + x^{27} + x^{-27})\ldots$$

и

$$(1 + x + x^2 + x^{-1} + x^{-2})(1 + x^5 + x^{10} + x^{-5} + x^{-10}) \times$$
$$\times (1 + x^{25} + x^{50} + x^{-25} + x^{-50})\ldots$$

«Из этого методика взвешивания (praxis ponderandi) Схоотена не только доказывается, но и расширяется»: Эйлер имеет здесь в виду 8-й раздел 5-й книги ван Схоотена [123].

Из первого утверждения вытекает, что каждое целое число может быть получено сложением различных членов прогрессий ± 1, ± 3, $\pm 3^2, \ldots$, а это, как было указано выше, было известно уже Штифелю и ван Схоотену.

В следующей записи мы встречаем последнюю попытку элементарным способом найти явную формулу для решения задач, предложенных Эйлеру Ноде. Окончательный результат, который получен в данной записи, оказывается неправильным, что отмечает сам Эйлер. Как показали позже исследования английских математиков (Сильвестр, Кели и др.), более рациональный путь, ведущий к получению явных формул, фактически был связан с дальнейшей разработкой аналитического метода Эйлера (разложение производящих функций на простейшие дроби с использованием комплексных корней из единицы). Очевидно, Эйлер также пришел к выводу, что его аналитический метод оказался более плодотворным, и больше не возвращается к элементарному способу.

№ 132, л. 104 об.—105

«Пусть

$$P = n-1,\ P' = n-2,\ P'' = n-3,\ P''' = n-4,\ P^{IV} = n-5, \ldots;$$

$$Q = \frac{PP'}{2},\ Q' = \frac{P'P''}{2},\ Q'' = \frac{P''P'''}{2},\ Q''' = \frac{P'''P^{IV}}{2},\ Q^{IV} = \frac{P^{IV}P^{V}}{2}, \ldots;$$

$$R = \frac{QP''}{3},\ R' = \frac{Q'P'''}{3},\ R'' = \frac{Q''P^{IV}}{3},\ R''' = \frac{Q'''P^{V}}{3},\ R^{IV} = \frac{Q^{IV}P^{V}}{3}, \ldots;$$

$$S = \frac{RP'''}{4},\ S' = \frac{R'P^{IV}}{4},\ S'' = \frac{R''P^{V}}{4},$$

. . . .

Тогда число способов, которыми число n может быть разбито на некоторое число частей, выражается следующим образом:

Число частей	Число способов
1	$1-0+0-0+0-0+0-0+0-\ldots$
2	$P-P'+P''-P'''+P^{IV}-P^{V}+P^{VI}-\ldots$
3	$Q-2Q'+2Q''-Q'''+0\cdot Q^{IV}-0\cdot Q^{V}+Q^{VI}+\ldots$
4	$R-3R'+4R''-3R'''+2R^{IV}-3R^{V}+5R^{VI}+\ldots$
5	$S-4S'+7S''-7S'''+5S^{IV}-4S^{V}+4S^{VI}+\ldots$

Каждый ряд продолжается до тех пор, пока не получается исчезающий член».

Закон коэффициентов таков: в m-м ряду сумма m последовательных коэффициентов равна коэффициенту, стоящему над последним слагаемым в предыдущем ряду [например, $0(Q^{IV}) = -3(R') + 4(R'') - 3(R''') + 2(R^{IV})$], «откуда всякий коэффициент в каком-либо ряду равен коэффициенту члена, стоящего раньше на m единиц, + коэффициент соответствующего члена в предыдущем ряду – коэффициент члена, предшествующего последнему. Так, $4(S^{IV}) = -4(S') + 5(R^{VI}) + 3(R^{V})$. Таким образом, этот ряд легко может быть продолжен. Отсюда данное число n может быть разложено столькими способами на p частей, сколько обозначает такое выражение:

$$z - (p-1)z' + \left(\frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2} + 1\right)z'' - \left(\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{p-2}{1}\right)z''' + \\ + \left(\frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{(p-2)(p-3)}{1\cdot 3} + 1\right)z^{IV} - \\ - \left(\frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{(p-2)(p-3)(p-4)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(p-3)}{1}\right)z^{V} + \ldots,$$

если

$$z = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p-1)},$$

$$z' = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)\ldots(n-p)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p-1)},$$

$$z'' = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)\ldots(n-p-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p-1)}.$$

Должно быть взято столько членов, пока не придем к исчезающему, и тогда ряд должен быть срезан».

Но далее Эйлер замечает: «О коэффициентах следует заметить, что их лишь $p + 1$ дается правильно, следующие от истины отклоняются». Заметим, что в этой записи ошибочна только самая последняя формула. В действительности она должна выглядеть так:

$$n^{(p)} = z + a_1^{(p)}z' + a_2^{(p)}z'' + a_3^{(p)}z''' + \ldots = \sum_{k=0}^{n-p} a_k^{(p)} C_{n-k-1}^{p-1},$$

причем числа $a_k^{(p)}$ определяются условиями: $a_k^{(p)} = a_{k-p}^{(p)} + a_k^{(p-1)} - a_{k-1}^{(p-1)}$; $a_k^{(p)} = 0$ при $k < 0$, $a_0^{(p)} = 1$, $a_k^{(1)} = 0$ при $k \geq 1$. Найти для чисел $a_k^{(p)}$ явную формулу, по-видимому, столь же трудно, как и для $n^{(p)}$. Этим и объясняется неудача Эйлера.

Эти два листа записных книжек Эйлер посвящает составлению таблиц, с помощью которых решается задача о разбиении данного числа n на p равных или неравных частей. В начале записи предлагается таблица:

$$
\begin{array}{l}
1)\ 1 - 1 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + \ldots \\
2)\ 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \\
3)\ 1 - 1 + 1 - 0 + 0 - 0 + 1 - 1 + 1 - 0 + 0 - 0 + 1 - 1 + 1 - 0 + 0 + \ldots \\
4)\ 1 - 1 + 1 - 0 + 1 - 1 + 2 - 1 + 2 - 1 + 2 - 1 + 2 - 1 + 3 - 2 + 3 + \ldots \\
5)\ 1 - 1 + 1 - 0 + 1 - 0 + 1 - 0 + 2 - 0 + 2 - 0 + 3 - 0 + 3 + 1 + 3 + \ldots \\
6)\ 1 - 1 + 1 - 0 + 1 - 0 + 2 - 1 + 3 - 0 + 3 - 0 + 5 - 1 + 6 + 1 + 6_* + \ldots \\
7)\ 1 - 1 + 1 - 0 + 1 - 0 + 2 - 0 + 2 + 1_* + 3 + 1 + 5 + 1 + 6 + 3 + 7_* + \ldots
\end{array}
$$

Эта таблица построена по следующему правилу: любой член любого ряда равен сумме того члена этого ряда, который отстоит от искомого члена на столько единиц, каков номер ряда, плюс член предыдущего ряда, стоящий над искомым членом. Так, в седьмом ряду семнадцатый член $7 = 6 + 1$ (соответствующие слагаемые в таблице Эйлера отмечены звездочками).

Если p-й ряд таблиц имеет вид

$$p)\ 1 - 1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \theta + i + \kappa + h + \ldots,^*$$

то число способов, которыми данное число n может быть разбито на p частей, равно $(n - p + 1) - (n - p) + \alpha(n - p - 1) + \beta(n - p - 2) + \gamma(n - p - 3) + \delta(n - p - 4) + \ldots$ (всего $(n - p + 1)$ слагаемых).

«Другое и более легкое» решение этой же задачи Эйлер дает при помощи второй таблицы, построенной по тому же правилу, что и предыдущая, но исходя из ряда единиц:

$$
\begin{array}{rccccccccccccc}
 & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 & & 10 & & 11 & & 12 & & 13 \\
1) & 1 &+& 1 &+& 1 &+& 1 &+& 1 &+& 1 &+& 1 &+& 1 &+& 1 &+& 1 &+& 1 &+& 1 &+& 1 & +\ldots \\
2) & 1 &+& 1 &+& 2 &+& 2 &+& 3 &+& 3 &+& 4 &+& 4 &+& 5 &+& 5 &+& 6 &+& 6 &+& 7 & +\ldots \\
3) & 1 &+& 1 &+& 2 &+& 3 &+& 4 &+& 5 &+& 7 &+& 8 &+& 10 &+& 12 &+& 14 &+& 16 &+& 19 & +\ldots \\
4) & 1 &+& 1 &+& 2 &+& 3 &+& 5 &+& 6 &+& 9 &+& 11 &+& 15 &+& 18 &+& 23 &+& 27 &+& 34 & +\ldots \\
5) & 1 &+& 1 &+& 2 &+& 3 &+& 5 &+& 7 &+& 10 &+& 13 &+& 18 &+& 23 &+& 30 &+& 37 &+& 47 & +\ldots \\
6) & 1 &+& 1 &+& 2 &+& 3 &+& 5 &+& 7 &+& 11 &+& 14 &+& 20 &+& 26 &+& 35 &+& 44 &+& 58 & +\ldots \\
7) & 1 &+& 1 &+& 2 &+& 3 &+& 5 &+& 7 &+& 11 &+& 15 &+& 21 &+& 28 &+& 38 &+& 49 &+& 65 & +\ldots \\
8) & 1 &+& 1 &+& 2 &+& 3 &+& 5 &+& 7 &+& 11 &+& 15 &+& 22 &+& 29 &+& 40 &+& 52 &+& 70 & +\ldots \\
9) & 1 &+& 1 &+& 2 &+& 3 &+& 5 &+& 7 &+& 11 &+& 15 &+& 22 &+& 30 &+& 41 &+& 54 &+& 73 & +\ldots
\end{array}
$$

и т. д.

---

* Нетрудно показать, что для членов этого ряда функция $\dfrac{1 - x}{(1 - x^2)(1 - x^3)\ldots(1 - x^p)}$ является производящей.

Для того чтобы определить число способов разбиения числа n на p равных или неравных частей, Эйлер предлагает взять $(n - p + 1)$-й член p-го ряда. Например, если требуется разбить 15 на 8 частей, то в восьмом ряду берется $(15 - 8 + 1)$-й член (т. е. 8-й), равный 15; другими словами, 15 может быть разбито на 8 слагаемых 15-ю способами.

Здесь же дается другой способ построения рассматриваемой таблицы, исходя из рядов: натурального, ряда треугольных чисел, ряда пирамидальных чисел 1-го порядка, 2-го порядка и т. д.

Так, для получения второго ряда таблицы берется натуральный ряд и из каждого его члена вычитается предыдущий член нового ряда (первое вычитаемое = 0):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	...

Для получения третьего ряда берется ряд треугольных чисел:

	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	...
1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	...
1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	...

Прежде всего из верхнего ряда вычитается предыдущий член следующего ряда; далее из членов полученного ряда вычитаются суммы предыдущих двух членов следующего, третьего ряда; нижний ряд дает третий ряд рассматриваемой таблицы.

Для получения четвертого ряда Эйлер берет ряд пирамидальных чисел:

1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	...
1	3	7	13	22	34	50	70	95	125	161	203	...
1	2	4	7	11	16	23	31	41	53	67	83	...
1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	...

Следующие два ряда получаются по правилам, аналогичным предыдущему; последний дает четвертый ряд нашей таблицы. Вторая таблица данной записи и первый способ ее построения опубликованы Эйлером в мемуаре E191.* Оба способа построения легче всего обосновываются с помощью рассмотрения функций $\frac{1}{(1-x)...(1-x^p)}$, являющихся производящими функциями для чисел p-го ряда таблицы.

Знаменитое тождество

* В окончательной таблице из E191 нет знаков «+», которые совершенно излишни, и номера столбцов начинаются с нуля.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\,x^{\frac{3k^2-k}{2}}$$

впервые встречается в следующей записи.

№ 132, л. 26

«Выражение $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)$... преобразуется в такой ряд: $1-n-n^2+n^5+n^7-n^{12}-n^{15}+n^{22}+n^{26}-n^{35}-n^{40}+\ldots$, показатели содержатся в формуле $\frac{3xx\pm x}{2}$». Таким образом, можно предполагать, что оно было открыто в сентябре 1740 г. Следующее упоминание об этой формуле находится в той же записной книжке, но значительно позднее и относится примерно к 1744 г.

№ 132, л. 87 об.

Запись, находящуюся на этом листе, Эйлер начинает с численных примеров разбиения чисел, в которых приводятся без вывода окончательные результаты; прежде всего рассматривается задача, поставленная в письме Ноде и решенная Эйлером в первом из вышеупомянутых мемуаров: сколькими способами можно 50 разбить на 7 неравных частей, — и приводится известный по опубликованной работе результат: искомое число разбиений равно 522. В случае, когда допускаются и равные части, число разбиений равно 8946. Далее без вычислений приведено решение задачи о разбиении числа 125 на 12 неравных частей и 42 на 20 частей, причем соответственно получены результаты 64 707 и 1000.

На этом же листе записной книжки Эйлер рассматривает вопрос, которым он закончил свой первый мемуар о разбиении чисел, а именно: он утверждает, что если разложить выражение $\frac{1}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)\ldots}$, то получится ряд $1+n+2n^2+3n^3+5n^4+7n^5+11n^6+15n^7+22n^8+$ $+\,30n^9+\ldots$, в котором коэффициент при каком-либо члене показывает, сколькими различными способами показатель n в этом члене может быть получен сложением из меньших чисел.

В качестве примера рассматривается число 6; для этого случая количество разложений равно 11:

6	3 + 3	2 + 2 + 1 + 1
5 + 1	3 + 2 + 1	2 + 1 + 1 + 1 + 1
4 + 2	3 + 1 + 1 + 1	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
4 + 1 + 1	2 + 2 + 2	

Ряд $1 + n + 2n^2 + 3n^3 + 5n^4 + 7n^5 + 11n^6 + \ldots$, будучи умножен на ряд $1 - n - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - \ldots$, в котором показатели содержатся в форме $\frac{3xx \pm x}{2}$, дает 1.

№ 132, л. 223

Формулируется теорема: «Ряд $1 - n - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - n^{15} + \ldots = (1 - n)(1 - n^2)(1 - n^3)\ldots$ имеет такое свойство, что если положить ряд [равным] s, то будет $-\frac{nds}{sdn} = n + 3n^2 + 4n^3 + 7n^4 + 6n^5 + \ldots$, в каковом ряду любой коэффициент содержит сумму делителей показателя. Следовательно, будет

$$-ls = n + \frac{3}{2}n^2 + \frac{4}{3}n^3 + \frac{7}{4}n^4 + \frac{6}{5}n^5 + \frac{12}{6}n^6 + \frac{8}{7}n^7 + \ldots».$$

В этой записи Эйлер пытается извлечь некоторые следствия из тождества:

$$1 - n - n^2 + n^5 + n^7 - \ldots = (1 - n)(1 - n^2)(1 - n^3)\ldots$$

Однако он еще не приходит к своей замечательной рекуррентной формуле для суммы делителей, хотя весьма близок к ней.

Эту рекуррентную формулу Эйлер сообщил Гольдбаху в письме от 1 апреля 1747 г. с указанием, что получил ее лишь недавно [138]. Впервые опубликован этот результат в мемуаре E175.

№ 133, л. 49—51

Эйлер рассматривает разложение:

$$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)\ldots = 1 - (1)x - (2)x^2 - (3)x^3 - (4)x^4 - (5)x^5 - \ldots$$

и отмечает закон, по которому составляются коэффициенты ряда, стоящего в правой части:

$(2) = 1$, $(3) = 1 - 1$, $(4) = 1 - 1$,
$(5) = 1 - 2$, $(6) = 1 - 2 + 1$, $(7) = 1 - 3 + 1$, $(8) = 1 - 3 + 1$,
$(9) = 1 - 4 + 3$, $(10) = 1 - 4 + 4 - 1$, $(11) = 1 - 5 + 5 - 1$,
$(12) = 1 - 5 + 7 - 2$, $(13) = 1 - 6 + 8 - 3$, $(14) = 1 - 6 + 8 - 3$,
$(15) = 1 - 7 + 12 - 6 + 1, \ldots$

Таким образом, он применяет формулу $(n) = q_u(n) - q_{g(n)}$ (где $q_u(n)$ — разбиение n на нечетное число различных слагаемых, $q_{g(n)}$ — количество разбиений n на четное число слагаемых). Запись показывает, что Эйлеру был известен еще около 1750—1751 гг. арифметический смысл его тождества, в то время как обычно считается, что впервые это было отмечено Лежандром в 1830 г.

Во второй части записи ставится задача — доказать формулу

$$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 + \ldots + (-1)x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}} + \ldots,$$

которая встречается как в записях, так и в мемуарах более ранних лет. Доказательство проведено двумя методами, из которых лишь второй использован для этой же цели в мемуаре E244.

Первый метод Эйлера, который опубликован не был, заключается в следующем. Пусть

$$s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots;$$

s можно представить в виде

$$s = 1 - \frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} - \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} +$$

$$+ \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} - \ldots$$

Во втором члене Эйлер производит преобразование:

$$\frac{-x}{1-x} = \frac{-x+x^2-x^2}{1-x} = -x - \frac{x^2}{1-x} = -x - \frac{x^2+x^3-x^3}{1-x} =$$

$$= -x - x^2 - \frac{x^3}{1-x};$$

тогда

$$s = 1 - x - x^2 - \frac{x^3}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} - \ldots$$

После этого объединяются четвертый и пятый члены, в полученном выражении производятся преобразования, аналогичные предыдущему, и этот процесс продолжается. Запись Эйлера выглядит следующим образом:

$$s = 1 - x - x^2 \underbrace{- \frac{x^3}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}}_{\dfrac{x^5}{(1-x)(1-x^2)}}$$

$$\overbrace{\frac{x^5}{1-x^2} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)}}^{\dfrac{x^5}{(1-x)(1-x^2)}}$$

$$\frac{x^5}{1-x^2} + \underbrace{\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)} - \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}}_{\dfrac{-x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}}$$

$$\overbrace{\frac{-x^9}{(1-x^2)(1-x^3)} - \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}}^{\dfrac{-x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}}$$

$$\frac{-x^9}{(1-x^2)(1-x^3)} \underbrace{- \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}}_{\dfrac{+x^{14}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}}$$

. . . .

Отсюда

$$s = 1 - x - x^2 - \frac{x^5}{1-x^2} + \frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^3)} +$$

$$+ \frac{x^{14}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} - \frac{x^{20}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)} + \ldots$$

Произведя далее новые преобразования с целью уничтожить $1 - x^2$ в знаменателях, Эйлер получает:

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 + \underbrace{\frac{x^9}{1-x^2} - \frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^3)}}_{\dfrac{-x^{-12}}{(1-x^2)(1-x^3)}}$$

$$\overbrace{\frac{-x^{12}}{1-x^3} - \frac{x^{14}}{(1-x^2)(1-x^3)}} \hspace{-8em} \underbrace{\phantom{\frac{x^{14}}{(1-x^2)(1-x^3)}} + \frac{x^{14}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}}_{\dfrac{+x^{18}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}}$$

$$\overbrace{\frac{x^{18}}{(1-x^3)(1-x^4)} + \frac{x^{20}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}} \hspace{-10em} \underbrace{\phantom{\frac{x^{20}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}} - \frac{x^{20}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}}_{\dfrac{-x^{25}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}}.$$

Отсюда

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \frac{x^{12}}{1-x^3} + \frac{x^{18}}{(1-x^3)(1-x^4)} -$$

$$- \frac{x^{25}}{(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)} + \ldots$$

Таким же образом

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} - \underbrace{\frac{x^{18}}{1-x^3} + \frac{x^{18}}{(1-x^3)(1-x^4)}}_{\dfrac{x^{22}}{(1-x^3)(1-x^4)}}$$

$$\overbrace{\frac{-x^{22}}{1-x^4}} + \underbrace{\frac{x^{25}}{(1-x^3)(1-x^4)} - \frac{x^{25}}{(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}}$$

$$-\frac{x^{30}}{(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}+\frac{x^{30}}{(1-x^4)(1-x^5)}.$$

Итак, путем последовательных циклов преобразований Эйлер приходит к формулам:

$$s=1-\frac{x}{1-x}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}-\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+$$
$$+\frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}-\ldots=1-P,$$

$$P=x+x^2-\frac{x^5}{1-x^2}-\frac{x^9}{(1-x)(1-x^3)}+\frac{x^{14}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}-\ldots=$$
$$=x+x^2+Q,$$

$$Q=x^5+x^7-\frac{x^{12}}{1-x^3}+\frac{x^{18}}{(1-x^3)(1-x^4)}-\frac{x^{25}}{(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}+\ldots=$$
$$=x^5+x^7-R,$$

$$R=x^{12}+x^{15}+\frac{x^{22}}{1-x^4}+\frac{x^{30}}{(1-x^4)(1-x^5)}-\frac{x^{39}}{(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)}+$$
$$+\frac{x^{49}}{(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)}-\ldots=$$
$$=x^{12}+x^{15}-S,$$

$$S=x^{22}+x^{26}-\frac{x^{35}}{1-x^5}+\frac{x^{45}}{(1-x^5)(1-x^6)}-\frac{x^{56}}{(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)}+\ldots$$

Рассмотрим в общем случае остаток ряда, получившийся после некоторого числа циклов преобразований:

$$Y=\frac{x^{\frac{3n^2-n}{2}}}{1-x^n}-\frac{x^{\frac{3n^2+3n}{2}}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}+\frac{x^{\frac{3n^2+7n+2}{2}}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})}-$$
$$-\frac{x^{\frac{3n^2+11n+6}{2}}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})(1-x^{n+3})}+\ldots$$

Произведем уже применявшиеся преобразования. Получаем:

$$Y=x^{\frac{3n^2-n}{2}}+x^{\frac{3n^2+n}{2}}+\underbrace{\frac{x^{\frac{3n^2+3n}{2}}}{1-x^n}-\frac{x^{\frac{3n^2+3n}{2}}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}}$$

$$-\frac{x^{\frac{3n^2-5n+2}{2}}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$

$$-\frac{x^{\frac{3n^2+5n+2}{2}}}{1-x^{n+1}}-\frac{x^{\frac{3n^2+7n+2}{2}}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}+\frac{x^{\frac{3n^2+7n+2}{2}}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})}$$

$$\frac{x^{\frac{3n^2+9n+6}{2}}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})}$$

$$\frac{x^{\frac{3n^2+9n+6}{2}}}{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})}+\frac{x^{\frac{3n^2+11n+6}{2}}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})}-$$

$$-\frac{x^{\frac{3n^2+11n+6}{2}}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})(1-x^{n+3})}$$

$$\frac{-x^{\frac{3n^2+13n+12}{2}}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})(1-x^{n+3})}$$

. . . .

Поэтому

$$Y=x^{\frac{3n^2-n}{2}}+x^{\frac{3n^2+n}{2}}-\frac{x^{\frac{3n^2+5n+2}{2}}}{1-x^{n+1}}+\frac{x^{\frac{3n^2+9n+6}{2}}}{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})}-\ldots$$

Можно положить

$$Y=x^{\frac{3n^2-n}{2}}+x^{\frac{3n^2+n}{2}}-Z,$$

где

$$Z=\frac{x^{\frac{3n^2+5n+2}{2}}}{1-x^{n+1}}-\ldots,$$

т. е. Z получается из Y при подстановке $n+1$ вместо n.

Таким образом, доказана законность перехода от n к $n+1$ и, следовательно, применив полную индукцию, Эйлер приходит к доказательству формулы

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{\frac{3k^2\pm k}{2}}.$$

Однако, очевидно ввиду значительной сложности этого доказательства, Эйлер здесь же переходит к другому доказательству, по существу совпадающему с тем, которое затем было опубликовано в мемуаре E244.

Надо думать, что в мемуаре мы сталкиваемся с тем случаем, когда Эйлер ограничивается неполной индукцией ввиду очевидной для него правильности получаемого результата; здесь это тем более естественно, что предыдущее доказательство было проведено Эйлером строго и полностью подтвердило правильность рассматриваемой формулы.

Произведение $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$ Эйлер представляет в виде

$$s = 1 - x - x^2(1-x) - x^3(1-x)(1-x^2) - x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) - \ldots$$

и полагает это выражение равным $1 - x - A$. Тогда

$$\begin{array}{l} A=-x^3 \qquad -x^4(1-x^2) \qquad -x^5(1-x^2)(1-x^3)-\ldots \\ \underline{x^2+x^3(1-x^2)+x^4(1-x^2)(1-x^3)+x^5(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)+\ldots} \\ A=x^2-x^5-x^7(1-x^2)-x^9(1-x^2)(1-x^3)-x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)-\ldots=x^2-x^5-B \end{array}.$$

[Аналогично]

$$\begin{array}{l} B=-x^9 \qquad -x^{11}(1-x^3) \qquad -x^{13}(1-x^3)(1-x^4)-\ldots \\ \underline{x^7+x^9(1-x^3)+x^{11}(1-x^3)(1-x^4)+x^{13}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)+\ldots} \\ B=x^7-x^{12}-x^{15}(1-x^3)-x^{18}(1-x^3)(1-x^4)-x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)-\ldots=x^7-x^{12}-C \end{array},$$

$$\begin{array}{l} C=-x^{18} \qquad -x^{21}(1-x^4) \qquad -x^{24}(1-x^4)(1-x^5)-\ldots \\ \underline{x^{15}+x^{18}(1-x^{24})+x^{21}(1-x^4)(1-x^5)+x^{24}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)+\ldots} \\ C=x^{15}-x^{22}-x^{26}(1-x^4)-x^{30}(1-x^4)(1-x^5)-x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)-\ldots=x^{15}-x^{22}-D \end{array};$$

$$\begin{array}{l} D=-x^{30} \qquad -x^{34}(1-x^5) \qquad -x^{38}(1-x^5)(1-x^6)-\ldots \\ \underline{x^{26}+x^{30}(1-x^5)+x^{34}(1-x^5)(1-x^6)+x^{38}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)+\ldots} \\ D=x^{26}-x^{35}-x^{40}(1-x^5)-x^{45}(1-x^5)(1-x^6)-x^{50}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)-\ldots=x^{26}-x^{35}-E \end{array}$$

и т. д. Далее Эйлер рассматривает некоторый член M ряда A, B, C, D, E,..., полученный аналогичными преобразованиями:

$$M=x^m-x^n-x^{n+p}(1-x^p)-x^{n+2p}(1-x^p)(1-x^{p+1})-$$
$$-x^{n+3p}(1-x^p)(1-x^{p+1})(1-x^{p+2})-\ldots$$

и полагает $M = x^m - x^n - N$. Тогда

$$N=x^{n+p}-x^{n+3p+1}-x^{n+4p+2}(1-x^{p+1})-x^{n+5p+3}(1-x^{p+1})(1-x^{p+2})-\ldots$$

Этот переход от M к N позволяет Эйлеру получить все члены ряда

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots,$$

исходя из двух первых и принимая последовательно $p = 1, 2, 3, \ldots$

Целый ряд записей относится к некоторым другим вопросам, связанным с разбиением чисел.

№ 132, л. 250 об.—251

На этих листах мы встречаемся с заметками, которые представляют собой черновые наброски к § 16 мемуара E394.

№ 132, л. 251

В первой из двух заметок, находящихся на этой странице, ставится новая задача: данное число n разделить на три части, из которых две равны, а третья не равна. В решении Эйлер исходит из того, что при перемножении двух бесконечных рядов $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots)(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + \ldots)$ в полученном ряду коэффициент при каком-либо члене показывает, сколькими способами показатель при x в этом члене может быть представлен в виде суммы трех слагаемых, два из которых равны.

Чтобы при этом исключить случай, когда третье слагаемое равно двум остальным, утверждается следующее: если обозначить

$$A = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots = \frac{x}{1 - x},$$

$$B = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + \ldots = \frac{x^2}{1 - x^2},$$

$$C = x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15} + \ldots = \frac{x^3}{1 - x^3},$$

то производящей функцией для искомого количества будет:

$$AB - C = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} - \frac{x^3}{1-x^3} = \frac{x^3(x + x^2 - 2x^3)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} =$$

$$= \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^5}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} - \frac{2x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}.$$

Таким образом, число разбиений данного числа n на три части, из которых две равны друг другу, а третья не равна им, дается формулой

$$(n - 4)^{(3)} + (n - 5)^{(3)} - 2(n - 6)^{(3)},$$

где

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} (n)^{(3)} x^{(n)}$$

и коэффициент $(n)^{(3)}$ показывает, сколькими различными способами число n может быть составлено из чисел 1, 2, 3.

