ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск X

ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск

X

ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

ВЫПУСК X

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Г. Ф. РЫБКИНА и А. П. ЮШКЕВИЧА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957

Историко-математические исследования
Выпуск X.
Редактор *А. П. Разумовская.*
Технический редактор *Н. Я. Мурашова.* Корректор *З. В. Моисеева.*

Сдано в набор 5/VI 1957 г. Подписано к печати 9/X 1957 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 25,63+1 вклейка. Условн. печ. л. 42,13. Уч.-изд. л. 44,72. Тираж 3000 экз. Т-08177. Цена книги 24 р. 40 к. Заказ № 1186

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва В-71, Б. Калужская 15.

16-я типография Московского городского Совнархоза. Москва, Трехпрудный пер., д. 9.

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ РЕДАКЦИИ

15 апреля 1957 г. исполнилось 250 лет со дня рождения великого математика, члена Петербургской Академии наук Леонарда Эйлера. Жизнь и творчество Эйлера получили уже некоторое освещение в предыдущих выпусках (начиная с седьмого) Историко-математических исследований.

Десятый выпуск открывается отделом, посвященным знаменитому петербургскому академику. Прежде всего мы публикуем ряд материалов к биографии Л. Эйлера: перевод его незаконченной автобиографии, продиктованной Эйлером сыну, а также биографии Л. Эйлера и его трех сыновей, написанные при его жизни. Эти материалы существенно дополняют наши сведения об Эйлере; комментарии к публикуемым материалам исправляют отдельные неточности и содержат дополнения, основанные на изучении архивных документов. К первой публикации примыкает статья, в которой рассмотрены чрезвычайно интересные записные книжки Л. Эйлера за 1725—1763 гг., хранящиеся в Архиве АН СССР (Ленинград). Далее впервые печатается научная переписка Л. Эйлера с выдающимся деятелем русского просвещения Я. В. Брюсом; за нею следует переписка Л. Эйлера с Дж. Стирлингом. Все письма приводятся в русском переводе и на языке оригинала. Новые фактические сведения имеются в статье, в которой дан разбор отзывов Эйлера на поступившие в Петербургскую и Берлинскую академии сочинения о квадратуре круга. К статье приложены на языке оригинала три отзыва Эйлера и посвященное методам приближенного вычисления π письмо Эйлера к Маринони; они печатаются впервые. Дальнейшие статьи этого раздела посвящены отдельным сторонам математического творчества Эйлера: его доказательствам теоремы о существовании первообразного корня и основной теоремы алгебры, а также его исследованиям по непрерывным дробям, линейным уравнениям с частными производными, геометрическим преобразованиям.

Продолжая издание классических трудов математиков Востока, редакция помещает во втором отделе перевод древнего китайского трактата «Математика в девяти книгах». Это—первый перевод на европейский язык. «Математика в девяти книгах» является трудом, основоположным в развитии математической науки в Китае; нити от нее протягиваются далеко вперед и во времени и в пространстве; прямое или косвенное влияние ее сказывается и в индийской, и в арабской, и в европейской литературе средних веков. Краткое предисловие к переводу любезно прислал выдающийся современный китайский математик проф. Хуа Ло-гэн.

Статьи третьего отдела выпуска освещают различные вопросы истории математики древнего Вавилона, математики в России, истории одной из задач теории азартных игр. В VIII и IX выпусках редакция поместила несколько статей по истории механики. Математика и механика всегда развивались в тесной взаимосвязи. В настоящем выпуске печатается статья о некоторых проблемах античной истории механики, во многом непосредственно соприкасающихся с проблемами античной математики.

Для более удобного пользования вышедшими до сих пор выпусками Историко-математических исследований в конце выпуска помещены именные указатели и перечень всех напечатанных за десять лет статей и материалов.

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

К 250-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Леонард Эйлер. (Портрет с работы Э. Хандмана, 1756 г.)

МАТЕРИАЛЫ К БИОГРАФИИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Публикация Ю. Х. Копелевич

Биографии Леонарда Эйлера посвящен ряд книг и статей, написанных главным образом в России, Швейцарии, Германии, Франции. Все они основаны преимущественно на материалах, собранных в Петербургской Академии наук.

Первая опубликованная в России биография Эйлера содержится в «Похвальном слове» Николая Фусса (Eloge de Monsieur Léonard Euler), изданном в Петербурге в 1783 г. и вторично в Базеле в 1786 г. на немецком языке (Lobrede auf Herrn Leonhard Euler) в переводе самого автора. Этот немецкий текст, с исправлением неточностей, помещен в первом томе Полного собрания сочинений Эйлера (L. Euleri Opera omnia, Лейпциг—Берлин, 1911), русский перевод С. Румовского—в «Академических сочинениях, выбранных из первого тома деяний имп. Академии наук», т. I (СПб, 1801). О деятельности Эйлера в Петербургской Академии подробно сообщает П. П. Пекарский в «Истории имп. Академии наук», т. I (СПб, 1870, стр. 247—302). Краткая биография Эйлера содержится в статьях акад. А. Н. Крылова «Леонард Эйлер» и С. Н. Чернова «Леонард Эйлер и Академия наук» в сборнике «Леонард Эйлер. К 150-летию со дня смерти» (М.—Л., 1935), а также в последних исследованиях об Эйлере—статьях И. Г. Башмаковой и А. П. Юшкевича «Леонард Эйлер» (Историко-математические исследования, вып. VII, 1954, стр. 453—512) и статье Г. К. Михайлова «Леонард Эйлер» (Известия Академии наук СССР, отд. техн.

наук, № 1, 1955, стр. 1—26. Приложена обширная библиография)[1]).

Из зарубежных биографий Эйлера наиболее полными являются: статья об Эйлере в четырехтомном сочинении Р. Вольфа Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz (Цюрих, 1862, т. 4, стр. 87—134) и работы О. Шписса (Spiess) «Léonhard Euler» (Фрауенфельд—Лейпциг, 1929) и Л. Г. дю Паскье (Du Pasquier) «Léonard Euler et ses amis» (Париж, 1927).

Некоторым дополнением к этим литературным источникам могут служить две старейшие биографии Эйлера, которые помещаются ниже: автобиография (стр. 13—17), продиктованная Эйлером сыну в 1767 г., биографическая статья о нем и о трех его сыновьях в книге «Adumbratio eruditorum Basiliensium», вышедшей в Базеле в 1780 г., т. е. при жизни Эйлера, а также речь Якова Штелина, произнесенная в Академии на третий день после кончины Эйлера.

Биография 1780 г. (стр. 17—27) занимает особое место среди биографий Эйлера потому, что это единственное жизнеописание, опубликованное еще при жизни Эйлера и основанное на сведениях, полученных от самого Эйлера или от его близких.

Профессор теологии в Базеле И. В. Герцог (род. в 1726 г.) опубликовал в Базеле в 1778 г. каталог профессоров Базельского университета под заглавием «Athenae Rauricae». Через два года он издал приложение к этому каталогу, озаглавленное «Adumbratio eruditorum Basiliensium meritis apud exteros olim hodieque celebrium» (Очерки об ученых из Базеля, прославившихся за рубежом в прошлом и в наше время). Среди этих очерков мы и находим биографии Леонарда Эйлера и трех его сыновей. О том, какими источниками пользовался автор, мы имеем два свидетельства, взаимно дополняющих друг друга. В тех же «Очерках», в биографии Николая Фусса, автор говорит (стр. 73): «Наконец, мы должны публично заявить, что славный Фусс премного украсил своим трудом настоя-

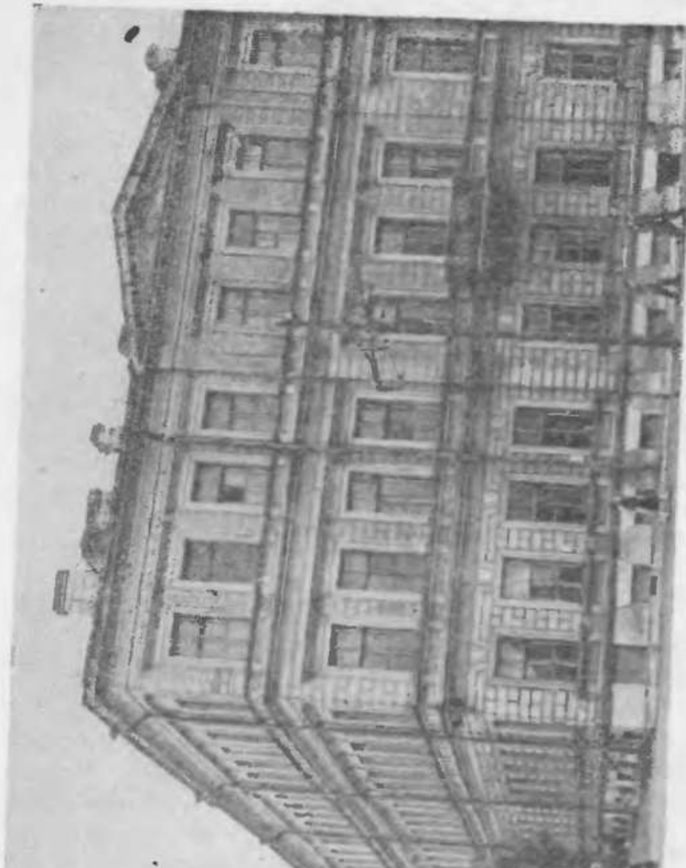
[1]) Автор последней статьи Г. К. Михайлов своими советами оказал значительную помощь в подготовке данной публикации.

щее сочинение, ибо по нашей просьбе он с величайшей готовностью сообщил нам сведения о жизни и деяниях великого Эйлера и его знаменитой фамилии; за эту огромную услугу и благодеяние выражаем ему глубочайшую благодарность». В письме племянника Эйлера Генгенбаха из Базеля (об этом письме см. в прим. [1], стр. 46) к сыну Эйлера мы читаем следующее: «Г-н доктор Герцог, здешний профессор теологии, недавно обратился ко мне с просьбой, чтобы я написал в Петербург и узнал наиболее важные обстоятельства жизни, сочинения, премии и т. д. Вашего отца. Он издает книгу под названием «Basilia erudita» (ученый Базель). Если Вас не затруднит сообщить мне такие сведения, Вы меня этим очень обяжете».

Таким образом, профессор Герцог обратился к племяннику Эйлера в Базеле Генгенбаху и через него получил от сына Эйлера Иоганна-Альбрехта и от Николая Фусса нужные ему биографические сведения об Эйлерах, которые он дополнил материалами Базельского университета и другими данными, полученными непосредственно от родственников Эйлера в Базеле. Приложенный к биографии Эйлера список его сочинений, по-видимому, целиком принадлежит Фуссу. Фусс, как мы убеждаемся, уже в 1779 г. занимался собиранием биографических материалов об Эйлере совместно с Иоганном-Альбрехтом, который в это время запрашивал у того же Генгенбаха сведения по генеалогии Эйлеров.

Все это позволяет нам рассматривать данное жизнеописание как один из наиболее ценных источников по биографии Эйлера. Поскольку это жизнеописание опубликовано на латинском языке и издание, в которое оно включено, является библиографической редкостью, мы помещаем его ниже в переводе. К биографии Леонарда Эйлера мы присоединяем помещенные в том же издании биографии трех его сыновей—Иоганна-Альбрехта, Карла и Христофора Эйлеров.

Третьим публикуемым документом является речь Я. Штелина, произнесенная им в собрании конференции Академии наук через три дня после смерти Эйлера. Яков Штелин (1709—1785), приехавший в Петербург в 1735 г. и с 1737 г. занимавший в Академии кафедру красноречия



Современный вид дома, в котором Л. Эйлер проживал в 1766—1783 гг.
(Угол 10 линии и набережной на Васильевском острове Лейтенанта Шмидта, Ленинград).

и поэзии, в апреле 1765 г. был назначен конференц-секретарем и с этого момента вел оживленную переписку с Эйлером по поводу возвращения Эйлера в Петербург. В последующие годы этих двух старейших членов Академии объединяла совместная деятельность в комиссии по управлению Академией. Речь Штелина, хотя не отличается обилием и точностью биографических сведений, однако не лишена интереса, поскольку отражает непосредственное впечатление, произведенное в Академии внезапной кончиной Эйлера.

В примечаниях (см. стр. 45—65; ссылки на них даны арабскими цифрами в прямых скобках) к этим публикациям использованы некоторые материалы переписки Эйлера, хранящейся в Архиве АН СССР. В примечаниях к биографии 1780 г. опущено все то, что уже было пояснено в примечаниях к автобиографии, а в этой последней не снабжены примечаниями те места, которые находят разъяснение в тексте биографии 1780 г. В примечаниях тексты на иностранных языках даны в переводе. При ссылках сокращенно указывается язык оригинала.

I. АВТОБИОГРАФИЯ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА [1]

Биография моего отца, так, как он сам ее мне продиктовал

Записана в Ст. Петербурге 1 декабря 1767.

Я, Леонард Эйлер, родился в 1707 г. 15 апреля н. ст. в Базеле. Мой отец, Пауль Эйлер, был назначен пастором в селение Риэн, расположенное в часе [ходьбы] от Базеля, а мать моя звалась Маргарита Брукер [2]. Вскоре затем мои родители переселились в Риэн, где, я, когда пришло время, получил у своего отца первоначальное образование, а поскольку отец был одним из учеников всемирно известного Якова Бернулли [3], он стремился при этом преподать мне основы математики и пользовался для этой цели алгеброй Христофа Рудольфа [4] с примечаниями Михаэля Штифеля, которую я штудировал несколько лет с величайшим усердием. Когда я подрос, я был отдан на попечение бабушке [5] в Базель, чтобы частью в тамошней гимназии, частью путем частных уроков получить основы гуманитарного образования [6] и одновременно продвинуться дальше в математике. В 1720 г. я получил возможность слушать публичные лекции в Университете, где я вскоре нашел случай представиться знаменитому профессору Иоганну Бернулли [7], для которого стало особым удовольствием помогать мне в моем дальнейшем изучении математических наук. В частных уроках он мне, правда, наотрез отказал из-за своих занятий, но он дал мне гораздо более благотворный совет, состоявший в том, чтобы я сам принялся за некоторые математические книги потруднее и штудировал их со всем усердием, а если я встречу какое-нибудь препятствие или затруднение, он позволил мне свободно приходить к нему каждую субботу пополудни и любезно разъяснял мне все трудности. Причем это настолько достигало желанной цели, что когда он устранял предо мной одно препятствие, тем самым тотчас же исчезали десять других, а это, разумеется, есть наилучший метод, чтобы добиться счастливых успехов в математических науках.

В 1723 г. я был удостоен степени магистра, после того как еще за полтора года до этого по тамошнему обычаю получил «первые лавры» [8].

После этого я, с одобрения моих родных, поступил на теологический факультет, где, помимо теологии, должен был особо изучать греческий и древнееврейский языки, что, однако, шло не вполне успешно, так как я посвящал бо́льшую часть своего времени занятиям математикой и, к моему счастью, все еще продолжались мои субботние посещения г-на Иоганна Бернулли. В это самое время была учреждена новая Академия наук в Петербурге [9], куда были приглашены оба старших сына г-на Иоганна Бернулли [10], и я преисполнился невыразимым желанием поехать вместе с ними в 1725 г. в Петербург. Но тогда это не могло тотчас же осуществиться. Между тем, упомянутые Бернулли-младшие дали мне твердое заверение, что они по прибытии в Петербург исходатайствуют там для меня приличное место, что действительно вскоре исполнилось [11], при этом мне предстояло применять мои

Мемориальная доска, установленная 16 апреля 1957 г. на доме, в котором проживал Л. Эйлер в петербургский период жизни (Ленинград, набережная Лейтенанта Шмидта, 15).

математические познания к медицине. Поскольку известие об этом [12] пришло в начале зимы 1726 г. и я не мог предпринять свою поездку раньше наступающей весны [13], я, между тем, зачислился на медицинский факультет в Базеле и начал с величайшим усердием изучать медицину. В это время в Базеле освободилась кафедра физики и объявилось множество соискателей. Я тоже записался в их число и по этому случаю защищал свою диссертацию о звуке [14]. Между тем наступила весна 1727 г., и я отправился в путь из Базеля в самом начале апреля [15] и прибыл в Любек так рано, что там не стоял еще ни один корабль, готовый к отплытию в Петербург. Поэтому я был вынужден сесть на корабль, идущий в Ревель, и, поскольку путешествие продолжалось около 4 недель, я в Ревеле тотчас нашел корабль из Штеттина, который доставил меня в Кронштадт. Но я прибыл сюда в тот самый день [16], когда скончалась блаженной памяти императрица Екатерина I Алексеевна, и поэтому я застал в Петербурге в Академии все в величайшем смятении. Однако я имел удовольствие, кроме младшего Даниила Бернулли,— его старший брат Николай к тому времени уже скончался,— встретить здесь ныне покойного проф. Германа [17], тоже моего соотечественника и к тому еще дальнего родственника, и они оказывали мне всяческое содействие. Мое жалованье было 300 руб. и, кроме того, казенная квартира, дрова и свечи [18], и поскольку мои склонности были направлены всецело и исключительно к математическим наукам, я был назначен адъюнктом высшей математики [19], а предложение о занятии должности по медицине полностью отпало. При этом мне было дано право присутствовать в академических собраниях и читать там свои сочинения, которые уже тогда также печатались в академических комментариях [20].

Позднее, когда в 1730 г. господа профессоры Герман и Бильфингер [21] возвратились к себе на родину, я был назначен на место последнего профессором физики и заключил новый контракт на 4 года [22], по которому мне назначалось на первые два года по 400 рублей жалованья, а на последние два по 600 руб. и еще 60 руб. на квартиру, дрова и свечи. Ко времени истечения этого контракта я обвенчался в рождество 1733 г. с моей супругой Екатериной Гзелль [23] и, поскольку в это же самое время профессор Даниил Бернулли тоже уехал к себе на родину [24], мне была поручена его должность профессора высшей математики [25], а вскоре после этого я получил от Правительствующего сената приказ принять на себя также надзор над географическим департаментом [26], и в связи с этим обстоятельством мое жалованье было увеличено до 1200 руб. [27]. Позднее, когда в Пруссии вступил на престол ныне славно царствующий Его к. в., я получил благосклоннейшее приглашение в Берлин, которое я, после того как скончалась достославная императрица Анна, а при последовавшем за этим регентстве положение начало представляться довольно неуверенным, принял без всякого раздумья и, получив увольнение, в 1741 г. [28] со всей своей семьей по морю переехал в Берлин, где Его к. в. соблаговолил назначить мне содержание в 1600 талеров как равноценное получаемому здесь жалованью. Что было со мной потом, известно.

II. БИОГРАФИИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА И ЕГО СЫНОВЕЙ

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР—директор математического класса Петербургской имп. Академии, а также Королевской Берлинской Академии, профессор высшей математики в Берлине и в Петербурге, член Академии наук, словесности и экономии Лондонской, Парижской, Берлинской, Туринской, Лейпцигской, Флиссингенской, Базельской [1] и других, появился на свет в Базеле 15 апреля 1707 г. у отца Пауля Эйлера, который с 1708 по 1748 год [2] был пастором в Рихене, селении, находящемся примерно в одной миле от Базеля, и матери Маргариты Брукер. В раннем детстве он отличился поступком, правда ребяческим, но уже впервые предсказавшим будущего естествоиспытателя. Когда ему было около четырех лет, он, живя в деревне, наблюдал, как куры высиживают яйца и выводят цыплят. Надеясь, что он может сделать то же самое, он тайком собрал яйца из гнезд и, сложив их в углу дома, сел на них и сидел не вставая, пока родители не встревожились и после долгих поисков не нашли его сидящим на куриных яйцах. Когда же они, уводя его, спросили, что он здесь делал, он ответил, что хотел вывести цыплят. В целом он получил от родителей прекрасное воспитание, которым он был надлежаще подготовлен, чтобы вести жизнь христианина, и был хорошо обучен началам наук. Его досточтимый отец, некогда способнейший ученик великого Якова Бернулли, профессора математики в Базеле, тщательно обучал любимого сына с ранних лет гуманитарным наукам, а главным образом математике, и прекрасно подготовил его к надлежащему изучению университетских курсов. Когда первоначальное обучение было завершено, родители, заметив в сыне выдающиеся способности, передали его школьным наставникам для приобретения им познаний в науках более высоких и отправили его в родной город, поручив его попечению бабушки. Там он был прилежным и внимательным слушателем своих учителей [3] и поднялся до вершин школьного образования. В возрасте 13 лет [4] он, записавшись в число студентов философского факультета, посвятил себя университетским занятиям и продвигался в них так стремительно [5], что уже 9 июня 1722 г. получил из рук выдающегося мужа Самуэля Баттьера [6], доктора медицины и профессора греческого языка, «первые лавры» по философии с высшим отличием. Достигнув этого почетного звания, или, вернее, награжденный за свои достоинства и искусство, он продолжал настойчиво учиться в той же области и, кроме языков, упорным трудом прекрасно изучил все разделы философии, ибо ardua per praeceps gloria vadit iter [7]. Но больше всего он любил математику и физику, которые он, не довольствуясь читавшимися тогда знаменитым Иоганном Бернулли публичными лекциями [8], упорно изучал также путем частных уроков [9]. Он очень хотел обучаться частным образом также у этого славнейшего мужа Иоганна Бернулли, однако тот, будучи тогда занят множеством дел, не мог уступить в этом юноше, страстно жаждущему учиться. Но видя стремительность его продвижения в науках, он дал нашему Эйлеру самых трудных авторов по математике с тем, чтобы тот их внимательно прочитал и отмечал трудные места, и при этом он пообещал, что сам он в определенные дни охотно будет раз-решать его сомнения. Эйлер жадно ухватился за этот прекрасный случай и обещание и в назначенные ему вечера приходил к своему оракулу. Затем ему, как весьма образованному в философской науке, ученым сословием было присуждено магистерское звание по философии осенью 1723 г. и публично присвоено 8 июня 1724 г. под председательством Ник. Гаршера [10], доктора медицины и профессора красноречия. На этом торжественном акте наш кандидат выступил с публичной речью «Сравнение картезианской и ньютонианской философии». Из так называемых высших факультетов он избрал теологический, больше, как это кажется, из почтения к родителям, чем по собственному призванию, и записался в число студентов по теологии 29 октября 1723 г. И в этом войске он доблестно нес службу и особенно усердно занимался греческим и древнееврейским языками. Но вскоре он снова устремился к математическим наукам, к которым его влекла природа, и с согласия своего досточтимого отца предался им целиком, пользуясь замечательным и надежнейшим руководством уже упомянутого Бернулли. Немного позднее, а именно в 1725 г., старшие сыновья Иоганна Бернулли, Николай и Даниил, были приглашены в Петербург, чтобы читать публичные лекции [11] по математическим дисциплинам в только что основанной Академии. Узнав об этом, Эйлер загорелся удивительным желанием поехать вместе с ними и не унимался до тех пор, пока они не дали ему обещание, что приложат все усилия, чтобы и его туда пригласили. И они это честно выполнили и добились, чтобы он получил приглашение читать лекции по физиологии [12]. Получив известие об этом в 1726 г., в начале зимы, он усердно занялся этой наукой, начал посещать лекции по медицине и, по обычаю, записался на медицинский факультет (nomen suum sacrae medicinae dedit) 2 апреля 1727 г. Между тем, пока он готовил себя к путешествию и к исполнению своих обязанностей, в Базеле с кончиной И. Руд. Бека [13] появилась вакансия по кафедре физики, и Эйлер решил выступить в числе соискателей. 18 февраля 1727 г. он мужественно защищал и [в том же году] опубликовал диссертацию «О природе, образовании и распространении звука», и не без успеха, ибо среди многих кандидатов, и притом незаурядных [14], он получил поддержку Бернулли, своего учителя, надежнейшего ценителя дарований и успехов. Однако, как угодно было божьему провидению, нашему Эйлеру суждено было не ограничиться тесными пределами отечества, а отправиться в чужие и далекие страны, чтобы его необъятная ученость, распространяясь далеко и широко, служила бы всем народам. Итак, когда эта попытка не удалась, он решил принять предложенную ему должность в Петербурге. В начале апреля 1727 г. он отправился в путь и при попутном ветре прибыл в Майнц, отсюда он по суше доехал до Любека и, отправившись дальше на корабле, через четыре недели прибыл в Ревель, а затем достиг Кронштадта, и именно в день кончины Российской императрицы Екатерины I. Приехав затем в Петербург, он застал граждан в смятении из-за смерти императрицы. Здесь он встретил в полном благополучии обоих профессоров-соотечественников, друга своего Даниила Бернулли (Николай Бернулли скончался 26 июня 1726 г.) и родственника Якова Германа. А так как здесь очень скоро заметили, что Эйлер имеет большую склонность к математике и в ней очень силен, медицина и физиология были оставлены, и он был назначен адъюнктом по высшей математике. В 1730 г., когда Герман и Бильфингер возвратились к себе на родину, Эйлер занял кафедру последнего, а именно теоретической и экспериментальной физики. Через три года, 27 декабря 1733 г., он заключил счастливейший и богатый потомством брак с Екатериной Гзелль, дочерью Георгия Гзелля, известного живописца из Амстердама, по происхождению швейцарца из Ст. Галлена, которого император Петр Великий привез в Петербург и назначил своим живописцем и которого позднее Академия наук, основанная в 1726 г., приняла в число своих сотрудников [15]. Мать ее была Н. де Лоен, которую очень рано похитила смерть, и ее заменила вторая жена отца Доротея Мария Граф, известная рисовальщица цветов и насекомых, которая издала добавление к «Суринамским насекомым», опубликованным ее матерью, а также диссертацию о развитии и метаморфозах суринамских насекомых. А была она дочерью Иог. Андрея Граф из Нюрнберга, франкфуртского художника, и Марии Сибиллы Мариан [16], замечательной художницы, швейцарки по крови. С этой женой наш Эйлер имел 13 детей, из которых бо́льшая часть лишилась жизни в раннем детстве. Три сына и две дочери достигли зрелого возраста: Иоганн-Альбрехт, Карл и Христофор, о которых будет рассказано ниже в отдельных статьях; старшая дочь Екатерина [17] три года тому назад вышла замуж за Карла Иосифа Белля, майора на русской императорской службе, младшая же Шарлотта одиннадцать лет тому назад стала супругой барона Карла де Делен, пребывающего в герцогстве Юлих [18]. От этих детей до сих пор родились двадцать внуков [19]. В этом же 1733 г., когда Даниил Бернулли возвратился в Базель, Эйлер получил профессуру по высшей математике, а также надзор над географическим департаментом. Когда в 1735 г. Петербургской Академии было поручено какое-то очень трудное вычисление, которое нужно было выполнить за несколько дней, Эйлер взялся сделать его один и, работая днем и ночью, выполнил его за трое суток к величайшей своей чести, но и к великому несчастью, ибо, пораженный сильной лихорадкой, он долго тяжело болел, так что даже терял надежду на выздоровление. Здоровье было, наконец, восстановлено, но он полностью потерял правый глаз [20].

В 1741 г. Фридрих II, король Пруссии, вскоре по вступлении своем на престол, через своего посланника в Петербурге пригласил Эйлера на почетных условиях в Берлин и предложил ему профессуру по математике [21]. Эйлер принял предложение короля и с женой, двумя детьми и четырьмя племянниками [22], отправившись в путь в июне того же года через Волгаст благополучно приехал в Берлин и тотчас же вступил в предложенную ему должность. А в 1744 г., когда Академия наук, проект реформы которой был принят еще три года тому назад, была счастливо восстановлена, он был назначен директором математического класса. Однако, хотя Эйлер и оставил Петербург, он поддерживал непрерывную связь с профессорами Петербургской Академии [23] и посылал туда плоды своих неустанных занятий, которые помещались в «Комментариях» [24], и от Академии он получал с момента своего отъезда и до возвращения ежегодно 200 рублей в качестве вознаграждения. Находясь в Берлине, кроме служебных обязанностей, он вел еще и частные занятия, среди которых следует упомянуть, к великой его чести, что в 1742 г. он по поручению короля обучал математическим наукам герцога Вюртенбергского и двух его братьев [25]. Исключительной ученостью Эйлер снискал себе большую благосклонность короля и королевской фамилии [26].

Особое расположение к нему питал Генрих, маркграф Шветский, который очень высоко ценил Эйлера и поручил ему обучать математике своих дочерей-принцесс и особенно нынешнюю принцессу Дессау, ту самую принцессу, которой Эйлер писал письма о физических и философских материях, изданные в 1768 г. в Петербурге под заглавием «Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujéts de physique et de philosophie» [27].

Сам король Фридрих нередко приглашал Эйлера к себе, с успехом пользовался его помощью в делах большой важности, как, например, по управлению казной, по постройке искусственного водоснабжения в Сан-Суси [28], когда нужно было прорыть новые каналы или восстановить старые. Особенно большую пользу оказал Эйлер своими советами, когда в 1749 г. нужно было пронивелировать Финовский канал между Одером и Хафелем [29]. Помощниками ему в этой работе были назначены полковник де Гауди [30], кастелан де Бауман и старший сын Эйлера Иоганн-Альбрехт. В феврале 1749 г. Лондонская королевская Академия избрала Эйлера в число своих членов. В 1748 г., когда скончался Бернулли-отец, ученые, возглавляющие университет в Базеле, настоятельно просили Эйлера занять его кафедру по математике, но он по известным причинам не принял их приглашения и решил оставаться за границей [31]. В 1750 г. он поехал с женой и старшим сыном Альбрехтом во Франкфурт-на-Майне, чтобы привезти оттуда в Берлин свою мать, которая, переехав к сыну, жила до 1761 г. В 1753 г., 21 декабря, он был избран членом физико-медицинского общества в Базеле, а 15 июня 1755 г.—членом Парижской Академии наук [32]. Когда 9 октября 1760 г. Берлин был занят русскими и среди прочего было разграблено также имение Эйлера в Лютцове [33] близ Шарлоттенбурга, он не только получил от

Дом, в котором Л. Эйлер проживал в Берлине в 1743—1766 гг. (Беренштрассе 21/22).

Мемориальная доска на доме, в котором жил Л. Эйлер в Берлине.

командующего войском по 100 рублей за каждую уведенную корову, но и от императорского двора ему были возмещены убытки в четыре тысячи флоринов [34]. После 25 лет, проведенных им в Берлине, императрица Екатерина стала настойчиво приглашать Эйлера возвратиться и добилась этого тем легче [35], что в Берлине у него сложились неблагоприятные обстоятельства, о которых здесь рассказывать неуместно. С величайшим трудом получив от короля увольнение, он вместе с сыном Иоганном-Альбрехтом 29 мая 1766 г. публично простился с Академией и 9 июня с женой и двумя старшими сыновьями (младшего, состоявшего на военной службе, король не пожелал отпустить, и, когда он несколько раз в письмах просил об увольнении, король приставил к нему стражу; наконец, однако, по настоятельным просьбам императрицы, он был освобожден и получил разрешение ехать к отцу), а также с двумя дочерьми и несколькими родственниками оставил Берлин и, по приглашению короля Польши, переданному через князя Чарторыйского, направил свой путь через Польшу. В Варшаве, радушно принятый королем и королевскими вельможами, он провел десять дней и с величайшими почестями 1 июля продолжил свое путешествие, а 12-го прибыл в Митаву, где герцог Курляндии оказал ему пышный прием и задержал его до 16-го. В Петербург он прибыл 17/28 июля и тотчас же был представлен императрице, которая приняла его очень любезно и приказала быть у нее за столом. Затем он купил большой каменный дом, на оплату которого императрица по собственному побуждению пожаловала ему 8000 рублей и освободила его от постоя солдат, каковой привилегией он пользовался также и в Берлине [36]. После этого 6 ноября 1766 г. он был принят в число членов Петербургского вольного экономического общества, в записках которого встречаются различные сочинения Эйлера [37], а также в число членов славнейшей комиссии, которая управляет хозяйственными делами Академии [38]. Последнюю должность он сложил с себя в 1774 г. [39]. Но судьба человека изменчива, и это блистательное счастье немало было омрачено. Его постигла тяжелая болезнь, которая полностью отняла у него зрение [40]. А так как беда никогда не приходит одна, за этим несчастием его постигло еще другое: когда 23 мая 1771 г. пожар в Петербурге обратил в пепел более 550 домов и нанес убыток, как тогда оценили, в 2 000 000 флоринов, сгорел и его дом с большей частью имущества и частью библиотеки [41]. Сам он погиб бы тоже, если бы не Петр Гримм [42], базелец, который, помня о своем слепом соотечественнике, побужденный божьей волей, с опасностью для жизни проник в уже горящий дом и, подобно Энею [43], на плечах вынес Эйлера из пламени. Рукописи Эйлера и бо́льшую часть книг спас из огня директор Академии граф Орлов, и Эйлер с помощью благодеяния императрицы, которая подарила ему для этой цели 6000 рублей, построил новый дом. В том же году 15 сентября барон де Венцель сделал удачную операцию, при которой присутствовали, кроме семьи Эйлеров, также господин Крузе, императорский советник и архиатр, и восемь других врачей, и полностью вернул Эйлеру зрение, по крайней мере на один глаз, причем операция длилась три минуты. Но это счастье было непродолжительным, ибо, не соблюдая после этого осторожности в пользовании зрением, он вторично потерял его почти полностью, перенося невыразимые боли [44]. И к этому несчастью вскоре присоединилось еще другое. 10 ноября 1773 г. он потерял любимую супругу, которая имела от роду 66 лет 7 месяцев 5 дней. Позднее, 28 июля 1775 г., он был отмечен новой почестью и принят в члены Флиссингенского [научного] общества. Нуждаясь в посторонней помощи, он вступил во второй брак 28 июня 1776 г. с Соломеей Гзелль, сводной сестрой умершей супруги [45].

О величайшей и постоянной выносливости Эйлера в труде свидетельствуют не только его опубликованные сочинения и многочисленные заметки в ученых журналах, но и решения задач, предложенных Парижской Академией, за которые он часто получал объявленную премию, например, в 1738 г. третью часть премии, в 1740, 1741 и 1744 гг. полную премию, в 1747 г. половину премии в 4000 ливров, в 1748 г. полную премию, в 1752 г. двойную премию, в 1753, 1756, 1759, 1768 и 1772 гг. [46] снова полную премию. Он также получал различные знаки почета и уважения как за научные наблюдения, которые он сообщал ученому миру, так и за полезные услуги, оказываемые тому или другому [государству], как, например, в 1765 г. от английского парламента за поправки к теории Луны, которыми воспользовался Майер в своих таблицах [47], 300 фунтов стерлингов, от базельского магистрата за поручение, выполненное у короля Пруссии, большую золотую медаль [48], от короля Франции за повторное и введенное в морские школы издание «Theorie complètte de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux» и т. д. 6000 ливров [49], за то же сочинение, переведенное на русский язык г-ном Головиным, адъюнктом Петербургской Академии, и преподнесенное императрице Российской, он получил от императрицы 2000 рублей в 1778 г. От нее же по случаю мира, заключенного с турками, — большую золотую медаль; от короля Швеции во время его пребывания в Петербурге [50] — золотую медаль, и другое. Он состоял в обширной переписке с выдающимися людьми, например с королем Пруссии [51] и Польши [52], с прусскими герцогами, с Иоганном Бернулли-отцом, Николаем Бернулли [53], братьями Николаем и Даниилом Бернулли, Галлером [54], Д'Аламбером [55], Бугером [56], Кондамином [57], Мопертюи [58], Клеро [59], Лагранжем [60], маркизой дю Шатлэ [61], Сегнером [62], Кестнером [63], маркизом дю Кондорсэ [64], Лаландом [65], ле Монные [66], Фризи [67], Босковичем [68], Гедлингером [69] и многими другими. И в настоящее время, хотя он почти полностью лишен зрения, угнетен старостью, трудами, болезнями и несчастиями, он не перестает работать, о чем свидетельствуют многочисленные статьи под его именем, которые и сейчас появляются в «Актах» Петербургской Академии, а также свыше 200 исследований, готовых к печати, которые он в течение последних пяти лет продиктовал и с помощью своего славного Фусса представил или докладывал в Академии и которыми и после его смерти, — о, если бы она наступила позднее! — долго будут украшаться «Акты» Академии [70].

Среди его заслуг перед наукой не на последнем месте следует упомянуть и воспитание, которое он дал сыновьям и своему соотечественнику, только что упомянутому Фуссу. Не следует умолчать и о том, что человека в остальном необразованного, по профессии портного, которого Эйлер в 1766 г. привез из Берлина в Петербург в качестве слуги, он так обучил, что тот мог производить труднейшие алгебраические вычисления, записывать под диктовку своего господина и готовить сочинения к печати. Но как бы ни была велика ученость нашего Эйлера, он, однако, не забывает о благочестии, вере и любви к ближнему. Это последует за ним на небеса, это будет с ним вечно, если даже остальное, преданное забвению, пусть через много веков, погибнет. Достойно упоминания также и то, что восемь из профессоров Петербургской Академии были учениками Эйлера по математике. Ниже мы приводим современное состояние этой славной Академии, и те, которые занимают место 3, 4, 5, 10, 11, 14, 16, 17, с благодарностью называют себя слушателями Эйлера [71].

* * *

ИОГАНН-АЛЬБРЕХТ ЭЙЛЕР, действительный член Берлинской Академии, инспектор Берлинской королевской обсерватории, профессор физики в Петербурге, надворный советник, член хозяйственной комиссии Петербургской Академии, директор пехотного кадетского корпуса, почетный член академий Берлинской, Мюнхенской, Петербургского [вольного] экономического общества, академий Стокгольмской, Флиссингенской и др., непременный секретарь Петербургской Академии, родился в Петербурге 27 ноября н. ст. 1734 г. у отца Леонарда Эйлера из Базеля, математика, физика, астронома, стоящего выше всех похвал, и матери Екатерины Гзелль. Семи лет он со своими родителями совершил тяжелое путешествие в Берлин, куда приехал благополучно. Будучи как бы от рождения предназначенным для науки и получив надлежащее первоначальное образование путем частных занятий и в публичной школе, он продвигался в своем обучении быстрыми шагами и приобрел незаурядные познания в философии. Когда необходимые знания по гуманитарным наукам были им получены в обычной школе, и разум его был достаточно подготовлен к более высокому, отец сам принялся за обу-

И.-А. Эйлер. (Портрет с работы Э. Хандмана, 1756 г.)