Далее Эйлер приводит пример: пусть $n = 50$, число разбиений равно $46^{(3)} + 45^{(3)} - 2\cdot 44^{(3)} = 200 + 192 - 2\cdot 184 = 392 - 368 = 24$.

На этом же листе поставлена задача, также не встречающаяся в опубликованных работах Эйлера и представляющая собой обобщение предыдущей задачи: «Данное число n разбить на $p + q$ частей, из которых p частей и q частей равны между собой, но не равны друг другу».

Эйлер пользуется формулой

$$\frac{x^p}{1-x^p} \cdot \frac{x^q}{1-x^q} - \frac{x^{p+q}}{1-x^{p+q}} = \frac{x^{p+q}}{(1-x^p)(1-x^q)} - \frac{x^{p+q}}{1-x^{p+q}};$$

последнее выражение раскладывается по степеням x, коэффициент при x^n дает решение задачи.

№ 132, л. 251, 252 об.

В конце E394 Эйлер делает важное замечание, что для доказательства теоремы Баше о возможности представить любое натуральное число в виде суммы четырех квадратов целых чисел достаточно показать, что в разложении $(1 + x^1 + x^4 + x^9 + \ldots)^n$ по степеням x фактически встречаются две степени x. В данных двух записях Эйлер более обстоятельно останавливается на этом вопросе.

В первой записи рассматривается $s = (1 + x + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + \ldots)^4$. Развертывая это выражение в ряд, Эйлер утверждает, что коэффициент при любой степени x в этом разложении равен числу способов, каким показатель этой степени n может быть представлен в виде суммы четырех квадратов, и обозначает число представлений в виде суммы четырех квадратов знаком $\boxed{n}$. Таким образом,

$$(1 + x + x^4 + x^9 + \ldots)^4 = 1 + \boxed{1}x + \boxed{2}x^2 + \boxed{3}x^3 + \ldots$$

Дифференцируя логарифмы от обеих частей и сравнивая коэффициенты, Эйлер получает последовательно выражения для $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, ... и, применяя неполную индукцию, переходит к общему случаю, что дает формулу

$$n\,\boxed{n} = (5-n)\,\boxed{n-1} + (20-n)\,\boxed{n-4} + (45-n)\,\boxed{n-9} + (80-n)\,\boxed{n-11} + \ldots$$

или

$$n(\boxed{n}+\boxed{n-1}+\boxed{n-4}+\boxed{n-9}+\boxed{n-16}+\boxed{n-25}+\ldots)=$$
$$=5(\boxed{n-1}+4\boxed{n-4}+9\boxed{n-9}+16\boxed{n-16}+25\boxed{n-25}+\ldots). \qquad (*)$$

Более подробно этот процесс рассматривается в следующей записи (л. 252 об.). Здесь ставится более общая задача: «Найти, сколькими различными способами любое число n может стать суммой квадратов».

Обозначим искомое число знаком $\overset{\alpha}{\boxed{n}}$.* Это коэффициент при x^n в ряду s, который получается из

$$s=(1+x+x^4+x^9+x^{16}+\ldots)^{\alpha}.$$

Отсюда

$$\frac{ds}{s}=\frac{\alpha(1+4x^3+9x^8+16x^5+\ldots)dx}{1+x+x^4+x^9+x^{16}+\ldots}$$

и

$$\frac{ds}{dx}(1+x+x^4+x^9+x^{16}+\ldots)=\alpha s(1+4x^3+9x^8+16x^{15}+\ldots). \qquad (8)$$

С другой стороны,

$$s=1+\overset{\alpha}{\boxed{1}}\,x^1+\overset{\alpha}{\boxed{2}}\,x^2+\overset{\alpha}{\boxed{3}}\,x^3+\overset{\alpha}{\boxed{4}}\,x^4+\ldots \qquad (9)$$

и

$$\frac{ds}{dx}=\overset{\alpha}{\boxed{1}}+2\overset{\alpha}{\boxed{2}}\,x+3\overset{\alpha}{\boxed{3}}\,x^2+4\overset{\alpha}{\boxed{4}}\,x^3+\ldots \qquad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8) и сравнивая коэффициенты, имеем:

$$\overset{\alpha}{\boxed{1}}=\alpha,\quad 2\overset{\alpha}{\boxed{2}}=(\alpha-1)\overset{\alpha}{\boxed{1}},\quad 3\overset{\alpha}{\boxed{3}}=(\alpha-2)\overset{\alpha}{\boxed{2}}\ ,$$
$$4\overset{\alpha}{\boxed{4}}=(\alpha-3)\overset{\alpha}{\boxed{3}}+4\alpha,\quad 5\overset{\alpha}{\boxed{5}}=(\alpha-4)\overset{\alpha}{\boxed{4}}+(4\alpha-1)\overset{\alpha}{\boxed{1}}\ ,$$
$$6\overset{\alpha}{\boxed{6}}=(\alpha-5)\overset{\alpha}{\boxed{5}}+(4\alpha-2)\overset{\alpha}{\boxed{2}}\ ,$$
$$7\overset{\alpha}{\boxed{7}}=(\alpha-6)\overset{\alpha}{\boxed{6}}+(4\alpha-3)\overset{\alpha}{\boxed{3}}\ ,$$
$$8\overset{\alpha}{\boxed{8}}=(\alpha-7)\overset{\alpha}{\boxed{7}}+(4\alpha-4)\overset{\alpha}{\boxed{4}}\ ,$$
$$9\overset{\alpha}{\boxed{9}}=(\alpha-8)\overset{\alpha}{\boxed{8}}+(4\alpha-5)\overset{\alpha}{\boxed{5}}+9\alpha,$$
$$10\overset{\alpha}{\boxed{10}}=(\alpha-9)\overset{\alpha}{\boxed{9}}+(4\alpha-6)\overset{\alpha}{\boxed{6}}+(9\alpha-1)\overset{\alpha}{\boxed{1}}\ ,$$

Отсюда вообще (полагая $\alpha+1=\beta$):

---

* У Эйлера буква n заключена в кружок, а не в квадрат.

$$n\overset{\alpha}{\boxed{n}} = (\beta - n)\overset{\alpha}{\boxed{n-1}} + (4\beta - n)\overset{\alpha}{\boxed{n-4}} +$$
$$+ (9\beta - n)\overset{\alpha}{\boxed{n-9}} + (16\beta - n)\overset{\alpha}{\boxed{n-16}} + \ldots$$

или

$$n(\overset{\alpha}{\boxed{n}} + \overset{\alpha}{\boxed{n-1}} + \overset{\alpha}{\boxed{n-4}} + \overset{\alpha}{\boxed{n-9}} + \overset{\alpha}{\boxed{n-16}} + \ldots) =$$
$$= (\alpha + 1)(\overset{\alpha}{\boxed{n-1}} + 4\overset{\alpha}{\boxed{n-4}} + 9\overset{\alpha}{\boxed{n-9}} + \ldots)\,. \qquad (**)$$

Из полученного имеем:

$$\overset{\alpha}{\boxed{1}} = \alpha, \quad \overset{\alpha}{\boxed{2}} = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}, \quad \overset{\alpha}{\boxed{3}} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

. . . .

$$\overset{\alpha}{\boxed{18}} = \frac{\alpha - 17}{18} + 15\,\frac{\alpha - 14}{15} + 66\,\frac{\alpha - 11}{12} + 10\,\frac{\alpha - 9}{10} +$$
$$+ 84\,\frac{\alpha - 8}{9} + 42\,\frac{\alpha - 6}{7} + 15\,\frac{\alpha - 5}{6} + 3\,\frac{\alpha - 2}{3} + 12\,\frac{\alpha - 3}{4} + \frac{\alpha - 1}{2},$$

где «дробь» вида $\frac{\alpha - k + 1}{1}$ означает $C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k + 1)}{k!}$.

Далее путем индукции Эйлер получает формулу

$$\overset{\alpha}{\boxed{n}} = \frac{\alpha - n + 1}{n} + (n-3)\,\frac{\alpha - n + 4}{n-3} + (n-8)\,\frac{\alpha - n + 9}{n-8} +$$
$$+ (n-15)\,\frac{\alpha - n + 16}{n-15} + (n-24)\,\frac{\alpha - n + 25}{n-24} + (n-36)\,\frac{\alpha - n + 36}{n-35} + \ldots +$$
$$+ \frac{(n-8+2)(n-8+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\alpha - n + 8 - 1}{n-8+2} + 2\,\frac{(n-13+2)(n-13+1)}{1\,2}\times$$
$$\times\frac{\alpha - n + 13 - 1}{n-13+2} + \frac{(n-18+2)(n-18+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\alpha - n + 18 - 1}{n-18+2} + \ldots +$$
$$+ \frac{(n-9)(n-10)(n-11)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\alpha - n + 12 - 2}{n-12+3} + \frac{3(n-14)(n-15)(n-16)}{1\cdot 2\cdot 3}\times$$
$$\times\frac{(\alpha - n + 17 - 2)}{n-17+3} + \ldots + \frac{(n-12)(n-13)(n-14)(n-15)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{\alpha - n + 16 - 3}{n-16+4} + \ldots \qquad (***)$$

и дает несколько чисел, которые фигурируют в последней формуле при образовании каждого ряда в ней:

для второго ряда 8, 13, 18, 20, 25, 32, 29, 34, 41, 50,...,

для третьего ряда 12, 17, 22, 24, 29, 36, 27,...,

для четвертого ряда 16, 21, 28, 31, 33, 40, 38,...

В данной записи Эйлер выводит рекуррентную формулу для количества представлений $\overset{\alpha}{\boxed{n}}$ числа n в виде суммы α неотрицательных квадратов:

сначала (*) для $\alpha = 4$, а затем (**) для любого α. Из формулы (**) он пытается получить явные формулы для $\overset{\alpha}{\boxed{n}}$; полученная при этом формула (***) может быть переписана в виде

$$\overset{\alpha}{\boxed{n}} = \sum_{\substack{x\cdot 2^2 + y\, 3^2 + \ldots \le n \\ x,\, y\, z,\, \ldots \ge 0, \text{ целые}}} C_{\alpha}^{\,n - x(2^2-1) - y(3^2-1) - z(4^2-1) - \ldots} \times$$

$$\times\, C_{n - x(2^2-1) - y(3^2-1) - \ldots}^{\,x+y+z+\ldots} \frac{(x+y+z+\ldots)!}{x!\, y!\, z!}.$$

Каждое отдельное слагаемое даст число представлений n в виде α неотрицательных квадратов, среди которых ровно x равно 2^2, ровно y равно 3^2, ровно z равно 4^2 и т. д., ровно $n - x\cdot 2^2 - y\cdot 3^2 - \ldots$ равно 1^2. Таким образом, эта явная формула по существу тривиальна.

Интерес представляет рекуррентная формула (**), которая встречается в более общем виде в работе Эйлера E586, опубликованной в 1785 г. Впоследствии она многократно переоткрывалась и применялась другими математиками, например в 1885 г. Н. В. Бугаевым [4], а в 1913 г. Я. В. Успенским при выводе им явных формул для количества представлений натуральных чисел суммами четного числа квадратов [72].

Глава IV

МАЛАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

Малая теорема Ферма — одна из важнейших теорем теории чисел. Она явилась основой создания теории степенны́х вычетов, с ее помощью решается вопрос о числе корней сравнения $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, на ней основывается теория сравнений высших степеней.

Теорема формулируется так: «Если p — простое число и a не делится на p, то разность $a^{p-1} - 1$ делится на p». Современная запись этого утверждения с помощью обозначения сравнения:

$$a^{p-1} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\, p),$$

где $(a, p) = 1$.

Эйлер упоминает это утверждение в своей первой теоретико-числовой работе E26. Впоследствии он предложил четыре доказательства малой теоремы Ферма. Первое из них — в работе E54 (представлена в 1736 г., опубликована в 1741 г.). Используя свойства коэффициентов разложения бинома $(1 + 1)^p$, он показал, что $2^p = (1 + 1)^p \equiv 2 (\mathrm{mod}\ p)$, т. е. что разность $2^p - 2$ делится на p. Второе доказательство теоремы Эйлер дал в E134 (представлена в 1747—1748 гг., опубликована в 1750 г.). С помощью малой теоремы Ферма он доказал там несколько важных утверждений. Третье доказательство теоремы Ферма было основано на теории степенны́х вычетов и дано Эйлером в E262 (представлена в 1755 г., опубликована в 1761 г.). Четвертое доказательство получено Эйлером в E272 (представлена в 1760—1761 гг., опубликована в 1763 г.). Здесь Эйлер сформулировал и доказал теорему, носящую его имя и являющуюся обобщением малой теоремы Ферма: «Если a и n — натуральные числа, взаимно простые между собой, $\varphi(n)$ — функция, выражающая количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним (сейчас ее называют функцией Эйлера. — *Сост.*), то разность $a^{\varphi(n)} - 1$ делится на n». В обозначениях теории сравнений это выглядит так:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ n),$$

где $(a, n) = 1$.

Малая теорема Ферма получается из теоремы Эйлера как частный случай при n — простом числе, когда $\varphi(n) = n - 1$.

Лагранж вскоре использовал малую теорему Ферма для доказательства теоремы о представлении числа в виде суммы четырех квадратов [134].

Другие формулировки и доказательства малой теоремы Ферма и теоремы Эйлера имеются в статье Пуансо (см. статью и комментарий И. Г. Мельникова и А. А. Киселева к переписке Эйлера с Гольдбахом [138]).

Печатные работы Эйлера, относящиеся к этой теме: Е26, Е54, Е134, Е262, Е271, Е449, Е792. См. также предисловие Ф. Рудио ко второму тому Полного собрания сочинений Эйлера «Opera omnia» [108, сер. I, т. 2, с. XIII, XIV, XVI, XXV, XXXI, XXXII, XXXIII]. В книге Л. Э. Диксона [88, т. 1, с. 60—61, 91, 113, 114] указанные страницы посвящены малой теореме Ферма. В переписке Эйлера с X. Гольдбахом эти вопросы затрагиваются в письмах № 15, 47, 138 и в примечаниях к ним [138]. Доказательство, приведенное в письме № 47, было опубликовано в Е134. В письме № 138 приводится доказательство малой теоремы Ферма, опубликованное в Е54.

Перейдем к фрагментам из записных книжек.

№ 131 (1736—1740 гг.), л. 18

«Задача. Указать, является предложенное число n простым или нет.

Решение. Рассматривается число $2^{n-1}-1$, его делят на n. Если остаток равен нулю, то предложенное число — простое, если же деление не удается, то число $2^{n-1}-1$ не будет простым.

Примеры. Пусть $n = 13$, тогда будет $2^{12} - 1 = 4095$, это число при делении на 13 дает в частном 315.

Пусть $n = 15$, тогда будет $2^{14} - 1 = 16\,383$, на 15 оно не делится, в остатке будет 3 (которое является делителем числа 15), следовательно, число 15 не будет простым.

И так как разность $2^{n-1}-1$ найти трудно, когда число n очень большое, то можно воспользоваться делением 2^{n-1} на n. Если в остатке получится 1, то n — простое».

Очевидно, что это частный случай теоремы Ферма при $a = 2$. Запись относится к 1736—1738 гг., так как записная книжка № 131 датируется 1736—1740 гг., а запись эта находится в самом начале ее. Печатная работа Е26, где Эйлер опубликовал результат о делимости $2^n - 1$ на $n + 1$, когда $n + 1$ — простое, была представлена Конференции в 1738 г.

О делимости разностей вида $2^n - 1$ на простые числа Эйлер писал и в других работах, например в Е54, Е134. В Е54 он переносит результаты на другие разности: $3^{p-1} - 1$ делится на p, когда p — простое и не равно 3, и т. д. Наконец, излагается случай любого числа (натурального) a, когда $a \neq p$, $a = kp$, т. е. рассмотрена теорема Ферма: $a^{p-1} - 1$ делится на p.

№ 131, л. 18

«Теорема. Если 2^m при делении на n дает остаток p, то 2^{m+1} при делении на n дает остаток $2p$* и 2^{2m} дает остаток p^2.

Пусть $p = 61$			Пусть $p = 35$, делимое = 34		
делитель	делимые	остатки (вычеты)	делитель	делимые	остатки (вычеты)
61	2^6 2^{12} 2^{24} 2^{30} 2^{60}	+3 +9 +20 −1 +1	35	2^6 2^{12} 2^{24} 2^5 2^{17} 2^{34}	−6 +1 +1 −3 −3 +9
Следовательно, 61 — простое.			Следовательно, 35 не есть простое».		

Первый печатный результат такого рода дается в работе Е262 (представлена в 1755 г., опубликована в 1761 г.).

Если a^{μ} при делении на p дает остаток r, то $a^{2\mu}$ при делении на p дает остаток r^2, $a^{3\mu}$ при делении на p дает остаток r^3 и т. д. Используя эти утверждения, Эйлер устанавливает, что если a^{μ} дает при делении на p остаток 1, то $a^{2\mu}$, $a^{3\mu}$, $a^{4\mu}$,... также дают в остатке 1 (см. Е262).

Следующая публикация в Е271 относится к 1763 г. В следствии 1 говорится: «Если x^{ν} — наименьшая степень, которая при делении на n (при x — простом) дает в остатке 1, то такой же остаток дают степени $x^{2\nu}$, $x^{3\nu}$, $x^{4\nu}$,..., и нет других степеней, которые при делении на n давали бы такой же остаток».

Далее приведен пример — наименьшие степени 2^{ν}, которые при делении на n дают в остатке 1, и теорема Эйлера, доказательство которой основано на указанном выше свойстве (см. теорему 10); в качестве следствия получается малая теорема Ферма.

Эйлер вновь обратился к этому свойству степеней при введении понятия первообразного корня (Е449). Наконец, в посмертном «Трактате» Е792 это свойство упоминается в § 164, 165, 199.

№ 131, л. 18 об.

Замечание Эйлера: «Указанное свойство иногда не выполняется. Например, если взять число $m = 2^{32} + 1$, то оно делится на 641, а разность

* Должно быть $2p$, у Эйлера ошибочно 2^p (замечание Э. Троста).

$2^{2^{32}}-1$ делится на число $2^{32}+1$, т. е. правило выполняется для составного делителя m». Поэтому Эйлер заключает, что если деление невозможно, то отсюда следует только, что m не может быть простым числом.

О делимости числа $2^{2^5}+1$ на 641 и о делимости чисел 2^n-1 Эйлер писал в E26, в письме к Гольдбаху от 20/31 июля 1730 г. [138, с. 37—38]. Гольдбах рассмотрел последовательность чисел $2+1$, 2^2+1, 2^4+1, $2^8+1, \ldots, 2^{2^n}+1$ и показал, что любые два числа этой последовательности взаимно просты. Кроме E26, Эйлер касается вопросов делимости чисел 2^n+1 и 2^n-1 в E134 и E271. Ответ на вопрос, поставленный Эйлером в этой записи, дает его теорема (см. E271): «$a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$, если a не делится на n, а $\varphi(n)$ — функция Эйлера».

№ 131, л. 18

«Аналогичным образом $2^{11}-1$ не является простым числом, хотя $2^{2^{11-2}}-1$ не может делиться на это число».

Это пример к замечанию Эйлера (см. также E26).

№ 131, л. 18 об.—19

«Теорема. Пусть p — простое число и a и b — числа, не делящиеся на p, тогда будет $a^{m(p-1)}-b^{n(p-1)}$ всегда делиться на p. Следовательно, a^{p-1} при делении на p дает в остатке 0 или 1. Доказательство основывается на том, что $a^{p-1}-1$ делится на p, во всяком случае если $a<p$. Отсюда само собой вытекает, что должно делиться и $(kp+a)^{p-1}-1$.

Если $a=2$, то доказательство несомненно. А именно

$$2^{p-1}=(1+1)^{p-1}=1+\frac{p-1}{1}+\frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}+\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3}+$$
$$+\frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1\cdot 2\ 3\cdot 4}+\ldots$$

Любой член этого ряда есть целое число, а число членов — нечетное. Поскольку, вычитая первый член 1 (из обеих частей равенства. — *Сост.*), получим, что $2^{p-1}-1$ равно ряду, состоящему из четного числа членов, и, объединяя их попарно, получим равенство

$$2^{p-1}-1=\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}{1\cdot 2\ 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots,$$

любой член которого делится на p, если p — простое число. Если же оно не простое, то может случиться, что какой-то член, когда множители знаменателя сократятся с множителями самого p, не будет больше делиться на p. Если $a=3$, то доказательство изменяется таким образом, что доказывается, что $\frac{2^n-2}{3}$ всегда делится на n, если n — простое. (Из предыдущего следует, что 2^n при делении на n дает в остатке 2, следовательно, 2^n-2 дает в остатке 3, а 2^n+1 дает в остатке 0). Имеем:

$$3^{p-1}=(1+2)^{p-1}-1=\frac{2(p-1)}{1}+\frac{4(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}+\frac{8(p-1)(p-2)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots,$$

где число членов будет четным. Преобразуем ряд таким образом:

$$\frac{2(p-1)}{1}+\frac{2(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}+\frac{2(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}+\frac{2(p-1)(p-2)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3}+$$
$$+\frac{6(p-1)(p-2)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{6(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots;$$

здесь каждая пара членов делится на p».

№ 131, л. 19 об.—20

«Теорема. Если $a^{p-1}-1$ делится на простое число p, то $(1+a)^{p-1}-1$ делится на это же число p, если только $a+1$ не будет кратным самого p.

Доказательство. Ряд будет:

$$(1+a)^{p-1}-1=\overset{2}{\frac{a(p-1)}{1}}+\overset{3}{\frac{a^2(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}}+\overset{4}{\frac{a^3(p-1)(p-2)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3}}+\ldots$$

В этом ряду, если p будет равно написанному наверху индексу, то последующие члены исчезают. Ряд тогда преобразуется в такой:

$$(a^2+a^3)\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}$$
$$+(a^2-a)\frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$+(a^3-a^2+a)\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$$

Для краткости полагаем

$$(1+a)^{p-1}-1=\overset{2}{aA}+\overset{3}{a^2B}+\overset{4}{a^3C}+\overset{5}{a^4D}+\overset{6}{a^5E}+\ldots,$$

и ряд преобразуется в следующий:

$$\overset{2}{aA}+\overset{3}{aB}\qquad\overset{4}{}\qquad\qquad\overset{5}{}$$
$$+(a^2-a)B+(a^2-a)C$$
$$+(a^3-a^2+a)C+(a^3-a^2+a)D$$
$$+(a^4-a^3+a^2-a)D+\ldots,$$

где если p будет равно написанному наверху индексу, то все последующие члены исчезают. Если p будет простым числом, то $A+B$, $B+C$, $C+D$ и т. д. все делятся на p. Остается, следовательно, лишь последний член, который имеет вид

$$(a^{p-1}-a^{p-2}+a^{p-3}-...+a^2-a),$$

если p — нечетное. Этот член равен

$$\frac{a^{p-1}-1}{a+1}.^{*)}$$

По предположению $a^{p-1}-1$ делится на p и в то же время также и на $a+1$, так как число $p-1$ — четное, если только $a+1$ не будет кратным самого p или равным p. Всегда $\frac{a^{p-1}-1}{a+1}$ делится на p, а тогда также и $(1+a)^{p-1}-1$ делится на p. Что и треб[овалось] док[азать]».

Такого утверждения в печатных работах Эйлера не найдено. Похожие утверждения имеются в E134: «$a^{p-1}-b^{p-1}$ делится на простое число p, если ни a, ни b не делятся на p».

О делимости 3^n+2^n на $2n+1$, если $2n+1$ — простое и $n=12p+3$ или $12p+5$, $12p+6$, $12p+8$, см. в E26. О делимости 3^n-2^n см. в E134.

В качестве следствия из этой теоремы Эйлер формулирует малую теорему Ферма: «Следовательно, a^{p-1} при делении на p дает в остатке 0 или 1» (№ 131, л. 18 об.).

Дальше дано доказательство с помощью разложения бинома $(1+$ $+1)^{p-1}$, затем рассмотрено разложение для $3^{p-1}=(1+2)^{p-1}$. По-видимому, это первая формулировка малой теоремы Ферма у Эйлера и первое ее доказательство. Оно заканчивается на л. 19 об. установлением факта, что если $a^{p-1}-1$ делится на простое число p, то $(a+1)^{p-1}-1$ также делится на это число, если только $a+1$ не будет кратным p.

Разложение биномов $2^{p-1}=(1+1)^{p-1}$ и $3^{p-1}=(1+2)^{p-1}$ дано в E54. Там же приведена сама теорема о переходе от разности $a^{p-1}-1$ к разности $(a+1)^{p-1}-a-1$. Формулировка теоремы и доказательство несколько отличны от имеющихся в рукописи.

В E134 применяется аналогичное рассуждение к биному $(a+b)^p$ для доказательства делимости на простое p выражения $(a+b)^p-a^p-b^p$ (см. также E262).

Таким образом, на л. 18 об.—20 Эйлер приводит доказательство теоремы Ферма методом полной математической индукции.

---

* Должно быть: $\frac{a(a^{p-1}-1)}{a+1}$.

№ 131, л. 20

«Следствие. Так как всегда $1^{p-1}-1$ делится на простое число p, а также $2^{p-1}-1$ делится на p, также $3^{p-1}-1$ и $5^{p-1}-1$, вообще $a^{p-1}-1$ делятся на p, если a не равно p или кратному самого p.

Следствие. Отсюда $a^{m(p-1)}-1$ делится на p, $b^{n(p-1)}-1$ тоже, также и $a^{m(p-1)}-b^{n(p-1)}$ делится на p».

№ 131, л. 55 об.

«Теорема. Для простого числа p эта формула a^p-1 не может иметь других делителей, кроме содержащегося в форме $np+1$ (за исключением делителей $a-1$ и 1, которые имеются для всех такого рода формул).

Доказательство. Пусть делителем формулы a^p-1 является простое число $q+1$, на которое делится также a^q-1. Пусть r — общий наибольший делитель чисел p и q, а также a^r-1 допускает деление на $q+1$, и, так как r не может быть 1, должны быть q и p составными числами и q будет кратным p; будет, следовательно, $q=np$ и делитель $q+1=np+1$. Что и требовалось доказать».

Эта теорема аналогична той, согласно которой, если q — простое, то формула a^q-1 не может иметь других делителей, кроме тех, которые заключаются в форме $nq+1$ (не считая делителей $a-1$ и 1, которые имеются у всех таких формул).

Аналогичная теорема есть в E262. Доказательство не такое, как в рукописи.

Ранее — в E134 — приведено утверждение для частного случая: «2^m-1 делится только на числа вида $mn+1$, если m — простое».

№ 131, л. 56

«Теорема. Если $a2^\alpha-b$ делится на простое число p в случае $\alpha=m$, то на это простое число делится также и число $\alpha=n(p-1)+m$.

Доказательство простое».

Такого утверждения в печатных работах Эйлера не найдено. Оно является следствием малой теоремы Ферма.

«Пусть $a\cdot 2^m-b\equiv 0 \pmod p$, где $p\neq 2$, простое. Тогда можно обозначить $a\cdot 2^m-b=kp$. По малой теореме Ферма будет $2^{p-1}\equiv 1 \pmod p$. Иначе говоря, $2^{p-1}-1=lp$, а потому и

$$2^{n(p-1)}\equiv 1 \pmod p \qquad \text{или} \qquad 2^{n(p-1)}-1=mp\,. \tag{1}$$

Умножив левую часть уравнения (1) на число $a\cdot 2^m$ и правую часть на b, получим:

$$a\cdot 2^m\cdot 2^{n(p-1)}\equiv b \pmod p \qquad \text{или} \qquad a\cdot 2^{m+n(p-1)}\equiv b \pmod p\,.$$

Что и требовалось доказать».

№ 131, л. 56

«Теорема 1. Если $a^d \pm 1$ делится на простое число $2d+1$, то $a^{2an+d} \pm 1$ делится на $4an+2d+1$, а также $a^{2an-d-1}$ делится на $4an-2d-1$, если делители — простые числа.

Доказательство желательно.

Теорема 2. I. На простое число $2d+1$ будет делиться формула $a^d - 1$ в случае, когда $d = 2an$ и $d = 2an-1$, а также $d = 2an+4$ и $d = 2an-5$.