чение любимого сына и начал преподавать ему лучшие искусства и науки. Главным образом он занимался с ним математическими дисциплинами, арифметикой, геометрией, тригонометрией, алгеброй, чистой и прикладной математикой, физикой и астрономией и излагал их ему наиболее легким методом. Сын, обладая прекрасными способностями и пылкой жаждой к знаниям, был прилежным и внимательным слушателем своего отца, наблюдательно подражал ему и очень скоро приобрел исключительную опытность в этих науках. Когда это было обнаружено и достаточно публично доказано в 1749 г. в поездке вместе с отцом для измерения Финовского канала и в других случаях, юноша, едва достигший двадцати лет, был удостоен избрания в Берлинскую королевскую Академию наук и словесности. Это избрание и назначение действительным членом Академии состоялось 6 декабря 1754 г., а за этим последовало в 1756 г. назначение жалованья в 200 талеров в год. За этой почестью последовала новая, когда ему в 1758 г. было поручено инспектирование королевской обсерватории. В этой обсерватории он сам много работал и среди прочего в 1759 г. наблюдал и описал появившуюся тогда комету. В том же году, отправившись в Торгау, чтобы проведать лежавшего там больным младшего брата и, если это будет возможно, увезти его в Берлин, он пробыл некоторое время в Виттенберге и завязал там дружбу с профессорами Берманом [72] и Бозе [73]. В это время он заболел сыпным тифом, свирепствовавшим тогда в прусском войске, и с трудом вылечился. 27 апреля 1760 г. он женился на Анне Шарлотте Софии Гагемейстер, старшей дочери господина Гагемейстера, королевского советника и верховного кастелана. Она сделала его отцом девяти детей, из которых сейчас здравствуют четыре сына и четыре дочери. В 1761 г. базельский магистрат даровал ей право почетного гражданства. В 1763 г. управители Берлинской Академии, отдавая должное исключительным заслугам ученого, повысили его годовое жалованье до 400 талеров [74]. Но, получив приглашение от императрицы Московии на почетных условиях, он 26 апреля 1766 г. решил принять предложенную ему профессуру по физике. В качестве жалованья ему не только было обещано 2000 флоринов в год, не считая казенной квартиры, но и жене, если она переживет мужа, обещали выплачивать по 1000 флоринов в год. Итак, он вместе с родителями, женой и двумя детьми оставил Берлин 9 июня 1766 г. и прибыл в Петербург 28 июля. Приступив без промедления к исполнению возложенных на него обязанностей, он благодаря своей учености и усердию вскоре достиг новых почестей. В том же 1766 г. он был назначен членом славнейшей Комиссии для хозяйственного управления Академией, каковую должность он сложил с себя в 1774 г. 23 февраля 1769 г. он был назначен секретарем так называемой конференц-коллегии. 27 февраля 1776 г. ему была поручена должность инспектора кадетского корпуса. Эти и другие должности он исполнял с величайшей добросовестностью, искусностью, справедливостью и с большой пользой и выгодой для тех, кто их ему доверил. Славнейшие Академии оказали ему честь, приняв его в число своих членов: Берлинская 5 декабря 1754 г., Мюнхенская 21 октября 1762 г., Петербургское [вольное] экономическое общество 6 ноября 1766 г., Стокгольмская Академия 1 мая 1771 г., Флиссингенская 28 июня 1775 г. До сего времени ему было присуждено академиями семь премий за ученые труды: одна Гёттингенским научным обществом, три Петербургской Академией, одна Мюнхенской Академией и две Парижской Академией. Сочинения, за которые он получил эти премии, следующие:

Enodatio quaestionis: Quomodo vis aquae [aliusve fluidi] maximo cum lucro ad molas circumagendas, aliave opera perficienda, impendi possit? (Каким образом может быть с наибольшей пользой применена сила воды для вращения мельниц и выполнения других работ?). Награждена премией Гёттингенского королевского научного общества 9 ноября 1754 г. Гёттинген, 1754.

Disquisitio de causa physica electricitatis (Исследование о физической причине электричества). Удостоена премии Петербургской Академии наук 6 сентября 1755 г. Петербург, 1755 [75].

Meditationes de motu vertiginis planetarum, ac praecipue Veneris (Размышления о движении планет, и особенно Венеры, вокруг их центра тяжести). Премирована

Петербургской Академией наук 6 сентября 1760 г. Петербург, 1760.

Beantwortung der Preisfrage: In was für einer Verhältnis so wohl die mittlere Bewegung des Monds, als auch seine mittlere Entfernung von der Erde, mit den Kräften stehn, welche auf den Mond würken? (Ответ на конкурсный вопрос: В каком отношении находятся как среднее движение Луны, так и ее среднее расстояние от Земли, и те силы, которые действуют на Луну?). Это сочинение получило премию Курбаварской Академии в 1762 г. и помещено в «Актах» Мюнхенской Академии, т. 4 [ч. 2., Мюнхен, 1767].

Meditationes de perturbatione motus cometarum ab attractione planetarum orta (Размышления о возмущении движения комет, происходящем от притяжения планет). Диссертация получила премию Петербургской Академии наук 23 сентября 1762 г. Петербург [1762].

Sur l'Arrimage des vaisseaux et quelles bonnes qualités on en peut procurer à un vaisseau. (О грузоподъемности кораблей, и какие преимущества можно отсюда вывести для корабля). Премирована Парижской Академией наук и опубликована в Recueil des pièces qui ont remporté le prix de l'Académie royale des Sciences, 7, Paris, 1769.

Nouvelle théorie de la lune et détermination de toutes les inégalités dans son mouvement (Новая теория луны и определение всех неравенств в ее движении). Этому сочинению была присуждена премия Парижской Академии наук в 1770 г., и оно вместе с предыдущими опубликовано в собрании диссертаций, премированных той же Академией.

Прочие сочинения:

[Приведен список из 36 названий][76]

Он возглавлял издание «Nova Acta Petropolitana» и отдельным томам предпосылал обзорную и историческую часть, в связи с чем он состоял в обширной ученой переписке с величайшими учеными [77].

Он является также автором многих статей в Encyclopedia Ebrodunensis [78]. Принимал участие в составлении лунных таблиц, изданных отдельно, а также в работе по созданию большой и замечательной книги, которая вышла под заглавием: Theoria motuum lunae nova methodo pertractata, una cum tabulis astronomicis, unde ad quod vis tempus loca lunae expedite computari possunt, incredibili studio atque indefesso labore trium Academicorum. J.-A. Euleri, W.-L. Krafft, S.-A. Lexell. Opus dirigente Leonardo Eulero (Теория движения луны, исследованная новым методом, вместе с астрономическими таблицами, с помощью которых легко можно вычислить положение луны в любой момент; произведение неутомимых трудов и стараний трех академиков, И.-А. Эйлера, В.-Л. Крафта, И.-А. Лекселя под руководством Леонарда Эйлера). Петербург, 1772.

* * *

КАРЛ ЭЙЛЕР, доктор медицины, медик французской колонии в Берлине, императорский архиатр в Петербурге, ординарный медик Петербургской Академии наук, коллежский советник Российской империи, родился 15 июня 1740 г. в Петербурге. Отец его—выдающийся человек Леонард Эйлер, первейший из великих математиков, мать—почтеннейшая матрона Екатерина Гзелль. Почти годовалым ребенком он с родителями переехал в Берлин и, когда стал подрастать, был заботливо обучен основам благочестия и наук. Кроме частных учителей, он посещал также школу и благодаря выдающимся способностям, которые он проявлял уже с ранних лет, а также исключительному трудолюбию он и в частных занятиях, и в школе много преуспел в учении. Простившись с учителями своего детства, он перешел в обучение к отцу и от него получил начала философии и особенно математики. Приобретя прекрасные познания в философии и математике, он принялся за более высокие науки, для которых эти низшие являются как бы вспомогательными, и по собственному побуждению посвятил себя медицине. По совету отца он обучался у наиболее известных в этой области мужей и с величайшим вниманием слушал их лекции различного рода, по ботанике, анатомии, физиологии, теоретической и практической. В 1756 г. он сопровождал знаменитого Лемана [79] в ботанической и минералогической экспедиции в Тюрингский лес и в другие области Германии, и его участие в экспедиции было весьма плодотворным. В 1760 г. он предпринял другое научное путешествие, в Бельгию и, благополучно возвратившись оттуда, в следующем году вместе с отцом [80] поехал в университет в Галле и усердно продолжал занятия медициной. По медицине его учителями были опытнейшие мужи Бюхнер [81] и Бемер [82], что же касается математических наук, он часто имел беседы с известным Сегнером [83]. Успешно пройдя курс обучения по медицине и блестяще выдержав соответствующие экзамены, он был удостоен надлежащего звания и в 1762 г. стал доктором медицины. В том же году он возвратился в Берлин, снабженный знаниями и титулами, и уже в следующем 1763 г. был назначен там же медиком французской колонии. 30 мая 1766 г. он вступил в брак с Анной Эмилией Белль, старшей дочерью господина Белля, королевского советника, а через десять дней после свадьбы с женой и всей семьей отца отправился в Петербург. Здесь он тотчас же получил почести и должности, достойные его выдающейся учености, добросовестности и опытности. В год своего приезда он был назначен императорским архиатром, в 1772 г. Академия наук назначила его своим медиком, а в начале 1779 г. он был удостоен высшей и редчайшей почести, когда сама императрица даровала ему звание коллежского советника. Потомство наш Эйлер имеет богатое, двух сыновей и шесть дочерей. О, если бы он долгие лета тешился этой радостью [84]! Уже в 1760 г. он получил премию Парижской Академии за ученое сочинение, название которого приведено ниже:

Сочинения:

T. VIII. Récueil des pièces, qui ont remporté le prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris.

Meditationes in quaestionem, utrum motus medius planetarum semper maneat aeque velox, an successu temporis quampiam mutationem patiatur? et quaenam sit eius causa? (Sùr les altération sdu moyen mouvement des Planètes)

(Размышления по вопросу, имеет ли среднее движение планет всегда одинаковую скорость или оно претерпевает какие-нибудь изменения с течением времени? Какова причина такого изменения? (Об изменениях среднего движения планет)).

Dissertatio inauguralis de venae sectione in febribus catarrhalibus non semper nociva ([Докторская] диссертация о пользе вскрытия вены при катарральных лихорадках). Галле, 1762.

* * *

ХРИСТОФОР ЭЙЛЕР, майор артиллерии Российской империи, директор оружейного завода в Сестрорецке, физик и астроном, родился в Берлине 1 мая 1743 г. у отца, Леонарда Эйлера, самого выдающегося из математиков, и матери, Екатерины Гзелль. Мальчиком, будучи отправленным в школу, он быстро воспринял то, что там преподавалось, и приобрел надлежащие основы благочестия, языков и искусств. Когда он успешно завершил школьное обучение и достаточно окреп, отец нашел его уже созревшим для более полного развития его дарований и более усиленных занятий науками. Большую часть этого труда он взял на себя, а другую часть возложил на старшего сына. Успешно овладев основами философии и математики, наш Эйлер вскоре перешел от теории к практике и посвятил себя военному делу. Он сопровождал короля в походах и являл замечательные образцы своей искусности, благодаря чему снискал благосклонность самого короля и удостоился различных почестей. В 1759 г. он, находясь в Торгау, тяжело заболел и был при смерти, но с божьей помощью выздоровел. Когда в 1766 г. отец со всей семьей возвращался в Петербург, он хотел взять с собой и младшего сына и просил об этой милости короля, но король отказал в этом и оставил его при себе. И сын неоднократными письмами и прошениями добивался своего увольнения, но все напрасно. Ибо мудрейший король был очень огорчен, что лишился всей семьи Эйлеров, а этот юноша подавал ему особенно большие надежды. Опасаясь, чтобы он не бежал тайно, король приказал держать его под стражей. Наконец, однако, и только благодаря авторитету и вмешательству императрицы Московии он был отпущен и как бы послан в дар императрице и отцу. Вскоре он прибыл в Петербург к величайшей радости родителей. Императрица приняла его на государственную службу, и он был назначен директором оружейного завода, строящегося в Сестрорецке, близ Финского залива, и майором артиллерии. Он был в числе тех астрономов, которые по поручению имп. Академии наук в 1769 г. были посланы в различные районы Российской империи, чтобы наблюдать прохождение Венеры через диск Солнца. Сам он наблюдал это прохождение в Орске, Оренбургской губернии, близ реки Урал, и в этом путешествии он определил и описал положение многих пунктов, как, например, Черкасск, Дмитриевку, Таганрог, Кременчуг, Елизаветинскую крепость, Запорожскую сечь, Самару, Переволочну, Глухов; когда эти трудные путешествия благополучно завершились, за ними последовали немного позднее еще более трудные походы, ибо он в течение нескольких лет участвовал в войне против турок. Но когда возмутитель спокойствия был принужден к заключению мира, наш Эйлер вернулся домой к мирным занятиям [85].

Сочинения:

В Novi Commentarii Acad. Sc. Petropolitanae:

Т. 14, ч. 2, стр. 219. Observationes transitum Veneris per discum solis d. 24 Maj/4 Jun. 1769 spectantes in castello Orsk institutae (Наблюдения прохождения Венеры через диск Солнца, произведенные 24 мая/4 июня 1769 г. в крепости Орск).

Т. 20, стр. 541. Observationes astronomicae pro determinando situ geographico variorum per imperium Russicum locorum annis 1769 et 1770 factae. Eas recensuit A.-J. Lexell, Academiae Astronomus (Астрономические наблюдения для определения географического положения различных пунктов Российской империи, произведенные в 1769 и 1770 годах, рецензировал А.-И. Лексель, астроном Академии).

Observations astronomiques faites dans divers endroits [par M. Euler, Lieutenant au Service de Russie] (Астрономические наблюдения, произведенные в различных районах [г-ном Эйлером, лейтенантом на русской службе]). Recueil pour les astronomes, т. I [Берлин, 1771]. Рецензированы Иог. Бернулли, берлинским астрономом.

III. РЕЧЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО СТАТСКОГО СОВЕТНИКА ФОН ШТЕЛИНА В СОБРАНИИ АКАДЕМИИ НАУК 11 СЕНТЯБРЯ 1783 г., НА ТРЕТИЙ ДЕНЬ ПОСЛЕ НЕОЖИДАННОЙ КОНЧИНЫ СТАРЕЙШЕГО ЕЕ ЧЛЕНА Г-НА ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА[1]

Эйлер умер! Эйлера, самого великого математика нашего века и всех прошедших веков, глубочайшего философа нового времени, нашего Эйлера не стало. Душа его унеслась, а бренные останки лежат еще не погребенные перед полными слез глазами его близких. Праведные слезы исторгнуты этим внезапным несчастьем и безвозвратной утратой. В глубокий траур повергла нашу Академию наук кончина Эйлера, жизнь и творения которого были прекраснейшим ее украшением в течение полувека. Екатерина, великая императрица, мудрая правительница счастливого и могучего под ее скипетром государства по достоинству оценила Эйлера и, к счастью, возвратила его своей Академии, после того как он отсутствовал в ней 20 лет [2]. Екатерина Великая скорбит о невозвратимой утрате, и назначенная Ее Величеством достойнейшим директором Академии княгиня Дашкова удручена неожиданной смерью заслуженного академика, которого она, чтобы представить Академию во всей ее красе, лично привела из его дома и ввела в публичное собрание.

Какое впечатление произведет смерть Эйлера во всех частях света, где высоко ценятся и процветают науки! Каким тяжким ударом будет известие о кончине Эйлера для знаменитых математиков и великих мудрецов Европы, которые считали и почитали Эйлера своим учителем! Каких только возвышенных памятников в литературных творениях не будет воздвигать ему признание, обычно большее после смерти, чем при жизни, живое признание его огромных заслуг в развитии высоких наук, в открытии важнейших истин, до него не известных! Каких только высоких титулов и похвальных слов не напишет Справедливость на его могильном камне! Но слава его и удивительные научные заслуги были бы отражены в достаточной мере, если бы на могиле его не было написано ничего, кроме только Hic jacet Euler—Здесь лежит Эйлер.

Да, великий муж, мертвое тело твое мы со слезами проводим к погребению и тлению, но бессмертную память о заслугах твоих перед нашей Академией будем хранить и передадим грядущим поколениям.

Если мы в нашей пламенной преданности соорудим мраморный памятник славе, которой ты достиг, то дух твой, воплотившийся в столь многих великолепных сочинениях, и разум, поднявшийся над бесчисленными волнами, уже воздвигли тебе памятник гораздо более долговечный,—земле нашей вечностью равный.

Позвольте мне, сиятельнейшая княгиня и почтеннейшие господа члены Академии, вместо похвального слова бессмертным заслугам нашего, для нас все еще безвременно умершего, Эйлера, на том самом месте, с которого наш дорогой Эйлер время от времени представлял и зачитывал так много ученых сочинений, так много основательных исследований, так много новых открытий важнейших истин, позвольте мне лишь в несколько минут попытаться проследить этот великий дух, из которого, как из неиссякаемого источника, родилось столь много глубоких знаний и неопровержимых теорий, проследить его от его начала, в его все более и более мощном развитии и до этой внезапной кончины. При этом я могу очень кратко и бегло остановить ваше внимание лишь на самых выдающихся его качествах, которые в силу редкости своей вызывали удивление и выделяли его из миллионов других людей. В первое же мгновение этот выдающийся дух, его необычайное развитие и столь невообразимая высота, достигнутая его смелыми исследованиями и блестящими открытиями, вызывает удивление у всякого, кто обратит к нему свой взор, и внушает необычайное уважение к Эйлеру.

Иоганн Бернулли, величайший математик своего времени, первый открыл в молодом Эйлере способности выдающегося духа, который не только счастливо последует за его полетом, но даже поднимется выше его на крыльях времени. Он насыщал его необычайную любознательность труднейшими математическими теориями и восхищался его необыкновенной способностью все воспринимать и стремлению изо дня в день все глубже проникать в математические и физические науки.