II. Если $a = 3b+1$ и $d = 2an+1$, а также $d = 2an-2$.

III. Если $a = 5b \pm 1$ и $d = 2an+2$, а также $d = 2an-3$.

IV. Если $a = 7b \begin{cases} +1 \\ +2 \\ +4 \end{cases}$ и $d = 2an+3$, а также $d = 2an-4$.

V. Если $a = 11b \begin{cases} +1 \\ +3 \\ +5 \\ +9 \end{cases}$ и $d = 2an+5$, а также $d = 2an-6$.

VI. Если $a = 13b \begin{cases} +1 \\ +3 \\ +4 \\ +9 \\ +10 \\ +12 \end{cases}$ и $d = 2an+6$, а также $d = 2an+7$.

VII. Если $a = 15b \begin{cases} +1 \\ +2 \\ +4 \\ +8 \end{cases}$ и $d = 2an+7$, а также $d = 2an-8$».

Теоремы, по-видимому, связаны с предыдущей. В печатных работах не обнаружены.

Замечание Э. Троста. Леммой Эйлера это утверждение связано с теорией квадратичных вычетов, а именно с вопросом, когда $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{p'}\right)$ (p, p' — простые числа). На этот вопрос полностью ответил Хассе в своей книге «Лекции по теории чисел» [126, т. 2].

Утверждение I напоминает утверждение из Е134 (теорема 2, следствие 1 и следствие 4). Но точно такого утверждения нет.

№ 133, л. 4

«На простое число p делится $a^{p-1}-1$; на p^2 делится $a^{p(p-1)}-1$; на p^3 делится $a^{pp(p-1)}-1$».

См. Е262, где дано похожее утверждение.

№ 133, л. 18 об.

«Теорема. Если a^{2n} при делении на простое число p дает в остатке 1, то a^n дает в остатке +1 или −1.

Доказательство. При делении на p a^n дает остаток r и будет $rr = 1 + mp$, откуда $rr - 1 = (r+1)(r-1)$ делится на p, следовательно, или $r+1$, или $r-1$ делится на p. В первом случае $r + 1 = \alpha p$, откуда $r = \alpha p - 1$ или $r = -1$; во втором случае $r - 1 = \alpha p$ и $r = 1 + \alpha p$, откуда $r = 1$. Что и треб[овалось] док[азать]».

В Е262 это же утверждение дано в несколько иной формулировке. Доказательство такое же.

№ 133, л. 18 об.

«[Теорема:] Если n — простое число и a (взаимно) просто с n, a^λ — наименьшая степень числа a, которая при делении на n дает в остатке 1, а m — число всех чисел, меньших n и (взаимно) простых с n, то λ будет делителем числа m».

Вначале Эйлер рассматривает значение функции m, равной числу простых чисел, меньших n, для различных n (простых, степеней простого числа, произведения простых чисел, произведений степеней нескольких простых чисел). Функция эта называется сейчас функцией Эйлера и обозначается $\varphi(n)$. Сам Эйлер в другом месте обозначал ее πn.

Теорема в несколько другой формулировке (с использованием термина «вычет» (residuum)) имеется в Е262. Дана теорема для случая простого n (доказано, что λ — делитель числа $n-1$). В рукописи теорема доказана для любого n. Позднее были опубликованы работы Е271 и Е449, где имеется эта теорема. См. статьи И. Г. Мельникова и А. А. Киселева [20, 45], а также [138].

Глава V
ФУНКЦИЯ ЭЙЛЕРА В ЕГО ЗАПИСНЫХ КНИЖКАХ

Как известно, функция, выражающая количество натуральных чисел, меньших данного числа n и взаимно простых с ним, называется функцией Эйлера и обозначается обычно $\varphi(n)$. Это обозначение было введено Гауссом [5]. О печатных работах Эйлера, связанных с функцией $\varphi(n)$, говорится в предисловии Ф. Рудио ко второму тому первой серии Полного собрания сочинений Эйлера [108, сер. I, т. 2, с. XXXII] и в «Истории теории чисел» Л. Диксона [88, т. 1, с. 113—114]. Опубликованы три работы Эйлера — E271, E564, E792 и несколько отрывков из его записной книжки № 140.

Но кроме опубликованных имеется еще несколько рукописных фрагментов в записных книжках, относящихся к функции $\varphi(n)$. Изучение этих записей позволяет дополнить то, что уже известно об исследованиях Эйлера, касающихся функции $\varphi(n)$ и ее применения.

Сначала кратко коснемся печатных работ Эйлера. Считалось, что первой публикацией Эйлера по этому вопросу была статья E271, представленная в 1758 г. и напечатанная в 1763 г., в которой автор рассматривает количество чисел, меньших данного числа n и взаимно простых с ним. Сначала рассмотрен случай простого n. Тогда количество чисел, взаимно простых с n и меньших его, равно $n-1$. Эйлер включает в число чисел, меньших n и взаимно простых с ним, единицу. Затем изучаются случаи, когда n равно степени простого числа, произведению двух различных простых, трех различных простых, наконец, произведению степеней различных простых чисел:

$$n = p^{\lambda} \cdot q^{\mu} \cdot r^{\nu} \cdot s^{\xi}.$$

Эйлер приводит таблицу значений функции $\varphi(n)$ для всех рассмотренных случаев, затем использует функцию $\varphi(n)$ в теореме Эйлера [108, сер. I, т. 2, с. 554—555].

В статье E564, представленной в 1775 г., а опубликованной в 1784 г., Эйлер вводит обозначение для этой функции πn и использует ее для подсчета количества дробей, числители которых меньше знаменателей и с ними взаимно просты. Для данного знаменателя D количество таких числителей определяется функцией Эйлера. Снова он начинает со случая, когда D — простое число и числителей будет $D-1$. Для разных видов составных знаменателей приводится таблица соответствующих числителей [108, сер. I, т. 4, с. 106].

Далее Эйлер подсчитывает количество дробей для каждого данного знаменателя D, для максимального знаменателя. Для данного знаменателя D имеется функция πD. Затем Эйлер устанавливает свойство мультипликативности функции πD, показывая, что если $n = p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \cdot s^\delta$, где p, q, r, s — простые числа, то

$$\pi p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \cdot s^\delta = \pi p^\alpha \cdot \pi q^\beta \cdot \pi r^\gamma \cdot \pi s^\delta$$

и

$$\pi PQRS = \pi P \cdot \pi Q \cdot \pi R \cdot \pi S,$$

если P, Q, R, S — какие-то взаимно простые числа. Он замечает, что если рассматривать значения функции πn: $\pi 1 = 0$, $\pi 2 = 1$, $\pi 3 = 2$, $\pi 4 = 2$, $\pi 5 = 4$, $\pi 6 = 2$, $\pi 7 = 6$, $\pi 8 = 4$, $\pi 9 = 6$, $\pi 10 = 4$, — то не заметно никакого определенного закона их образования. Но можно записать ряд, коэффициенты которого являются суммами делителей натуральных чисел: $1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^4 + 4 \cdot x^5 + 2 \cdot x^6 + 6 \cdot x^7 + 4 \cdot x^8 + \ldots$ с общим числом $\pi n \cdot x^n$. Этот ряд можно записать в виде

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \pi n \cdot x^n.$$

Значения функции $\pi\, n$ являются коэффициентами членов этого ряда. Эйлер ставит далее задачу: найти формулу для функции πn. Вначале он находит отношение $\frac{\pi n}{n}$ для $n = pqr \ldots s$:

$$\frac{\pi n}{n} = \frac{(p-1)(q-1)(r-1)\ldots(s-1)}{pqr \ldots s},$$

затем и πn:

$$\pi n = \frac{n(p-1)(q-1)\ldots(s-1)}{pq \ldots s}.$$

Наконец, он составляет таблицу, в первой строчке которой находятся последовательные натуральные числа от 1 до 12, во второй строчке — соответствующие значения функции πn. С помощью таблицы он составляет ряд S, коэффициентами членов которого служат значения πn, а показателями степеней — числа натурального ряда (первая строчка таблицы). С помощью деления на x и последующего интегрирования ряда $\frac{S(x)}{x}$ из него получается ряд σ:

$$\sigma = \int \frac{Sdx}{x} = \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{4x^5}{5} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{2} + \ldots$$

Коэффициенты членов равны $\frac{\pi n}{n}$ ($n = 2, 3, \ldots$). Эйлер рассматривает еще несколько рядов, коэффициенты которых зависят от функции πn.*

Третья печатная работа Эйлера, касающаяся $\varphi(n)$, — «Трактат по теории чисел» (E792), впервые опубликованный в 1849 г. по рукописи Эйлера.** Время написания «Трактата» — предположительно 1748—1749 гг. (см. предисловие Фютера к пятому тому Полного собрания сочинений Эйлера [108, сер. I, т. 5, с. XX]). Формула для $\varphi(n)$ выведена здесь тем же способом, что и в E271. Функция $\varphi(n)$ использована в теореме, где доказывается существование делителя d функции $\varphi(n)$ такого, что $a^d \equiv 1 (\mathrm{mod}\, n)$, т. е. при делении a^d на n получается в остатке единица (см. [108, сер. I, т. 5, с. 199—203]). Кроме того, функция Эйлера использована при формулировке теоремы Эйлера о том, что если a и n взаимно просты, то $a^{\varphi(n)}$ при делении на n дает в остатке единицу [108, сер. I, т. 5. с. 214].

Перейдем к записным книжкам Эйлера.

Первая запись, относящаяся к функции $\varphi(n)$ (в записной книжке № 133), датируется примерно 1749 г. Вопреки установившемуся мнению, что Эйлер ввел функцию Эйлера в связи с обобщением малой теоремы Ферма (теоремой Эйлера), оказывается, что функция $\varphi(n)$ появилась у Эйлера при решении задачи определения наименьшей степени числа, дающей при делении на данное простое число n в остатке единицу, т. е. при нахождении первообразного корня.

Следующая запись в той же книжке относится, по-видимому, также к 1749 или 1750 г. Она удалена от первой более чем на 150 листов. Эйлер подсчитывает количество чисел в ряду 1, 2, 3, 4, 5,..., A, оставшихся после выбрасывания из этого ряда всех чисел, имеющих с A общий делитель, отличный от единицы. Подобного рода задача опубликована в E271 для случая, когда n равно степени простого числа: $n = p^m$. Эйлер приводит несколько частных случаев определения функции $\varphi(n)$, а потом дает доказательство.

На том же листе имеется теорема, в которой Эйлер применяет введенную им функцию $\varphi(n)$ к вычислению количества членов арифметической прогрессии $\alpha, \alpha + \alpha, \alpha + 2\alpha, \alpha + 3\alpha, \ldots, \alpha + (A - 1)\alpha$, разность которой d взаимно проста с A.

К тому же периоду, что и книжка № 133, относится и записная книжка № 134 (1749—1750 гг.). В ней вычислены значения функции $\varphi(n)$ для нескольких частных случаев, а в конце записи дан числовой пример: вычислено значение $\varphi(120)$.

* Об этой статье Эйлера см. также статью А. В. Дорофеевой [8].
** СПбФА РАН, ф. 136, оп. 1, № 35.

Дальнейшие записи, относящиеся к функции $\varphi(n)$, находятся в книжке № 140, хронологические рамки которой — 1779—1783 гг. Записи сделаны рукой Н. И. Фуса, ученика и помощника Эйлера, впоследствии академика и непременного секретаря Академии наук.

Введено обозначение функции πn, вычислены сначала ее частные значения для случаев $n = p$, p^m, pq, $p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \cdot s^\delta$. Затем подсчитывается количество остатков, получающихся при делении всех членов арифметической прогрессии, разность которой взаимно проста с заданным числом A, на это число A. Доказательство этого утверждения отлично от того, какое было дано Эйлером в записной книжке № 133 (л. 170). Использовано свойство вычетов, теория которых была к этому времени разработана Эйлером. Затем находятся значения функции $\varphi(n)$ для последовательных степеней простого числа p. В подготовительной части доказательства Эйлер использует лемму. В качестве следствия он получает формулу для πa^m. Затем он находит $\pi ab = \pi a \cdot \pi b$, $\pi abcd = \pi a \cdot \pi b \cdot \pi c \cdot \pi d$, $\pi n = a^{\alpha-1}\,\pi a \cdot b^{\beta-1} \cdot \pi b \cdot c^{\gamma-1} \cdot \pi c \cdot d^{\delta-1} \cdot \pi d$, когда $n = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \cdot d^\delta$, где a, b, c, d не имеют общих делителей.

Кроме указанных записей, имеются еще две. В одной из них (№ 140, л. 87 об.) вводится знак для обозначения делимости одного числа на другое: $a :: b$ обозначает, что a делится на b. Формулируется фундаментальная теорема, ранее доказанная Эйлером: «Если дано число P, то среди чисел от 1 до P будет заключено πP чисел, взаимно простых с P и меньших P. При этом всегда будет $a^\pi - 1 :: P$ (т. е. $a^\pi \equiv 1 \pmod{P}$)». (Это теорема Эйлера; не указано только, что $(a, P) = 1$). Из этой теоремы следуют новые теоремы (1—4).

Другая запись (№ 134, л. 65) посвящена вычислению самих чисел, меньших n и взаимно простых с ним.

Далее приведены некоторые фрагменты из записных книжек Эйлера, хранящихся в СПбФА РАН (ф. 136, оп. 1), относящихся к функции $\varphi(n)$.

№ 133, л. 18 об.

«Теорема. Пусть n — простое число, a взаимно просто с n и a^λ — наименьшая степень a, которая при делении на n дает в остатке единицу. Пусть m — количество всех чисел, меньших, чем n, которые взаимно просты с n. Тогда λ будет делителем числа m.

Каким образом по данному числу n находится число m, ясно из следующих формул. Пусть p, q, r, s — простые числа.

Если $n = p$, будет $m = p - 1$;	Если $n = pq$, будет $m = (p - 1)(q - 1)$;
$n = p^2, \quad m = p(p - 1)$;	$n = p^2 q, \quad m = p(p - 1)(q - 1)$;
$n = p^3, \quad m = p^2(p - 1)$;	$n = p^3 q, \quad m = p^2(p - 1)(q - 1)$;
. . . .	$n = p^2 q^2, \quad m = p(p - 1)\, q(q - 1)$;
$n = p^\nu, \quad m = p^{\nu - 1}(p - 1)$.	. . . .
	$n = p^\mu q^\nu, \quad m = p^{\mu - 1}(p - 1)\, q^{\nu - 1}(q - 1)$;
	$n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta, \; m = p^{\alpha - 1}(p - 1)\, q^{\beta - 1}(q - 1) \times$ $\times\, r^{\gamma - 1}(r - 1)\, s^{\delta - 1}(s - 1)$».

Функция $\varphi(n)$ обозначается буквой m и появляется в связи с теоремой о наименьшей степени a^λ, дающей при делении на n в остатке единицу. Диксон считал, что функция $\varphi(n)$ была впервые введена Эйлером в связи с обобщением малой теоремы Ферма [88, т. 1, с. 413—414]. Действительно, в E271 Эйлер доказывает теорему Эйлера на основании теоремы, которая впервые появляется в его рукописных тетрадях именно здесь (теорема 10). Но первая заметка, связанная с функцией $\varphi(n)$, в тетрадях Эйлера относится, как мы видим, к отысканию наименьшей степени λ числа, взаимно простого с простым числом n, которая при делении на n дает в остатке единицу.

№ 133, л. 170

Здесь решается вопрос о количестве чисел в ряду 1, 2, 3, 4, 5, ..., A, которые останутся после вычеркивания всех чисел, имеющих с A общий делитель. Подобная задача решается Эйлером в E271 — доказательство теоремы 3 для случая $A = p^m$, p — простое.

Полученную функцию $\varphi(A)$ он применяет к вычислению количества членов арифметической прогрессии (разность которой d взаимно проста с A), взаимно простых или не взаимно простых с A. При делении членов арифметической прогрессии на A получаются различные остатки (вычеты) от 1 до $A - 1$. Это все числа от 1 до $A - 1$, взаимно простые с A (исследовано в E271, см. теорему 2). Расположение материала в E271 несколько иное, чем в рукописи: сначала рассмотрен случай $n = p^m$, а потом частные случаи $n = p$, $n = p^2$, $n = p^3$, затем $n = pq$ и т. д.

№ 134, л. 64 об.

Содержание фрагментов отражено в печатных работах E271, E792, E564.

№ 134, л. 65

«Числами, меньшими чем 120 и взаимно простыми с этим числом, являются:

1,	7,	11,	13,	17,	19,	23,	29,	31,	37,	41,	43,	47,	49,	53,	59,	61,	67,	71	73,	77,	79,	83,
A		*D*	*C*	*B*		*B*	*D*	*A*	*C*		*C*	*B*	*A*		*D*	*C*					*A*	

89,	91,	97,	101,	103,	107,	109,	113,	119.
			D					*B*

60 : $aa + 15bb = A$, $3aa + 5bb = B$. $5bb + 19$ может быть квадратом, если $b = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{27}{2}$, $b = 9$.

1,	7,	11,	13,	17,	19,	23,	29,	31,	37,	41,	43,	47,	49,	53,	59.
A				*B*	*A*	*B*		*A*				*B*	*A*	*B*	

8: $aa + 2bb = A$.

1,	3,	5,	7.
A	*A*		

4: $aa + bb = A$.

1,	3.
A	

12: $aa + 3bb = A$, $2aa + 3bb = B$.

1,	5,	7,	11.
A	*B*	*A*	*B*

20: $aa + 5bb = A$. $A = 20n + (1, 9)$ $\frac{aa + 5bb}{2} = aa - 5bb = B$, $5aa - bb = C =$ $= 20n + (3, 7)$.

1,	3,	7,	9,	11,	13,	17,	19.
A			*A*				
B			*C*	*B*			*C*

28: $aa + 7bb = A$.

1,	3,	5,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	23,	25,	27.
A			*A*	*A*		*A*			*A*	*A*	

44: $aa + 11bb = A$.

1,	3,	5,	7,	9,	13,	15,	17,	19,	21,	23,	25,	27,	29,	31,	35,	37,	39,	41,	43.
A	*A*	*A*		*A*		*A*				*A*	*A*	*A*		*A*		*A*			

52: $aa + 13bb = A$, $\frac{aa + 13bb}{2} = B$.

1,	3,	5,	7,	9,	11,*	15,	17,	19,	21,	23,	25,	27,	29,	31,	33,	35,	37,	41,	43,	45,	47,	49,	51.
A			*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*B*			*A*		*A*	*B*							*B*	*A*	

24: $aa + 6bb = A$, $2aa + 3bb = B$.

1,	5,	7,	11,	13,	17,	19,	23.
A	*B*	*A*	*B*				

40: $aa + 10bb = A$, $2aa + 5bb = B$.

1,	3,	7,	9,	11,	13,	17,	19,	21,	23,	27,	29,	31,	33,	37 39.
A		*B*	*A*	*A*	*B*		*A*		*B*					*B*

---

* Здесь должно быть не *A*, а *B*: $a = 3$, $b = 1$, $\frac{9 + 13}{2} = 11 = B$.

68: $aa + 17bb = A$, $\dfrac{aa + 17bb}{6} = B$.

1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	19,	21,	23,	25,	27,	29,	31,	33,	35,	37,	39,	41,	43,	45,	47,	49,	53,
A	*B*		*B*	*A*	*B*	*A*			*A*	*B*	*A*	*B*		*B*	*A*			*B*					*A*	*A*

55,	57,	59,	61,	63,	65,	67 .
				B		

56: $aa + 14bb = A$, $2aa + 7bb = B$, $A = B$, $\dfrac{aa + 14bb}{3} = C$, $\dfrac{aa + 14bb}{5} = D$.

1,	3,	5,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	23,	25,	27,	29,	31,	33,	37,	39,	41,	43,	45,	47,	51,	53,	55.
A		*C*	*A*		*C*	*A*			*A*	*A*						*A*			*C*				

16: $aa + 4bb = A$.

1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15.
A		*A*		*A*		*A*	

60: $aa + 15bb = A$, $3aa + 5bb = B$.

1,	7,	11,	13,	17,	19,	23,	29,	31,	37,	41,	43,	47,	49,	53,	59.
A				*B*	*A*	*B*		*A*				*B*	*A*	*B*	

76: $aa + 19bb = A$.

1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	21,	23,	25,	27,	29,	31,	33,	35,	37,	39,	41,	43,	45,	47,	49,	51,
A		*A*	*A*	*A*	*A*			*A*		*A*	*A*					*A*		*A*		*A*	*A*	*A*	*A*	

53,	55,	59,	61,	63,	65,	67,	71,	73,	75».
	A		*A*	*A*				*A*	

Записная книжка № 134 относится к 1749—1750 гг. Наряду с вычислением количества чисел, меньших данного числа и взаимно простых с ним, Эйлер решает задачу определения самих этих чисел. Он делает это для чисел n = 120, 60, 8, 12, 4, 40, 28, 44, 52, 24, 40, 68, 56, 16, 60 (второй раз), 76. Среди этих чисел — степени двойки и степени двойки, умноженные на простые числа и на произведение простых.

Кроме этих задач Эйлера интересует вопрос о представимости взятых им чисел (взаимно простых с n и меньших n) квадратичными формами.

Отысканием чисел, взаимно простых с данным и меньших его, занимались впоследствии математики XIX в. Дюпре [92], Дормуа [91], П. С. Порецкий [68]. Они предлагали различные формулы для выражения в общем виде функции, значениями которой служат числа, взаимно простые с данным числом и меньшие этого числа.

Вопросы о связи теории вычетов и теории квадратичных форм рассматривались Эйлером неоднократно. Содержание этого фрагмента в печатных работах Эйлера не отражено.

№ 140, л. 87 об.

Фрагмент написан рукой Н. Фуса и был опубликован в 1862 г. в «Opera postuma...» [109, т. 1, с. 100].

«Пусть знак $::$ означает делимое (делящееся. — *Сост.*), так что $a :: p$ будет означать, что число a делится на p. Фундаментальная теорема, когда-то мною доказанная. Предложено какое-то число P. Тогда имеется π чисел между 1 и P, взаимно простых с P, а именно такие, которые с ним не имеют никакого общего делителя, кроме единицы; тогда всегда имеем:

$$a^{\pi} - 1 :: P.$$

Отсюда вытекают теоремы:

1. Если p будет простым числом, то, поскольку всегда $a^{p} - 1 :: p$, при $a = b^{p}$ будет $a^{p} - a :: p^{2}$, и если $a = b^{pp}$, то $a^{p} - a :: p^{3}$. Вообще, если $a = b^{p^{n}}$, то $a^{p} :: p^{n+1}$.

2. Если p, q, r, s и т. д. — простые числа, различные между собой, то для $a = b^{q-1}$ будет $a^{p} - a :: p\,q$. Далее, если $a = b^{(q-1)(r-1)}$, то $a^{p} - a :: p\,q\,r$, и т. д.

3. Если как $x^{m} - y^{m} :: P$, так и $x^{n} - y^{n} :: P$ и $m > n$, то будет также и $x^{m-n} - y^{m-n} :: P$, где x и y предполагаются взаимно простыми.*

Доказательство. Вторая формула, умноженная на x^{m-n}, вычитается из первой и получается остаток $x^{m-n}y^{n} - y^{m} = y^{n}(x^{m-n} - y^{m-n})$, который, следовательно, будет делиться на P, и поскольку y^{n} не делится [на P], то необходимо будет $x^{m-n} - y^{m-n} :: P$.

4. Если, как и прежде, как $x^{m-n} - y^{m-n} :: P$, так и $x^{n} - y^{n} :: P$ и наибольший общий делитель m и n будет Δ, то $x^{\Delta} - y^{\Delta} :: P$».

№ 140, л. 88

«Доказательство. Положим $m = \mu\Delta$ и $n = \nu\Delta$, и поскольку есть наибольший общий делитель, то будут μ и ν взаимно простыми. Поэтому найдутся такие числа α и β, что $\alpha\mu - \beta\nu = 1$. Отсюда будет также $x^{\alpha m} - y^{\alpha m} :: P$ и подобным же образом $x^{\beta n} - y^{\beta n} :: P$, откуда по предыдущей теореме $x^{\alpha m - \beta n} - y^{\alpha m - \beta n} :: P$. А так как показатель $\alpha m - \beta n = \alpha\mu\Delta - \beta\nu\Delta = \Delta$, то будет

$$x^{\Delta} - y^{\Delta} :: P».$$

Записная книжка относится к 1779—1783 гг. Эйлер вводит символ, обозначающий делимость одного (первого) числа на другое. Формулируется фундаментальная теорема (теорема Эйлера), «ранее мною доказанная»: «Если рассмотреть числа между единицей и некоторым заданным числом P, взаимно простые с P, обозначить их количество через π, то всегда будет $a^{\pi} - 1 :: P$, иначе говоря, $a^{\varphi(P)} \equiv 1(\mathrm{mod}\ P)$». Эйлер формули-

* Здесь предполагается, что x и y не делятся на P.

рует четыре следствия из этой теоремы (1, 2, 3, 4). В работах, опубликованных при жизни Эйлера, этот фрагмент не был отражен.

№ 140, л. 91 об.—92 об.

Фрагмент также был напечатан в 1862 г. Он записан рукой Н. И. Фуса.

«Определение. Предложено какое-нибудь целое число a. Обозначим через πa количество чисел, меньших, чем a, и с ним взаимно простых. Тогда будет $\pi 1 = 1$, $\pi 2 = 1$, $\pi 3 = 2$, $\pi 4 = 2$, $\pi 5 = 4$, $\pi 6 = 2$ и т. д., откуда очевидно: если a будет простым, то $\pi a = a - 1$. Если же число a будет составным, то число меньших его чисел будет πa. Каким образом для любого числа a можно найти значение πa, указывает данное ранее правило, более простое доказательство которого будет здесь дано.

Лемма. Предложено некоторое число a. Если образовать арифметическую прогрессию из стольких же членов, разность которой взаимно проста с a, то при делении каждого члена на a все остатки [вычеты] будут различны и среди них встретятся все числа, меньшие a: 0, 1, 2, 3, 4,...

Доказательство. Пусть p — простое число и q — разность, взаимно простая с a; арифметическая прогрессия будет p, $p + q$, $p + 2q$,..., $p + (a-1)q$. Если разделить каждый член на a, легко видеть, что все остатки должны быть неравными. Если же эти члены $p + \mu q$ и $p + \nu q$, где μ и ν меньше, чем a, будут давать равные остатки при делении на a, то разность их, равная $(\mu - \nu) q$, будет делиться на a, и поскольку q — взаимно простое с a число, то должно $\mu - \nu$, являющееся числом, меньшим a, делиться на него.

Так как все остатки должны быть различными, их число равно a и потому неизбежно среди них окажутся все числа 0, 1, 2, 3,..., $a - 1$. Следовательно, всегда одно из этих чисел будет делиться на a.

Подготовка к доказательству. Пусть $1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, a - 1$ — все числа, меньшие, чем a, и с ним взаимно простые. Количество их по предположению равно πa. Первым среди них будет 1, последним — $a - 1$. Затем составляется следующий ряд рядов:

1	α	β	γ		$a-1$	a
$a+1$	$a+\alpha$	$a+\beta$	$a+\gamma$	...	$2a-1$	$2a$
$2a+1$	$2a+\alpha$	$2a+\beta$	$2a+\gamma$	...	$3a-1$	$3a$
$3a+1$	$3a+\alpha$	$3a+\beta$	$3a+\gamma$	...	$4a-1$	$4a$
.....	.....	....	....	...	....	...
$(n-1)a+1$	$(n-1)a+\alpha$	$(n-1)a+\beta$	$(n-1)a+\gamma$	...	$na-1$	na

Таким образом, его первый горизонтальный ряд содержит все числа, взаимно простые с a, от 0 до a, второй ряд — все числа, взаимно простые с a, от a до $2a$, третий — все числа, взаимно простые с a, от $2a$ до $3a$, и, таким образом, эти ряды содержат числа до последнего $[(n-1)a+1]$-го ряда. Все вместе представляют все числа, взаимно простые с a, от 0 до na; количество этих чисел есть $n\pi a$. Отдельные же вертикальные ряды будут арифметическими прогрессиями с разностью a, расположенными в порядке возрастания. Они позволяют легко решить следующие задачи.

Задача. Предложено какое-либо число a. Найти значение формул πa^2, πa^3, πa^4 и т. д. и вообще πa^m.

Решение. В вышеуказанной таблице возьмем $n = a$, чтобы найти πaa. Очевидно, что все члены этих рядов, поскольку они взаимно просты с a, будут также взаимно просты с aa. Вследствие этого так как число таких рядов есть $n = a$ и число членов в каждом равно πa, то всегда получим $a \cdot \pi a$, что равно πaa, так что будет $\pi aa = a \cdot \pi a$.

Затем положим $n = aa$, так что $na = a^3$. Поскольку снова все члены будут взаимно просты с a^3, их количество будет $aa \cdot \pi a$ и также $\pi a^3 = aa \cdot \pi a$.

В общем случае, если положить $n = a^{m-1}$, что дает $na = a^m$, получим, что количество всех чисел, взаимно простых с a^m, будет $a^{m-1} \cdot \pi a$.

Следствие. Если a — простое число, так что $\pi a = a - 1$, то будет $\pi a^2 = a(a-1)$, $\pi a^3 = a^3(a-1)$ и т. д., $\pi a^m = a^{m-1}(a-1)$.

Задача. Предложены два члена a и b, взаимно простые между собой, для которых имеем формулы πa и πb. Найти количество всех чисел, взаимно простых с произведением ab и меньших его, или найти значение πab.

Решение. В вышеуказанной таблице положим $n = b$, что дает $na = nb$, и поскольку горизонтальный ряд содержит все числа, взаимно простые с a, от 1 до ab, число их, следовательно, есть $1, a+1, 2a+1, \ldots, (b-1)a+1$, он, поскольку представляет собой арифметическую прогрессию с разностью a, взаимно простой с b, имеет число членов, взаимно простых с b, равное πb. То же самое будет и с остальными вертикальными рядами, любой из которых содержит πb членов, взаимно простых с b. Таким образом, количество всех членов, одновременно простых и с a, и с b, так как число вертикальных рядов равно πa, будет $\pi a \cdot \pi b$, так что будет $\pi ab = \pi a \cdot \pi b$».

№ 140, л. 92 об.

«Теперь, наконец, может быть составлена таблица для всех чисел такого рода.*

* $\pi 1 = 1$, $\pi 2 = 1$, $\pi 3 = 1$, $\pi 4 = 2$, $\pi 5 = 4$, $\pi 6 = 2$, $\pi 7 = 6$, $\pi 8 = 4$, $\pi 9 = 6$, $\pi 10 = 4$, $\pi 11 = 10$, $\pi 12 = 4$, $\pi 13 = 12$, $\pi 14 = 6$, $\pi 15 = 8$, $\pi 16 = 7$. Это примечание Эйлера (или Н. Фуса).

Отсюда ясно далее, что если будем иметь a, b, c, d — взаимно простые между собой числа, то $\pi abcd = \pi a \cdot \pi b \cdot \pi c \cdot \pi d$. Затем, если предложено число $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta = n$, то $\pi n = a^{\alpha-1}\,\pi a \cdot b^{\beta-1}\,\pi b \cdot c^{\gamma-1}\,\pi c \cdot d^{\delta-1}\,\pi d$».

Здесь Эйлер вводит обозначение для функции $\varphi(a) : \pi a$ — и вычисляет сначала ее значения для различных a: $\pi 1$, $\pi 2$, $\pi 3$,..., для a простого. Затем в лемме говорится о том, что при делении всех членов арифметической прогрессии, разность которой взаимно проста с заданным числом a, на это число a получаются остатки, которые все различны между собой и представляют все числа, меньшие a и взаимно простые с ним. Доказательство этого утверждения отлично от того, какое было дано Эйлером в книжке № 133 (л. 170). Использовано свойство вычетов.

Далее Эйлер переходит к определению значений функции πa для последовательных степеней простого числа: $a = p^m$. В подготовительной части доказательства он использует указанную лемму. В качестве следствий он получает формулы для $n = a^p$, ab, $abcd$, $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$, где a, b, c, d взаимно просты.

В этом фрагменте (как и в E271) Эйлер полагает $\varphi(1) = 0$ (см. [88, т. 1, с. 113, примеч. 2]).

Глава VI

ЛИНЕЙНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Линейных делителей квадратичных форм Эйлер касается в опубликованных работах E283, E228, E449 и E744. Этот вопрос тесно связан с теорией вычетов и другими вопросами теории чисел. Вот почему часть фрагментов записных книжек встречается в разных разделах. В Полном собрании сочинений Эйлера о линейных делителях квадратичных форм говорится в предисловии издателей ко второму тому первой (математической) серии [108, сер. I, т. 2, с. XVII, XX, XXI, XXIV—XXVII]. См. также «Историю теории чисел» Л. Е. Диксона [88, т. 3, с. 3—11, 18—20 и др.].

№ 131, л. 56

«Теорема. Если $a2^{\alpha} - b$ делится на простое число p в случае $\alpha = m$, то оно делится на то же самое простое число и в случае $\alpha = n(p-1) + m$. Доказательство простое».

Доказательство основывается на малой теореме Ферма. На языке теории сравнений теорему можно сформулировать так: «Если выполняется сравнение $a2^{m} \equiv b \pmod p$, где p — простое число, то верно также и сравнение $a2^{n(p-1)+m} \equiv b \pmod p$».

Действительно, так как $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ по малой теореме Ферма, то, возводя в n-ю степень обе части сравнения, получаем: $2^{n(p-1)} = (2^{p-1})^{n} \equiv 1 \pmod p$. Перемножим почленно два сравнения: $a2^{m} \equiv b \pmod p$ и $2^{n(p-1)} \equiv 1 \pmod p$. Получим сравнение $a2^{m+n(p-1)} \equiv b \pmod p$.

№ 131, л. 57

«Теорема. Формула $a^2 + 1$ не может делиться ни на какое простое число, если оно не будет суммой двух квадратов или если оно не представимо в виде $4n + 1$».

№ 132, л. 141 об.

«Теорема. Сумма двух квадратов $aa + bb$ не делится ни на какое простое число вида $4n - 1$, если только a и b не будут одновременно делиться на это число.

Доказательство. Положим, что $aa + bb$ делится на $4n - 1$, будет также $a^{2i} + b^{2i}$ делиться на $4n - 1$, если i обозначает нечетное число; если $i = 2n - 1$, то будет $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ делиться на $4n - 1$. И по основной теореме $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ делится на $4n - 1$, следовательно, $a^{4n-2} + b^{4n-2}$, а отсюда и $aa + bb$ делиться не могут. Ч[то] и треб[овалось] д[оказать].

По-другому. Так как $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ делится на простое число $4n - 1$, следовательно, $a^{4n-2} + b^{4n-2}$. на это простое число делиться не может, и притом никакой множитель формулы $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ не будет делиться. Таким образом, $aa + bb$, так как $aa + bb$ — множитель этой формулы, не может делиться на $4n - 1$. Что и треб[овалось] доказать.

Следствие. Если $4n - 1$ не является простым числом, то будет делиться на простое число вида $4n - 1$. Таким образом, сумма двух квадратов $aa + bb$ не будет делиться ни на какое простое число».

№ 131, л. 119

«Теорема. Если $pp + qq$ делится на $4n - 1$, то $aa + 1$ также должно делиться на $4n - 1$, что невозможно. Не может быть, чтобы в целых числах $4mn - m - 1$ было квадратом $|\, m < 4n - 1|$, и если a нечетное равно $2r + 1$, то не может $4rr + 4r + 2$ делиться на $4n - 1$, следовательно, $(4n - 1)(4m - 2) - 1$ не может быть квадратом, а также и $16mn - 8n - 4m + 1$.

Подобным же образом $4mn - m - n$ не может быть квадратом, и одновременно может быть доказано, что никакое число формы $pp + qq$ не может делиться на $4n - 1$, если числа p и q взаимно просты».

Сумма двух квадратов не делится на $4n - 1$ при условии, что $(p, q) = 1$. Одновременно с доказательством этого утверждения доказывается и то, что $4mn - m - 1 \neq \square$ (т. е. что $4mn - m - 1$ не может быть квадратом). См. переписку Л. Эйлера с Х. Гольдбахом [138, письма № 40, 45, 47, 52, 55, 56, 58, 60, 62, 64—77, 80, 82—87]. Таблицу значений $4mn - m - n \neq \square$ см. там же в письме № 74. См. также E164 и E241.

№ 132, л. 95

«Подобным же образом если $4n + 1$ — простое число, то $a^{4n} - 1$ или $(a^4)^n - 1$ будет делиться на $4n + 1$; таким образом, $(a^4 \pm (4n + 1)p)^n - 1$ также будет делиться на $4n + 1$. Если положить $a^4 \pm (4n + 1)p = b$, то будет $b^n - 1$ делиться на $4n + 1$, если будет $a^4 - b$ делиться на $4n + 1$ или если $b \pm (4n + 1)p$ будет биквадратом.

Пусть $b = 2$, тогда будет $2^n - 1$ делиться на простое число $4n + 1$, если будет $a^4 = 2 \pm 4np \pm p$ или $n = \dfrac{a^4 - 2 - p}{4p}$, или $n = \dfrac{2 - a^4 - p}{4p}$, или если будет $4n + 1$ делителем [разности] $a^4 - 2$:

если $a^4 - 2$ будет	делит[елями] будут
14	2.7
79	79
254	2.127
623	7.89
1294	2.647
2399	2399
4094	2.23.89
6559	7.937
9998	2 4999

Среди них имеется простой делитель формулы $4n + 1$, это единственный делитель 89».

Аналогично предыдущему и утверждение для разности $a^{4n} - 1$. На языке теории вычетов это можно сформулировать так: если $a^4 - b$ делится на $4n + 1$ или, что то же, если b — биквадратичный вычет по модулю $4n + 1$, или если $b \pm (4n + 1)p$ — биквадратичный вычет, то $b^n - 1$ делится на $4n + 1$.

Рассмотрен пример: $b = 2$. Тогда $2^n - 1$ делится на простое число $4n + 1$, если $a^4 = 2 \pm 4np \pm p$, т. е. если: 1) $n = \frac{a^4 - 2 - p}{4p}$ или 2) $n = \frac{2 - a^4 - p}{4p}$, иначе говоря, если $4n + 1$ будет делителем разности $a^4 - 2$.

Эйлер ищет делители разностей $a^4 - 2$ вида $4n + 1$ и составляет соответствующую таблицу, где в первом столбце стоят разности $a^4 - 2$ для $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$, $a = 5$, $a = 6$, $a = 7$, $a = 8$, $a = 9$, $a = 10$, во втором столбце — делители, т. е. разложения этих разностей на простые множители. Множителей, имеющих вид $4n + 1$, Эйлер находит только два. Это числа 89 и 937. Их он подчеркнул. Общая теорема, куда как частные случаи входят рассмотренные Эйлером утверждения для $m = 2, 4$, дана дальше — на л. 97.

№ 132, л. 95 об.

«Итак, простое число $2n + 1$ будет делителем самого $2^n - 1$, если будет $2n + 1$ делителем формулы $xx - 2$. Эта формула не имеет других делителей, кроме тех, которые содержатся в форме $pp - 2qq$ или $2pp - qq$, если существуют взаимно простые числа p и q. Должно быть $2n + 1 = pp - 2qq$ или $2n + 1 = 2pp - qq$. Формы эти друг с другом согласуются».

Это частный случай утверждения о делителях разности $a^{2n} - 1$ (см. № 132, л. 95).

На языке теории сравнений можно записать так: если $a = 2$, то $2^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2n + 1)$ при $x^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 2n + 1)$. Аналогичный пример рассмотрен в E134, для $a = 3$. См. также главу IV «Малая теорема Ферма».

№ 132, л. 95 об.

«Если будет $2n + 1 = pp - 2qq$, то при p нечетном, положим $p = 2r + 1$, должно быть $2n + 1 = 4rr + 4r - 2qq + 1$. Берутся следующие значения $2n + 1$:

1	7
17	23
73	31
89	79
113	71
97	103
	137
	151

[p = 1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25],
pp = 1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361, 441, 529, 625,
$2qq$ = 2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, 128, 162, 200, 242, 288, 358,
[q = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]».

Эйлер рассматривает случай, когда простое $2n + 1$ является делителем разности $2^n - 1$, если $2n + 1$ — делитель формы $x^2 - 2$. Эйлеру известно, что $x^2 - 2$ имеет делители только двух видов: $p^2 - 2q^2$ или $2p^2 - q^2$ при $(p, q) = 1$. Таким образом, он знает, что делитель $2n + 1$ может быть или равен $p^2 - 2q^2$, или равен $2p^2 - q^2$, если $a^2 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 2n + 1)$, т. е. если 2 — квадратичный вычет по модулю $2n + 1$, а тогда будет $2^n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2n + 1)$.

Исходя из представления простого числа $2n + 1$ в виде $p^2 - 2q^2$, Эйлер составляет таблицу значений таких $2n + 1$ для нечетных p и натуральных q.

В первый столбец он записывает числа $2n + 1$ вида $8m + 1$, во второй — вида $8m - 1$. На основании этих наблюдений Эйлер делает вывод: простые числа вида $2n + 1$, делящие разность $2^n - 1$, содержатся в одной из двух форм: $8m + 1$ или $8m - 1$.

В E164 имеются следующие утверждения: «Числа, заключенные в форме $a^2 - 2b^2$, имеют простые делители вида $8m + 1$ или 2»; «Все простые числа вида $8m + 1$ или $8m - 1$ бесконечно многими способами содержатся в форме $a^2 - 2b^2$». См. также E256.

№ 132, л. 95 об.

«Отсюда видно, что простое число $2n + 1$, делящее $2^n - 1$, содержится в таких двух формах: $8m + 1$ и $8m - 1$. Следовательно, простое число $8m + 1$ будет делителем формы $2^{4m} - 1$, а простое число $8m - 1$ будет делителем формы $2^{4m-1}-1$. Так как простое число $8m+3$ является простым делителем формы $2^{8m+2}-1$, но не является делителем формы $2^{4m+1}-1$, следовательно, простое число 'вида $8m+3$ будет делителем формы $2^{4m+1}+1$».

Приравнивая $2n+1=8m+1$ и получая отсюда $n=4m$, Эйлер заключает: «Простое число $8m+1$ будет делителем формы $2^{4m}-1$». Аналогично, приравнивая $2n+1=8m-1$, он находит $n=4m-1$, откуда следует, что простое число вида $8m-1$ будет делителем формы $2^{4m-1}-1$. Что же касается простых чисел вида $8m+3$, то они не будут делить разность $2^{4m+1}-1$, а будут являться делителями суммы $2^{4m+1}+1$.

Случай делимости разности $2^{4m+1}-1$ на $8m-1$ был рассмотрен Эйлером в E26. Это один из признаков делимости Мерсенна (при простом $4m-1$ и простом $8m-1$). См. также письмо Эйлера к Гольдбаху от 25 июня 1730 г. [138, с. 34—37]. На с. 35 и 36 говорится: «Если $2^{p-1}-1$ делится на p, то и 2^p-2 тоже делится на p». На с. 36 и 37 приведены другие частные случаи формулы $(a+b)^p-a^p-b^p$.

См. также письмо от 23 февраля / 6 марта 1742 г. [138, с. 95—96, примеч. 3; с. 97].

№ 132, л. 96

«Следствие 4. $c^{2n}-d^{2n}$ будет делиться на $2n+1$, простое число, если только c и d не имеют делителем $2n+1$.

Имеется строгое доказательство этого следствия: если число $2n+1$ будет делителем формы $a^{2n+1}-a$, то оно будет также делителем формы $(a+1)^{2n+1}-a-1$. Так, если положим $b=1$, [то] простое число $2n+1$ и делитель формы $(a+1)^{2n+1}-a^{2n+1}-1$ будут также делителями формы $(a+1)^{2n+1}-a^{2n+1}-1+a^{2n+1}-a$, т. е. формы $(a+1)^{2n+1}-a-1$».

Это еще одно следствие предыдущей теоремы. Разность $c^{2n}-d^{2n}$ будет делиться на простое число $2n+1$, если c или d не делятся на $2n+1$.

№ 132, л. 96

«Теорема. Если $mn+1$ — простое число, то, если $mn+1$ является делителем формы x^m-b, оно будет также делителем формы b^n-1.

Доказательство. Если $mn+1$ есть делитель формы x^m-b, то оно будет также делителем формы $x^{mn}-b^n$, так как она на него делится и $x^{mn}-1$ делится на $mn+1$, если только x не будет кратным самого $mn+1$. Следовательно, b^n-1 тоже будет делиться на $mn+1$, если x^m-b будет делиться на $mn+1$. Что и треб[овалось] д[оказать]».

Это общая теорема, основанная на предшествующих наблюдениях Эйлера. См. E134, теорема 13: «Если $a=f^n\pm(mn+1)\,\alpha$, где $mn+1$ — простое число, то a^m-1 делится на $mn+1$». Дается доказательство.

Следствие 1. «Если $a^m - 1$ не делится на $mn+1$, то a не может заключаться в форме $f^n \pm (mn+1)\alpha$, т. е. не существует степени n такой, чтобы при делении на $mn+1$ получалось в остатке a».

См. также письмо Эйлера Гольдбаху от 10 августа 1730 г. [138, с. 39 и примеч. на с. 41]. См. также Е739. Обратное утверждение было доказано в Е262, теорема 19: «Если форма $a^m - 1$ делится на простое число $p = mn+1$, то всегда существуют числа x и y такие, что $ax^n - y^n$ делится на это p».

В записных книжках обратное утверждение имеется в № 133, л. 132 об.

№ 132, л. 96

«Теорема. Если простое число $mn+1$ будет делителем формы $x^m + b$, то будет также делителем формы $b^n + 1$, если n — число нечетное, и формы $b^n - 1$, если n — число четное».

Теорему, аналогичную предыдущей, относительно делимости суммы $x^m + b$ на простое число $mn+1$, см. в Е134. В Е262 дано следствие: «Форма $a^q - 1$ имеет делителем $p = nq+1$, если p простое и $p \neq a-1$».

№ 132, л. 96

«Так как простое число $2n+1$ является делителем [разности] $2^n - 1$, если оно будет делителем формы $aa - 2$, следовательно, $2n+1$ должно содержаться в форме $2xx - yy$; если имеется простое число $2n+1$, надо рассмотреть, может ли оно быть приведено к форме $2xx - yy$. И если удастся сделать это одним способом, то можно и бесконечно многими другими. Будет также $2n+1 = 2zz - uu$, и существуют $z = \alpha x \pm \beta y$ и $u = 2\beta x \pm \alpha y$, где α и β определяются из следующих рядов:

$$1,\quad 3,\quad 17,\quad 99,\quad 577,\ldots;$$

$$0,\quad 2,\quad 12,\quad 70,\quad 408,\ldots».$$

На частном примере формы $2^n - 1$ Эйлер рассматривает связь вопросов делимости на простое число $2n+1$ с делителями квадратичной формы $a^2 - 2$ и с представлением простых чисел вида $2n+1$ квадратичными формами вида $2x^2 - y^2$. Равенство $a^2 - 2 = k(2n+1)$, выражающее делимость разности $a^2 - 2$ на простое число $2n+1$, иначе говоря, обозначает, что число 2 является квадратичным вычетом по модулю $2n+1$.

О делимости $2^p - 1$ на простое число вида $2p+1 = 8n \pm 1$ см. Е557. См. также Е449.

№ 132, л. 96 об.

«[Теорема]. Пусть найдется форма $2xx - yy = 2n+1$, тогда всегда найдется [и] бесконечно много форм $aa - 2$, делящихся на $2n+1$. Спрашивается — найти целые числа p и q так, чтобы $p = \frac{qy \pm 1}{x}$, откуда будет $a = py - 2qx$ или в более общей форме $a = (2n + 1)\, r + py - 2qx$.

Пример. Пусть $n + 1 = 641$. Будет $641 = 2xx - yy$. Возьмем $x = 19$ и $y = 9$, получится $p = \frac{9q \pm 1}{19}$ и будет $q = 2$, $p = 1$.

Если возьмем $a = 641\, r \pm 67$, будет $a^2 - 2$ делиться на 641.

Парные значения для a:

$641\, r + 67$	$641\, r - 67$
67	574
708	1215
1349	1856
1990	2497
2631	3138
3272	3779
3913	4420
4554	5061
5195	5702
5836	6343

[Число] $a^{10} - 2$ делится на 641, если $a = 96$. Если среди этих чисел встретится степень, например g^m, то $g^{2m} - 2$ будет делиться на 641 и также $2^{\frac{320}{m}} - 1$ делится на 641 и может быть $m = 5$. Следовательно, $2^{64} - 1$ будет делиться на 641. Если может быть $2^{32} - 1$, то среди этих чисел не будет квадратов, следовательно, и чисел вида g^m, откуда следует, что $2^{32} - 1$ будет делиться на 641».

См. E134: «Если $a^m - 1$ делится на $mn + 1$, то $a = f^n \pm (mn + 1)\,\alpha$». Там же имеется замечание о делимости $2^{64} - 1$ на 641.

На языке сравнений: если $a^m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ mn + 1)$, то $a \equiv f^n (\mathrm{mod}\ mn + 1)$.

В рассмотренном фрагменте выражение простого члена $2n + 1$ квадратичной формой $2x^2 - y^2$ связывается с делимостью формы $a^2 - 2$ на $2n + 1$. Определяется вид числа a: $a = (2n + 1)\, r + py - 2qx$. Затем рассмотрен пример, иллюстрирующий установленное утверждение. В частности, Эйлер снова доказывает делимость числа $2^{32} + 1$ на 641. О делимости $2^{2^5} + 1$ на 641 см. E26, E283.

В E449 (работа представлена в 1773 г., опубликована в 1774 г.) имеется теорема о делителях квадратичной формы $2p^2 - q^2$ и следствие о квадратичных вычетах и невычетах по простому модулю $8m - 3$.

Из общей теории квадратичных делителей квадратичных форм Эйлер знает (№ 132, л. 57 об.—59), что если найдется одно представление числа $2n + 1$ квадратичной формой $2x^2 - y^2$, то будет существовать бесконечно много форм $a^2 - 2$, делящихся на $2n + 1$. Он ищет целые p и q такие, чтобы $px - qy = \pm 1$. Тогда он берет для a значение $a = py - 2qx$* или, рассматривая вместе с a все числа, сравнимые с ним по модулю $2n + 1$, более общее выражение: $a = (2n + 1)\,r + py - 2qx$.

Рассмотрен пример. Снова Эйлер берет число $641 = 2n + 1$. Тогда $641 = 2x^2 - y^2$. Полагая $x = 19$, $y = 9$, он находит $p = \frac{9q \pm 1}{19}$ и $q = 2$, $p = 1$.

Если положить $a = 641\,r \pm 67$, получится разность $a^2 - 2$, делящаяся на 641. Затем составляется таблица таких a. В левом столбце стоят значения $a = 641\,r + 67$, в правом $a = 641\,r - 67$ при $r = 0, 1, 2, 3,\ldots$

№ 132, л. 96 об.

«[Теорема]. a^{10} — 2 делится на 641, если $a = 96$. Если среди этих чисел встретится степень, например, g^m, то $g^{2m} - 2$ делится на 641 и будет делиться на 641 также $2^{\frac{320}{m}} - 1$ и может быть $m = 5$. Следовательно, $2^{64} - 1$ будет делиться на 641, откуда или $2^{32} - 1$, или $2^{32} + 1$ будет делиться на 641. Если можно взять $m = 10$, среди этих чисел не будет квадратов, следовательно, не будет чисел вида q^m, откуда следует, что $2^{32} + 1$ будет делиться на 641».

Интересно замечание Эйлера в связи с этим рассуждением. Он замечает, что когда $a^2 - 2$ делится на $2n + 1$, может оказаться, что a само представляет собой какую-то степень другого числа. Например, $a = g^m$, $a^2 = g^{2m}$, т. е. $a^2 - 2$ делится на 641, но делится на это число также и $g^m - 2$. А также делится на 641 разность $2^{\frac{320}{m}} - 1$ и, поскольку $m = 5$, $2^{64} - 1$, $2^{32} - 1$ или $2^{32} + 1$, но $2^{32} - 1$ не делится на 641. Поэтому делится на 641 сумма $2^{32} + 1$. Чтобы до конца выяснить вопрос, Эйлер на следующем листе рассматривает еще один пример.

См. Е134.

№ 132, л. 97

«Берется простое число 3361, на которое делится (по малой теореме Ферма. — *Сост.*) форма $2^{3360} - 1$, и так как 3361 является делителем формы $x^2 - 2$, поскольку содержится в форме $p^2 - 2qq$, то будет также делителем [разности] $2^{1680} - 1$. Далее, 3361 есть делитель формы $x^5 - 2$, если $x = 7$, откуда 3361 будет делителем формы $2^{336} - 1$, и, произведя вычисления, получим, что форма $2^{84} + 1$ делится на 3361, откуда будет

---

* У Эйлера написано: $py - 2qx$, но в примере он берет $\pm(py - 2qx)$.

$2^{168}-1$ также делиться на 3361. Так как $2^{\frac{3361-1}{20}}-1$ будет, а $2^{\frac{3361-1}{40}}-1$ не будет делиться на 3361, формы x^2-2, x^4-2, x^5-2, $x^{10}-2$, $x^{20}-2$ делятся на 3361. Напротив, не существует формы x^8-2, которая делилась бы на 3361. Поскольку $2^{32}+1$ делится на 641, будет $2^{64}-1$ делиться на 641, но не будет $2^{32}-1$; будет делиться на 641 $2^{\frac{640}{10}}-1$, но не будет $2^{\frac{640}{20}}-1$ делиться на 641, из чего следует, что имеются такие формы x^2-2, x^5-2, $x^{10}-2$ и т. д., которые делятся на 641, и x^k-2, [которая] не будет делиться на 641, если только k не будет 1, или 2, или 5, или 10, но будет k делителем 640».

№ 132, л. 97

«Простые числа вида $3n+1$, которые являются делителями формы x^3-2 или формы $\pm x^3 \pm 2y^3$, суть 31, 43, 109, 127, 223, 229, 283, 307, 439, 499, 601, 727, 733».

Эйлер переносит полученные результаты на кубические формы и кубические вычеты.

См. E134, E262, E449 (кубические вычеты).

Самого утверждения в печатных работах не найдено. Эйлер на примере применяет свойство, обнаруженное им у линейных делителей квадратичных форм, к кубическим формам. Затем аналогичным образом он находит делители (простые делители вида $4n+1$), формы 4-й степени x^4-2y^4 (л. 97 об.). Составляет таблицу делителей разностей 2^m-1, где делители имеют вид $4m+1$. Затем ищет простые делители вида $5n+1$ форм 5-й степени $x^5 \pm 5y^5$ (л. 97 об.).

См. E134, E262, E271, E449.

Точно такого же утверждения, как в записной книжке, в печатных работах не найдено.

№ 132, л. 97

«Теорема. Если хотим узнать, какие остатки (вычеты) получатся при делении степени x^m на простое число вида $mn+1$, ищем значения a, которые делают форму a^n-1 делящейся на $mn+1$. Эти значения a и будут требуемыми остатками (вычетами)».

После наблюдений над простыми делителями различных видов форм Эйлер формулирует общую теорему для простых делителей вида $mn+1$ разностей a^n-1. Теорема формулируется на языке степенны́х вычетов.

См. E134, E262 (уточнение результата), E792, E449.

№ 132, л. 97 об.

«Простые числа вида $4n + 1$, которые являются делителями формы $x^4 - 2y^4$, суть 1, 73, 89, 113, 233, 257, 281, 353, 617, 937, 1249, 1753, 1889, 1913, 2273, 2393, 2857, 4177, 4513, 4721, 4801, 6529, 6449, 6553».

Рассмотрены простые делители формы $x^4 - 2y^4$, имеющие вид $4n + 1$. Этот пример наряду с предыдущими привел Эйлера к теореме на л. 98 (см. далее).

№ 132, л. 97 об.

«Делители вида $5n + 1$ формы $x^5 \pm 2y^5$ суть: 1, 151, 241, 251, 2381, 3061, 5581».

См. Е134.

№ 132, л. 98

«Теорема. Если $x^m - ay^m$ имеет делителем простое число $mn + 1$, то $x^{mn} - a^n y^{mn}$ будет иметь делителем $mn + 1$ и $x^{mn} - y^{mn}$ будет иметь делителем $mn + 1$, следовательно, $(a^n - 1)y^{mn}$, т. е. $a^n - 1$, будет иметь делителем простое число $mn + 1$».