На шестнадцатом году жизни Эйлер уже получил официально первую лавровую ветвь—ученую степень в университете родного города Базеля. На двадцатом году он опубликовал диссертацию De Sono (О звуке) и с успехом защитил ее в университете, после чего должен был занять кафедру профессора Физики [3], если бы он не воспылал желанием последовать за сыновьями своего учителя Бернулли, приглашенными в только что основанную Академию наук в Петербурге. И в том же году он счастливо прибыл сюда и был назначен первым преподавателем в академической гимназии [4]. Однако подобно тому, как известный Шурцфлейш на 24-м году жизни вдруг сложил с себя со славой ведомый им несколько лет ректорат одной солидной гимназии и оставил на кафедре надпись: Haec schola me non capit—эта школа слишком тесна для меня, точно так же очень скоро об Эйлере решила Имп. Академия наук: Haec schola illum non capit—эта школа слишком тесна для него. Академия забрала его из гимназии к себе, приняла в число своих членов и назначила профессором физики на место Бильфингера. Его великому духу открывались широкие пути к развитию его незаурядных дарований, чтобы по стопам Ньютона подняться над всеми предшественниками к небывалым высотам наук. Не проходило месяца, чтобы он своими исследованиями и статьями не поднялся бы все выше и выше в открытии новых истин и не привлекал бы к себе удивление всего ученого мира.

Его исключительная удачливость и быстрота в работе настолько укрепили в нем веру в свои силы, что он взялся в несколько дней выполнить вычисление, на которое астроном Делиль потребовал несколько месяцев времени. Ему говорили о невозможности это сделать, он же утверждал, что это возможно, и действительно взял на себя это вычисление, работал над ним три дня и три ночи и, к величайшему изумлению Делиля и всей Академии, представил на четвертый день готовым и правильным; однако, к сожалению, из-за необычайного напряжения сил он вскоре после этого заболел горячкой и был на волоске от смерти, но выжил, потеряв при этом один глаз. Все те явления в природе, которые, как ему казалось, могли быть исследованы, но еще никем до него не были изучены, он делал предметом своих исследований. Он исследовал, открывал и обосновывал свои открытия, вызывая одобрение и восхищение знатоков. Он решил труднейшие конкурсные задачи Парижской Академии наук и получал премию за премией. Я сам был свидетелем нескольких случаев, когда он наперед предсказывал, что получит премию Парижской Академии, и его предсказания всегда точно сбывались.

Когда в 1773 г. была объявлена задача о распространении света от неподвижных звезд до нашего глаза на земле (проф. Фусс говорит, что речь шла о задаче De igne—Об огне, но мне помнится, будто я не раз слышал от Эйлера, что это была задача De propagatione lucis etc.—О распространении света и т. д.), Эйлер как-то шутя говорил в одном обществе, что он имеет вычисления и убедительное доказательство к этой задаче, по его мнению, настолько точные и обстоятельные, что он мог бы быть уверен в получении премии, если бы только пожелал затратить время на развернутое несколько утомительное изложение. Мы все стали просить его и уговаривать, чтобы он и на этот раз, как он уже не раз это делал, доставил бы нашей Академии честь,—что один из ее членов снова получит французскую премию. И нам удалось его уговорить, он написал свою статью, послал ее на конкурс и получил премию.

Через несколько лет Парижская Академия снова объявила конкурсную задачу, не менее важную и не менее трудную. Эйлер как-то говорил, что он думал об этом вопросе и должен был бы получить премию, если бы пожелал взяться за перо, но ему не хотелось бы так бесстыдно снова конкурировать на премию во Франции, после того как там было премировано уже десять его сочинений.

Академия могла бы легко найти предлог, чтобы или вовсе обойти его сочинение или, по крайней мере, премировать его вместе с кем-нибудь другим. По настоянию друзей, просивших его, чтобы он еще хотя бы раз испытал справедливость и беспристрастие Парижской Академии, он решился написать свое сочинение, и оно получило премию. Но одно ли оно? Нет. С ним конкурировала маркиза дю Шатлэ, и премия была разделена между обоими [5]. Эйлер был рад этому, а еще больше был рад необычайно любезному письму прелестной маркизы, где она выражала ему свою радость и восхищение по этому необычайному случаю. Не удивительно, что при таких огромных заслугах Эйлера перед Парижской Академией она сочла для себя честью принять его в число своих членов. Однако положенное число—восемь иностранных членов—было постоянно заполнено и, следовательно, для него не было свободного места. Это стало известно королю. Его Величество тотчас же нашел способ ввести этого знаменитого ученого в ограниченное число иностранных членов Академии: последовал королевский указ, разрешивший Академии ввиду особых заслуг этого человека перед наукой сделать первое исключение из регламента Академии, и так Эйлер был первым, принятым в число членов Академии столь необычным образом, сверх положенного числа.

Лондонское королевское общество, Флиссингенская Академия в Зеландии и другие знаменитейшие научные общества в Европе, соревнуясь с Парижской Академией, приняли Эйлера в число своих членов. А несколько лет тому назад он получил еще диплом из Америки, диплом Бостонской Академии наук.

Я не излагаю здесь биографию нашего знаменитого Эйлера, которая могла бы составить солидную книгу; я не произношу торжественного похвального слова, которое потребовало бы не один час времени. Я касаюсь лишь того, что особо замечательно и особо достойно удивления в возвышенном и деятельном гении Эйлера, однако не могу не упомянуть о поразительном множестве созданных им работ, его замечательных сочинений, вышедших частью отдельными книгами, частью в виде многочисленных статей в «Комментариях» и «Актах» нашей Академии и в мемуарах других Академий наук. Что касается всех этих превосходных сочинений, всегда содержащих нечто новое, следует заметить, как о чем-то примечательном и достойном удивления, что ни одно из них никогда не оспаривалось кем-либо из иностранных ученых и никогда не было опровергнуто, наоборот, все, что выходило из-под его пера, встречало признание, высокую оценку и полное одобрение самых ученых знатоков.

Что же удивительного, что слава о научных заслугах Эйлера, распространившись по всему ученому миру, возбудила у великого короля, Фридриха прусского, большого знатока великих дарований, желание иметь Эйлера у себя! Его Королевское Величество, желая пригласить в свою возрожденную Академию наук в Берлине столь великого мирового ученого и знаменитого математика и оказать ему особый прием, поручил своему посланнику в Петербурге сделать Эйлеру выгодное предложение, и эти обещанные условия и преимущества побудили Эйлера принять это приглашение. Итак, он в 1741 г. покинул Петербург, но не Петербургскую Академию, ибо он остался ее иностранным членом с сохранением обычной пенсии и не только поддерживал постоянную переписку с Академией, но и присылал время от времени свои статьи для «Комментариев», так что ни один том не выходил без его имени и его работ. Кроме того, он обучал высшим наукам различных присылавшихся к нему из Петербургской Академии студентов.

Первая особая привилегия, предоставленная Эйлеру прусским королем, состояла в том, что в его честь была учреждена новая должность директора математического класса Берлинской Академии, и на эту должность был назначен Эйлер. Его Королевское Величество также вынужден был время от времени пользоваться ученостью Эйлера, основательнейшими вычислениями и суждениями этого великого математика в исполнении важных механических и гидравлических работ, постройке каналов, плотин и тому подобное.

Королевский кронпринц, ныне правящий герцог Вюртенбергский, принц Дессау и две принцессы королевской крови пожелали учиться у Эйлера и брали у него уроки по философии и математическим наукам, а когда эти светлейшие ученицы на некоторое время избрали своим местопребыванием Магдебург вместо Берлина, Эйлер, по их желанию, продолжал свои занятия с ними в форме писем. Это и есть те всеми любимые письма к немецкой принцессе, которые за последние несколько лет были уже несколько раз переведены на разные языки и переизданы. Они представляют доступное каждому человеку краткое изложение эйлеровской философии, которая до того времени была доступна только ученым математикам.

Итак, Петербургской Академии наук не доставало ее главного украшения в лице Эйлера, и это было тем более чувствительно, чем больше блистала повсюду слава самого знаменитого ее члена, бывшего вдали от нее.

Наша великая императрица Екатерина понимала значение наук и проницательным умом своим оценила заслуги Эйлера. Лишь несколько лет прошло, как она стала управлять своим обширным государством, и она уже вновь придала своей Академии наук ее прежний блеск и всемилостивейше пригласила Эйлера возвратиться.

Находясь в Берлине, еще в царствование императрицы Елизаветы, Эйлер из распространившейся повсюду молвы и особенно из сообщений своих академических корреспондентов часто получал самые надежные сведения о том, как высоко ценит науки тогдашняя великая княжна и ныне великая императрица Екатерина и как она неутомимым чтением избранных книг все более и более знакомится со всем, что есть в науках наиболее важного и полезного.

В подтверждение этому позднее распространились не только в Германии, но и по всей Европе вести о том, что Екатерина и со своего величественного царского трона озаряет столь отрадными светлыми лучами своей милости все науки и их главное обиталище—Петербургскую Академию наук.

Живое ощущение наступления счастливого времени для наук возбудило у Эйлера желание снова возвратиться в Россию, его второе отечество, страну, где впервые расцвели бесчисленные ростки его огромного плодотворного гения и произвели столь многие прекрасные плоды, достигшие полной зрелости. Свое желание такой перемены он выразил в письмах к своим петербургским друзьям.

Екатерина узнала об этом желанном обстоятельстве и велела согласно его желанию через своего посланника в Берлине сделать ему весьма лестное предложение и заверить его в самом милостивом приеме. Итак, Эйлер оставил Берлин после двадцатичетырехлетнего пребывания там и с радостным чувством снова возвратился в Петербург.

Но огромному несчастью суждено было уже в первый месяц после его счастливого возвращения в Петербург омрачить его светлые дни и нашу радость по поводу того, что он снова среди нас. Неожиданный случай поставил Эйлера перед очевидной опасностью потери его единственно уцелевшего левого глаза, опасностью полной слепоты и прекращения всякой работы в высших науках. Ученый мир, сознавая себя столь много обязанным ему, был глубоко опечален несчастием с его глазами и с горечью сожалел, что поразительно плодотворное перо Эйлера теперь, из-за почти полной потери зрения, вынуждено будет остановиться. Эйлер перенес долгое и мучительное лечение, которое, однако, к сожалению, вернуло ему только ощущение света от объекта, так что он видел человеческую фигуру, но отличить лицо одного человека от другого не мог. И никто больше не ожидал увидеть новые сочинения этого ученого. Но Эйлер, как только закончилось лечение, длившееся почти целый год, опять принялся писать с неиссякаемой силой. В первый раз после этого я встретился с ним однажды утром в его кабинете, когда он сидел, погруженный в вычисления, за столом с черной грифельной доской и писал по ней мелом. «Слава богу,—сказал я,—весь мир ошибается, полагая, что Эйлер больше не может читать и тем более писать». «Боже упаси,—отвечал он с улыбкой,—я могу и читать и писать, но только белым по черному, а не черным по белому». И таким способом письма пользовался с тех пор этот великий ученый и написал важнейшие сочинения.

Одним из наиболее значительных трудов этого периода является его Диоптрика или прекрасное трехтомное сочинение in quarto по оптике и оптическим инструментам, изданное нашей Академией (1770). Он создал его в уме в то самое время, когда вынужден был лечить свой единственный глаз и сидеть в полной темноте, а как только ощущение света вернулось к нему, он написал мелом эту книгу, которая была принята и оценена во всей Европе как самое совершенное сочинение в этой науке.

Не менее примечательным и удивительным представляется то, что Эйлер, урожденный швейцарец, не видавший других морей, кроме Балтийского моря и Финского залива, и, конечно, не плававший по морям, еще несколько лет тому назад издал в нашей Академии труд по кораблестроению и кораблевождению, принятый с величайшим одобрением всеми морскими державами Европы и введенный во флот как долгожданная книга, принесшая видимые улучшения в искусство постройки и вождения кораблей. Французское королевское Адмиралтейство, оценив существенную пользу этой книги для своего флота, пожелало выразить свою признательность знаменитому автору и исхлопотало для него у короля премию в 6000 французских ливров. Но еще более милостиво вознаградила за это своего Эйлера наша императрица, подарив ему 2000 рублей.

С каким уважением вспомнят благодарные потомки о созданном Эйлером единственном пригодном методе для сравнения и очень скорого вычисления столь многих наблюдений последнего прохождения Венеры через Солнце, проводимых в столь различных пунктах земли, метод, состоявший главным образом в сравнении всех наблюдений с наблюдениями в Отогайти и Калифорнии. Тем самым истинные параллаксы и отсюда действительная величина и истинные расстояния планет нашей солнечной системы друг от друга были определены так точно, как еще никому до сих пор не удавалось определить. Всему ученому миру известно, что это вычисление, проверенное знаменитейшими астрономами нашего времени, принято и признано как имеющее первостепенное значение. Эта открытая в конечном итоге весьма важная истина доставила исследователю не только большую славу, но и большое удовольствие, и он не раз говорил по различным поводам. «Эта найденная в конце концов истина стоила мне и г-ну Лекселю много времени и труда, но она принесла мне огромную радость».

В этой речи, обращенной к Вам, высокочтимые члены Академии, к вам, поверженным в траур и глубоко скорбящим о неожиданной смерти Эйлера, я должен был бы далеко выйти за отведенные мне пределы, если бы пожелал коснуться хотя бы самого выдающегося и особо примечательного из остальных столь многочисленных сочинений нашего великого учителя и ученого, не менее важных, чем только что упомянутые. Но я ограничиваюсь лишь беглым очерком жизни Эйлера, до самой смерти состоявшей в беззаветном труде, в неутомимых исследованиях и счастливых открытиях важных и до него не изведанных истин, с которыми он в своих сочинениях знакомил все культурные страны земного шара для просвещения разума человеческого и для пользы человеческого общества, к чести нашего века и Государства Российского, во славу великой императрицы Екатерины, под милостивой сенью которой его постоянно бодрый дух мог всегда работать в спокойном довольстве и ничем не омрачаемой радости.

Он любил истину, с юных лет страстно искал ее повсюду, неутомимо шел по ее следам, находил ее, обретал ее сокровища, и она сопровождала его всю жизнь. Да, она не покинула его и на закате его дней, в тот час, когда по определению непостижимого провидения должно было обрушиться ветхое строение его жизни. Как только он почувствовал, что его старческое тело более не может служить ему, а жизненные силы и сознание покидают его, он произнес последние слова, истинность которых тотчас подтвердилась: «Я умираю, я умираю»...Так умер Эйлер.

ПРИМЕЧАНИЯ

I. К автобиографии Леонарда Эйлера

1. Публикуемая в переводе автобиография Эйлера записана под его диктовку старшим сыном Иоганном-Альбрехтом. Оригинал на немецком языке хранится в Архиве АН СССР, ф. 21, оп. 1, № 105. Немецкий текст был опубликован (с некоторыми неточностями) П. П. Пекарским в приложении к статье «Екатерина II и Эйлер» (Записки имп. Академии наук, т. 6, СПб, 1865, стр. 75—77).

Род Эйлеров в Базеле берет начало от некоего ремесленника Ганса-Георга, переехавшего в Базель из Линдау в 1594 г. Сыновья и внуки Ганса-Георга в XVII в. были ремесленники. Позднее среди Эйлеров появляются и пасторы. Подробные сведения о роде Эйлеров содержатся в статье Фр. Буркгардта «Zur Genealogie der Familie Euler in Basel» в «Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Basel», т. 19, 1908, стр. 122—136.

В Архиве АН СССР, в фонде «Ученой корреспонденции», есть письмо племянника Эйлера Христофа Генгенбаха, сына сестры Эйлера Анны-Марии, к сыну Эйлера Иоганну-Альбрехту от 21 июля 1779 г. По просьбе Эйлера Генгенбах сообщает известные ему сведения о некоторых предках и родственниках Эйлеров в Базеле. Об отце Эйлера он пишет следующее (письмо не опубликовано; оригинал письма на немецком языке, ф. 1, оп. 3, № 64, л. 230): «Пауль Эйлер родился 25 февраля 1669 г. Его родителями были Пауль Эйлер и Анна-Мария Гасснер. В 1701 г. он был назначен пастором в здешний сиротский приют, в 1704 г. стал проповедником в [соборе] Св. Якова... В 1708 г. он был назначен пастором в Риэн и вступил в службу 11 ноября». Однако следует указать, что даты, приведенные в письме, в ряде случаев расходятся со сведениями в вышеупомянутой статье Буркгардта, основанной на документальных источниках, где годами жизни Пауля Эйлера названы 1670—1745, начало службы в соборе Св. Якова 8. VIII 1703 г., а в Риэне—27. VI 1708 г. Пауль Эйлер обучался в Базельском университете, куда он поступил 1. X 1685 г., а на теологический факультет он записался в 1688 г.

2. О матери Эйлера Маргарите Брукер (Эйлер пишет ее фамилию Bruckerin—«in» как окончание женского рода: некоторые биографы называют ее Брукнер) в биографической литературе об Эйлере нет почти никаких сведений, кроме годов ее жизни (1677—1761) и указания, что она происходит из рода, давшего Базелю многих известных ученых. В письме Генгенбаха о матери Эйлера написано: «В марте 1706 г. он [Пауль Эйлер] женился на Маргарите Брукер, дочери покойного Иог. Генриха Брукера, бывшего пастора в [неразборч.] и в госпитале, и Марии Магдалины Фабер».

3. Яков Бернулли (1654—1705)—выдающийся швейцарский математик профессор математики в Базеле. Под его руководством отец Эйлера в 1688 г. защищал диссертацию «Об отношениях и пропорциях».

4. Христоф Рудольф—немецкий математик первой половины XVI в. Его учебник «Die Coss» (Алгебра) в течение двух веков был одним из популярных пособий при обучении математике. Учебник издан в 1522 г., а после смерти Рудольфа (1550) переиздан с дополнениями профессором математики Иенского университета Михаэлем Штифелем под заглавием «Die Coss Christoffs Rudolffs mit schönen Exempeln der Coss gebessert und sehr gemehrt», Кенигсберг, 1553. Coss—старое немецкое название алгебры. В публикации П. П. Пекарского вместо Coss ошибочно напечатано Losz, и эта ошибка проникла в биографию Эйлера в первом томе Истории имп. Академии наук П. П. Пекарского, где на стр. 249 это слово истолковано как фамилия автора учебника и сказано, что отец Эйлера обучал сына, «руководствуясь при этом трудом Рудольфа Лоса (Losz)».

5. Эйлер в Базеле жил у бабушки со стороны матери, у вдовы пастора Брукера.

6. В подлиннике—humaniora. Так обозначалось изучение классической древности и главным образом древних языков, которое в школе того времени рассматривалось как основа общего образования.

7. Иоганн Бернулли (1667—1748), выдающийся швейцарский математик, с 1696 г. профессор математики в Гронингене, с 1705 г. занял место умершего брата Якова Бернулли в Базельском университете.

8. «Prima laurea» в Базельском университете—первая ученая степень, предшествовавшая магистерской. Она соответствовала степени баккалавра. По этому поводу в письме Генгенбаха (см. прим. 1) сказано следующее: «9 июня 1722 г. он [Леонард Эйлер] произнес на степень «Prima laurea» речь в похвалу умеренности». Об этой речи нет упоминания ни в одной из известных мне биографий Эйлера. Однако рукопись этой речи сохранилась в библиотеке Базельского университета вместе с двумя другими юношескими рукописями Эйлера. Об этом мы узнаём из статьи П. Шафхейтлина (P. Schafheitlin) «Eine bisher unbekannte Rede von Leonhard Euler» в «Sitzungsberichte der Berliner Mathem. Gesellschaft» (Jahrg. 24, Гёттинген, 1925). Автор статьи публикует две из трех рукописей, третью же «De temperantia» он не публикует, поскольку она не относится к математике, а только упоминает о ней, указывая, что она написана в 1722 г.