Эйлер формулирует без доказательства теорему (основываясь на рассмотренных раньше примерах). Ее можно сформулировать на языке теории сравнений следующим образом: «Если $x^m \equiv ay^m (\mathrm{mod}\, mn + 1)$, то $x^{mn} \equiv a^n y^{mn} (\mathrm{mod}\, mn + 1)$ и по теореме Ферма $x^{mn} \equiv y^{mn} (\mathrm{mod}\, mn + 1)$».

См. Е134, Е262.

№ 132, л. 98

«Теорема. Если $x^m - ay^m$ имеет делителем простое число $mn + 1$, то $x^{mn} - a^n y^{mn}$ будет иметь делителем то же число $mn + 1$ и $x^{mn} - y^{mn}$ будет иметь делителем $mn + 1$, следовательно, $(a^n - 1)y^{mn}$, т. е. $a^n - 1$, будет иметь делителем простое число $mn + 1$».

Теорема сформулирована Эйлером без доказательства, на основании рассмотренных выше примеров.

Это простое свойство сравнений: если $x^m \equiv ay^m (\mathrm{mod}\, nn + 1)$, $x^{mn} \equiv a^n y^{mn} (\mathrm{mod}\, mn + 1)$. По малой теореме Ферма будет $x^{mn} \equiv$ $\equiv y^{mn} (\mathrm{mod}\, mn + 1)$, если x и y взаимно простые с $mn + 1$. Поэтому $y^{mn} \equiv a^n y^{mn} (\mathrm{mod}\, mn + 1)$, откуда следует, что $a^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, mn + 1)$.

См. Е134.

№ 132, л. 98 об.

«Теорема. Всякое простое число вида $3n + 1$ раскладывается в форму такого вида: $aa + ab + bb$.

Доказательство. Если $3n + 1$ — простое число, то $p^{3n} - q^{3n}$ делится на $3n + 1$, следовательно, или $p^n - q^n$, или $p^{2n} + p^n q^n + q^{2n}$ может делиться на него; так как не всегда $p^n - q^n$ может делиться на $3n + 1$, бывает случай, в котором $p^{2n} + p^n q^n + q^{2n}$ или $xx + xy + yy$ будет делиться на $3n + 1$ и эта форма не будет иметь других делителей, кроме формы $aa + ab + bb$. Следовательно, простое число вида $3n + 1$ всегда содержится в этой форме $aa + ab + bb$. Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Следовательно, всякое простое число вида $3n + 1$ может быть разложено на четыре квадрата, три из которых равны между собой».

№ 132, л. 98 об.

«Задача. Найти, в каком случае форма $aa + a + 1$ делится на простое число вида $3n + 1$.

Решение. Простое число $3n + 1$ разлагается в виде $pp + pq + qq$, и берутся целые числа y и z, так что $z = \frac{py + 1}{q}$, после чего получается $a = (3n + 1)m + qy + p(y + z)$ и будет форма $aa + a + 1$ делиться на $3n + 1$.

Пример. Пусть $3n + 1 = 19 = 3^2 + 2 \cdot 3 + 2^2$; будет $p = 3$, $q = 2$ и $z = \frac{3y + 1}{2}$ и будет $y = 1$ и z или 1, или 2, следовательно, $y + z = 3$, следовательно, $a = 19m + 11$.

Если $y = -1$, будет $z = -1$; если $p = 2$, $q = 3$, $z = \frac{2y + 1}{3}$, будет $y = 1$, $z = 1$ и $a = 19m + 7$».

О делимости трехчлена $a^{2m} + a^m + 1$ на простое число вида $3n + 1$ см. E134.

№ 132, л. 99

«*Пример.* Пусть $3n + 1 = 79 = 7^2 + 3 \cdot 7 + 3^2$; будет $p = 7$, $q = 3$, $z = \frac{7y + 1}{3}$, откуда $y = 2$, $z = 5$, $y + z = 7$ и $a = 79m + 55$, или возьмем $p = 3$, $q = 7$, будет $z = \frac{3y + 1}{7}$ и $y = 2$, $z = 1$, $y + z = 3$, откуда $a = 79m + 23$.

Следствие. Если $aa + a + 1$ делится на $3n + 1$ в случае $a = (3n + 1)m + s$, то будет также делиться в случае $a = (3n + 1)m + 3n - s$.

Теорема. Если $aa + ma + 1$ может быть разделено на $\alpha n + \beta$ в случае $a = s$, то также может быть разделено и в случае $a = \alpha n + \beta - m - s$».

№ 132, л. 99

«Теорема. Пусть $4n + 3$ — простое число, на него будет делиться $a^{4n+2} - 1$, следовательно, или $a^{2n+1} + 1$, или $a^{2n+1} - 1$. Поэтому будет или $2 \cdot 2^{2n} + 1$, или $2 \cdot 2^{2n} - 1$ делиться на $4n + 3$; в первом случае будет $4n + 3$ делителем формы $2aa + 1$, следовательно, будет содержаться в форме $2pp + qq$ или $\frac{2pp + qq}{2}$. В этом случае будет $4n + 3$ суммой четырех квадратов. Если же $2 \cdot 2^{2n} - 1$ будет делиться на $4n + 3$, окажется, [что и] $5^{2n+1} + 1$ или $5^{2n+1} - 1$ делится на $4n + 3$.

Если $5^{2n+1} + 1$ или $5 \cdot 5^{2n} + 1$ будет делиться [на $4n + 3$], то будет $4n + 3$ делителем формы $5aa + bb$. Следовательно, $4n + 3$ будет числом вида $5pp + qq$ или $\frac{5pp + qq}{2}$ и, следовательно, разлагается на четыре квадрата.

Если же $5 \cdot 5^{2n} - 1$ будет делиться на $4n + 3$, то имеется число $a \cdot a^{2n} + 1$, которое делится на $4n + 3$, и будет число $4n + 3$ числом вида $app + qq$ или $\frac{app + qq}{2}$. Поэтому если a будет числом, разложимым на три квадрата, то $4n + 3$ может быть разложено на четыре квадрата. Для a имеется не одно такое число, но бесконечно много чисел, это очевидно».

№ 132, л. 99

«Теорема. Если $a = 4n + 2$, то $a^{2n+1} + 1$ будет делиться на $4n + 3$, если это простое число. Пусть $a = -1$, тогда $a^{2n+1} + 1$ может делиться на $4n + 3$. Поэтому и $((4n + 3)m - 1)^{2n+1} + 1$ может делиться. Что и требовалось доказать».

Эйлер проверяет, что вместе с числами -1 и $(-1)^{2n+1} + 1$ на $4n + 3$ будет делиться и число вида $((4n + 3)m - 1)^{2n+1} + 1$, т. е. он находит класс чисел, сравнимых с -1 по модулю $4n + 3$.

Если $a = 4n + 2$, то $a^{2n+1} \equiv -1 \pmod{4n + 3}$, где $4n + 3$ — простое число. Доказательство этого утверждения основано на свойстве сравнений: $(-1)^{2n+1} \equiv -1 \pmod{4n + 3}$, тогда и $(-1 + (4n + 3)m)^{2n+1} \equiv -1 \pmod{4n + 3}$. Так как $(-1)^{2n+1} \equiv -1 \pmod{4n + 3}$, то $(-1 + (4n + 3)m)^{2n+1} \equiv -1 \pmod{4n + 3}$. Так как $(-1 + (4n + 3)m)^{2n+1} \equiv -1 \pmod{4n + 3}$ и $a^2 \equiv 1 \pmod{4n + 3}$, то $(-1 + (4n + 3)\,m)\,a^2 \equiv -1\ (4n + 3)$. Аналогично случаю делимости $a^2 + 1$ на $p^2 + q^2$, рассмотренному Эйлером ранее (л. 57, 57 об.), если делится на $4n + 3$ сумма $(-1 + (4n + 3)\,m)\,p^2 + 1$, то будет делиться на $4n + 3$ и $(-1 + (4n + 3)\,m)\,p^2 + q^2$.

Приводятся примеры. Подставляя в формулу $((4n + 3)\,m - 1)\,p^2 + q^2$ значения: 1) $m = 1$, получаем $(4n + 2)\,p^2 + q^2$; 2) $m = 2$, получаем $(8n + 5)\,p^2 + q^2$; 3) $m = 3$, получаем $4\,(3n + 2)\,p^2 + q^2$.

(Видимо, под p Эйлер понимает здесь $2p$).

№ 132, л. 99

«Т е о р е м а. Так как простое число $8m + 3$ является делителем формы $2^{4m+1} + 1$, то будет делитель вида $2aa + bb$, следовательно, сам содержится в форме $2pp + qq$ и потому разлагается на три квадрата».

О делимости суммы $2^{4m+1} + 1$ на $8m + 3$ см. № 132, л. 95, 95 об. Теорема следует из общей теоремы на л. 96: «Если $mn + 1$ — простое число и делит сумму $x^n + b$, то и $b^n + 1$ (при n четном) или $b^n - 1$ (при n нечетном) будет делиться на $mn + 1$».

В данном случае $4m + 1 = n$ — нечетное число, поэтому по общей теореме будет делиться на $8m + 3$ сумма $2p^2 + q^2$ или $p^2 + 2q^2$, так как $2(4m + 1) + 1 = 8m + 3$.

О том, что все простые числа $8m + 3$ или $8m + 1$ содержатся в форме $2a^2 + b^2$, см.: E256, E272, E134. В переписке Эйлера с Гольдбахом [138] этим вопросам посвящены фрагменты в письмах от 17/28 августа 1742 г. (с. 117), 2/13 февраля 1748 г. (с. 286), 4 мая 1748 г. (с. 288—289), 5/16 декабря 1752 г. (с. 362—365, примеч. 6), 23 марта/3 апреля 1753 г. (с. 367—370, примеч. 3).

Ряд теорем относительно разложимости простого числа на три и на четыре квадрата имеется на л. 99 об.

См. разделы о диофантовом анализе, разложении чисел на сумму трех и четырех квадратов.

№ 132, л. 99

«С л е д с т в и е. Если $aa + a + 1$ делится на $3n + 1$ в случае $a = (3n + 1)m + s$, то будет делиться и в случае, когда $a = (3n + 1)m + 3n - s$».

Это еще одно свойство сравнений: «Если $a^2 + a + 1$ делится на $3n + 1$ в случае $a = (3n + 1)m + s$, то делится и в случае, когда $a = (3n + 1)m + 3n - s$». Проверяется подстановкой: «Пусть $a^2 + a \equiv -1 \pmod{3n + 1}$. Требуется доказать, что $a = (3n + 1)m + 3n - s$ обладает тем же свойством».

№ 132, л. 99

В данном фрагменте речь идет о делимости чисел $a^2 + 3b^2$ или $f^2 \pm fg + g^2$ (здесь $f = a$, $g = 1$) на простые числа $6n + 1$ или $p^2 + 3q^2$.

См. E272.

№ 132, л. 99

«Т е о р е м а. Если $aa + ma + 1$ может делиться на $\alpha n + b$ в случае $a = s$, то может также делиться и в случае $a = \alpha n + b - m - s$».

Затем то же свойство рассмотрено в общем виде: если $a^2 + ma + 1$ делится на $\alpha n + \beta$ в случае, когда $a = s$, то оно будет делиться и в случае, когда $a = \alpha n + \beta - m - s$. Проверяется подстановкой.

№ 132, л. 99 об.

Формулируется ряд теорем относительно разложимости простого числа вида $8n + 3$ на три и на четыре квадрата.

См. разделы о диофантовом анализе, разложении чисел на сумму трех и четырех квадратов.

№ 132, л. 99 об.

«Теорема. Если $3n + 1$ — простое число, то $3n + 1 + pp$ может быть разложено на четыре квадрата.

Доказательство. Так как если $3n + 1 = 3xx + yy$, то будет $3n + 1 + 2pp = xx + yy + 2(pp + xx) = x^2 + y^2 + (x + p)^2 + (x - p)^2$. Что и требовалось доказать.

Следствие. Простое число вида $8n - 1$ при делении на 3 дает в остатке $+1$ или -1. В первом случае оно разлагается на четыре квадрата, три из которых равны; во втором случае оно содержится в форме $24n - 1$, которая будет разлагаться на четыре квадрата, если $24n - 1 - 2pp$ — простое число вида $4m + 1$ или, положив $p = 3q \pm 1$, если $8n - 6qq \pm 4m - 1$ — простое число вида $6m + 1$».

См. разделы о диофантовом анализе, разложении чисел на сумму трех и четырех квадратов.

№ 132, л. 100—101 об.

Эйлер формулирует ряд теорем о линейных простых делителях квадратичных форм вида $a^2 - pb^2$. Сначала он рассматривает конкретные квадратичные формы: $a^2 - 2b^2$, $a^2 - 3b^2$, $a^2 - 5b^2$, $a^2 - 7b^2$. Затем формулирует теорему для форм более общего вида: $a^2 - pb^2$, где p — простое число. После этого переходит к изучению линейных делителей квадратичных форм $a^2 - pqb^2$, $pa^2 - qb^2$, $a^2 - pqrb^2$, $a^2 + pb^2$ и т. д., где p, q, r — простые числа. На л. 101 об. дается сводка полученных результатов для квадратичной формы $a^2 + nb^2$, где $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 15, 13, 17$. Эйлер замечает, что линейные простые делители некоторых форм можно представить в виде $4nk + m^2$, и пишет это сбоку.

При вычислении делителей Эйлер замечает, что у некоторых из рассмотренных форм делители могут быть такого же вида, как и делимое, и другого вида, например в случае формы $a^2 + pqb^2$ делители могут быть вида $a^2 + pqb^2$ и $pa^2 + qb^2$. Об этом наблюдении свидетельствуют найденные Эйлером делители $60n + 17$, $60n + 23$, $60n + 47$, $60n + 53$, которые представимы в форме $pa^2 + qb^2$ (в частности, $5a^2 + 3b^2$).

Точно так же в случае формы $a^2 + 6b^2$ он указывает в числе делителей $24n + 5$, $24n + 11$, представимые в виде квадратичной формы вида $2a^2 + 3b^2$; в случае форм $a^2 + 13b^2$ и $a^2 + 17b^2$ он также рассматривает делители двух видов: $a^2 + 17b^2$ и $\frac{a^2 + 17b^2}{6}$.

Кроме того, Эйлер указывает, что если известен простой делитель $4pn + \alpha$, то делителями той же формы будут и числа, полученные из данного делителя, если возвести α в любую степень. Этим он пользуется при составлении сводки на л. 101 об. Так, в случае формы $a^2 + 17b^2$ все делители получаются с помощью возведения в степени числа 3. Именно в таком порядке записаны числа в скобках: $68n + (1, 3, 9, 27, 13, 39, 49, 11, 33, 31, 25, 7, 21, 63, 53, 23)$. В скобках стоят вычеты степеней числа 3 по модулю 68, взятые в последовательном порядке от 3^0 до 3^{15}.

Утверждение: «Если $4pn + s$ будет делителем формы $a^2 + pb^2$, то простое число вида $4pn + s$ или в более общей форме $4pn + s^{\nu}$ также будет делителем формы $a^2 + pb^2$» — Эйлер обобщает на случай, когда форма $a^2 + pb^2$ имеет два простых делителя: $4pn + s$ и $4pn + t$, а затем формулирует аналогичное утверждение для $a^2 + pb^2$.

Это подготовительные теоремы для формулировки квадратичного закона взаимности.

Соответствующие печатные работы Эйлера: E164, E557. Аналогичные результаты Эйлер сообщает Гольдбаху в письме № 40 от 9 сентября 1741 г. (см. примеч. 12 и 13 к этому письму [138, с. 85—88]). Дальнейшие замечания по этому вопросу содержатся в письме № 54 [138, с. 116—122]. В письме № 56 от 16/27 октября 1742 г. Эйлер пишет, что все простые делители формы $px^2 + y^2$ заключены в формулах $4p + \alpha$, $4p + \beta$ [138, с. 125—130]. В письме № 60 от 25 декабря 1742/5 января 1743 г. говорится, что делители выражений $4pa^2 + 1$ содержатся в одной из форм: $4np + 1$, $4np + \alpha$, $4np + \beta$ — и вообще их форма $(4np - 1)m - n + x^2$ [138, с. 135—140].

№ 132, л. 100

«Теорема. Все простые делители формы $a^2 - 2b^2$ содержатся в формулах $8n \pm 1$».

См. E164, где теорема более точна. Указано, что делителем может быть также и число 2. Кроме того, добавлено утверждение, что все простые числа вида $8n \pm 1$ бесчисленным множеством способов содержатся в формуле $a^2 - 2b^2$.

№ 132, л. 100

«Теорема. Все простые делители формы $aa - 3bb$ содержатся в форме $12n \pm 1$».

См. Е164, где теорема более точна, чем в записной книжке: добавлено, что простыми делителями чисел $a^2 - 3b^2$ могут быть также числа 2 и 3. Кроме того, добавлено утверждение, что, обратно, все простые числа вида $12n \pm 1$ содержатся в формах $a^2 - 3b^2$ или $3a^2 - b^2$ бесчисленным множеством способов.

№ 132, л. 100

«Теорема. Все простые делители формы $aa - 5bb$ заключаются в формах $20n \pm 1$, $20n \pm 9$».

См. Е164, где указано, что простыми делителями чисел $a^2 - 5b^2$ являются также числа 2 или 5, или те, которые содержатся в одной из форм $20n \pm 1$, $20n \pm 9$ или в одной из таких: $10n \pm 1$. Добавлено также, что все простые числа указанных видов одновременно будут делителями формы $a^2 - 5b^2$.

№ 132, л. 100

«Теорема. Все простые делители выражения $aa - 7bb$ содержатся в $28n \pm 1$, $28n \pm 9$, $28n \pm 25$».

См. Е164, где указано, что все простые делители формы $a^2 - 7b^2$ будут 2 или 7 или заключены в одной из следующих форм: $28n \pm 1$, $28n \pm 9$, $28n \pm 25$, и обратно, все простые числа, заключенные в таких формах, будут делителями формы $a^2 - 7b^2$.

№ 132, л. 100 об.

«Следствие. Если p — простое число, то форма $aa - pbb$ не может иметь других простых делителей, кроме тех, которые содержатся в формулах $4pn \pm 1$, $4pn \pm 9$, $4pn \pm 25$,... Можно продолжить эти нечетные квадраты, но последующие формулы будут сводиться к первым.

Следует заметить, что числа a и b должны быть взаимно простыми. Если оба числа a и b — нечетные, то форма $aa - pbb$ имеет делителем число 2. И если a будет кратным числа p, то делителем будет еще само число p».

В Е26 рассмотрено еще несколько частных случаев. Сформулирована общая теорема для любого N (не обязательно простого). Формулировка отлична от имеющейся в записной книжке. Не указано, что в формуле $4Nn + \alpha$ α — квадраты нечетных чисел (или квадратные вычеты по модулю $4N$).

См. письмо Эйлера к Гольдбаху от 17/28 августа 1742 г. [138, с. 117—119]. См. также монографию Диксона [88, т. 3, с. 3, 4].

№ 132, л. 100 об.

«Пусть p и q — простые числа, а формула $aa - pqbb$ имеет делителями простые числа, которые содержатся в формулах $4pqn \pm 1$, $4pqn \pm 9$, $4pqn \pm 25, \ldots, 4pqn \pm rr$. Если r — нечетное число, немного меньшее pq, то само собой исключаются те [числа], которые имеют делители такие, что r является составным (не взаимно простым. — *Сост.*) для p и q. Кроме того, для других простых чисел формула $aa - pqbb$ делится на те, которые заключаются в формах $4pqn \pm \frac{p-q}{m}$, $4pqn \pm \frac{4p-q}{m}$, $4pqn \pm \frac{9p-q}{m}$, где m обозначает какой-то делитель числителя. Отсюда следует, что формула $aa - pqbb$ имеет те же делители, что и формула $paa - qbb$, и обратно.

Пусть [даны] формулы	Простые делители содержатся в
$aa - 2 \cdot 3bb$	$24n \pm 1$, $24n \pm 5$
$aa - 2 \cdot 5bb$	$40n \pm 1$, $40n \pm 9$, $40n \pm 3$, $40n \pm 13$
$aa - 2 \cdot 7bb$	$56n \pm 1$, $56n \pm 9$, $56n \pm 25$, $56n \pm 5$, $56n \pm 13$
$aa - 2 \cdot 11bb$	$88n \pm 1$, $88n \pm 9$, $88n \pm 25$, $88n \pm 81$, $88n \pm 3$, $88n \pm 13$, $88n \pm 21$, $88n \pm 61$, $88n \pm 29$
$aa - 3 \cdot 5bb$	$60n \pm 1$, $60n \pm 49$, $60n \pm 7$, $60n \pm 17$
$aa - 3 \cdot 7bb$	$84n \pm 1$, $84n \pm 25$, $84n \pm 37$, $84n \pm 5$, $84n \pm 41$, $84n \pm 17$
$aa - 3 \cdot 11bb$	$132n \pm 1$, $132n \pm 25$, $132n \pm 49$, $132n \pm 35$, $132n \pm 17$, $132n \pm 29$, $132n \pm 41$, $132n \pm 31$, $132n \pm 65$».

Эйлер хочет распространить свою теорему на всевозможные натуральные (не только простые) числа N. Рассмотрен случай произведения двух простых. Эйлер устанавливает, что формула $a^2 - pqb^2$ имеет те же делители, что и формула $pa^2 - qb^2$, и обратно. Он составляет таблицу, в первом столбце которой стоят числа $a^2 - pqb^2$, а во втором столбце — простые делители этих чисел в линейной форме $4pqn \pm \alpha$.

№ 132, л. 101

«Формула $aa - 2 \cdot 3 \cdot 5bb$ имеет простые делители, содержащиеся в формах $120n \pm 1$, $120n \pm 49$, $120n \pm 7$, $120n \pm 13$, $120n \pm 37$, $120n \pm 29$, $120n \pm 19$». Эйлер рассматривает случай, когда число N в формуле $a^2 - Nb^2$ является произведением трех простых чисел: $N = pqr$.

№ 132, л. 101

«Простые делители формулы $aa - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7bb$ или $aa - 210bb$ содержатся в формах: $840n \pm 1$, $840n \pm 121$, $840n \pm 169$, $840n \pm 349$, $840n \pm 179$, $840n \pm 181$, $840n \pm 229$, $840n \pm 61$, $840n \pm 19$, $840n \pm 221$, $840n \pm 149$, $840n \pm 389$, $840n \pm 139$, $840n \pm 29$, $840n \pm 209$, $840n \pm 89$, $840n \pm 41$, $840n \pm 79$, $840n \pm 151$, $840n \pm 319$, $840n \pm 23$, $840n \pm 263$, $840n \pm 313$, $840n \pm 73$, $840n \pm 97$, $840n \pm 407$, $840n \pm 253$, $840n \pm 373$, $840n \pm 83$, $840n \pm 37$, $840n \pm 227$, $840n \pm 277$, $840n \pm 403$, $840n \pm 43$, $840n \pm 67$, $840n \pm 293$, $840n \pm 163$, $840n \pm 173$, $840n \pm 233$, $840n \pm 367$, $840n \pm 103$, $840n \pm 137$, $840n \pm 113$, $840n \pm 223$».

Рассмотрен случай, когда число N содержит четыре простых сомножителя. Составлена таблица простых делителей в линейной форме для этого случая.

№ 132, л. 101

Рассмотрен пример: простые делители формулы $aa - 13 \cdot 5bb$ содержатся в формулах $260nn \pm (1, 7, 49, 83, 61, 93, 131, 123, 81, 47, 69, 37)$. Эти числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 7. Вместо чисел, которые получаются при делении на 250, бóльших 260, взяты их вычеты.

№ 132, л. 101

«Простые делители формулы $aa - pqbb$, если p и q — простые числа, будут: $4pqn \pm (1 + s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + \ldots)$, где s — простое число, являющееся делителем $pq - 1$ или $pq - 4$, или $p - q$, или $4p - q$, или $pq - 9$, или $9p - q$ и т. д., пока не появится малый подходящий делитель».

Формулируется утверждение для произведения двух простых чисел в общем виде.

№ 132, л. 101

«Что же касается формулы $aa - pqrbb$, требуется найти два простых делителя, простейших, как например s и t, и тогда формула $\frac{1}{(1 - s)(1 - t)}$, обращенная в ряд, даст все числа, которые следует прибавить к $4pqrn$ с обоими знаками, чтобы снова получить формулы $4pqrn \pm A$, которые содержат все простые делители формулы $pqrbb$».

Формулируется теорема для случая произведения трех простых чисел pqr.

В E164 рассмотрены примеры для N, равных произведению двух и трех простых чисел. Теорема формулируется для любого N. В E557 даны две общие теоремы: о простых делителях формы $x^2 - ay^2$ (они будут вида $4as + T$ или $4as - T$) и формы $x^2 + ay^2$, которые будут вида $4as + T$ или $4as - \Theta$. Здесь T обозначает числа, содержащиеся в форме $(2q + 1)^2 - 4at$, где $q = 0, 1, 2, \ldots, 1 < T < 4a$, а буквой Θ обозначены числа вида $4n + 1$, которые останутся, если часть таких чисел T исключить из рассмотрения.

Использование разложения $\frac{1}{(1-s)(1-t)}$ в ряд для получения всевозможных комбинаций и произведения $s^m t^n$ применялось Эйлером и в других работах. См., например, E242.

№ 132, л. 101 об.

«Все простые делители формы $aa + 5bb$ содержатся в $20n + (1, 3, 7, 9)$. И обратно, простые числа такой формы суть делители формулы $aa + 5bb$».

Относительно теоремы о делителях формы $a^2 + 5b^2$ см. E164. Здесь указано, что среди простых делителей формы $a^2 + 5b^2$ будут также 2 или 5. См. примеч. к л. 100, 100 об.

№ 132, л. 101 об.

«Все простые делители других формул $aa + sbb$ содержатся в $20n + (1, 3, 7, 9)$, и простые числа этой формы являются поочередно делителями формулы $aa + 5bb$. Все простые делители других формул ведут себя так:

Формулы	Формы простых делителей
$aa + bb$	$4n + 1 \;\ldots\; 4n + mm$
$aa + 2bb$	$8n + (1+3)$
$aa + 3bb$	$12n + (1+7) \;\ldots\; 6n + 1 \;\ldots\; 6n + mm$
$aa + 4bb$	$16n + (1+5+9+13) \;\ldots\; 4n + 1$
$aa + 5bb$	$20n + (\cancel{1}+3+\cancel{9}+7)$
$aa + 6bb$	$24n + (1+5+7+11) \;\ldots\; 14n + mm$
$aa + 7bb$	$28n + (\cancel{1}+11+\cancel{9}+15+\cancel{25}+23) \;\ldots\; 14n + (1+11+9)$
$aa + 11bb$	$44n + (\cancel{1}+3+\cancel{9}+27+\cancel{37}+23+\cancel{25}+31+5+15)$ или $22n + (1+3+9+5+15)$
$aa + 15bb$	$60n + (1+17+49+53+19+23+31+47)$ или $30n + (1+17+19+23)+(11+\cancel{25}+19+\cancel{29}+47+\cancel{17}+15)$
$aa + 13bb$	$52n + (\cancel{1}+7+\cancel{49}+31+\cancel{9}+11+\cancel{25}+19+\cancel{29}+47+\cancel{17}+15)$
$aa + 17bb$	$68n + (\cancel{1}+3+\cancel{9}+27+\cancel{13}+39+\cancel{49}+11+\cancel{30}+31+\cancel{25}+7+\cancel{21}+63+$ $+ 53+23)$»

Общую сводку простых делителей форм $a^2 + nb^2$, две формы вида $a^2 + pqb^2$, одну форму $a^2 + p^2b^2$, другие $a^2 + pb^2$, где p и q — простые числа, см. в E164.

Эйлер замечает, что в первом столбце стоят квадраты чисел или квадратичные вычеты, получающиеся при делении чисел на простые делители. Он пишет сбоку: $4n + mm$, $6n + mm$, $24n + mm$, $14n + (1 + 11 + 9)$ и т. д. См. E164, E256, E272, E552, E556, E598, E610, E744, E792.