Временем получения магистерской степени Эйлер называет 1723 г., биографы Эйлера указывают дату 8 июня 1724 г. Кажущееся расхождение, однако, разъясняется в публикуемой выше биографии (см. стр. 19), из которой мы видим, что получение магистерской степени происходило двумя актами: присуждением и торжественным присвоением. Эйлер имеет в виду первый из них. При этом следует заметить, что получение магистерской степени в возрасте 16—17 лет в условиях университетов того времени не было явлением исключительным. В этом убеждают нас биографии многих базельских ученых XVIII в. Более того, известно, что одновременно с Эйлером получил степень магистра Иоганн II Бернулли, который был на три года моложе Эйлера.

9. Постановление Сената об учреждении Академии наук в Петербурге состоялось 28 января 1724 г. Первые конференции академиков начали собираться в августе 1725 г. См. статью А. И. Андреева «Основание Академии наук в Петербурге» в сборнике «Петр Великий», М.—Л., 1947, стр. 284—333.

10. Сыновья Иоганна Бернулли—Николай Бернулли (1695—1726), философ, юрист и математик, профессор в Базеле, и Даниил (1700—1782), философ, физиолог и в будущем известный математик, были приглашены на русскую службу и прибыли в Петербург 27 октября 1725 г. ст. ст.

Николай Бернулли стал профессором по кафедре механики, Даниил Бернулли—профессором по кафедре физиологии, а впоследствии по кафедре высшей математики.

11. Постановление о приглашении Эйлера в Академию наук состоялось 17 декабря 1726 г. ст. ст. В протоколах Канцелярии от 17 декабря за подписью Блюментроста читаем: «По указу е. и. в. велено Эйлеру быть при академии. И оному надлежит послать на проезд денег сто двадцать рублев, векселем, чрез профессора Даниеля Бернулли, записав в расход, с распискою и на счет академический поставить» (Материалы для истории имп. Академии наук, т. I, СПб, 1885, стр. 209).

12. Известие о приглашении в Петербургскую Академию Эйлер получил в письме от Даниила Бернулли из Петербурга без даты; письмо опубликовано в сборнике П. Фусса «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle», т. II, СПб, 1843, стр. 409—410. В русском переводе почти весь текст письма приведен П. П. Пекарским в «Истории имп. Академии наук», т. 1, СПб, 1870, стр. 250—251.

13. По этому поводу Эйлер пишет 9 ноября 1726 г. президенту Академии Блюментросту (оригинал на французском языке хранится в Архиве АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 13, лл. 241, 242 об. полный текст см. Г. К. Михайлов, к приезду Леонарда Эйлера в Петербург.— Изв. АН СССР, отд. техн. наук, № 3, 1957, стр. 10—37) следующее:

«Милостивый государь,

Честь, которую Вы, Ваше Превосходительство, оказали мне, пригласив меня в Вашу славную Академию, обязывает меня написать Вам и засвидетельствовать Вам мое почтение. Господин Бернулли, который находится в Петербурге, прислал мне письмо, написанное к нему Вашим Превосходительством, где Вы сообщаете условия, на которых Вы принимаете меня на службу в Вашу Академию и которые я решил принять; и если бы морские бури это позволили, я выехал бы еще в этом месяце, чтобы лично выполнить свою обязанность и полностью посвятить себя служению Академии. Но так как зимнее время мешает мне выехать сейчас, я предполагаю начать путешествие наступающей весной и даже уже в марте месяце, если так будет угодно Вашему Превосходительству. Я приложу все свои старания, чтобы больше подготовить себя к исполнению своих обязанностей и к ревностному служению Академии...»

В хранящейся в Архиве АН СССР (ф. 136, оп. 1, № 129) переплетенной тетради, содержащей многочисленные черновые записи и наброски Эйлера по математике и механике за 1726 г., имеется неполный черновик письма Эйлера к Д. Бернулли лл. 161—166, написанного, очевидно, тоже в конце 1726 г. В этом письме мы читаем (оригинал на латинском языке, опубликовано в той же статье Г. К. Михайлова): «...Если бы твое письмо пришло ко мне скорее, я отправился бы в путь еще в этом году, ибо я едва могу дождаться того времени, когда буду у вас. Но поскольку сейчас уже наступают суровые зимние бури, я решил отправиться, с божьей помощью, ближайшей весной. Между тем, как ты советовал, я не упущу возможности усердно заняться физиологией. По случаю вакантной профессуры по физике я решил выступить публично с диссертацией о звуке, которую я уже написал...» (дальше излагаются отдельные мысли этой диссертации).

14. Диссертацию «De sono» (О звуке) Эйлер защищал публично в Базельском университете 18 февраля 1727 г. Диссертация опубликована в Базеле в 1727 г. и вторично в Disputationes anatomicae selectae (7, 2, Гёттинген, 1751, стр. 207—226).

15. О поездке Эйлера в письме Гецгенбаха (см. прим. 1) рассказывается следующее: «В 1727 г. он [Леонард Эйлер] был приглашен в Петербург и отправился в путь 5 апреля того же года, прибыл к месту 24 мая. Наш покойный дедушка сочинил прекрасную молитву и произносил ее вместе с семьей каждый день, пока длилось его путешествие. Эту молитву я нашел среди рукописей...».

16. Екатерина I скончалась 6/17 мая. Эту дату как дату прибытия Эйлера в Петербург вслед за «Автобиографией» повторил Н. Фусс, и дальше она прочно вошла в биографическую литературу об Эйлере. Однако по новым данным она оказывается ошибочной. В Архиве АН СССР среди рукописей Эйлера имеется небольшая тетрадь—дневник его поездки от Базеля до Петербурга. Дневник написан карандашом, и полустертую скоропись Эйлера прочитать в нем очень трудно. Однако он почти полностью расшифрован недавно Г. К. Михайловым. В дневнике записано, что Эйлер прибыл в Кронштадт 21 мая, а в Петербург 24 мая. Заметим, что и в письме Гецгенбаха указывается дата 24 мая. По-видимому, Эйлер, вспоминая об этом через сорок лет, ошибочно ассоциировал в своей памяти ту обстановку смятения, которая царила в Петербурге в эти дни, с днем кончины императрицы.

17. Николай Бернулли скончался в июле 1726 г. Яков Герман (1678—1733), ученик Якова Бернулли, профессор математики в Падуе и Франкфурте-на-Одере, получив приглашение поступить на службу в основывавшуюся Петербургскую Академию, подписал контракт 8 января 1725 г. и был первым по времени членом Академии.

18. О назначении Эйлеру жалованья см. «Реестр коликое число во Академии наук профессоров, студентов и протчих академических служителей, и оным надлежит давать годового жалованья, кроме квартир, дров и свеч» от 27 августа 1727 г. (Материалы для истории имп. Академии наук, т. I, СПб, 1885, стр. 273).

19. Сведения о научной деятельности Эйлера, относящейся к первому году его пребывания в Петербурге, мы находим в «Материалах для истории имп. Академии наук», т. I, СПб, 1885, стр. 276—279.

20. Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae—первый журнал Петербургской Академии; издано 14 томов в 1728—1751 гг (за 1726—1746 гг.).

Во втором томе академических «Комментариев», изданном в Петербурге в 1729 г., напечатаны следующие статьи Эйлера: «Problematis traiectoriarum reciprocarum solutio» (Решение задачи о взаимных траекториях), стр. 90—111; «De novo quodam curvarum tautochronarum genere» (О новом роде таутохронных кривых), стр. 126—138; «Tentamen explicationis phaenomenorum aeris» (Опыт объяснения явлений воздуха), стр. 347—368.

21. Георг-Бернгард Бильфингер (1693—1750), профессор философии в Тюбингене, 1 марта 1725 г. ст. ст. подписал контракт о поступлении на службу в Петербургскую Академию на кафедру логики, метафизики и морали.

22. Контракт от 20 июля 1731 г. ст. ст., заключенный между Эйлером и Академией наук, на немецком языке опубликован в «Материалах для истории имп. Академии наук», т. II, СПб, 1886, стр. 58—59.

23. О женитьбе Эйлера см. стр. 21—22.

24. Даниил Бернулли оставил Петербург 24 июня 1733 г.

25. В протоколах конференции от 2 декабря 1734 г. мы читаем следующую запись: «Того же числа профессор Эйлер подал прошение, которым просит, чтобы с ним новый контракт заключить, ибо прежний к окончанию приходит, а он в службе Е. И. В. далее остаться предрассуждает. По приказу Его Высокоблагородия предложено и к журналу отдано» (Материалы для истории имп. Академии наук, т. II, СПб, 1886, стр. 524—525).

26. По этому поводу в Актах академической канцелярии за 1735 г. имеется документ (на немецком языке, опубликован в «Материалах для истории имп. Академии наук», т. II, СПб, 1886, стр. 790), содержащий поручение Эйлеру, «чтобы он оказывал Делилю всяческое содействие как в изготовлении ландкарт, так и во всем, что еще потребуется для географии».

27. Заявление Эйлера от 12 января 1740 г. ст. ст. о заключении нового контракта опубликовано в «Материалах для истории имп. Академии наук», т. IV, СПб, 1887, стр. 297—298. Текст нового контракта от 14 марта 1740 г. ст. ст. опубликован там же, стр. 351—352.

28. Прошение Эйлера об увольнении его из Академии со ссылкой на состояние здоровья опубликовано на русском языке в «Материалах для истории имп. Академии наук», т. IV, стр. 572, 573. Доклад Академии от 15 марта 1741 г. ст. ст., подписанный Бреверном, Гольдбахом и Шумахером, об увольнении Эйлера и приглашении на его место другого профессора математики—там же, стр. 612, 613. Определение об увольнении от 5 июня 1741 г. ст. ст.— там же, стр. 685—686. Следует, однако, заметить, что после отъезда Эйлера в Петербургской Академии место профессора математики оставалось вакантным до 1760 г., когда был избран профессором ученик Эйлера—Семен Кириллович Котельников.

II. К биографиям Леонарда Эйлера и его сыновей

1. Автор объединяет обобщенным названием «Академии наук, словесности и экономии» различные по своему характеру и по названиям научные учреждения: Берлинскую Академию наук и словесности, имп. Академию в Петербурге, Лондонское королевское общество, Парижскую королевскую Академию наук, Академии (наук) в Турине и Флиссингене. В Лейпциге Академия наук основана только в 1846 г., во времена же Эйлера как в Лейпциге, так

и в Базеле были университеты, которые иногда называли академиями. Здесь, однако, автор, по-видимому, имеет в виду Физико-медицинское общество в Базеле, о котором см. на стр. 22. Под словом «Академия экономии», очевидно, подразумевается Вольно-экономическое общество в Петербурге.

2. Год смерти Пауля Эйлера здесь указан неверно. См. «Автобиография», прим. 1, стр. 46.

3. Базельская гимназия того времени, как ее рисуют в своей книге Буркгардт и Бидерманн (Th. Burckhardt — Biedermann, Geschichte des Gymnasiums zu Basel, 1889; самая книга мне осталась недоступной; знаю о ней только по книге О. Шписса «Leonhard Euler», 1929, стр. 33, 34), по состоянию преподавания не могла дать основательных знаний и совсем не обучала математике.

4. 20.X 1720 года.

5. Как сообщает Рудольф Вольф (Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz, 4, 1862, стр. 88, прим. 3), в базельской библиотеке хранятся две диссертации от 1722 г., одна Иог. Руд. Баттьера на замещение кафедры логики, другая Иог. Род. Изелиуса по истории римского судопроизводства, с надписями, свидетельствующими, что по этим диссертациям «респондентом», т. е. оппонентом, был юный Эйлер (первая из них защищалась 30 января 1722 г., т. е. когда Эйлеру не было еще 15 лет). Имя Эйлера здесь сопровождено эпитетами «praestantissimus», «florentissimus»—превосходнейший, одареннейший.

6. Самуэль Баттьер (1667—1744) получил степень магистра философии в 1683 г. Помимо философии, изучал также медицину и математику. В 1690 г. получил степень доктора медицины, в 1704 г. назначен викарием, а в 1706 г.—ординарным профессором греческого языка в университете.

7. Стих из Овидия «Тристии», 4, 3, 74. В переводе Фета этот стих звучит: «Трудная слава идет самым тяжелым путем».

8. По сведениям О. Шписса (Leonhard Euler, стр. 41) Иоганн Бернулли читал свои публичные лекции ежедневно. Предметом этих лекций в 1720—1721 гг. была геометрия, в 1721—1722 гг.—теоретическая и практическая арифметика, в 1722—1723 и 1723—1724 гг.—избранные законы геометрии и их практическое применение, в 1724—1725 гг.—элементы астрономии.

9. О том, кто были учителя Эйлера, кроме Иоганна Бернулли, нет почти никаких сведений. Даниил Бернулли в письме к Эйлеру от 4 сентября 1743 г. (П. Фусс, Correspondance mathématique et physique, т. II, стр. 535) сообщает, что «несколько дней тому назад скончался великий Буркгардт, учитель по математике великого Эйлера». Речь идет об умершем 21 августа 1743 г. пасторе Иоганне Буркгардте, ученике Иог. Бернулли (Р. Вольф, стр. 89, прим. 2). Но в какое время он обучал Эйлера, неизвестно.

Любопытное свидетельство о Буркгардте мы находим в письме к Эйлеру из Базеля от Германа Германа, брата покойного Якова Германа, от 18 октября 1737 г. (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 5, л. 224). В письме сообщается, что рукописи Якова Германа переданы человеку, «сведущему в этих вещах», и к этим словам другой рукой сделана приписка: «Herrn Burckard, Pfarrern zu Oltingen, deinem vormaligen Praeceptori». Судя по тому, что Г. Герман пересылал письма Эйлеру через его отца, а также из того, что лицо, сделавшее приписку, обращается к Эйлеру на «ты», можно предположить, что приписка сделана отцом Эйлера Паулем Эйлером.

В письме к К. Ветштейну от 9 апреля 1754 г. (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 22, л. 38, фр.) Эйлер упоминает о своем учителе Ветштейне: «Я принял с глубокой печалью скорбное известие о смерти нашего досточтимого соотечественника г-на проф. Ветштейна, вашего дорогого кузена и моего глубокоуважаемого учителя»... По сведениям Athenae Rauricae Герцога 23 марта 1754 г. скончался Иоганн Якоб Ветштейн (род. 1693), ученый богослов и с 1744 г. профессор греческого языка. Очевидно, он был одним из учителей Эйлера в области теологии.

10. Николай Гарпер (1683—1742)—магистр философии с 1698 г., доктор медицины с 1704 г., с 1706 г. профессор красноречия и истории в Базельском университете.

11. В оригинале «ut... disciplinas mathematicas auctoritate publica docerent». Мы имеем здесь раскрытие термина «публичные лекции» не как «лекции для публики», а как лекции, читаемые по служебным обязанностям, в отличие от частных курсов.

12. В оригинале употреблено выражение «munus physiologiae docendae», т. е. должность по преподаванию физиологии. Из письма Даниила Бернулли к Эйлеру без даты, относящегося к 1726 г. (см. «Автобиография», прим. 12, стр. 48), мы знаем, что Эйлер был приглашен на должность адъюнкта. Приглашения на кафедру математики Эйлер не получил, очевидно, потому, что Академия имела уже трех профессоров высшей математики: Фр. Хр. Майера, Я. Германа и Хр. Гольдбаха. Сам Даниил Бернулли получил профессуру по физиологии, хотя научные интересы его больше были направлены к математике и физике. Однако и в свои работы по физиологии он вносил значительный элемент математики, как об этом можно судить, например, по его статье в первом томе «Commentarii acad sc. Imp. Petrop.» (1726), 1728, стр. 297—313: «Tentamen novae de motu musculorum theoriae» (Опыт новой теории движения мышц), где дается геометрическое объяснение движения мышц. Это, очевидно, и имеет в виду Эйлер, когда говорит в своей «Автобиографии» (см. стр. 16), что он был назначен «применить математические познания к медицине».

13. Иоганн Рудольф Бек (1657—1726), доктор медицины и профессор логики, получил кафедру физики в Базельском университете в 1711 г. и занимал ее до своей смерти 28.IX 1726 г.

14. Ошибочное утверждение Н. Фусса, что Эйлер не прошел на кафедру физики по жребию (Lobrede в изд. L. Euleri Opera omnia, т. I, Лейпциг—Берлин, 1911, стр. 54), исправлено последующими биографами Эйлера. В докладе Фр. Буркгардта на юбилейном заседании общества естествоиспытателей в Базеле в 1884 г. (Die Basler Mathematiker Daniel Bernoulli und Leonhard Euler... Anhang zu VII Teil der Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft

zu Basel, Базель, 1884, стр. 41) указано, что в конкурсе на эту кафедру тремя допущенными к жребию были Герман, Штелин и Бирр. Жребий выпал на Штелина.

15. Георгий Гзелль (сконч. в 1740 г.) уже в 1726 г. обучал рисованию в академической гимназии. Контракт с ним, по которому он обязуется обучать юношество в гимназии, чертить и рисовать все, что поручит ему Академия, и подготовить трех учеников, заключен 1 января 1727 г. (Материалы для истории имп. Академии наук, т. I, 1885, стр. 232.)

16. Мария Сибилла Мариан, по мужу Граф (1647—1717), дочь художника швейцарца Матфея Мариан. Ее иллюстрированное сочинение «Erucarum ortus, alimentum et Paradoxa metamorphosis» (Рождение, питание и превращение капустной гусеницы) издано в Нюрнберге в 1678—1683 гг. на латинском и немецком языках, в 1730 г.—в Амстердаме на голландском языке. Совершив путешествие в Суринам в 1699—1700 гг., она составила богатое собрание насекомых, раковин и растений, а также многочисленных зарисовок с натуры. По возвращении в Голландию она издала в 1705 г. свой знаменитый труд «Metamorphosis Insectorum Surinamensium», состоящий из 60 красочных рисунков с описаниями. Собрание суринамских рисунков Марии Сибиллы Мариан было куплено Петром I и хранится в Архиве АН СССР. После смерти Марии Сибиллы ее младшая дочь Доротея Мария (1678—1744) подготовила второе дополненное издание этого сочинения, вышедшее в Амстердаме в 1719 г. под заглавием «Dissertatio de generatione et metamorphosibus insectorum Surinamensium» (Диссертация о развитии и превращениях суринамских насекомых). Доротея Мария вместе с мужем служила в Академии (в академических документах «малярица», «малерша»), выполняя различные рисунки в кунсткамере и для академических изданий.

17. По другим источникам имя старшей дочери Эйлера было Елена. Возможно, она звалась двойным именем. Старшая дочь Эйлера скончалась в 1780 г.

18. Из письма Фридриха II к Эйлеру от 3 декабря 1763 г. мы узнаем, что Эйлер обратился к королю с просьбой о разрешении на брак своей дочери с корнетом фон Делепом, но Фридрих отклонил эту просьбу, ссылаясь на то, что по обычаю корнеты не могут жениться, а должны ждать, пока их повысят в чине (Oeuvres de Frédéric le Grand, т. XX, Берлин, 1852, стр. 232). Только через шесть лет после этой просьбы, в 1769 г., Шарлотта Эйлер уже из России поехала в Пруссию к своему будущему мужу. В письме к маркграфу Бранденбург-Шветскому от 14 мая 1773 г. (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 23) Эйлер сообщает, что его младшая дочь с мужем уехала в Julichnschen. В оригинале «Биографии» это место названо ducatus Juliacensis—речь идет, очевидно, о герцогстве Юлих в Рейнской провинции. Шарлотта Эйлер скончалась в 1781 г.

19. Фусс сообщает, что у Эйлера было тридцать восемь внуков, из которых в живых в 1783 г. оставалось двадцать шесть.

20. Эти сведения об обстоятельствах потери Эйлером правого глаза автор, по-видимому, получил от Н. Фусса, ибо они через три

года в таком же виде повторены в «Eloge» Фусса и впоследствии безоговорочно приняты другими биографами Эйлера. Однако эту общепринятую версию подверг сомнению шведский математик Г. Энестрем. В своей статье «Eine Legende von dem eisernen Fleiße L. Eulers» (Bibliotheca Mathematica, 3 F.,10, Лейпциг, 1909—1910, стр. 308—317) Энестрем производит анализ самого вычисления, о котором говорит Фусс, на основании статьи Эйлера, которая была результатом этого вычисления: «Methodus brevis et facilis computandi tabulas aequationis meridiei» (Краткий и легкий способ вычисления таблиц полуденного уравнения), опубликованной в «Comment. acad. Sc. Petrop.» 8 (1736), 1741, стр. 48—65. Такой анализ приводит исследователя к выводу, что Эйлер произвел это вычисление сравнительно очень скоро благодаря примененному им новому методу, что оно не должно было требовать чрезвычайного напряжения сил и поэтому не могло быть прямой причиной тяжелой болезни и потери глаза. Это предположение Энестрема замечательно подтвердилось найденным недавно письмом Д. Бернулли от 8.XI 1738 г. (см. Г. К. Михайлов, Леонард Эйлер, Изв. Академии наук СССР, отд. техн. наук, № 1, 1955, стр. 5), из которого явствует, что Эйлер потерял глаз незадолго до написания этого письма, т. е., по-видимому, в 1738 г.

21. Черновик письма Эйлера к неизвестному (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 8, л. 58, фр.) освещает некоторые обстоятельства приглашения Эйлера в Берлин. Приводим перевод первой части письма. Вторую часть цитирует П. П. Пекарский в «Истории имп. Академии наук», т. I, стр. 256—257. «Я чрезвычайно тронут любезностью, которую Вы оказали мне своим сообщением о милостивом заявлении короля относительно меня. Чтобы дать Вам, милостивый государь, те сведения, о которых Вы просите, я имею честь сообщить Вам следующее: прошел уже год с тех пор, как покойный г-н фон Зум предложил мне от имени Его Величества жалованье в 1200 экю и в то же время он сам вызвался хлопотать для меня жалованье, равноценное жалованью в 1200 рублей, которое я имею в Петербурге, что составило бы 1600 экю у Вас, и это предложение я тотчас же принял. После смерти г-на фон Зума г-н фон Мардефельд показал мне официальное письмо, в котором Его Величество милостиво подтверждает поручение, данное мне через г-на Зума, и назначает сверх того оплату стоимости моего путешествия, о которой я просил, имея в виду многочисленность моего семейства, состоящего из 10 человек, не считая прислуги».

22. О том, кто были племянники Эйлера, мы узнаем из письма Эйлера к Шумахеру от 4 марта 1752 г. (Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 42, л. 104, нем.); это были дети сестры его жены, Анны Гзелль, вышедшей замуж в 1720 г. за Людвига Вермеллена. Эйлер сообщает имена и даты рождения их детей: Анна Гертруда (1723), Христоф Людвиг (1724), Георг Вильгельм (1726), Карл Рудольф (1728) и Даниэль (1731). С Эйлером в Берлин поехали, по-видимому, его свояченица Анна Гзелль и четверо ее детей. О племянниках Эйлера упоминается несколько раз в переписке Эйлера с Фридрихом II. В письме от 14 декабря 1743 г. (Oeuvres de Frédéric le

Grand, т. XX, стр. 226) король шутливо отклоняет жалобу Эйлера на то, что его племянник, которому предназначалась карьера по торговой части, завербован в армию. Имя племянника не указано. Очевидно, речь идет о старшем, Христофе Людвиге. 24 декабря 1746 г. король отвечает на просьбу Эйлера о производстве знаменщика Вермеллена в прапорщики. С Эйлером из Петербурга в Берлин, кроме жены, сыновей, свояченицы и племянников, переехал и его младший брат Иоганн-Генрих (1719—1750), художник, с 1735 по 1741 г. бывший в обучении у тестя Эйлера Георгия Гзелля. Как видно из письма Фридриха II к Эйлеру от 29 января 1743 г. (Oeuvres de Frédéric le Grand, т. XX, стр. 224), Эйлер хлопотал о нем перед королем. Но король, по-видимому, не проявил к нему особой благосклонности, и молодой художник вскоре уехал в Базель, где скончался в 1750 г.

23 В эпистолярном наследии Эйлера, хранящемся в Архиве АН СССР, имеется его обширная переписка с членами Петербургской Академии М. В. Ломоносовым, Хр. Гольдбахом, Ж.-Н. Делилем, Г. Гейнзиусом, Г.-В. Крафтом, Г.-Ф. Миллером, И.-Д. Шумахером, К. Разумовским и др.

24. За время пребывания в Берлине Эйлером опубликовано всего, считая с начала 1742 г. по конец 1766 г., 264 работы (по библиографии Г. Энестрема в Jahresbericht der Deutschen Mathem. Vereinigung, Ergänzungsband, IV, 1—2, 1910—1913). В 12 томах «Комментариев», составленных за время пребывания Эйлера в Берлине, т. е. в 13 т. Commentarii acad. Sc. Petrop. (1741/3), 1751 и в 1—11 тт. Novi Commentarii acad. Sc. Petrop., составленных с 1747 по 1765 г. и вышедших с 1750 по 1767 г., опубликовано 96 сочинений Эйлера.

25. Об этом поручении, по просьбе герцогини Вюртенбергской, Фридрих II сообщает Эйлеру в письме от 1 марта 1742 г. (Oeuvres de Frédéric le Grand, т. XX, стр. 221).

26. Следует иметь в виду, что эта биография написана еще при жизни Фридриха II. Как уже давно установлено биографами Эйлера, благосклонность короля к Эйлеру была весьма относительной, и постепенно обострявшиеся отношения между королем и ученым были одной из причин отъезда Эйлера из Берлина.

27. Это сочинение Эйлера, рассчитанное на широкие круги читателей, приобрело огромную популярность. Вскоре после его издания в Петербурге (I и II части в 1768 г., III часть в 1772 г.) оно было переведено на разные языки: немецкий, английский, итальянский, испанский и др. В русском переводе Румовского под заглавием «Письма о разных физических и философических материях, писанные к некоторой немецкой принцессе», оно вышло тремя изданиями: I и II части в 1768, 1785 и 1790 гг., III часть в 1774, 1785 и 1791 гг. Всего это сочинение имеет на разных языках более 30 изданий. Что касается адресата писем, то хотя в нашем тексте и в других биографиях Эйлера называют принцессу Дессау, из письма Эйлера к маркграфу Бранденбург-Шветскому от 14 мая 1773 г. (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 23, нем.) мы узнаём, что Эйлер писал эти письма обеим своим ученицам. Эйлер пишет маркграфу: «Недавно здесь вышла в свет последняя часть писем, которые

я некогда имел честь писать Их Кор. Величествам принцессам...». В заглавии, правда, слово «принцесса» в единственном числе, но поскольку первые издания вышли в свет анонимно, представляется естественным, что и заглавие имело несколько условный характер.

28. Эту работу Эйлер исполнял в сентябре—октябре 1749 г. Из писем Фридриха II от 27 сентября и 21 октября 1749 г. (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 9, л. 12, фр.) мы узнаем, что Эйлер производил вычисления, связанные с постройкой насосов и труб.

29. Это поручение изложено в письме Фридриха II от 30 апреля 1749 г. (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 9 л. 10, нем.). Король сообщает, что в недавно построенном канале обнаружены недостатки, мешающие движению судов, и просит Эйлера обследовать канал и указать пути к его улучшению.

30. В том же письме Фридриха II говорится в этой связи о полковнике Бальби.

31. Этими причинами, как уже об этом высказывал свое предположение Отто Шписс, были уважение Эйлера к младшим Бернулли,—на эту кафедру претендовал Иоганн II Бернулли,—и еще то обстоятельство, что жалованье профессора в Базеле было значительно ниже того, что Эйлер получал в Берлине. О некоторых подробностях этого конкурса мы узнаем из писем к Эйлеру (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 2, лл. 406, 407, 453, 454, 470—474, лат., нем.) Рамшпека (Ramspeck I. Ch., 1722—1796), который при содействии Эйлера получил эту кафедру, а впоследствии уступил ее Иоганну II Бернулли.

32. Избрание Эйлера в Парижскую Академию наук биографами Эйлера обычно изображается как своего рода триумф, поскольку Эйлер был избран сверх положенного числа иностранных членов. Письма Лаланда к Эйлеру, однако, освещают некоторые дополнительные обстоятельства, связанные с этим избранием. Из них мы узнаём, что кандидатура Эйлера выдвигалась еще в 1753 г. и, несмотря на энергичную поддержку со стороны Д'Аламбера, не получила большинства голосов. В письме от 2 марта 1753 г. (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 3, лл. 315—316, фр.) Лаланд пишет: «Вы, возможно, уже знаете, что я 20 января имел удовольствие быть принятым в Парижскую Академию наук. Чрез несколько дней после этого были выборы иностранного члена. Многие назвали и предложили Вас. Но г-н Хелс (в оригинале написано Hels, правильное написание Hales, английский физиолог, 1677—1763), автор Statique des vegetaux [Vegetable statics or an account of some statical experiments on the sap in the vegetables, 1727], за которого ратовало большинство, получил больше голосов, чем Вы и г-н Муавр (Moivre). Г-н Д'Аламбер громко кричал, что Вам нанесли оскорбление, и я говорил то же самое». Через два года Лаланд сообщает в письме от 27 июня 1755 г. (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2. № 3, лл. 522—523): «Научные отличия не новы для Вас. Их создали Вам Ваши заслуги, и эти заслуги выше всех почестей, которые могут быть Вам даны. Вы должны были бы занимать во всех Академиях Европы то высокое место, которое король учредил в нашей Академии для иностранцев. Оно должно было быть Вашим уже давно,

но Вы знаете, что интриги всегда играют слишком большую роль во всех деяниях человеческих. Место, которое было уже некоторое время вакантным в нашей Академии, по старому обычаю должно было быть занято Президентом Лондонского Королевского Общества, милордом Маклфильдом (Maclesfield), между тем все хотели, чтобы это были Вы, ибо хорошо знали, что это было бы честью для Академии; чтобы покончить с этим разногласием, Академия избрала 14 мая, по обычаю, двух лиц, Вас и лорда, и доложила королю, что следовало бы в этом случае назначить обоих, чтобы избежать мучительного выбора, хотя есть только одно вакантное место. В результате мы получили в среду 25 этого месяца письмо от министра, в котором король назначает Вас вместе с Маклфильдом занять место иностранного члена, с тем условием, что первое место, которое освободится, не будет занято».

Эйлер оставался иностранным членом «сверх штата» до 4 февраля 1761 г., когда он занял место того же Хелса, скончавшегося 4 января.

33. Поместье это Эйлер приобрел в 1753 г. за 6000 талеров. См. письмо к Шумахеру от 7 мая 1753 г. Выдержка в переводе опубликована в «Истории имп. Академии наук в Петербурге» П. П. Пекарского, т. I, стр. 273.

34. Эйлер получил 1200 рублей от Екатерины II после заключения мира с Пруссией. Известно, что об этом хлопотал перед Екатериной Ломоносов. См. П. П. Пекарский, История имп. Академии наук в Петербурге, т. II, стр. 752. Сведения о хлопотах по этому делу и об участии в них Ломоносова имеются также в неопубликованных письмах Миллера к Эйлеру (от 13.III 1761 г., Архив АН СССР, ф. 21, т. 3, № 309/3, л. 131; от 13. VI 1761 г., там же, л. 133; от 29.III, 30.IV, 24. V 1762 г., там же, лл. 136—138; 28.III 1763 г., там же, лл. 146, 147).

35. Обстоятельства возвращения Эйлера в Россию подробно изложены в статье Пекарского «Екатерина II и Эйлер» в «Записках имп. Академии наук», т. 6, стр. 59—92. Документы, дополняющие эту статью, опубликованы в «Чтениях в имп. обществе истории и древностей Российских при Московском университете», 1866, кн. 4, стр. 130—133. См. также W. Stieda, Die Übersiedelung Leonhard Eulers von Berlin nach St. Petersburg. Berichte über die Verhandl. der Sächsischen Akad. der Wiss. zu Leipzig. Phil. Hist. Klasse, B. 83, 1931, H. 3, S. 1—62.

36. В письме от 14 августа 1753 г. (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 9, л. 22, нем.) Фридрих II извещает Эйлера, что его поместье в Лютцове освобождается от постойной повинности, и она заменяется соответствующей денежной. Во время первого пребывания в России Эйлер не имел этой привилегии. В 1738 г., например, в его доме стояли восемь солдат.

37. В VI части «Трудов имп. Вольно-экономического общества», 1767 г., стр. 150—155, имеется статья Эйлера на русском языке, озаглавленная «О средстве к размножению хлеба, которое состоит в том, что на посев исходит семян гораздо меньше обыкновенного сеяния».

38. Комиссия, о которой здесь идет речь, была учреждена приказом Екатерины II от 5 октября 1766 г. В распоряжении графу Владимиру Орлову от 30 октября 1766 г. (копия. Архив АН СССР, разр. V, оп. 1-Э, № 4, нем.) Екатерина II пишет: «Приказываем при Академии учредить комиссию, которая должна состоять из членов Академии ст. сов. Штелина, профессора Эйлера и его сына профессора физики, профессора Лемана, Котельникова и Румовского. Ее обязанности, как уже было сказано в нашем приказе, обследовать все департаменты и привести их в лучшее состояние. Эта комиссия будет состоять под Вашим директорством, то есть Вы должны в ней иметь ту власть, которая дана по регламенту президенту в Академии наук. А для споспешествования успеху мы приказываем Вам со всеми названными лицами не только обследовать все дела, но и управлять ими, и так, чтобы был надлежащий учет доходам и расходам; в остальном мы оставляем на Ваше усмотрение, как и в какой форме осуществлять это управление».

39. В том же архивном деле (разр. V, оп. 1-Э, № 4) хранится копия прошения Эйлера от 2 февраля 1774 г. об освобождении от работы в комиссии с ссылкой на слабость зрения и слуха, а также об увольнении из комиссии Иоганна-Альбрехта Эйлера, поскольку он был назначен в комиссию в помощь отцу. Здесь же имеются копия резолюции комиссии от 5 февраля того же года и копия указа от 20 марта: «Нашему камергеру графу Владимиру Орлову. Снисходя на прошение профессоров Леонарда и Альбрехта Эйлеров, членов учрежденной при Академии наук комиссии, высочайше увольняем их от присутствия в ней. Екатерина». По предположению С. Н. Чернова, причиной выхода Эйлера из комиссии было его недовольство диктаторскими действиями графа Орлова. См. сборник «Леонард Эйлер», М.—Л., 1935, стр. 213—221.

40. О том, как было воспринято известие о недуге Эйлера среди ученых, свидетельствует, например, письмо Лагранжа к Д'Аламберу от 25 мая 1767 г., где Лагранж пишет: «Говорят, что Эйлер потерял или потеряет зрение. Это была бы неизмеримая утрата для математики» (L a g r a n g e. Oeuvres complètes, т. 13, стр. 55—56). Однако известно, что Эйлер, уже будучи слепым или почти слепым, создал более 300 работ. Свидетельством неиссякаемой бодрости Эйлера в это тяжелое для него время может служить, например, его письмо к графу Орлову, относящееся к 1767 г. (Черновик, ф. 136, оп. 2, № 29, л. 4, нем.): «...Между тем я, несмотря на слабость зрения, в состоянии новыми сочинениями служить успехам наук в Императорской Академии так, как это могли бы от меня ожидать при благополучных обстоятельствах, ибо я имею возможность диктовать то, что произвожу в уме, а в особенности мое несчастье не помешает мне давать необходимые уроки по математическим и физическим наукам адъюнктам и другим, кто может этого пожелать, чтобы сделать их достойными членами Академии и государства».

41. В Архиве АН СССР имеется черновик письма Иоганна-Альбрехта Эйлера к неизвестному (разр. V, оп. 1-Э, № 4, фр.),

относящийся к концу 1771 г. По обращению письма (Monsieur mon révérend Père) видно, что его адресат—духовное лицо. Можно предположить, что это Фризи (см. прим. 67) или Боскович (см. прим. 68). В этом письме сын Эйлера сообщает о недавно постигшем их несчастии следующее: «Я потерял в пожаре 23 мая этого года большую часть своих бумаг, много диссертаций и даже несколько сочинений, которые я должен был вот-вот закончить и сдать в печать. Мой отец также потерял в этом пожаре многие небольшие статьи, которые он предназначал для академических журналов. Счастье, что его большое сочинение о неравенствах Луны уже было сдано в типографию». (Биографы Эйлера вслед за Фуссом утверждают, что «Теорию Луны» Эйлер заканчивал после пожара.)

42. О Петре Гримме, имя которого упоминают Фусс, Кондорсэ и Даниил Бернулли в письме к Малле 28 сентября 1772 г., последующим биографам не удалось найти никаких сведений. Из письма Д. Бернулли известно только, что это был ремесленник из Базеля. По этому поводу Р. Вольф (стр. 102) восклицает: «Тем не менее наука обязана ему больше, чем многим так называемым ученым, подробнейшие биографии которых оставили нам их современники».

43. Вспомним стихи из второй книги Энеиды Вергилия о бегстве Энея из пылающей Трои:

II. 705 ... и уже светлее огонь за стенами
Стал заметен, и зной пожара клубится уж ближе;
«Нутко, отец, дорогой, ко мне ты садися на шею;
Сам я и плечи склоню, труд этот не будет мне тяжким».