Эйлер использует для нахождения делителей несколько их свойств, одни из которых записаны в виде теорем, другие отмечены в более поздних записях. Например, для вычисления чисел, стоящих в скобках для модуля 16, он делит на 16 последовательные степени числа 5:

$$5^2 \equiv 9 \pmod{16}, \quad 5^3 \equiv 125 \pmod{16} \equiv 13 \pmod{16},$$

$$5^4 \equiv 625 \pmod{16}, \quad 5^5 \equiv 5 \pmod{16}, \quad 5^6 \equiv 9 \pmod{16},$$

$$5^7 \equiv 13 \pmod{16} \text{ и т. д.}$$

По-видимому, Эйлер получает числа, стоящие в скобках, с помощью деления на соответствующий модуль (4, 8, 12, 16, 20, 24, ..., 68) первых степеней, квадратов, кубов, ..., некоторых простых чисел или с помощью подстановки различных значений a и b в формулы левого столбца. Например, в скобках для модуля 16 стоят числа 1, 5, 9, 13. Они получаются при делении на 16 последовательных степеней числа 5: 1, 5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, ...

При вычислении делителей некоторых чисел Эйлер обнаруживает, что не все они такой же формы, как делимое. Например, среди делителей формы $a^2 + 15b^2$ встречаются делители вида $3a^2 + 5b^2$. В скобках делителям такого вида соответствуют числа 17, 23, 47, 53. Делители двух видов встречаются и у формы $a^2 + 6b^2$. Снова к изучению этого вопроса Эйлер обращается в записной книжке № 134, л. 64 об.—65.

См. E164, E272, E552, E556, E598, E610, E744, E557, E792. См. также [88, т. 3, с. 3—4].

№ 132, л. 101 об.

«Теорема. Если простые числа $4pn + s$ и $4pn + t$ будут делителями формы $aa + pbb$, то все простые числа вида $4pn + s^{\mu} t^{\nu}$ будут делителями формы $aa + pbb$».

См. переписку Эйлера с Гольдбахом [138, с. 117, письмо № 54].

№ 132, л. 101 об.

«Теорема. Если $4pn + s$ будет делителем формы $a^2 + pb^2$, то простое число вида $4pn + s^2$ и более общо $4pn + s^{\nu}$ тоже будет делителем формы $a^2 + pb^2$».

Даются аналогичные утверждения для случая двух простых делителей формы $a^2 - pb^2$ и др.

См. E164 (сходные утверждения); см. также письмо № 54 от 17/28 августа 1742 г. в переписке Эйлера с Гольдбахом [138].

№ 132, л. 148

«Простыми делителями формулы $aa + 15bb$ являются 16, 24, 40; $pp + 15qq$; 15, 16; $15(pp + 15qq)$; $3(3pp + 5qq)$; $5(3pp + 5qq)$; $8(3pp + 5qq)$ и $(3pp + 5qq)^2$, если существуют $3pp + 5qq$ и $pp + 15qq$ — простые числа».

№ 132, л. 187

«Теорема. Числа такого рода: $4naa + 1$ — никогда не могут делиться на число вида $4np - 1$, а если бы делились, то частное было бы $4q - 1$, следовательно, было бы $(4np - 1)(4q - 1) = 4naa$ и, следовательно, $4npq - np - q = naa$, по этой причине будет $q = nr$ и $4npr - p - r \neq aa$».

Это попытка обобщить теорему о делителях суммы двух квадратов. См. № 132, л. 119, 57; № 131, л. 119.

№ 132, л. 223 об.

«Задача. Найти делители формулы $aa + pbb$.

Решение. Все делители содержатся в выражениях такого рода: $4np + \alpha$, где вместо α подставляются определенные числа.

1. Первым всегда будет $\alpha = 1$.
2. Будет $\alpha = +3$, если $p = 3m - 1$,
   $\alpha = -3$, если $p = 3m + 1$.
3. Будет $\alpha = +5$, если $p = 5m + [1 + 4]$,
   $\alpha = -5$, если $p = 5m + [2 + 3]$.
4. Будет $\alpha = +7$, если $p = 7m + [3 + 5 + 6]$,
   $\alpha = -7$, если $p = 7m + [2 + 4 + 1]$.
5. Будет $\alpha = +11$, если $p = 11m + [2 + 6 + 7 + 8 + 10]$,
   $\alpha = -11$, если $p = 11m + [1 + 3 + 4 + 5 + 9]$.
6. Будет $\alpha = +13$, если $p = 13m + [1 + 3 + 4 + 5 + 10 + 12]$,
   $\alpha = -13$, если $p = 13m + [2 + 5 + 6 + 7 + 8 + 11]$.

Задача. Найти делители формулы $aa - pbb$.

Все делители содержатся в формулах такого рода:

Числа вместо α должны быть подставлены.

1. Во-первых, $[\alpha] = 1$.
2. $\alpha = 3$, если $p = 3m + 1$,
   $\alpha \neq 3$, если $p = 3m + 2$.
3. $\alpha = 5$, если $p = 5m + [1 + 4]$,
   $\alpha \neq 5$, если $p = 5m + [2 + 3]$.
4. $\alpha = 7$, если $p = 7m + [1 + 2 + 4]$,
   $\alpha \neq 7$, если $p = 7m + [3 + 5 + 6]$.

5. $\alpha = 11$, если $p = 11m + [1 + 3 + 4 + 5 + 9]$,
$\alpha \neq 11$, если $p = 11m + [2 + 6 + 7 + 8 + 10]$».

См. E164, E557. Приведена таблица различных значений α для разных p. См. также [88, т. 3, с. 3—4].

№ 133, л. 132 об.

«Теорема. Если формула $a^m - 1$ имеет простой делитель $mn + 1$, то имеются числа x и y такие, что $ax^n - y^n$ имеет тот же делитель $mn + 1$.

Следствие. Если взять для x любое число, и для y всегда найдется значение, меньшее $mn + 1$».

См. № 132, л. 96. Это обобщение утверждения, сформулированного на л. 96 для $2^n - 1$. См. E262.

№ 133, л. 132 об.

«Теорема. Если форма $ab^n - c^n$ или $c^n - ab^n$ будет делиться на простое число $p = mn + 1$, то, если взять произвольное число α, не делящееся на p, всегда найдется x такой, что или для $ax^n - d^n$, или $ad^n - x^n$, или $d^n - ax^n$, или $x^n - ad^n$ будет делиться на это же простое число $p = mn + 1$».

См. № 132, л. 98. Здесь теорема сформулирована более точно. В E262 дана аналогичная теорема с доказательством.

№ 133, л. 132 об.

«Теорема. Если $ab^n - c^n$ или $c^n - ab^n$ имеет делителем простое число p, то формула $a^{\frac{p-1}{n}} - 1$ будет делиться на p.

Следствие. Если $mn + 1$ — простое число и $ab^n - c^n$ или $c^n - ab^n$ имеет делитель $mn + 1$, то $a^m - 1$ имеет тот же делитель $mn + 1$. А именно $b^{n(p-1)} - c^{n(p-1)} : p$ и $a^{(p-1)} b^{n(p-1)} - c^{n(p-1)}$».

Делимость подобных выражений рассмотрена Эйлером в E134 и E262. Формулировка теоремы отличается от имеющейся в записной книжке.

№ 133, л. 168

«Теорема. Простое число $10n + 1$ есть делитель формы $aa - 5bb$».

№ 133, л. 169

«Теорема. Формула $a^n - b^n$, кроме натуральных (естественных) делителей $a - b$ и $a^m - b^m$, если m — делитель числа n ($a + b$ в случае, когда n — четное число), не имеет других делителей, кроме тех, которые содержатся в форме $\alpha n + 1$.

Доказательство. Если она делится на простое число $\alpha n + p$, то, поскольку на это число делится форма $a^{\alpha n+p-1} - b^{\alpha n+p-1}$ и также $a^{\alpha n} - b^{\alpha n}$, следовательно, $a^{\alpha n+p-1} - a^{p-1} b^{\alpha n}$ будет делиться на $a^{p-1} - b^{p-1}$, и если m — общий наибольший делитель чисел n и $p - 1$, форма $a^m - b^m$ будет также делиться на $\alpha n + p$, и $a^m - b^m$ есть делитель формы $a^n - b^n$.

Следовательно, кроме естественных делителей формулы $a^n - b^n$, не существует других, кроме тех, которые имеют вид $a - b$ и $mn + 1$».

См. Е134: «Если m — простое число, то $a^m - b^m$ не имеет других делителей, кроме $a - b$ и $mn + 1$». В Е262 — аналогичные утверждения.

№ 133, л. 169

«Задача. Если $a^2 + pb^2$ является простым числом, когда p — простое, найти его вид».

Эйлер снова ищет представление квадратичной формы в линейной форме. Он делал это при отыскании простых делителей квадратичных форм $a^2 + nb^2$, $a^2 - nb^2$ (см. № 131, л. 101 об. и др.). Здесь постановка задачи другая. В предшествующих записях Эйлер искал делители такой квадратичной формы. Здесь он ищет представления квадратичной формы в линейном виде. Кроме того, подсчитывается количество линейных представлений каждой квадратичной формы. Рассмотрены различные виды простых p (p вида $4q + 1$, $4q - 1$), разные случаи для a и b (a четное, b нечетное; a нечетное, b четное).

В качестве примеров рассмотрены линейные представления форм $a^2 + b^2$, $a^2 + 2b^2$, $a^2 + 5b^2$, $a^2 + 11b^2$, $a^2 + 13b^2$, которые уже встречались в записной книжке № 131, л. 101 об.

№ 133, л. 176

«Теорема. Чтобы $2xx + nyy$ могло быть приведено к квадрату, должно быть или $n = 8\alpha \pm 1$, или $n = 2(8\alpha \pm 1)$, где $8\alpha \pm 1$ обозначает только простые числа такой формы.

Пусть A, B, C, D — простые числа вида $8\alpha \pm 1$ и n будет членом или произведением каких-нибудь членов такого ряда: 1, 2, A, B, C, D, где в качестве α берется отрицательное число.

Теорема. Чтобы $3xx + nyy$ могло быть приведено к квадрату, пусть A, B, C, D [будут] простыми числами вида $12\alpha + 1$ и n берется равным члену или произведению членов такого ряда: 1, –2, –3, A, B, C, D и т. д. — и ряд A, B, C будет: 1, –11, +13, –23, +37, –47, –59, +61, –71, +73, –83 и т. д.

Теорема. Чтобы $5xx + nyy$ можно было привести к квадрату, пусть A, B, C, D [будут] простыми числами вида $10\alpha \pm 1$, $20\alpha \pm 1$, $20\alpha + 9$ и

n будет членом или произведением членов ряда: ± 1, ± 5, A, B, C, D и т. д.

N3. В этом ряду сверх того содержатся все квадратные числа или $n = 10\alpha \pm 1$, или $n = 5(10\alpha \pm 1)$.

Теорема. Чтобы $7xx + nyy$ могло быть приведено к квадрату, пусть A, B, C, D и т. д. [будут] простыми числами вида $28\alpha + 1$, или $28\alpha + 9$, или $28\alpha + 25$ и для n берутся члены или произведения членов ряда $+2$, -7, A, B, C, D и т. д.

Теорема. Чтобы [было] $6xx + nyy = \square$, пусть A, B, C [будут] простыми числами вида $24\alpha + 1$ или $24\alpha - 3$ и n должно быть членом ряда -2, $+3$, A, B, C, D и т. д.

Теорема. Чтобы было $13xx + nyy = \square$, пусть A, B, C [будут] простыми числами вида $52\alpha \pm 1$, $52\alpha \pm 9$, $52\alpha \pm 25$, $52\alpha \pm 49$, $52\alpha \pm 81$, $52\alpha \pm 121$ и n [будет] членом ряда ± 13, A, B, C, D и т. д.

Для $11xx + nyy = \square$ должны быть A, B, C, D и т. д. простыми числами вида $44\alpha + 1$, $+9$, $+25$, $+49$, $+81$ и содержаться в ряду -2, -11, A, B, C, D и т. д.».

№ 133, л. 176

«Следствие. Для формулы $13xx \pm nyy = \square$ подходящими значениями для n будут: 1, 3, 4, 9, 12, 13, 16, 17, 23, 27, 29, 36, 39, 43, 48, 49, 51, 53, 61, 68, 69, 75, 79, 81, 87, 100, 101; остальные, меньшие 100, не годятся.

Следствие. Для формулы $2xx \pm nyy$* подходящими значениями для n до 100 будут: 1, 2, 4, 7, 8, 9, 14, 16, 17, 18, 23, 25, 28, 31, 32, 34, 36, 41, 46, 47, 49, 50, 56, 62, 63, 64, 68, 71, 72, 73, 79, 81, 82, 89, 92, 94, 97, 98, 100. Невозможными являются: 3, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 29, 30, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 48, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 65, 66, 67, 69, 70, 74, 75, 76, 77, 78, 80, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 93, 95, 96, 99.

Если в формуле $2xx + n$ число n двумя способами может быть разложено в форму $yy - 2xx$, что будет, если оно является произведением двух простых чисел вида $8\alpha \pm 1$, то для x найдутся элементы, относящиеся ко второй шкале 6, -11. Например, если $n = 7 \cdot 17 = 119$, то $2xx + 119$ будет квадратом в случае, когда

$$x = \begin{cases} \ldots -115, -191, +1, +25, +149, \ldots, \\ \ldots -41, -5, +11, +71, +415, \ldots, \end{cases}$$

каковые ряды объединяются в такой:

$$\begin{matrix} -115, & -41, & -19, & -5, & +1, & +11, & +25, & +71, & +149, & +415, \ldots, \\ A & B & C & D & E & F & G & H & I & K \end{matrix}$$

* Так в записной книжке. Должно быть: $2xx \pm nyy = \square$.

закон построения которого таков:

$$C = \frac{7B - 2A}{3}, \quad D = \frac{7C - 3B}{2}, \quad E = \frac{7D - 2C}{3},$$

$$F = \frac{7E - 3D}{2}, \quad G = \frac{7F - 2E}{3}, \quad H = \frac{7G - 3F}{2}, \ldots».$$

Формулируется ряд утверждений, аналогичных такому: «Чтобы $2x^2 + ny^2$ могло быть равным квадрату, необходимо, чтобы было $n = 8\alpha \pm 1$ или $n = 2(8\alpha \pm 1)$, где $8\alpha \pm 1$ обозначает простое число этого вида». Затем формулируются аналогичные теоремы для выражений $3x^2 + ny^2$, $5x^2 + ny^2$, $7x^2 + ny^2$, $6x^2 + ny^2$, $13x^2 + ny^2$, $11x^2 + ny^2$, $13x^2 + ny^2$.

Устанавливается зависимость между представлением квадратов квадратичными формами вида $ax^2 + by^2$ и линейными делителями таких форм вида $4Nm + \alpha$, а также возможностью решения уравнения $ax^2 + by^2 = hz^2$.

№ 132, л. 187

«Теорема. Число вида $4naa + 1$ никогда не может делиться на число вида $4np - 1$, а если бы делилось, частное было бы вида $4q - 1$. Следовательно, было бы $(4np - 1)(4q - 1) = 4naa + 1$,* следовательно, $4npq - np - q = naa$, откуда было бы $q = nr$ и $4npr - p - r \neq aa$».

Попытка обобщения теоремы о делителях суммы двух квадратов (см. л. 141 об.): см. также № 131, л. 199; № 132, л. 57, 119.

№ 132, л. 190

«Теорема. Если будет $4p - 1$ — простое число, то $a^{2p-1} - 1$ будет делиться на $4p - 1$, если будет a делителем самого p. Доказательство желательно.

Поскольку $b^{4p-2} - 1$ делится на $4p - 1$, будет также $a^{2p-1} - b^{4p-2} - 1$ делиться на $4p - 1$. Дальше будет $4p - 1$ делителем формулы $axx - yy$. Когда квадраты делятся на $4p - 1$, среди вычетов будут все делители p. Всегда найдется число z, такое, что $zz - a$ делится на $4p - 1$».

В печатных работах не найдено.

№ 132, л. 190

«Теорема. Формула $abb + cc$ не будет делиться на простое число $4n - 1$, если a будет делителем самого n.

Доказательство. Пусть $abb + cc$ делится на $4n - 1$; будет также $a^{2n-1} b^{4n-2} + c^{4n-2}$ делиться на $4n - 1$ и $a^{2n-1} b^{4n-2} - c^{4n-2}$ делиться на

* У Эйлера записано: $(4np - 1)(4q - 1) = 4naa$.

$4n - 1$. Отсюда $a^{2n-1} b^{4n-2} + c^{4n-2}$, и потому $abb + cc$ не будут делиться на $4n - 1$. Ч[то] и т[ребовалось] д[оказать].

Следствие. Пусть $n = ap$; будет $abb + cc \neq (4ap - 1)q$. Пусть q [=] $4ar - cc$; будет $abb \neq 16aapr - 4apcc - 4ar$, откуда $4apr - pcc - r \neq$ quadr.».

О том, что $a^2 + qb^2$ при q простом не делится на число вида $4qm - \alpha$, см. E164. В частности, $a^2 + qb^2$ не делится на $4mq - 1$. См. № 131, л. 190; № 132, л. 167, 221, 221 об.

№ 132, л. 221

«Все простые делители этой формы суть одновременно делители формы $aa - 19 \cdot 23bb$, которые по предписанному появляются сверх данных».

См. [138, с. 183, письмо № 74]. См. также E164.

№ 132, л. 221 об.

«Из найденных выше делителей получаются следующие формулы, которые никогда не могут доставить квадратные числа:

$4mn - m - n$	$8mn \pm 3(m - n)$
$8mn - m - n$	$12mn \pm 5(m - n)$
$8mn - 3m - 3n$	$20mn \pm 3(m - n)$
$12mn - m - n$	$20mn \pm 7(m - n)$
$12mn - 7m - 7n$	$24mn \pm 7(m - n)$
$20mn - m - n$	$24mn \pm 11(m - n)$
$20mn - 3m - 3n$	$28mn \pm 5(m - n)$
$20mn - 7m - 7n$	$28mn \pm 11(m - n)$
$20mn - 9m - 9n$	$28mn \pm 13(m - n)$
$28mn - m - n$	$40mn \pm 7(m - n)$
$28mn - 3m - 3n$	$40mn \pm 11(m - n)$
$28mn + 5m - 5n$	$40mn \pm 17(m - n)$
$28mn + 13m + 13n$	$40mn \pm 19(m - n)$
$28mn - 9m - 9n$	
$28mn - 11m - 11n$	
$24mn - m - n$	
$24mn - 5m - 5n$	
$24mn - 7m - 7n$	
$24mn - 11m - 11n$	

Из этого с помощью комбинаций получается: $8mn - 3m - 3n \neq \square$, $8mn - 3m + 3n \neq \square$, $8mn + 3m - 3n \neq \square$.

Здесь m и n должны быть простыми числами.

Так как $aa + 7bb$ не имеет ни одного делителя вида $7m - 1$, $7mn - m - n$ никогда не будет квадратом».

См. [138, с. 183, письмо № 74], E164. См. также № 131, л. 119; № 132, л. 190, 187.

№ 132, л. 221 об.

«Теорема. $aa + (4m + 1)bb$ никогда не имеет делителей вида $16mn + 8m + 4n + 3$. Следовательно, $16mnp + 8mp + 4np + 3p - (4m + 1)bb$ никогда не будет равно квадрату или $(4m + 1)4np + (4m + 1)2p + p - (4m + 1)bb \neq aa$. Пусть $b = (8m + 3)q$; будет $(4m + 1)4np + (8m + 3)p - (4m + 1)(8m + 3)^2 \neq aa$. Если $p = q + (4m + 1)(8m + 3)$, будет $(4m + 1)4nq + 4n(4m + 1)^2(8m + 3) + (8m + 3)q \neq aa$. Если $q = 4r(4m + 1)^2$, будет $16nr(4m + 1)^3 + 4n(4m + 1)^2(8m + 3) + 4r(4m + 1)^2(8m + 3) \neq aa$. Следовательно, $4(4m + 1)rs + (8m + 3)(r + s) \neq \square$ или $4(4m + 1)rs - (8m + 1)(r + s) \neq \square$».

О простых делителях чисел вида $a^2 + (4m + 1)b^2$ см. Е164. Так как для формы $a^2 + (4n + 1)b^2$ делителем будет $4(4n + 1)m + \alpha$, то не будет делителем никакое число вида $4(4m + 1)m + 2(4n + 1) + \alpha$. В примечании сказано: «Никакое число вида $2(2m \pm 1)N \pm \alpha$ не может быть делителем чисел вида $a^2 - Nb^2$. Поэтому если положить $\alpha = t^2$, то будет $(2(2m \pm 1)N \pm t^2)u \neq a^2 - Nb^2$».

№ 132, л. 223

«I. Если $4n - 1$ будет простым числом, то все простые делители формы $aa + (4n - 1)bb$ содержатся в форме $2(4n - 1)p + qq$.

II. Формула $aa + (4n - 1)bb$ не может делиться ни на какое число вида $2(4n - 1)p - qq$.

III. Всякое простое число, содержащееся в форме $4np + qq$, делит какое-нибудь число вида $aa + nbb$ и $\frac{n^{2np + \frac{qq-1}{2}} - 1}{4np + qq} = \text{integ.}$

IV. Никакое число вида $4np - qq$ не может быть делителем какого-либо числа вида $aa + nbb$.

Следствие. Следовательно, уравнение $4npr - qqr = aa + nbb$ невозможно. Или $4npr - pff - rgg$ не может быть квадратом».

№ 134, л. 51 об.

«Теорема. Форма $aa + bb$ не делится ни на какое число вида $4n - 1$.

Доказательство. Так как если $aa + bb = 4A + 1$, будет $4A + 1 = (4n - 1)(4p - 1)$ и $4p - 1 < 4n - 1$, поэтому найдется наименьшее число вида $4n - 1$, являющееся делителем формы $aa + bb$.

Следствие. Следовательно, если квадраты 1, 4, 9,... делятся на число $4n - 1$, то среди невычетов будут −1, −4, −9,...».

О том, что $4n - 1$ не является делителем суммы двух квадратов (если a и b не делятся одновременно на $4n - 1$), см. № 131, л. 119, 141 об.

№ 134, л. 51 об.

Аналогичные теоремы для выражений вида $2a^2 \pm b^2$, $3a^2 + b^2$ и др.

№ 134, л. 51 об.

«Теорема. Форма $2aa + bb = 4A \begin{cases} +1 \\ +3 \end{cases}$ не делится ни на какое число вида $8n \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$.

Следствие. Если квадраты делятся на число $8n \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$, то среди невычетов будет -2; если -2 будет вычетом, найдется форма $2aa + bb$, которая делится.

Теорема. Форма $2aa - bb = 8A \pm 1$ не может делиться ни на какое число $8n \pm 3$.

Следствие. Если квадраты делятся на число $8n \pm 3$, то среди вычетов не встретится 2; следовательно, 2 будет среди невычетов.

Теорема. Форма $3aa + bb = 6A + 1$ не может делиться ни на какое число $6n - 1$, следовательно, среди квадратичных вычетов не встретится -3; следовательно, -3 будет среди невычетов».

№ 134, л. 64 об.

«Все простые делители формы $5aa + 7bb$ суть 4, 5, 7 и $140n$ + (3, 13, 17, 27, 33, 47, 73, 83, 97, 103, 117), которые суть вида $5pp + 7qq$, и $140n$ + + (1, 9, 11, 29, 39, 51, 71, 79, 81, 99, 109, 121), которые суть вида $pp + 35qq$; эти числа, если они простые, содержатся в этих формах, пока p и q или по крайней мере $2p$ и $2q$ принимаются целыми.

$aa + 30bb = 120n + (1, 31, 49, 79) = A$ $2aa + 15bb = 120n + 2 + (17, 23, 47, 113) = B$ $3aa + 10bb = 120n + 3 + (13, 37, 43, 67) = C$ $5aa + 6bb = 120n + 5 + (11, 29, 59, 101) = D$ $AA = aa + 30bb,\ BB = aa + 30bb$ $AB = 2aa + 15bb,\ BC = 5aa + 6bb$ $AC = 3aa + 10bb,\ BD = 3aa + 10bb$ $AD = 5aa + 6bb,\ CD = 2aa + 15bb$ $aa + 210bb = A = AA = BB = CC = DD =$ $= EE = FF = GG = HH = BCF =$ $= BDG = BEH = CDH = DEF = FGH$ $2aa + 105bb = B = AB = CF = DG = EH$ $3aa + 70bb = C = AC = BF = DH = EG$ $5aa + 42bb = D = AD = BG = CH = EF$	$AA = A,\ BB = B,\ CC = A,\ DD = A$ $AB = B,\ AC = C,\ AD = D$ $BC = D,\ BD = C,\ CD = B$ $BCD = A$ $aa + 30bb = A,\ A^2,\ B^2,\ C^2,\ D^2,\ BCD$ $2a^2 + 15bb = B,\ AB,\ CD,\ A^2B,\ ACD,$ $BC^2,\ BBCD$ $3a^2 + 10b^2 = C,\ AC,\ BD$ $5a^2 + 6bb = D,\ AD,\ AAD,\ BBD,\ CCD,\ DDD$ В этих формах все делители содержатся, поскольку по крайней мере $2a$, $2b$ суть целые

$7aa + 30bb = E = AE = BH = CG = DF$
$6aa + 35bb = F = BC = AF = DE = GH$
$10aa + 21bb = G = AG = BD = CE = FH$
$15aa + 14bb = H = AH = BE = CD = FG = AAH = ABE = ACD = AFG = CEF = DEG = BCG$

$BBH = BDF$
CCH
DDH
EEH
FFH
GGH
HHH

$2aa + 7bb = 2, 7 + 56n + (1, 9, 25, 15, 23, 39) = aa + 14bb$
$3aa + 5bb = 8, 3, 5 + 60n + (17, 23, 47, 53)$
$aa + 15bb = 15 + 60n + (1, 49, 19, 31)$

Остальные простые числа, которые ни в одной из этих форм не содержатся, суть $60n + (7, 13, 37, 43)$; $60n + (11, 29, 41, 59)$».

Эйлер вновь обращается к изучению различного вида делителей одной и той же квадратичной формы (см. № 132, л. 101 об., 148). Подробно рассмотрено несколько примеров — числа, представимые квадратичными формами, которые соответствуют одной и той же форме. Эйлер наблюдает, в каких случаях произведение чисел, представимых одной и той же квадратичной формой, дает, например, число того же вида. Эйлер отмечает, что рассматривает все линейные делители формы. В качестве одного из примеров он рассматривает делители формы $a^2 + 15b^2$, уже перечисленные им без объяснения в № 132, л. 101 об.

№ 134, л. 65

«$5aa + 7bb = 5, 7, 140n + (3, 13, 17, 27, 33, 47, 73, 83, 87, 97, 103, 117)$; $aa + 35bb = \ldots\ 140n + (1, 9, 81, 121, 29, 109, 39, 51, 71, 99, 11, 79)$, между тем как ra и rb будут целыми.

Исключаются: $140n + (19, 31, 139, 131, 59, 111, 69, 61, 129, 101, 89, 41)$, $140n + (23, 37, 43, 53, 57, 67, 93, 107, 113, 123, 137)$, $paa + qbb = p, q, 4pqn + (\alpha, \beta, \gamma, \delta$, число которых $= \frac{1}{2}(p-1)(q-1))$, $aa + pqbb = \ldots$ $4pqn + (1, \ldots$, число которых $= \frac{1}{2}(p-1)(q-1))^2$.

Числа, меньшие, чем 120, и взаимно простые с ним, будут:

1,	7,	11,	13,	17,	19,	23,	29,	31,	37,	41,	43,	47,	49,	53,	59,	61,
A		*D*	*C*			*B*	*D*	*A*	*C*		*C*	*B*	*A*		*D*	

67,	71,	73,	77,	79,	83,	89,	91,	97,	101,	103,	107,	109,	113,	119.
C				*A*					*D*				*B*	

$5bb + 19$ может быть приведено к квадрату, если $b = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, b = 9$.