44. В упомянутом выше черновике письма Иоганна-Альбрехта (см. прим. 41) мы читаем: «Я читал отцу любезное письмо от 29 сентября, которое Вы, милостивый государь, ему прислали, и так как он еще не в состоянии писать сам, он поручил мне ответить Вам. Уже пять лет прошло с тех пор, как, спустя немного времени после нашего прибытия в Петербург, мой отец полностью потерял зрение. И в таком состоянии он создал все те сочинения, которые появились за это время под его именем. Они были написаны различными лицами под его руководством и в соответствии с его взглядами. 15 сентября по нашему календарю, наконец, наступил счастливый день, когда он снова увидел свет. Известный окулист барон Венцель оперировал ему катаракту, и мой отец имел счастье некоторое время после этого видеть совсем хорошо. Все шло как нельзя лучше до того срока, который оператор предписал для его полного излечения, и он начал сам выходить и читать, как вдруг острые боли поразили его глаз настолько, что он был вынужден снова держать его закрытым. В таком тяжелом состоянии он находится еще и поныне, испытывая время от времени сильные боли, до такой степени, что он не в состоянии работать. И это также является причиной того, что он не мог подумать над задачей, которую Вы, Милостивый Государь, сообщили в своем письме...».

45. Соломея Гзелль—дочь Георга Гзелля и Марии Доротеи Граф.

46. На конкурсы Парижской Академии наук за указанные годы Эйлером посылались следующие сочинения:

(1738). Dissertatio de igne, in qua ejus natura et proprietates explicantur, occasione quaestionis, cum praemio annexo, ab illustrissima academia scientiarum regia Parisina pro anno 1738 propositae, ejusdem academiae judicio aequo submissa, Cui praemium, in tres partes divisum, pro uno ex illis addictum est. (Диссертация об огне, в которой объясняются его природа и свойства; на вопрос, предложенный на премию славной Парижской королевской Академией наук на 1738 г.; подвергнутая беспристрастному суду этой Академии и получившая третью часть премии). Pièces qui ont remporté le prix de l'académie royale des sciences en 1738. Париж. 1739, стр. 1—19. Премию разделили Эйлер, Даниил Бернулли и Маклорен.

(1740). Inquisitio physica in causam fluxus et refluxus maris (Физическое исследование причины морского прилива и отлива). Pièces qui ont remporté le prix de l'académie royale des sciences en 1740. Париж, 1741, стр. 235—350.

(1741). Dissertation sur la meilleure construction du cabestan. Cette pièce est une des quatre entre lesquelles le prix double a été partagé (Диссертация о наилучшем устройстве ворота). Это сочинение есть одно из четырех, между которыми разделена двойная премия. Pièces qui ont remporté le prix de l'académie royale des sciences en 1741. Париж, 1745, стр. 29—87.

(1744). Dissertatio de magnete. Cette pièce est une des trois entre lesquelles le prix triple a été partagé (Диссертация о магните). Это сочинение одно из трех, между которыми разделена тройная премия. Pièces qui ont remporté le prix de l'académie royale des sciences en 1743 et 1746. Париж, 1747, стр. 1—47. Конкурс на работу о магните был объявлен на 1743 г. Однако, не удовлетворившись присланными диссертациями, академия объявила тот же вопрос вторично. На втором конкурсе премию получили работы Эйлера, дю Тура и совместная работа Даниила и Иоганна II Бернулли.

(1747). Meditationes in quaestionem ab illustrissima academia regia Paris. scientiarum, pro anno 1747, cum praemio duplicato propositam, Quibusnam observationibus mari, tam interdiu quam noctu, itemque durante crepusculo verum temporis momentum comodissime et certissime determinari queat? (Размышления на вопрос, предложенный славной Парижской королевской Академией наук на двойную премию на 1747 г. Какими наблюдениями можно весьма удобно и точно определить истинное время на море как днем, так и в сумерки и ночью?). Pièces qui ont remporté le prix de l'académie royale des sciences en 1747. Париж, 1750, стр. 111—167.

В указанном издании эта статья опубликована анонимно, а под именем Эйлера значится другая статья, не получившая премии. Принадлежность Эйлеру именно этой работы, обозначенной девизом «Arbor non uno sternitur ictu» (Дерево валится не одним ударом), давно установлена исследователями. См. библиографию Энестрема, стр. 39. Двойную премию разделили Эйлер и Даниил Бернулли.

(1748). Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter, sujet proposé pour le prix de l'année 1748 par l'académie royale des sciences de Paris (Исследования по вопросу о неравенствах движения Сатурна и Юпитера, предложенному на премию 1748 г. Парижской королевской Академией наук.) Pièce qui a remporté le prix de l'académie royale des sciences en 1748. Париж, 1749, стр. 1—123.

(1752). Recherches sur les inégalités de Jupiter et de Saturne (Исследования о неравенствах Юпитера и Сатурна). Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'académie royale des sciences 7. Париж, 1769, № 2, 84 стр.

(1753). Mémoire sur la manière la plus avantageuse de suppléer à l'action du vent sur les grands vaisseaux. De promotione navium sine vi venti (Сочинение о наилучшем способе заменять действие ветра на большие суда. О движении судов без действия ветра). Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'académie royale des sciences. 8. Париж, 1771, № 1. 47 стр.

(1756). Investigatio perturbationum quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur... Haec dissertatio meruit praemium duplicatum anno 1756 (Исследование возмущений, которые испытывает движение планет из-за их взаимного действия...). Эта диссертация удостоилась двойной премии в 1756 г. Там же, 138 стр.

(1759). Examen des efforts qu'ont à soutenir toutes les parties d'un vaisseau dans le roulis et dans le tangage ou recherches sur la diminuation de ces mouvements. Pièce qui a partagé le prix de l'académie en 1759 (Изучение давлений, которые должны выдерживать все части корабля при боковой и килевой качке, или исследование об уменьшении этих движений). Сочинение получило премию академии в 1759 г. Там же, 47 стр.

(1768). Очевидно, указан ошибочно вместо 1770 г. Réponse à la question proposée par l'académie royale des sciences de Paris pour année 1770. Perfectionner les méthodes sur lesquelles est fondée la théorie de la lune, de fixer par ce moyen celles des équations de ce satellite, qui sont encore incertaines, et d'examiner en particulier si l'on peut rendre raison, par cette théorie de l'équation séculaire du mouvement de la lune (Ответ на вопрос, предложенный Парижской королевской Академией наук на 1770 г.: Усовершенствовать методы, на которых основана теория Луны, и установить таким способом те уравнения этого спутника, которые до сих пор еще неточны, и исследовать, в частности, можно ли с помощью этой теории установить вековое уравнение движения Луны). Recueil des pièces qui ont remporté le prix de l'académie royale des sciences, 9. Париж, 1777, 94 стр. Это сочинение представлено Эйлером совместно с его сыном Иоганном-Альбрехтом.

(1772). Сочинение под таким же заглавием, что и предыдущее. Там же, 38 стр.

47. Задачу, предложенную английским правительством, по составлению таблиц для определения долготы на море выполнил геттингенский астроном Тоббиас Майер. Поскольку Майер при этом

использовал «Лунные таблицы» (1746) и «Теорию Луны» (1753) Эйлера, английский парламент назначил награду также и Эйлеру.

48. Об этом факте мы не имеем никаких подробных сведений. Отто Шписс (стр. 106) сообщает, что Эйлер однажды оказал Базелю важную услугу в каком-то заграничном процессе.

49. Сочинение Эйлера «Théorie complète de la construction et de manoeuvre des vaisseaux mise à la portée des ceux, qui s'appliquent à la navigation» впервые опубликовано в Петербурге в 1773 г., в типографии Академии наук. Это сочинение очень скоро распространилось в различных странах Европы и было принято как учебник в морские учебные заведения. В 1776 г. оно было переиздано в Париже, в том же году вышел английский перевод в Лондоне и вторым изданием в 1790 г., итальянский перевод— в Падуе в 1776 г. и в Неаполе в 1780 г. Русский перевод «Полное умозрение строения и вождения кораблей, сочиненное в пользу учащихся навигации» опубликован в Петербурге в 1778 г.

50. Кучук-Кайнарджийский мирный договор, как известно, заключен в июле 1774 г. Приезд шведского короля Густава III в Петербург относится к июню—июлю 1777 г. См. С. М. Соловьев, История России с древнейших времен, изд. «Общественная польза», кн. VI, столбцы 1112—1113.

51. Фридрих II (1712—1786). Переписка Эйлера с Фридрихом II опубликована в Oeuvres de Frédéric le Grand, т. XX, Berlin, 1852, стр. 221—235. Однако в это издание не вошли многие письма, хранящиеся в Архиве АН СССР.

52. Станислав-Август (Понятовский, 1732—1798).

53. Николай I Бернулли (1687—1759)—племянник Иоганна I и Якова Бернулли, профессор математики в Падуе и с 1722 г. профессор логики в Базеле.

54. Альбрехт Галлер (Haller, 1708—1777)—немецкий анатом, физиолог, ботаник и поэт, профессор в Гёттингене, где он основал анатомический театр, ботанический сад и научное общество, бессменным президентом которого он был до конца своей жизни. Почетный член Петербургской Академии наук с 1777 г.

55. Жан Лерон Д'Аламбер (D'Alembert, 1717—1783)—французский математик и философ, один из авторов «Энциклопедии наук, искусства и ремесел», непременный секретарь Парижской Академии наук, с 1764 г.—почетный член Петербургской Академии наук.

56. Пьер Бугер (Bouguer, 1698—1758)—французский геометр, гидрограф и астроном, член Парижской Академии наук.

57. Шарль Мари Кондамин (Condamine, 1701—1774), французский путешественник и математик, в 1735—1743 гг. вместе с Бугером принимал участие в экспедиции в Перу, чтобы произвести измерение отрезка меридиана для уточнения формы Земли.

58. Пьер Луи Мопертюи (Maupertuis, 1698—1759), французский ученый и философ, в 1736 г. возглавлял экспедицию по градусным измерениям в Лапландии, с 1741 г.—президент Берлинской Академии. Почетный член Петербургской Академии с 1738 г

59 Алексис Клод Клеро (Clairaut, 1713—1765)—французский математик, член Парижской Академии наук. Почетный член Петербургской Академии наук с 1754 г.

60. Жозеф Луи Лагранж (Lagrange, 1736—1813)—математик и механик, профессор в артиллерийской школе в Турине, с 1759 г.— член Берлинской Академии, а в 1766 г., после отъезда Эйлера в Россию, был президентом Берлинской Академии до 1787 г. Почетный член Петербургской Академии наук с 1776 г. Переписка Эйлера с Лагранжем опубликована в Полном собрании сочинений Лагранжа, т. XIV, а также частично в L. Euleri Opera postuma, т. I, стр. 555—587.

61. Габриэль-Эмилия дю Шатлэ (du Chatélet, 1706—1749)—французская писательница, близкий друг Вольтера, автор ряда сочинений по физике и философии.

62. Иоганн (Янош) Андреас Сегнер (Segner, 1704—1777)—венгерский физик, с 1735 г. профессор в Гёттингене, с 1755 г.—профессор в Галле, изобретатель «реактивного колеса», носящего его имя. Почетный член Петербургской Академии наук с 1754 г.

63. Авраам Готтельф Кестнер (Kästner, 1719—1800)—немецкий математик, с 1756 г. ординарный профессор математики в Гёттингене. Почетный член Петербургской Академии наук с 1786 г.

64. Мари-Жан-Антуан-Никола Кондорсэ (de Condorcet, 1743—1794)—французский математик, философ и политический деятель, непременный секретарь Парижской Академии. Почетный член Петербургской Академии наук с 1776 до 1792 г.

65. Жозеф Жером Лаланд (de Lalande, 1732—1807)—французский астроном, член Парижской Академии. Почетный член Петербургской Академии наук с 1764 г.

66. Пьер-Шарль ле Монье (le Monnier, 1715—1799)—французский астроном, член Парижской Академии.

67. Паоло Фризи (Frisi, 1728—1784)—итальянский математик, физик и астроном, аббат, профессор математики в Милане. Почетный член Петербургской Академии наук с 1756 г.

68. Ружери-Иосип Боскович (Boscovich, 1711—1787)—родом из Далмации (Югославия), математик и астроном, профессор в Риме, Падуе и Милане, аббат. Почетный член Петербургской Академии наук с 1760 г.

69. Иоганн Карл Гедлингер (Hedlinger, 1691—1777)—швейцарский мастер-медальер.

70. Эйлер, как об этом сообщает Н. Фусс, обещал графу Владимиру Орлову оставить после своей смерти столько сочинений, что будет достаточно на двадцать лет для публикации в академических «Актах». Как сообщает Фусс, Эйлер в течение семи последних лет представил в Академию около 320 работ, написанных только с помощью Фусса и Головина. Сочинения Эйлера печатались в академических журналах более чем сорок лет после его смерти.

71. Далее приводится список членов Петербургской Академии, в котором под указанными номерами числятся И.-А. Эйлер (1734—1800), С. К. Котельников (1723—1806), С. Я. Румовский (1734—1812), В.-Л. Крафт (1743—1814), А.-И. Лексель (1740—1784),

П. Б. Иноходцев (1742—1806), Н. Фусс (1755—1825), М. Е. Головин (1756—1790).

72. Георг Фридрих Берман (Baermann, 1717—1769)—профессор математики в Виттенбергском университете.

73. Георг Маттиас Бозе (Bose, лат. Bosius, 1710—1761)—доцент в университете в Лейпциге, с 1738 г. профессор физики в Виттенберге.

74. Это повышение жалованья было назначено академией еще в сентябре 1760 г., но Фридрих II отклонил это назначение, отсрочив его до окончания войны.

75. Эта работа была написана Леонардом Эйлером. См. письмо Эйлера к Миллеру от 7 октября 1755 г. Сборник «Леонард Эйлер. К 150-летию со дня смерти», М.—Л., 1935, стр. 156.

76. Наиболее полный список сочинений Иоганна-Альбрехта Эйлера, состоящий из 72 названий, приложен к статье Пауля Штеккеля «Johann Albrecht Euler» (Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 25 Jahrgang, Zürich, 1910, стр. 63—72). В этой статье рассматривается вопрос о принадлежности части этих сочинений Леонарду Эйлеру.

77. О переписке Иоганна-Альбрехта Эйлера см. «Ученая корреспонденция Академии наук XVIII века», 1766—1782 гг., М.—Л.,1937. Сведения о переписке Иоганна-Альбрехта Эйлера с Формеем имеются в статье W. Stieda, упомянутой в прим. 35 на стр. 57.

78. В Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des connaissances humaines mis en ordre par M. de Felice, Yverdon, имеются две статьи Иоганна-Альбрехта Эйлера: «Force» в т. XX, 1773, стр. 84—86 и «Vibration des cordes» в т. XLII, 1775, стр. 264—270 (по списку П. Штеккеля).

Иоганн-Альбрехт Эйлер скончался в Петербурге 6/17 сентября 1800 г.

79. Иоганн-Готлиб Леман (Lehmann, 1700—1767)—берграт в Берлине, с 1761 г. профессор химии в Петербургской Академии наук.

80. О поездке Леонарда Эйлера с сыном в Галле и о личном знакомстве его с Сегнером, с которым он уже много лет был в переписке, мы узнаем из писем Сегнера к Эйлеру от 7 и 26 марта и 26 мая 1761 г. (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, №4, лл. 186, 187, 192, 193, 202, 203). Поездка Эйлера состоялась в апреле—мае этого года.

81. Иоганн-Андреас Бюхнер (Büchner, 1701—1769)—немецкий медик, профессор в Галле с 1744 г.

82. Георг Рудольф Бемер (Böhmer, 1723—1803)—немецкий медик и естествоиспытатель, профессор ботаники и анатомии в Виттенберге.

83. См. прим. 62.

84. Карл Эйлер скончался в Петербурге 7 марта 1790 г.

85. О деятельности Христофора Эйлера после 1780 г. в качестве начальника артиллерии см. Русский биографический словарь, том «Шапов—Юшневский», стр. 196. Христофор Эйлер скончался в 1808 г. Интересные сведения о Христофоре Эйлере и его семье содержатся в записках его сына Александра, опубликованных в кн. 2 «Русского архива» в 1880 г.

III. К речи Якова Штелина

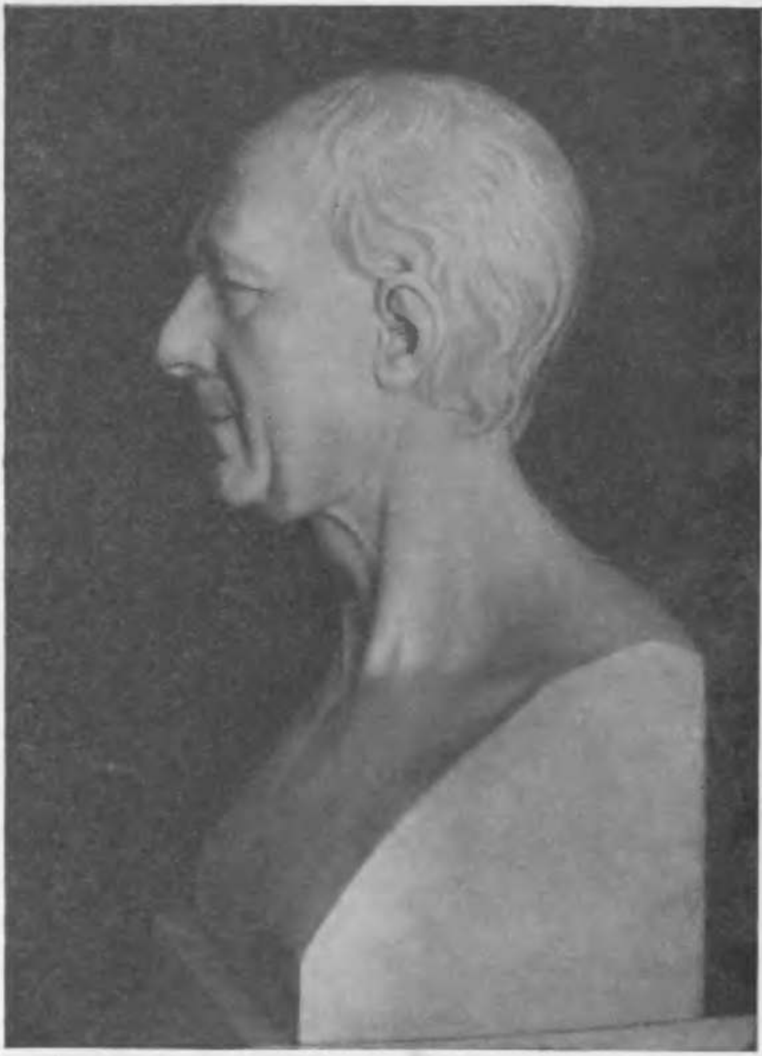
1. Текст речи не опубликован. Сохранился в рукописной копии на немецком языке, в Архиве АН СССР, ф. 24, оп. 1, № 111. Черновые наброски той же речи имеются в Рукописном отделе Гос. Публ. библиотеки им. Салтыкова-Щедрина в Ленинграде, ф. Як. Штелина, № 42.

2. Это, вероятно, случайная ошибка Штелина или переписчика. Известно, что Эйлер пробыл в Германии 25 лет.

3. Здесь Штелин допускает неточность. Известно, что в 1727 г. Эйлер не был избран на кафедру физики в Базеле.

4. Еще задолго до приезда Эйлера, в январе 1726 г., были назначены обучать в академической гимназии десять адъюнктов и студентов, в том числе Вейтбрехт, Крафт, Миллер.