60: $aa + 15bb = A,\ 3aa + 5bb = B.$

1	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	49	53	59
A				*B*		*B*						*B*	*A*	*B*	

8: $aa + 2bb = A.$

1	3	5	7
A	*A*		

4: $aa + bb = A.$

1	3
A	

12: $aa + 3bb = A,\ 2aa + 3bb = B.$

1	5	7	11
A	*B*	*A*	*B*

20: $aa + 5bb = A,\ aa - 5bb = B.$

B			*B*	*B*			*B*
1	3	7	9	11	13	17	19
A	~~*B*~~	~~*B*~~	*A*		~~*B*~~		

28: $aa + 7bb = A,\ \dfrac{7a + 5bb}{2} = 20n + (3, 7).$

1	3	5	9	11	13	15	17	19	23	25	27
A			*A*	*A*		*A*			*A*	*A*	

44: $aa + 11bb = A.$

1	3	5	7	9	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	35	37	39	41	43
A	*A*	*A*		*A*		*A*				*A*	*A*	*A*		*A*		*A*			

52: $aa + 13bb = A,\ \dfrac{aa + 13bb}{2} = B.$

1	3	5	7	9	11	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	41	43	45	47	49	51
A			*B*	*A*	*B*	*B*	*A*	*B*			*A*		*A*	*B*							*B*	*A*	

24: $aa + 6bb = A,\ 2aa + 3bb = B,\ B = \dfrac{aa + 6bb}{2}.$

1	5	7	11	13	17	19	23
A	*B*	*A*	*B*				

40: $aa + 10bb = A,\ 2aa + 5bb = B.$

1	3	7	9	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39
A		*B*	*A*	*A*	*B*		*B*							*B*	

68: $aa + 17bb = A,\ \dfrac{aa + 17bb}{2} = B.$

1	3	5	7	9	11	13	15	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49
A	*B*		*B*	*A*	*B*	*A*			*A*	*B*	*A*	*B*		*B*	*A*			*B*					

53	55	57	59	61	63	65	67
A	*A*			*A*	*A*		

56: $aa + 14bb = A$, $2aa + 7bb = B$, $\dfrac{aa + 14bb}{3} = C$, $\dfrac{aa + 14bb}{5} = D$.

1,	3,	5,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	23,	25,	27,	29,	31,	33,	37,	39,	41,	43,	45,	47,	49,	51,	53,	55.
A	*D*	*C*	*A*		*C*	*A*		*D*	*A*	*A*	*D*					*A*			*C*					

16: $aa + 4bb = A$.

1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15.
A		*A*		*A*		*A*	

60: $aa + 15bb = A$, $3aa + 5bb = B$.

1,	7,	11,	13,	17,	19,	23,	29,	31,	37,	41,	43,	47,	49,	53,	59.
A				*B*	*A*	*B*		*A*				*B*	*A*	*B*	

76: $aa + 19bb = A$.

1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	21,	23,	25,	27,	29,	31,	33,	35,	37,	39,	41,	43,	45,	47,	49,	51,
A		*A*	*A*	*A*	*A*			*A*		*A*	*A*					*A*		*A*		*A*	*A*	*A*	*A*	

53,	55,	59,	61,	63,	65,	67,	69,	71,	73,	75».
	A		*A*	*A*					*A*	

№ 134, л. 64 об.—65

Эйлер продолжает изучать вопрос о простых делителях квадратичных форм $\alpha a^2 + \beta b^2$. Он более подробно рассматривает примеры, желая установить общий вид простых делителей таких форм. Первый пример: отыскание простых делителей формы $5a^2 + 7b^2$. Это будут 4, 5, 7 (кроме простых чисел здесь учтено также число 4 — оно равно удвоенному простому) и числа $140n + (3, 13, 17, 27,...)$, представимые в форме $5p^2 + 7q^2$. Кроме них, существуют делители другого вида: $140n + (1, 9, 11, 29, 39, 51, 71,...)$.

Второй пример: рассмотрим разные виды квадратичных форм, которые представляют линейные простые делители квадратичной формы $a^2 + 30b^2$. Таких представлений будет четыре: 1) $a^2 + 30b^2 = A$; 2) $2a^2 + 15b^2 = B$; 3) $3a^2 + 10b^2 = C$; 4) $5a^2 + 6b^2 = D$.

Эйлер замечает, что произведение двух чисел вида A снова дает квадратичную форму того же вида: $AA = A$. Произведение двух чисел вида B тоже дает форму вида A. Произведение же двух форм третьего вида C или двух форм четвертого вида D дает форму первого вида A.

Затем Эйлер переходит к изучению произведений трех форм во всевозможных комбинациях. Но он не забывает своей основной задачи — изучения всех делителей квадратичной формы $\alpha a^2 + \beta b^2$.

На л. 65 Эйлер снова обращается к форме $5a^2 + 7b^2$. Он замечает, что из всех чисел вида $140n + \alpha$ исключаются некоторые числа, которые не являются делителями квадратичной формы данного вида. Затем он пишет общую формулу для предполагаемого вида простых делителей квадратичных форм $pa^2 + qb^2$ и $a^2 + pqb^2$ и подсчитывает количество делителей обеих форм.

Чтобы проверить свои предположения, Эйлер подробно изучает числа, меньшие N и взаимно простые с ним, в ряде конкретных случаев: $N = 60$, 8, 12, 28, 24, 20, 44, ... , 76. Видимо, он начинает со случая $N = 60$, ибо этот случай им уже неоднократно изучался. Когда имеются различные квадратичные представления чисел, Эйлер выясняет, какого рода будут все рассматриваемые числа, меньшие и взаимно простые с ним. Помимо чисел видов A, B, C остаются числа, не принадлежащие к этим видам.

Специально изучением чисел, взаимно простых с данным числом N и меньших этого N, занимались после Эйлера и другие ученые. Обзор результатов имеется у Диксона [88, т. 1, с. 415, 437], а более подробный — в работе П. С. Порецкого «К учению о простых числах» [68, с. 52—140, 140—142]. Порецкий излагает результаты А. Дюпре, Э. Дормуа, предлагавших специальные функции, значениями которых были бы числа, меньшие N и взаимно простые с ним. Затем он предложил свою форму для той же цели. Эйлер возвратился к этому вопросу в записной книжке № 136, л. 83 об.

№ 136, л. 83 об.

«Все числа $maa + nbb$ содержатся в некоторых формах $4mnN +$ $+ (\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и т. д.). Пусть $a = 2np + f$, $b = 2mq + g$. Тогда будет $maa +$ $+ nbb = 4mnnpp + 4mnfp + mff + 4mmnqq + 4mngq + ngg$. Если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ суть числа $mff + ngg$, и $N = npp + mqq + fp + gq$ — простое число, и $4mnN + \alpha$ — тоже».

Эйлер полагает $a = 2np + f$, $b = 2mq + g$, подставляет эти значения a и b в форму $ma^2 + nb^2$: $ma^2 + nb^2 = 4mnp^2 + 4mnfp + mf^2 + 4m^2nq^2 +$ $+ 4mngq + hg^2$. Полагая $\alpha = mf^2 + ng^2$, он находит, что числа $N =$ $= np^2 + mq^2 + fp + gq$ и $4mN + \alpha$ — простые. Если имеются числа N, α, m, n, f, g и $\alpha = mf^2 + ng^2$, то можно определить p и q. Эйлер приводит пример такого определения p и q.

В печатных работах Эйлера такой формулировки теоремы нет. Он изучает простые делители форм $ma^2 + nb^2$ в E164 и E241. В E241 он находит значения s, удовлетворяющие уравнению $px^2 + qy^2 = sz^2$. Они имеют вид: $s = 4ng + ah$. Там же (в E241) он решает задачу определения всех простых чисел, которые дают подходящие значения для s: $s =$ $4nfg + (h, ah, bh,...)$.

Эйлер ищет простые делители квадртичных форм в E598, уже используя и результаты Лагранжа по теории квадратичных форм (E598). Линейные делители квадратичных форм Эйлер ищет в E610, E708, E744, E792. См. № 132, л. 101 об., 148 об.; № 134, л. 64 об., 65.

№ 136, л. 86

«Т[еорема]. Если [форма] $\alpha aa + \beta bb$ — квадрат, то ее корень не будет формой ни такого вида: $\alpha pp + \beta qq$, ни такого: $pp + \alpha\beta qq$, а именно, если ни α, ни β не равны квадратам, то форма $13aa + 17bb$ может быть квадратом. Положим, мы имеем ряд чисел: 81, 225, 361, 625, 729, корни которых 9, 15, 19, 25, 27, 47, 59 не содержатся в форме $13aa + 17bb$ ни в коем случае.

Пусть, например, $225 = pp + 221qq$. Простые делители формы $13aa +$ $+ 17bb$ [записаны в таблице]:*

3 5 19	2 3 5	3 23	2 67	3 3 5 5	2 3 3 19	5 97	2 3 109	3 283	2 5 107	3 439	3 3 3 3	5 37
3 131	3 5 47	19 59	2 83	5 41	19 19	2 239	2 5 79	5 $\underline{197}$ 47 47		1453	5 37	389
3 199	3 3 101	5 5 53		2 3 73	3 3 53»							

№ 136, л. 87 об.

«Однако форма $52N + 1$ дает простое число 4993, не содержащееся в форме $aa + 13bb$. На самом деле — содержащееся, а именно: $66^2 + 13.7^2$».

Эйлер записал утверждение, что форма $52N + 1$ дает простое число 4993, не содержащееся в форме $a^2 + 13b^2$, но затем обнаружил, что и это число можно представить в указанном виде, а именно: $4993 = 66^2 + 13.7^2$.

№ 136, л. 88

«Чтобы было $aa + bb = 49N$, берутся $a = 3f + 20g$ и $b = 2f - 3g$, тогда будет $N = ff + 10gg$».

Дальше идут фрагменты, уже напечатанные по большей части в посмертных трудах Эйлера [109].

№ 138, л. 57 об.

«Теорема. Если будет простое число вида $p = 8n + 5$, то всегда существует форма $aa + 1$, которая делится на это простое число, тогда

---

* Указаны значения a и b, при которых получаются соответствующие делители. Значения a и b нами указаны такие, при которых форма $13a^2 + 17b^2$ имеет простые делители (*Сост.*).

никакая форма вида $xx \pm ayy$ не будет делиться на p; напротив, для простых чисел вида $p = 8n + 1$ имеется форма $aa + 1$, которая делится на p, тогда будет существовать формула $xx \pm ayy$, которая делится на p.

Доказательство теоремы основывается на том, что в первом случае число a всегда будет невычетом, во втором — вычетом. Отсюда становится очевидно, что число вычетов будет $4n + 2$; среди них любое число встретится как со знаком „+", так и со знаком „–", откуда различное количество вычетов, а именно нечетных $2n + 1$; если число a находится среди вычетов, это количество должно будет быть четным, что является абсурдом».

Опубликовано в [109, т. 1, с. 158, фрагмент № 3].

№ 138, л. 111 об.

«Теорема. Если простое число вида $4n + 3$ делит формулу $faa + gbb$ или $aa + fgbb$, то никакая формула $faa - gbb$ или $aa - fgbb$ не делится на d.

Доказательство. Если формула $aa + fgbb$ делится на d, то среди квадратичных вычетов встретится $-fg$ и fg будет невычетом, откуда никакая формула $aa - fgbb$ не будет делиться на d».

№ 138, л. 111 об.—112

«Теорема. Если простое число $4n + 1$ делит формулу $faa + gbb$ или $aa + fgbb$, то всегда найдется формула $faa - gbb$ или $aa - fgbb$, делящаяся на d.

Так как d делит формулу $aa + fgbb$, то среди квадратичных вычетов встретится $-fg$, следовательно, для формы $4n + 1$ встретится и $+fg$; следовательно, найдется формула $faa - gbb$ или $aa - fgbb$, которая также делится на d».

№ 138, л. 111 об.

«Следствие. Если имеется формула $bxx \pm ayy$, которая делится на d, то будет делиться и формула $zz \pm abyy$, если взять $z = bx$; это же произойдет, если среди квадратичных вычетов при делении на d встретится число $\pm ab$.

Теорема. Поскольку простой делитель d будет [делить] форму $4n - 1$ и потому делит форму $faa + gbb$, то всегда найдется формула $fx^4 + gy^4$, которая делится на d.

Доказательство. В то время как делитель d будет вида $4n - 1$ или $4n + 3$, если отдельные квадраты на него делятся, среди вычетов встретятся все [простые] числа, или со знаком плюс, или со знаком минус, следовательно, встретится число или $+ab$, или $-ab$ и, следовательно, имеется формула $zz \pm abyy$ и, следовательно, $bxx \pm ayy$ делится на d.

Следствие. И если d будет вида $4n + 1$, так как среди квадратичных вычетов встретятся не все числа, но половина точно исключается, или положительные, или отрицательные берутся, и по крайней мере может быть, что $\pm ab$ среди них не встретятся, и потому не найдется никакой формулы $fx^4 + gy^4$, которая делится на d. Следует заметить (никогда не доказано), что все делители формулы $axx \pm byy$ заключаются в форме $4abn + kk$.

Здесь следует рассмотреть два случая, в зависимости от того, будут ли оба числа a и b нечетные или одно четное, другое нечетное. В первом случае всегда окажется возможным, что делитель d будет содержаться в этой форме, однако если a будет числом четным, положим $2c$, форма делителей будет $8bcn + kk$, и она приводится к форме $8k + 1$; поскольку в этом случае делитель d имеет форму $8n + 5$, то случай невозможен, откуда следует [сформулированное вначале] заключение».

№ 138, л. 112

«Поскольку $d = 8n + 5$ будет делителем формулы $faa + gbb$, сверх того одно из двух чисел a и b четное, тогда не существует формулы $fx^4 + gy^4$, делящейся на d.

Теорема. Если простое число вида $4n + 3$ делит формулу $faa + gbb$ или $aa + fgbb$, то не существует никакой формулы $faa - gbb$ или $aa - fgbb$, делящейся на d.

Доказательство. Если формула $aa + fgbb$ делится на d, то среди квадратичных вычетов встретится $-fg$, а fg будет невычетом, откуда никакая формула $aa - fgbb$ не будет делиться на d.

Теорема. Если простое число вида $4n + 1$ делит формулу $faa + gbb$ или $aa + fgbb$, то всегда найдется формула $faa - gbb$ или $aa - fgbb$, которая делится на d. Так как d делит формулу $aa + fgbb$, то среди квадратичных вычетов встретится $-fg$, следовательно, для формы $4n + 1$ там же встретится $+fg$, следовательно, найдется формула $faa - gbb$ или $aa - fgbb$ там же, которая делится на d.

Следствие. Поскольку случится, что делитель формулы $faa + gbb$ $d = 4n + 1$ не всегда делит формулу $fx^4 + gy^4$, то, так как делитель этот будет также и делителем формулы $faa - gbb$, наверное он будет и делителем формулы $fx^4 - gy^4$.

Это произойдет иначе в случае $f = 1$, $g = 2$ и $d = 17$. Хотя $17 = 3^2 + 2 \cdot 2^2$ и одновременно $17 = 2 \cdot 3^2 - 1$, однако никакая из формул $x^4 + 2y^4$ и $x^4 - 2y^4$ не делится на 17. Чтобы это аккуратно исследовать,

Делитель	Вычеты	
5	1	1
13	1, 3, 9	1, 3, 9
17	1, 4	1, 4
	−1, −4	−1, −4
29	1, −13, −6	1, 7, 20
	−5, −4	−4, −5, −6, −13
	20, 7	
37		1, −3, 9, 10
		7, 16, −11, −4, 12
41		1, −1, 10, 18, 16, 4
		−10, −18, −16, −4

рассмотрим вычеты от деления биквадратов, порожденных делителями $4n + 1$, которых всегда только n.

Отсюда узнаем, что если делитель будет вида $8n + 5$, то чисел вычетов будет $2n + 1$, следовательно, нечетное [число], откуда не встретится никакой из двух знаков, если формула $fx^4 + gy^4$ будет делиться. Иначе: $fx^4 - gy^4$ наверное не будет делиться, что в свою очередь не имеет места, так как число невычетов втрое больше, чем вычетов. Для таких делителей или ни одна из форм $fx^4 \pm gy^4$ не делится, или единственная делится.

Если делитель будет вида $8n + 1$, какой угодно вычет с обоими знаками встретится, откуда если одна из формул будет делиться, то и другая будет делиться, или обе, или ни одна.

Отсюда следует в первом случае, что если делитель простой [вида] $8n + 5$ делит формулу $faa + gbb$, в каковом случае делит формулу $fa'a' - gb'b'$, откуда для биквадратов формула $axx \pm byy$ будет делиться на d, тогда наверное формула $a'xx \pm b'yy$ не будет делиться. Отсюда если будет $d = 8n + 1$ и d делит как формулу $faa + gbb$, так и $fa'a' - gb'b'$, то если формула $axx \pm byy$ будет делиться на d, то и другая $a'xx \pm b'yy$ будет делиться, а если не будет, то не имеет места и сказанное выше».

Опубликовано в посмертных трудах Эйлера [109, т. 1, с. 163—164, фрагмент № 10; писал Лексель].

№ 138, л. 169

«Теорема. Формула $a^n - b^n$, кроме естественных делителей $a - b$ и $a^m - b^m$, если m будет делителем числа n ($a + b$ в случае, когда n четное число), не имеет других простых делителей, [кроме тех], которые имеют вид $\alpha n + 1$.

Доказательство. Пусть [она] делится на простое число $\alpha n + 1$, так как на это число делится форма $a^{\alpha n + p - 1} - b^{\alpha n + p - 1}$, а также $a^{\alpha n} - b^{\alpha n}$, следовательно, $a^{\alpha n+p-1}-a^{p-1}b^{\alpha n}$ будет также делиться [и на] $a^{p-1}-b^{p-1}$, и если m будет общим наибольшим делителем чисел n и $p-1$, то форма a^m-b^m будет также делиться на $\alpha n+p$. Но a^m-b^m есть делитель формы a^n-b^n. Следовательно, кроме естественных делителей, формула a^n-b^n не допускает других делителей, помимо тех, которые имеют вид $\alpha n+1$».

См. E134: «Если m — простое, то a^m-b^m не имеет других делителей, кроме $a-b$ и $mn+1$». В E262 — аналогичные утверждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атлас Российской, состоящий из 19 специальных карт, представляющих Всероссийскую империю с пограничными землями... СПб., 1745.

2. *Баскин Ю. Я.* Кант. М.: Юридическая литература, 1984. 88 с.

3. *Бернулли Д.* Гидродинамика или записки о силах и движениях жидкостей. Л.: Изд-во АН СССР, 1959. 551 с.

4. *Бугаев Н. В.* Один общий закон теории разбиения чисел // Матем. сб. 1885. Т. 12.

5. *Гаусс К. Ф.* Труды по теории чисел / Пер. В. Б. Демьянова; Под ред. И. М. Виноградова; Комментарии Б. Н. Делоне. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

6. *Герцман Е. В.* Леонард Эйлер и история одной музыкально-математической идеи // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 321—332.

7. *Гнучева В. Ф.* Географический департамент Академии наук XVIII века. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1946. 446 с.

8. *Дорофеева А. В.* Метод Эйлера для пересчета рациональных чисел в интервале (0, 1) // Матер. годичн. конф. Лен. отд. Сов. нац. объед. истории и философии естествозн. и техн. Л., 1970. С. 78—79.

9. Изв. Акад. наук. Сер. 7. 1909. Т. 3, № 14. С. 929—930.

10. *Кант И.* Вопрос о том, стареет ли Земля с физической точки зрения (1754 г.) // Соч.: В 6 томах. М.: Мысль, 1963. Т. 1. С. 93—114.

11. *Кант И.* Всеобщая естественная история и теория неба (1755 г.) // Там же. С. 115—262.

12. *Кант И.* Исследование вопроса, претерпела ли Земля в своем вращении вокруг оси, благодаря которому происходит смена дня и ночи, некоторые изменения со времени своего возникновения (1754 г.) // Там же. С. 83—91.

13. *Кант И.* Мысли об истинной оценке живых сил (1746 г.) // Там же. С. 51—82.

14. *Кант И.* Новая теория движения и покоя (1758 г.) // Там же. С. 375—389.

15. *Кант И.* Новое освещение принципов метафизического познания (1755 г.) // Там же. С. 263—314.

16. *Кант И.* Новые замечания для пояснения теории ветров (1756 г.) // Там же. С. 349—364.

17. *Кант И.* О причине землетрясений (1756 г.) // Там же. С. 337—348.

18. *Кант И.* План лекций по физической географии и уведомление о них (1757 г.) // Там же. С. 365—374.

19. *Кант И.* Применение связанной с геометрией метафизики в философии природы (1756 г.) // Там же. С. 315—336.

20. *Киселев А. А.* Некоторые вопросы теории чисел из переписки Эйлера с Гольдбахом // История и методология естественных наук. 1966. Вып. 5. С. 31—34.

21. *Киселев А. А., Матвиевская Г. П.* Неопубликованные записи Эйлера по partitio numerorum // ИМИ. 1965. Вып. 16. С. 145—180.

22. *Кладо Т. Н., Копелевич Ю. Х., Лукина Т. А.* Леонард Эйлер. Письма к ученым. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 337 с.

23. *Кладо Т. Н., Копелевич Ю. Х., Лукина Т. А., Мельников И. Г., Смирнов В. И., Юшкевич А. П.* (при участии Бирмана К. Р. и Ланге Ф. Г.). Леонард Эйлер. Переписка. Аннотированный указатель. Л.: Наука, 1967. 391 с.

24. *Кладо Т. Н., Копелевич Ю. Х., Юшкевич А. П.* Л. Эйлер и Ж. Н. Делиль в их переписке. 1735—1765 гг. // Русско-французские научные связи. Л.: Наука, 1968. С. 119—279.

25. *Кладо Т. Н., Раскин Н. М.* И. Кант и Петербургская академия наук (по материалам Архива Академии наук СССР) // ИАИ. 1956. Вып. 2. С. 369—373.

26. *Копелевич Ю. Х.* Возникновение научных академий: середина XVII—середина XVIII в. Л.: Наука, 1974. 267 с.

27. *Копелевич Ю. Х.* Забытые страницы «Примечаний на Ведомости» // Наука и культура России XVIII века. Л., 1984. С. 38—71.

28. *Копелевич Ю. Х.* Материалы к биографии Эйлера // ИМИ. 1957. Вып. 10. С. 9—55.

29. *Копелевич Ю. Х.* Основание Петербургской академии наук. Л.: Наука, 1977. 211 с.

30. *Копелевич Ю. Х.* Переписка Леонарда Эйлера и Тобиаса Майера // ИАИ. 1959. Вып. 5. С. 271—444.

31. *Копелевич Ю. Х.* Эйлер — член Петербургской академии наук, действительный и почетный // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 47—59.

32. *Копелевич Ю. Х., Крутикова М. В., Михайлов Г. К., Раскин Н. М.* Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1962. Т. 1 (Научное описание). 427 с.

33. *Копелевич Ю. Х., Раскин Н. М.* Речь Л. Эйлера о строении материи // ВИЕТ. 1968. Вып. 24. С. 41—44.

34. *Кострюков К. И.* Об одной попытке издать труды Л. Эйлера // ИМИ. 1954. Вып. 7. С. 630—640.

35. Леонард Эйлер: Сб. статей и материалов к 150-летию со дня смерти. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1935.

36. *Ломоносов М. В.* Опыт теории упругости воздуха // Полн. собр. соч.: В 10 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1951. Т. 2.

37. *Матвиевская Г. П.* Заметки о многоугольных числах в записных книжках Эйлера // ИМИ. 1983. Вып. 27. С. 27—50.

38. *Матвиевская Г. П.* Заметки о совершенных числах в записных книжках Эйлера // Тр. ИИЕиТ АН СССР. 1960. Т. 34. С. 415—427.

39. *Матвиевская Г. П.* История публикаций Л. Эйлера по теории чисел // Докл. на III науч. конф. аспирантов и младших научных сотрудников ИИЕиТ АН СССР. М., 1957.

40. *Матвиевская Г. П.* Неопубликованные рукописи Л. Эйлера по диофантову анализу // Тр. ИИЕиТ АН СССР. 1959. Т. 22. С. 240—250.

41. *Матвиевская Г. П.* Неопубликованные рукописи Леонарда Эйлера по теории чисел // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1958.

42. *Матвиевская Г. П.* О неопубликованных рукописях Леонарда Эйлера по диофантову анализу // ИМИ. 1960. Вып. 13. С. 107—108.

43. *Матвиевская Г. П.* Постулат Бертрана в записях Эйлера // ИМИ. 1961. Вып. 14. С. 285—288.

44. *Мельников И. Г.* О некоторых вопросах теории чисел в переписке Эйлера с Гольдбахом // История и методология естественных наук. 1966. Вып. 5. С. 15—30.

45. *Мельников И. Г.* О некоторых гипотезах Эйлера и Гольдбаха // Матер. VI конф. по истории науки в Прибалтике. Вильнюс, 1965. С. 34—39.

46. *Мельников И. Г.* Открытие Эйлером удобных чисел // ИМИ. 1960. Вып. 13. С. 187—216.

47. *Мельников И. Г.* Удобные числа в рукописном наследии Эйлера // ИМИ. 1983. Вып. 27. С. 10—24.

48. Месячные исторические, генеалогические и географические примечания на Санкт-Петербургские ведомости. СПб., 1727—1742.

49. *Михайлов Г. К.* Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР // ИМИ. 1957. Вып. 10. С. 67—94.

50. *Михайлов Г. К.* К переезду Леонарда Эйлера в Петербург // Изв. АН СССР. 1957. № 3. С. 10—37.

51. *Михайлов Г. К., Смирнов В. И.* Неопубликованные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 47—79.

52. *Модзалевский Л. Б.* От составителя // Рукописи М. В. Ломоносова в Архиве Академии наук СССР: Научное описание. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1937.

53. *Модзалевский Б. Л.* Перечень рукописей Эйлера, хранящихся в Архиве Конференции имп. Академии наук 1910 г. (на правах рукописи).

54. *Невская Н. И.* Дифракция света в работах астрофизиков XVIII века // ИАИ. 1977. Вып. 13. С. 339—375.

55. *Невская Н. И.* Неизвестные работы Эйлера по астрономии // ИМИ. 1983. Вып. 27. С. 123—137.

56. *Невская Н. И.* Новые данные о становлении Л. Эйлера как астронома и историка науки // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 259—275.
57. *Невская Н. И.* Первые работы по астрофизике в Петербургской академии наук (XVIII в.) // ИАИ. 1969. Вып. 10. С. 121—157.
58. *Невская Н. И.* Петербургская астрономическая школа XVIII в. Л.: Наука, 1984. 238 с.
59. *Невская Н. И.* «Примечания на Ведомости» как научный журнал // Наука и культура России XVIII века. Л.: Наука, 1984. С. 5—37.
60. *Невская Н. И., Холшевников К. В.* Эйлер и развитие небесной механики // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 254—258.
61. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / Пер. с латинск. и комментарии А. Н. Крылова; Предисловие Л. С. Полака. М.: Наука, 1989. 686 с.
62. *Ньютон И.* Оптика, или Трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света / Пер. и примеч. С. И. Вавилова. Изд. 2-е, пересмотр. Г. С. Ландсбергом. М.: Гостехиздат, 1954.
63. Обозрение архивных материалов (Архив АН СССР). Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Вып. 1. С. 73—74.
64. *Ожигова Е. П.* Дополнение к статье И. Г. Мельникова «Удобные числа в рукописном наследии Эйлера» // ИМИ. 1938. Вып. 27. С. 24—26.
65. *Ожигова Е. П.* Развитие теории чисел в России. Л.: Наука, 1972. 360 с.
66. *Ожигова Е. П.* Функция Эйлера в его записных книжках // ИМИ. 1983. Вып. 27. С. 50—63.
67. *Пекарский П. П.* История Императорской Академии наук в Петербурге. СПб., 1870. Т. 1.
68. *Порецкий П. С.* К учению о простых числах // Сообщ. и протоколы секции физ.-мат. наук. Казань, 1888. Т. 6, вып. 1—2. С. 52—142.
69. Протоколы заседаний Конференции Имп. Академии наук с 1725 по 1803 г. СПб., 1897. Т. 1.
70. Санкт-Петербургские ведомости. СПб., 1727—1742.
71. *Субботин М. Ф.* Астрономические работы Леонарда Эйлера // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 368—375.
72. *Успенский Я. В.* О представлении чисел суммами квадратов // Сообщ. Харьковск. матем. общ. Сер. II. 1913. Т. 14.
73. *Фус Н. И.* Начальные основания чистой математики. СПб., 1810—1812. Ч. 1, 2.
74. *Церлюк-Аскадская С. С.* Музыкально-теоретические рукописи Леонарда Эйлера и становление его концепции теории музыки // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 333—344.
75. *Эйлер Л.* Избранные картографические статьи: Три статьи по математической картографии / Пер. Н. Ф. Бугаевского; Под ред. Г. В. Багратиони. М.: Изд-во геодез. лит., 1959. 80 с.
76. *Эйлер Л.* Размышления по поводу недавно предпринятых опытов стрельбы из орудий // Исследования по баллистике / Пер. П. Д. Львовского и Л. С. Полака; Под ред. Б. Н. Окунева. М.: ГИФМЛ, 1961. С. 497—504.
77. *Юшкевич А. П.* Леонард Эйлер. Жизнь и творчество // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 15—46.
78. *Юшкевич А. П.* Об архивном наследии Леонарда Эйлера // ВИЕТ. 1982. Вып. 3. С. 137—139.
79. Alhazeni arabis... Opticae Thesaurus..., nunc primum editi. Basileae, 1572. 474 p.
80. *Bernoulli D.* De actione fluidorum // CASIP. 1729. T. 2. P. 304—346.
81. *Bernoulli D.* Dissertationes de actione fluidorum in corpora solida, et motu solidorum in fluidis continuatio // CASIP. 1732. T. 3. P. 214—229.
82. Cambr. Mathem. Journ. 1843. N 4. P. 87—90.
83. *Chowla S.* An extension of Heilbronn's class-number theorem // Quart. J. Mathem. 1934. Vol. 5. P. 304—307.
84. *Chowla S.* Heilbronn's class-number theorem // Proc. Ind. Acad. Sci. 1934. Vol. 1, N 2. P. 74—76.
85. *Chowla S., Briggs W. E.* On discriminants of binary quadratic forms with a single class in each genus // Math. J. 1954. Vol. 6, N 4. P. 463—470.
86. Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle / Publiée par P. N. Fuss. SPb., 1843. Vol. 1, 2.

87. *De L'Isle J. N.* Expériences sur la lumière et les couleurs // Mémoires pour servir à l'Histoire et au progrès de l'Astronomie, de la Géographie, et de la Physique. SPb., 1738. P. 205—266.

88. *Dickson L. E.* History of the theory of numbers: In 3 vol. Washington, 1919—1923; 2 ed. New York, 1934.

89. Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers / Herausgeg. von A. P. Juškevič und E. Winter. Zum Druck vorbereitet von P. Hoffmann, T. N. Klado, Ju. Ch. Kopelevič. Berlin: Akademie-Verlag, 1959—1976. Bd 1—3.

90. *Diophantus Alexandrinus.* Opera omnia. Cum grecis commentaris. 2 ed. Lipsiae, 1890, 1893, 1895. T. 1—3.

91. *Dormoy E.* Formule générale des nombres premiers // Comptes rendus. 1886. T. 63. P. 178—181.

92. *Dupré A.* Examen d'une proposition de Legendre relative à la théorie des nombres. Paris, 1859.

93. *Eneström G.* Bericht an die Eulerkommission der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft über die Eulerischen Manuscripte der Petersburger Akademie // Jahresber. Deutsch. Mathem. Ver. 1913. Bd 22, H. 1—2, Abt. 2. S. 191—205.

94. *Eneström G.* Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers // Jahresber. Deutsch. Mathem. Ver. 1910—1913. Ergänzungsb. IV, Lief. 1—2. S. 1—388.

95. *Euler J. A.* Disquisitio de causa physica electricitatis. Petropoli, 1755.

96. *Euler L.* De motu planetarum et orbitarum determinatione // CASIP. 1740. T. 7. P. 67—85.

97. *Euler L.* De relaxatione motus planetarum // OVA, 1746. T. 1. P. 245—276.

98. *Euler L.* Enodatio quaestiones: Utrum materiae facultas cogitandi tribui possit nec ne? Ex principiis mechanicis petita // OVA. 1746. T. 1. P. 277—286.

99. *Euler L.* Gedanken von den Elementen der Cörper, in welchen das Lehr-Gebäude von den einfachen Dingen und Monaden geprüfet, und das wahre Wesen der Cörper entdecket wird. Berlin, 1746.

100. *Euler L.* Institutionum calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum. Berolini, 1755.

101. *Euler L.* Institutionum calculi integralis... Petropoli, 1768, 1769, 1770. T. 1—3.

102. *Euler L.* Introductio in analysin infinitorum. Lausannae, 1748.

103. *Euler L.* Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de Physique et de Philosophie. SPb., 1768—1772. T. 1—3.

104. *Euler L.* Mechanica, sive motus scientia, analytice exposita. Petropoli, 1736. T. 1, 2.

105. *Euler L.* [7 статей] // MAP, 1830. T. 11. P. 1—94.

106. *Euler L.* Methodus computandi aequationem meridiei // CASIP. 1741. T. 8.

107. *Euler L.* Nova theoria lucis et colorum // OVA. 1746. T. 1. P. 137—168.

108. *Euler L.* Opera omnia. Ser. I (Mathematica), 29 t.; Ser. II (Mechanica, Astronomia), 31 t.; Ser. III (Physica, Miscellanea), 12 t.; Ser. IV (Adversaria Mathematica. Epistolae), 6 t.; Basel; Leipzig; Berlin, 1911—1986.

109. *Euler L.* Opera postuma mathematica et physica. Petropoli, 1862. T. 1, 2.

110. *Euler L.* Opuscula varii argumenti. Berolini, 1746.

111. *Euler L.* Orbitae solaris determinatio // CASIP.1740. T. 7. P. 86—96.

112. *Euler L.* Recherches physiques sur la cause de la queüe des comètes, de la lumière Boréale, et de la lumière Zodiacale // MAB. 1748. T. 2. P. 117—140.

113. *Euler L.* Recherches physiques sur la nature des moindres parties de la matière // OVA. 1746. T. 1. P. 287—300.

114. *Euler L.* Solutio problematum quorundam astronomicorum // CASIP. 1740. T. 7. P. 97—98.

115. *Euler L.* Sur l'atmosphère de la Lune prouvée par la dernière éclipse annulaire du Soleil // MAB. 1750. T. 4. P. 103—121.

116. *Euler L.* Sur la perfection des verres objectifs des lunettes // MAB. 1749. T. 3. P. 347—368.

117. *Euler L.* Tabulae astronomicae Solis et Lunae // OVA. 1746. T. 1. P. 137—168.

118. *Euler L.* Tentamen explicationis phaenomenorum aëris // CASIP. 1729. T. 2. P. 347—368.

119. *Euler L.* Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae. Petropoli, 1739.

120. *Fellmann E. A.* Leonhard Euler. Reinbek bei Hamburg, 1955. 157 S.

121. *Fermat P.* Oeuvres de Fermat. Paris, 1891, 1894. T. 1, 2.
122. *Ferrier A.* Nombres idoneis // Mathesis. 1960. T. 69. P. 34—36.
123. Francisci à Schooten. Exercitationum mathematicarum libri quinqui. Lugdini Batavorum, 1657.
124. *Fuss N.* Éloge de Monsieur Léonhard Euler, lû à l'Académie Imp. des sciences, dans son assemblée du 23 Octobre 1783. Avec une liste complette des ouvrages de M. Euler. SPb., 1783.
125. *Grube F.* Über einige Euler'sche Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen // Zeitschr. Mathem. 1874. Bd 19.
126 *Hasse H.* Vorlesungen über Zahlentheorie. Berlin, 1964. Bd 1, 2.
127. *Hermann J.* Phoronomia sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum. Liber duo. Amstelodami, 1716.
128. *Juškevič A. P.* L. Euler's unpublished manuscript «Calculus differentialis» // Leonhard Euler. 1707—1783. Beiträge zu Leben und Werk... Basel, 1983. S. 161—169.
129. *Juškevič A. P., Kopelevič J. Kh.* Christian Goldbach. 1690—1764. Basel; Boston; Berlin, 1994. 248 S.
130. *Justi J. H. G.* Nichtigkeit und Ungrund der Monaden. Halle, 1748.
131. *Kopelevič J. Kh.* Leonhard Euler und die Petersburger Akademie // Leonhard Euler. 1707—1783. Beiträge zu Leben und Werk... Basel, 1983. S. 373—383.
132. *Lagrange J. L.* Démonstration d'un théorème d'arithmétique // NMAB. 1772. P. 123—133.
133. Oeuvres de Lagrange. Paris, 1866. T. III.
134. *Lagrange J. L.* Recherches d'arithmétiques // NMAB. 1775. P. 349, 351.
135. *Leibnitz G. W.* Dissertatio de arte combinatoria. Lipsiae, 1665.
136. Leibnitzens gesammelte Werke aus den Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover. Dritte Folge. Mathematik. Halle, 1855. Bd 3.
137. Leonhard Euler. 1707—1783. Beiträge zu Leben und Werk... Basel, 1983. 555 S.
138. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729—1764 / Herausgeg. von A. P. Juškevič und E. Winter. Berlin, 1965.
139. Liber abaci / Ed. B. Boncompagni. Roma, 1857.
140. *Mahnke D.* Leibnitz auf der Suche nach einer allgemeinen Primzahlgleichung // Bibliotheca mathem. 1913. Bd 13, Folg. 3.
141. *Maier F. Ch.* De planetarum stationibus // CASIP. 1729. T. 2. P. 82—90.
142. *Marini Mersenni F.* Novarum observationum physico-mathematicarum. Paris, 1647.
143. *Matvievskaja G. P., Ožigova E. P.* Leonhard Eulers handschriftlicher Nachlass zur Zahlentheorie // Leonhard Euler. 1707—1783. Beiträge zu Leben und Werk... Basel, 1983. S. 151—160.
144. *Mayer F. Ch.* De luce Boreali // CASIP. 1729. T. 2. P. 351—367.
145. *Michailov G. K.* Leonhard Euler und die Entwicklung der theoretischen Hydraulik in zweiten Viertel des 18. Jahrhunderts // Leonhard Euler. 1707—1783. Beiträge zu Leben und Werk... Basel, 1983. S. 229—241.
146. *Michailov G. K.* Notizen über die unveröffentlichten Manuskripte von Leonhard Euler // Leonhard Euler. Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen. Berlin, 1959. S. 256—280.
147. *Nevskaja N. I.* Euler als Astronom // Leonhard Euler. 1707—1783. Beiträge zu Leben und Werk... Basel, 1983. S. 363—371.
148. *Ozanam J.* Nouveaux éléments d'Algèbre. Amsterdam, 1702.
149. *Rameau J. Ph.* Génération harmonique ou Traité de musique théorique et pratique. Paris, 1737.
150. *Rudio F.* Herausgabe der Werke von L. Euler, Bericht der Eulerkommission // Verhandl. Schweizerisch. Naturforsch. Ges. 1909. Bd 2. S. 5—6, 10—12, 48—60.
151. *Rudio F., Schröter C.* Die Eulerausgabe // Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges., Zürich. 1908. Bd 53, N 24.
152. *Spiess O.* Die Summen der reziproken Quadraten // Festschrift zum 60 Geburtstag von A. Speiser. Zürich, 1945.
153. *Stächel P., Ahrens W.* Briefwechsel zwischen C. G. Jacobi und P. H. v. Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Euler // Bibl. Mathem. 1907. Bd 8. S. 233—306.
154. *Wallis J.* Treatise of Algebra. London, 1685.
155. *Waring E.* Meditationes algebraicae. Cambridge, 1770.

156. *Weidler J. F.* Historia Astronomiae sive de ortu et progressu Astronomiae. Wittenbergae, 1741. 664 p.

157. *Wolff Ch.* Cosmologia generalis methodo scientifica pertractata... Francofurto et Lipsiae, 1731.

158. *Wolff Ch.* Philosophia primi sive Onthologia, methodo scientifica pertractata... Francofurto et Lipsiae, 1730.

СПИСОК РАБОТ Л. ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ С УКАЗАНИЕМ ПОРЯДКОВОГО НОМЕРА ПО СПИСКУ Г. ЭНЕСТРЁМА

E26 Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus // CASIP. **6**. 1738. 103—107.

E29 De solutione problematum Diophantaeorum per numeros integros // CASIP. **6**. 1738. 175—188.

E36 Solutio problematis arithmetici de inveniendo numero, qui per dates numeros divisus relinquat data residua // CASIP. **7**. 1740. 46—66.

E41 De summis serierum reciprocarum // CASIP. **7**. 1740. 123—134.

E47 Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali // CASIP. **8**. 1741. 9—22.

E54 Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio // CASIP. **8**. 1741. 141—146.

E61 De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera, in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantur // MAB. **7**. 1743. 172—192.

E63 Démonstration de la somme de cette suite: 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + etc. // JLA. **2**. N 1. 1743. 115—127.

E71 De fractionibus contuis dissertatio // CASIP. **9**. 1744. 98—137.

E72 Variae observationes circa series infinitas // CASIP. **9**. 1744. 160—188.

E98 Theorematum quorundam arithmeticorum demonstrationes // CASIP. **10**. 1747. 125—146.

E100 De numeris amicabilibus // NAE. 1747. 267—269.

E101 Introductio in analysin infinitorum, t. 1. Lausannae. 1748.

E123 De fractionibus continuis observationes // CASIP. **11**. 1750. 32—81.

E130 De seriebus quibusdam considerationes // CASIP. **12**. 1750. 53—96.

E134 Theoremata circa divisores numerorum // NC. **1**. 1750. 20—48.

E152 De numeris amicabilibus // OVA. **2**. 1750. 23—107.

E153 Demonstratio gemina theorematis Newtoniani // OVA. **2**. 1750. 108—120.

E158 Observationes analyticae variae de combinationibus // CASIP. **13**. 1751. 64—93.

E164 Theoremata circa divisores numerorum in hac forma $paa \pm qbb$ contentorum // CASIP. **14**. 1751. 151—181.

E167 Solutio problematis dificillimi a Fermatio propositi // NC. **2**. 1751. 40—67.

E175 Découverte d'une loi extraordinaire des nombres par rapport a la somme de leurs diviseurs // BI. **3**. 1751. 10—31.

E191 De partitione numerorum // NC. **3**. 1753. 125—169.

E228 De numeris qui sunt aggregata duorum quadratorum // NC. **4**. 1758. 3—40.

E241 Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum primum formae $4n + 1$ esse summam duorum quadratorum // NC. **5**. 1760. 3—13.

E242 Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum // NC. **5**. 1760. 13—58.

E243 Observatio de summis divisorum // NC. **5**. 1760. 59—74.

E244 Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum // NC. **5**. 1760. 75—83.

E253 De problematibus indeterminatis quae videntur plus quam determinata // NC. **6**. 1761. 85—114.

E255 Solutio generalis quorundam problematum Diophantaeorum, quae vulgo nonnisi solutiones speciales admittere videntur // NC. **6**. 1761. 155—184.
E256 Specimen de usu observationum in mathesi pura // NC. **6**. 1761. 185—230.
E262 Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta // NC. **7**. 1761 49—82.
E270 Solutio problematis de investigatione trium numerorum, quorum tam summa, quam productum, nec non summa productorum ex binis, sint numeri quadrati // NC. **8**. 1763. 64—73.
E271 Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata // NC. **8**. 1763. 74—104.
E272 Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum, quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur // NC. **8**. 1763. 105—128.
E279 De resolutione formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros // NC. **9**. 1764. 3—39.
E281 Specimen algorithmi singularis // NC. **9**. 1764. 53—69.
E283 De numeris primis valde magnis // NC. **9**. 1764. 99—153.
E323 De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo // NC. **11**. 1767. 28—66.
E352 Remareques sur un beau rapport entre les série des puissances tant directes que réciproques // MAB. **17**. 1768. 83—106.
E369 Quomodo numeri praemagni sint explorandi, utrum sint primi, nec ne // NC. **13**. 1769. 67—88.
E387 Vollständige Anleitung zur Algebra, t. 1. SPb., 1770.
E388 Vollständige Anleitung zur Algebra, t. 2. SPb., 1770.
E393 De summis serierum numeros Bernoullianos involventum // NC. **14**. 1770. 129—167.
E394 De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas // NS. **14**. 1770. 168—187.
E395 De inventione quotcunque mediarum proportionalium citra radicum extractionem // NC. **14**. 1770. 188—214.
E405 Solutio problematis, quo duo quaeruntur numeri, quorum productum tam summa, quam differentia eorum, sive auctum, sive minutum fiat quadratum // NC. **15**. 1771. 29—50.
E427 Problematis cujusdam Diophantei evolutio // NC. **17**. 1773. 24—63.
E428 Observationes circa bina biquadrata, quorum summam in due alia biquadrata resolvere liceat // NC. **17**. 1773. 64—69.
E445 Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata // NAE. **17**. 1773. 193—211.
E449 Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia // NC. **18**. 1774. 85—135.
E451 Solutio problematis de inveniendo triangulo, in quo rectae ex singulis angulis latera opposita bisecantes sint rationales // NC. **18**. 1774. 171—184.
E452 Resolutio aequationis $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ per numeros tam rationales quam integros // NC. **18**. 1774. 185—197.
E454 De resolutione irrationalium per fractiones continuas, ubi simul nova quaedam et singularis species minimi exponitur // NC. **18**. 1774. 218—244.
E461 Extrait d'une lettre de M. Euler le père à M. Bernoulli, concernant le mémoire, imprimé parmi ceux de 1771 // NMAB. 1774. 35—36.
E466 Problema Diophantaeum singulare // NC. **19**. 1775. 112—131.
E467 De tabula numerorum primorum, usque ad millionem et ultra continuanda, in qua simul omnium numerorum non primorum minimi divisores exprimantur // NC. **19**. 1775. 132—183.
E474 Solutio quorundam problematum Diophanteorum // NC. **20**. 1776. 48—58.
E498 Extrait d'une lettre en Mai 1778 à M. Beguelin de M. Euler // NMAB. 1779. 337—339.
E515 De casibus quibusdam maxime memorabilibus in analysi indeterminata; ubi imprimis insignis usus calculi angulorum in analysi Diophantea ostenditur // AA. 1781. 85—110.
E522 De formatione fractionum continuarum // AA. 1782. 3—29.
E523 De tribus numeris quadratis, quorum tam summa, quam summa productorum ex binis sit quadratum // AA. 1782. 30—39.
E540 Nova methodus fractiones quascunque rationales in fractiones simplices resolvendi // AA. 1783. 32—46.
E541 Evolutio producti infiniti $(1 - x)(1 - xx)(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5)(1 - x^6)$ etc. in seriem simplicem // AA. 1783. 47—55.
E542 De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium // AA. 1783. 56—75.
E552 Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos // OA. **1**. 1783. 64—84.

E554 Disquisitio accuratior circa residua ex divisione quadratorum aliorumque potestatum per numeros primos relicta // OA. **1**. 1783. 121—156.
E556 De criteriis aequationis $fxx + gyy = hzz$ utrum ea resolutionem admittat nec ne? // OA. **1**. 1783. 211—241.
E557 De quibusdam eximiis proprietatibus circa divisores potestatum occurentibus // OA. **1**. 1783. 242—295.
E558 Proposita quacunque progressione ad unitate incipiente, quaeritur quot ejus terminos ad minimum addi oporteat, ut omnes producantur? // OA. **1**. 1783. 296—309.
E559 Nova subsidia pro resolutione formulae $axx + 1 = yy$ // OA. **1**. 1783. 310—328.
E560 Miscellanea analytica // OA. **1**. 1783. 329—344.
E564 Speculationes circa quasdam insignes proprietates numerorum // AA. 1784. 18—30.
E566 De inductione ad plenam certitudinem evehenda // AA. 1784. 38—48.
E583 De numero memorabili, in summatione progressionis harmonicae naturalis occurente // AA. 1785. 45—75.
E586 Considerationes super theoremate Fermatiano de resolutione numerorum in numeros polygonales // OA. **2**. 1785. 3—15.
E591 De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda // OA. **2**. 1785. 91—101.
E592 De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices // OA. **2**. 1785. 102—137.
E596 De summa seriei ex numeris primis formatae $1/3 - 1/5 + 1/7 + 1/11 - 1/13 - 1/17 + 1/19 + 1/23 - 1/29 + 1/31$ etc., ubi numeri primi formae $4n - 1$ habent signum positivum, formae autem $4n + 1$ signum negativum // OA. **2**. 1785. 240—256.
E598 De insigni promotione scienciae numerorum // OA. **2**. 1785. 275—314.
E610 Novae demonstrationes circa divisores numerorum formae $xx + nyy$ // NA. **1**. 1787. 47—74.
E683 De singulari genere quaestionum Diophantearum et methodo maxime recondita eas resolvendi // NA. **9**. 1795. 3—18.
E696 De casibus, quibus hanc formulam $x^4 + kxxyy + y^4$ ad quadratum reducere licet // NA. **10**. 1797. 27—40.
E699 Utrum hic numerus: 1 000 009 sit primus, nec ne? inquiritur // NA. **10**. 1797. 63—73.
E702 De novo genere quaestionum arithmeticarum, pro quibus sovendis certa methodus adhuc desideratur // NA. **11**. 1796. 78—93.
E708 De formulis speciei $mxx + nyy$ ad numeros primos explorandos idoneis, earumque mirabilibus proprietatibus // NA. **12**. 1801. 22—46.
E713 Investigatio trianguli, in quo distantiae angulorum ab ejus centro gravitatis rationaliter exprimantur // NA. **12**. 1801. 101—113.
E715 De variis modis numeros praegrandes examinandi, utrum sint primi nec ne? // NA. **13**. 1802. 14—44.
E716 Resolutio formulae Diophanteae $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$ per numeros rationales // NA. **13**. 1802. 45—63.
E718 Facillima methoidus plurimos numeros primos praemagnos inveniendi // NA. **14**. 1805. 3—10.
E719 Methodus generalior numeros quosvis satis grandes perscrutandi, utrum sint primi nec ne? // NA. **14**. 1805. 11—51.
E725 Illustratio paradoxi circa progressionem numerorum idoneorum sive congruorum // NA. **14**. 1805. 51; **15**. 1806. 29—32.
E732 Solutio facilior problematis Diophantei circa triangulum, in quo rectae ex angulis latera opposita bisecanmtes rationaliter exprimantur // MAP. **2**. 1810. 10—16.
E739 Regula facilis problemata Diophantea per numeros integros expedite resolvendi // MAP. **4**. 1813. 3—17.
E742 Observationes circa fractiones continuas in hac forma contentas:

$$S = \cfrac{n}{1+\cfrac{n+1}{2+\cfrac{n+2}{3+\cfrac{n+3}{4+\text{etc.}}}}}$$

//

MAP. **4**. 1813, 52—74.
E744 De divisoribus numerorum in forma $mxx + nyy$ contentorum // MAP. **5**. 1815. 3—23.

E748 Investigatio quadrilateri, in quo singulorum angulorum sinus datam inter se teneant rationem; ubi artificia prorsus singularia in analysi Diophantea occurrunt // MAP. **5**. 1815. 73—95.
E750 Commentatio in fractionem continuam, qua illustris La Grange potestates binominales expressit // MAP. **6**. 1818. 3—11.
E753 Solutio succincta et elegans problematis, quo quaeruntur tres numeri tales, ut tam summae quam differentiae binorum sint quadrata // MAP. **6**. 1818. 54—65.
E754 Probleme de geometrie resolu par l'analyse de Diophante // MAP. **7**. 1820. 3—9.
E755 De casibus quibus formulam $x^4 + mxxyy + y^4$ ad quadratum reducere licet // MAP. **7**. 1820. 10—22.
E758 De binis formulis speciei $xx + myy$ et $xx + nyy$ inter se concordibus et discordibus // MAP. **8**. 1822. 3—16.
E762 Lettera inedita di Eulero a Lagrange [от 3 мая 1766 г.] // Biblioteca italiana. Milano. 1823. **30**. 111—112.
E763 De tribus pluribusve numeris inveniendis, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum // MAP. **9**. 1824. 3—13.
E764 Resolutio facilis quaestionis difficillimae, qua haec formula maxime generalis: $vvzz(axx + byy)^2 + \Delta xxyy(avv + bzz)^2$ ad quadratum reduci postulatur // MAP. **9**. 1824. 14—19.
E769 Solutio problematis Fermatiani de duobus numeris, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum, ad mentem ill. Lagrange adornata // MAP. **10**. 1826. 3—6.
E772 De insigni promotione analysis Diophantaeae // MAP. **11**. 1830. 1—11.
E773 Solutio problematis difficillimi, quo hae duae formulae: $aaxx + bbyy$ et $aayy + bbxx$ quadrata reddi debent // MAP. **11**. 1830. 12—30.
E774 Investigatio binorum numerorum formae $xy(x^4 - y^4)$ quorum productum sive quotus sit quadratum // MAP. **11**. 1830. 31—45.
E775 De binis numeris quorum summa sive aucta sive minuta tam unius quam alterius quadrato producat quadrata // MAP. **11**. 1830. 46—48.
E776 Dilucidationes circa binas summas duorum biquadratorum inter se aequales // MAP. **11**. 1830. 49—57.
E777 De resolutione hujus aequationis $0 = a + bx + cy + dxx + exy + fyy + gxxy + hxyy + ixxyy$ per numeros rationales // MAP. **11**. 1830. 58—68.
E778 Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi // MAP. **11**. 1830. 69—91.
E787 Solutio problematis in Actis Lipsiensibus A. 1745 propositi // Corr. **1**. 1843. 341—354.
E788 [94 письма Л. Эйлера к Х. Гольдбаху. 1729—1763] // Corr. **1, 2**. 1843. 3—672.
E791 Commentationes arithmeticae collectae, t. 1, 2. SPb., 1849.
E792 Tractatus de numerorum doctrina capita XVI, quae supersunt // CA. **2**. 1849. 503—575.
E793 Considerationes circa analysin Diophanteam // CA. **2**. 1849. 576—587.
E794 Theorema arithmeticum ejusque demonstratio // CA. **2**. 1849. 588—592.
E795 De quadratis magicis // CA. **2**. 1849. 593—602.
E796 Recherches sur le problème de trois nombres carrés tels, que la somme de deux quelconques, moins le troisième, fasse un nombre carré // CA. **2**. 1849. 603—616.
E797 Recherches ulterieurs et tres curieuses sur le probleme de quatre nombres positifs et en proportion arithmetique tels, que la somme de deux quelconques soit toujours un nombre carré // CA. **2**. 1849. 617—625.
E798 De numeris amicabilibus // CA. **2**. 1849. 627—636.
E799 Fragmenta commentationis cujusdam majoris, de invenienda relatione inter latera triangulorum, quorum area rationaliter exprimi possit // CA. **2**. 1849. 648—651.
E806 Fragmenta arithmetica ex Adversariis mathematicis deprompta // OP. **1**. 1862. 157—266.
E808 Problema algebraicum de inveniendis quatuor numeris, ex datis totidem productis uniuscujusque horum numerorum in summas trium reliquorum // OP. **1**. 1862. 282—287.
E819 Continuatio fragmentorum ex Adversariis mathematicis depromptorum // OP. **1**. 1862. 487—518.
E856 Fragmentum ex Adversariis mathematicis depromptum // OP. **2**. 1862. 824—826.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ВИЕТ	— Вопросы истории естествознания и техники
ИАИ	— Историко-астрономические исследования
ИИЕиТ	— Институт истории естествознания и техники
ИМИ	— Историко-математические исследования
СПбФА РАН	— Санкт-Петербургский филиал Архива Российской академии наук
AA	— Acta Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae
AE	— Acta eruditorum
BI	— Bibliotheka impartiale
CA	— Commentationes arithmeticae
CASIP	— Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae
Corr.	— Correspondance mathématiques et physiques
JLA	— Journal litteraire Allemagne
MA	— Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris
MAB	— Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin
MAP	— Mémoires de l'Académie des sciences Imperiale de St.-Pétersbourg
NA	— Nova Acta Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae
NAE	— Nova Acta eruditorum
NC	— Novi Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae
NMAB	— Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et de belles-lettres de Berlin
OA	— Opuscula analytica
OO	— Opera omnia
OP	— Opera postuma
OVA	— Opuscula varii argumenti

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

НЕОПУБЛИКОВАННЫЕ МАТЕРИАЛЫ
Л. ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Утверждено к печати
Санкт-Петербургским филиалом
Института истории естествознания
и техники РАН

Редактор издательства *А. Л. Иванова*
Художник *А. И. Слепушкин*
Технический редактор *Е. В. Траскевич*
Корректоры *О. М. Бобылева, Н. И. Журавлева*
Компьютерная верстка *Л. Н. Напольской*

ЛР № 020297 от 27.11.91. Сдано в набор 18.02.97. Подписано к печати 17.04.97.
Формат 60×90 $1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16. Уч.-изд. л. 18.0. Тираж 600 экз. Тип. зак. № 3058. С 60

Санкт-Петербургская издательская фирма РАН
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская лин., 1

Санкт-Петербургская типография № 1 РАН
199034, Санкт-Петербург, 9 лин., 12

29700-