5. Штелин ошибочно переносит в 80-е годы события, относящиеся к значительно более раннему времени, и излагает их весьма неточно. Задача «О природе и распространении огня» была объявлена Парижской Академией на 1738 г. Эйлер представил на этот конкурс диссертацию «Об огне» и получил третью часть премии. Парижская Академия опубликовала в 1739 г. вместе с тремя премированными работами еще две, не получившие премии, но одобренные Академией. Эти последние напечатаны анонимно, но в предисловии об одной из них сказано, что она написана «знатной молодой дамой». Автором этой диссертации была маркиза дю Шатлэ.



Бюст Л. Эйлера. (Мрамор. С работы Д. Рашета, 1784 г.).

ЗАПИСНЫЕ КНИЖКИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА В АРХИВЕ АН СССР

(Общее описание и заметки по механике)

Г. К. Михайлов

I. Предварительные замечания

Научное наследие Леонарда Эйлера исключительно велико. Число работ, опубликованных им при жизни, превышает 500, свыше 200 работ Л. Эйлера опубликовано, кроме того, после его смерти. Общий объем всех изданных его сочинений составляет около 30 000 печатных страниц. Эти работы составят 72 тома первых трех серий Полного собрания сочинений (L e o n h a r d i E u l e r i Opera omnia), 41 из которых уже вышел в свет [1]).

Сверх того, некоторое число завершенных работ Л. Эйлера до сих пор не опубликовано. Они хранятся наряду с многочисленными разрозненными отрывками утраченных сочинений Л. Эйлера и его черновыми набросками в Архиве Академии наук СССР в Ленинграде. Там же находится большая часть сохранившейся корреспонденции

[1]) План Полного собрания сочинений Л. Эйлера можно найти в статье главного редактора проф. А. Шпайзера (A. S p e i s e r, Einteilung der sämtlichen Werke L. Eulers.—Comm. math. helvetici, 1947, v. 20, № 3, 288—318). По состоянию на 1956 г. вышли из печати тт. 1—29 первой серии, тт. 1—4, 10, 12—14 второй серии и тт. 1—4 третьей серии. В дальнейшем при ссылках на Полное собрание сочинений серия обозначается римскими, а номера томов—арабскими цифрами.

Л. Эйлера, составлявшей, вероятно, свыше пяти тысяч писем. Значительная часть писем самого Л. Эйлера, к сожалению, безвозвратно утеряна, однако общее число сохранившихся в разных местах его писем превышает тысячу.

Кроме этого, в Архиве Академии наук СССР хранятся 12 записных книжек Леонарда Эйлера—научные дневники его полувековой деятельности. Эти записные книжки, общий объем которых составляет около 4000 страниц, исписанных большей частью очень мелким почерком, представляют собой обширнейший и богатейший материал для анализа творчества Л. Эйлера. Помимо весьма интересных для историка сведений о хронологии работ Л. Эйлера, из них можно почерпнуть и нечто другое. Они позволяют проникнуть во внутреннюю лабораторию творчества гениального ученого, более глубоко познакомиться с методами его работы, с кругом его интересов.

Сведения об этих записных книжках, помимо одной странички в мало у нас известном отчете Энестрема [1]), и немногих ссылок в предисловиях к отдельным томам Полного собрания сочинений Л. Эйлера, почти не проникли в научную литературу. Книжки хранились до 1910 г. в Архиве Академии наук, затем были пересланы редакции Полного собрания сочинений Л. Эйлера в Швейцарию, с них были сняты фотокопии, и после этого в 1949 г. где были вновь возвращены в Ленинград. В настоящее время Архивом Академии наук СССР предпринята большая работа по разбору бумаг Л. Эйлера, записных книжек и составлению к ним систематических указателей, без которых использование этих ценных материалов является крайне затруднительным. Работа эта еще только начата, и поэтому пока еще трудно говорить о сроках ее окончания.

В одной статье невозможно дать систематический разбор содержания всех записных книжек, так как это равносильно составлению полного обзора всех 72 томов сочине-

---

[1] G. Eneström, Bericht an die Eulerkommission der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft über die Eulerschen Manuskripte der Petersburger Akademie.—Jahresbericht der Deutschen Mathematiker—Vereinigung, 1913, B. 22, H. 11—12, 2. Abt., стр. 555—558.

ний Л. Эйлера. В статье трудно дать даже поверхностное представление о содержании записных книжек по всем разделам математики, механики и физики. Поэтому в настоящей краткой заметке дается только минимальное суммарное описание книжек с беглыми указаниями на места, посвященные задачам механики. Анализ этих задач также не входит в план настоящей заметки. Цель автора—привлечь к записным книжкам Л. Эйлера внимание научной общественности.

Записные книжки хранятся в фонде сочинений Л. Эйлера (ф. 136) Архива Академии наук СССР и составляют в основном в хронологической последовательности №129—140 описи 1 этого фонда. Ниже мы будем называть их чаще, под соответствующими порядковыми номерами—от первой до двенадцатой [1]).

Под № 129 (первая записная книжка, обозначена Л. Эйлером индексом E) хранится большая тетрадь (16×20 *см*), содержащая 407 страниц текста и относящаяся к базельскому периоду жизни Л. Эйлера. Она содержит в основном связные тексты и выкладки по механике и математике. Ее можно датировать 1725—1727 гг.

Под № 130 (вторая записная книжка, обозначена индексом Q) хранится небольшая тетрадка (10×16 *см*) на 152 страницах, начинающаяся с дневника путешествия Л. Эйлера из Базеля в Петербург (апрель—июнь 1727 г.). Далее следуют довольно беспорядочные заметки, частично не научного содержания, относящиеся, по-видимому, к периоду до конца 1727 г.

Записные книжки за 1728—1735 гг. отсутствуют. На титульном листе третьей книжки (№ 131, индекс G) имеется надпись, свидетельствующая о том, что она начата в феврале 1736 г. Книжка эта имеет формат 17×22 *см* и содержит 544 страницы математических выкладок. Она относится к 1736—1740 гг.

---

[1]) В упомянутом уже отчете Энестрема первые девять записных книжек имеют номера H 1—H 9 и порядковые номера их таким образом совпадают с принятыми в настоящей статье. Три последние книжки (№ 138—140) занесены у Энестрема под номерами, соответственно, H 11—H 13 и к категории собственно записных книжек не отнесены.

Четвертая книжка (№ 132, индекс H) является непосредственным продолжением предыдущей. Она содержит 520 страниц (16×20 *см*) и относится к 1740—1744 гг. Далее снова следует лакуна, так как пятая записная книжка (№ 133), содержащая 353 страницы (17×21,5 *см*), охватывает 1749—1753 гг. Величина промежутка времени между четвертой и пятой книжкой, а равно приписанные Л. Эйлером записным книжкам индексы H и K, позволяют подозревать исчезновение книжки, относившейся к 1744—1749 гг.

Шестая книжка (№ 134, индекс F) имеет 519 страниц (16×20 *см*). Она отличается от предыдущих наличием наряду со связными научными заметками сравнительно большого числа счетов и страниц с другими деловыми записями. Датировка ее начала более затруднительна. Можно считать, что она относится к 1749—1757 гг.

Седьмая (№ 135, индекс L) и восьмая (№ 136, индекс P) книжки сравнительно невелики. В первой всего 186 страниц (16,5×20 *см*), относящихся к 1759—1763 гг., а во второй 184 страницы, относящиеся, по-видимому, к тем же годам. Датировка этих книжек также менее точна.

На этом заканчиваются собственноручные записные книжки Л. Эйлера. Большая девятая книжка (№ 137) содержит 742 страницы (16×20 *см*), однако наряду с немногочисленными записями Л. Эйлера наибольшую часть в ней занимают обширные рукописи, принадлежащие другой руке и даже вплетенные сюда же печатные тексты.

Следующие три большие книжки (№ 138, 344 стр., 20×31 *см*; № 139, 263 стр., 21×32 *см*; № 140, 184 стр., 20×31,5 *см*) содержат записи, сделанные под диктовку Л. Эйлера, и относятся ко второму петербургскому периоду его жизни (вероятно, к 1770—1783 гг.). Здесь можно найти записи рукой учеников и помощников Л. Эйлера последних лет его жизни. Первая из этих книжек (№ 138) имеет на титульном листе надпись «Математика» (Mathematica), а две другие надпись «Математические записки» (Adversaria mathematica). Небольшие извлечения из этих книжек были опубликованы в «Посмертных трудах» Л. Эйлера (L e o n h a r d i E u l e r i, Opera postuma, т. 1—2, СПб, 1862).

На содержании трех последних книжек, в которых механика представлена к тому же очень слабо, в настоящей заметке останавливаться не будем.

Язык книжек почти всюду латинский. Лишь в книжках берлинского периода жизни Л. Эйлера имеются записи на французском языке. Немногочисленные заметки ненаучного содержания написаны часто на родном языке Л. Эйлера—по-немецки.

Датировка записных книжек может быть установлена наиболее точно по анализу их содержания и сопоставлению его с научной перепиской Л. Эйлера. Пока эта работа еще не проведена. В настоящей заметке с этой целью использована, в основном, лишь опубликованная П. Н. Фуссом корреспонденция Л. Эйлера с Гольдбахом [1]), которая позволила частично уточнить датировку третьей, четвертой и пятой записных книжек.

Перейдем к краткому описанию каждой из записных книжек в отдельности, уделяя наибольшее внимание ранним записным книжкам.

II. Первые две записные книжки, 1725—1727 гг.

Первая книжка относится собственно еще к ученическому периоду жизни Л. Эйлера в Базеле. Однако уже в ней проявляются будущая широта интересов Л. Эйлера, склонность его к систематизации отдельных дисциплин, блестяще проявившаяся впоследствии в его «Механике», «Методе нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума», «Введении в анализ бесконечно малых», «Дифференциальном исчислении», «Интегральном исчислении» и других классических сочинениях.

Записная книжка исписана с двух концов. По-видимому, более ранняя часть (с нумерацией страниц от 01 до 0163) начинается с плана сочинения по механике, касающегося движения точки под действием различным образом заданных сил (первая страничка плана, содержавшая, вероятно, заглавие, не сохранилась). Речь идет здесь о дви-

---

[1]) P. Fuss, Correspondence mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle, t. 1, СПб., 1843.

жении точки под действием центральной силы при сопротивлении, причем подлежат определению либо траектория, либо элементы движения, либо действующие силы. Попытка систематического изложения некоторых вопросов механики точки имеется в начале другой части этой же книжки.

Вслед за планом в записной книжке следуют девять задач на приложение анализа к геометрии, в которых отыскиваются кривые по заданным соотношениям между длинами их дуг и различными отрезками.

После этого Л. Эйлер обращается к совершенно иной области математики—девять страниц посвящено так называемым «магическим квадратам». Далее следуют восемь страниц, посвященных построению профиля зажигательных стекол. Эта задача представляет также предмет приложений анализа к геометрии, которым посвящены и следующие страницы книжки. После ряда задач этого типа Л. Эйлер переходит к теории числовых рядов.

Наряду с математическими задачами в книге имеются таблицы сравнительных весов различных веществ (за 100 принят удельный вес золота), сведения о плотности воздуха (по Герике). Далее идут исследования о сопротивлении корабля при его движении, об ударе шаров, о проведении линии через заданные точки, об определении количества золота в сплаве.

Затем Л. Эйлер занимается операциями с отданным под проценты капиталом и вновь возвращается к вопросам механики. После заметки о колебании физического маятника следует начало работы «О движении тел в сопротивляющихся средах» (De motu corporum in mediis resistentibus). За первыми ее 16 параграфами (стр. 087—099) находится уже без разбивки на параграфы продолжение исследований о движении тел в воде, воздухе и в других сопротивляющихся средах. Всего этим вопросам посвящено свыше 40 страниц.

Дальнейшее содержание первой части книжки довольно пестро, в ней не содержится более крупных связных отрывков, однако предмет исследования мало меняется, появляются лишь еще теоремы о сферических треугольниках и изопериметрические задачи.

Вторая часть книжки начинается, как сказано, сочинением о движении точки. На 41 странице содержится семь первых разделов рукописи [1]):

о движении тел под действием произвольной центральной силы;

о движении тел в отсутствии какой-либо возмущающей силы;

о движении тел при наличии замедляющей силы, пропорциональной скорости тела;

о движении тел при наличии замедляющей силы, пропорциональной квадрату скорости тела;

о движении тел при наличии замедляющей силы, пропорциональной квадрату скорости тела, отнесенному к квадрату расстояния от центра;

о движении тел при наличии замедляющей силы, пропорциональной скорости в степени m;

метод нахождения возмущающей силы по заданным траектории и центральной силе.

Изложение механики точки сопровождается здесь рядом ссылок на параллельные места ньютоновых «Principia».

Далее в книжке имеется еще 20 страниц разрозненных отрывков, связанных с механикой. Бóльшие из них посвящены прямолинейному подъему или спуску тел, отысканию изохрон и брахистохрон в сопротивляющихся средах, периодам обращения точек вокруг неподвижного центра и распределению плотности сжимаемой жидкости в поле центральной силы. В промежутках встречаются заметки о падении и, вообще, движении в сопротивляющейся среде.

После этой обширной механической части следует большой отдел (почти 40 страниц), посвященный теории музыки.

---

[1]) Подлинные заглавия разделов: De motu corporum a vi quacunque centrali agitatorum; De motu corporum vi nulla existente mutatrice; De motu corporum vi retardatrice existente ut corporis celeritas; De motu corporum vi retardatrice existente ut quadratum celeritatis corporis; De motu corporum vi retardatrice exstente ut quadratum celeritatis applicatum ad quadratum distantiae a centro; De motu corporum vi retardatrice existente ut potentia celeritatis m; Methodus datis curva et vi centrali inveniendi vim mutatricem.

В частности, здесь находится план сочинения по теории музыки, помещенный вместе с некоторыми другими выдержками отсюда в предисловии к тому III—1 Полного собрания сочинений Л. Эйлера. В промежутках между нотными текстами и местами даже поверх их идут различные математические выкладки. Отметим, в частности, некоторые формулы интегрирования при помощи разложений в ряды, таблицы лотерей разных типов и т. п.

Особо отметим имеющиеся здесь же план сочинения по гидравлике (стр. 69) и несколько ниже начало плана «Трактата о движении жидкостей и твердых тел в жидкостях» (Tractatus de motu fluidorum et solidorum in fluidis, стр. 74). В 36 пунктах первого предусмотрено подробное исследование различных случаев истечения из отверстий в сосудах и через трубы и значительно менее проработанный план исследований течения и сопротивления движению в реках и каналах, вращательного движения жидкости и т. п.

После раздела о музыке отметим задачу о нагруженной сосредоточенными силами гибкой нити (стр. 106—107) и исследования, связанные с мемуаром Л. Эйлера, представленным им в августе 1726 г. на соискание премии Парижской Академии наук (стр. 109—119). Конкурсный вопрос гласил: каков наилучший способ размещения мачт на кораблях в отношении их места, числа и высоты.

Далее в записной книжке имеется заметка по внутренней баллистике (стр. 122—128) с определением скорости вылетающего из жерла пушки ядра и заметки к диссертации Л. Эйлера о звуке (Dissertatio physica de sono, Opera omnia, III—1, 181—196), представленной им Базельскому университету в связи с соисканием вакантной кафедры физики и явившейся предметом диспута 18 февраля 1727 г. Среди них имеются заметки о колебании струн и теории возбуждения и распространения звука.

Здесь же имеются выкладки к определению суммы ряда с общим членом $a_n = pa_{n-2} + qa_{n-1}$ (стр. 148—155), предложенного Л. Эйлеру Николаем I Бернулли, и часть черновика письма Л. Эйлера к Даниилу Бернулли от ноября

1726 г. (стр. 161—166) [1]). Затем следуют дополнительные исследования о возбуждении звука в музыкальных трубах и первые заметки об истечении воды из сосудов.

Дальнейшее содержание второй части книжки больше посвящено математике. Здесь много задач на приложение анализа к геометрии, в частности об определении кривых по заданным соотношениям радиуса кривизны с другими геометрическими характеристиками кривой. Однако, как и везде, здесь встречаются разнообразные заметки по алгебре, дифференциальному и интегральному исчислению и т. д. Среди нематематических записей отметим таблицу сравнения различных мер веса, заметки о колебаниях маятника, в том числе использованного в часах Сулли (ср. с диссертацией Л. Эйлера о некотором новом роде таутохрон, опубликованной в Комментариях Петербургской Академии наук за 1727 год, т. 2, 1729), и о движении небесных тел с приложением к теории Луны. Заметка, связанная с часами Сулли, могла бы навести на мысль, не относится ли конец первой записной книжки уже к петербургскому периоду жизни Л. Эйлера. Но более вероятным является, пожалуй, предположение, что исследования первых петербургских лет жизни Л. Эйлера являются развитием вопросов, привлекших его внимание еще в Базеле.

Перечисленные без определенного порядка темы исследований Л. Эйлера, которых он коснулся в первой своей записной книжке, свидетельствуют о весьма широком круге его интересов, в конечном итоге характеризующемся, однако, одним стремлением: сделать каждую задачу предметом математического анализа. Эти темы характерны как для юноши, только окончившего Базельский университет, так и для маститого старца, признанного главы математиков всего мира. И хотя Л. Эйлер прекрасно понимал ценность эксперимента и любил изучать физические явления, с ранней молодости и до глубокой старости его сопро-

---

[1]) Это письмо, содержащее замечания по поводу диссертации о теории звука и результаты исследования суммы упомянутого ряда, а также ответ Д. Бернулли и другие относящиеся к этому периоду сведения о Л. Эйлере см. в статье автора «К переезду Леонарда Эйлера в Петербург»—Известия Академии наук СССР, Отд. техн. наук, № 3, 1957.

вождала непоколебимая вера в силу математического анализа. В известном смысле пророческими являются слова из заключительного параграфа его мемуара о расстановке мачт на корабле: «Я не почел за нужное подтвердить эту мою теорию экспериментом, ибо вся она выведена из точнейших и неоспоримейших принципов механики; поэтому никоим образом не может возникнуть сомнение в ее правильности и соответствии практике» [1]).

Вторая записная книжка относится, как сказано, к 1727 г.

Она начинается с путевого дневника Леонарда Эйлера, который он вел во время переезда из Базеля в Петербург. Дневник этот написан карандашом и содержит 17 страничек, которые, к сожалению, очень трудно читать, так как карандаш сильно стерся. Помимо описания пути, по которому ехал Л. Эйлер, дневник содержит также несколько замечаний о предшествующих отъезду из Швейцарии событиях в его жизни. Из него, в частности, мы впервые узнаем о прочтенном девятнадцатилетним Л. Эйлером 17 марта 1727 г. докладе «О причине тяготения» (De causa gravitatis).

Текст дневника дает также точное указание на день прибытия Л. Эйлера в Петербург—24 мая н. ст. 1727 года.

В остальном книжка почти не содержит связных текстов. Бо́льшая часть ее занята отдельными короткими математическими выкладками. И здесь можно заметить большое разнообразие задач, которыми занят Л. Эйлер. Много выкладок

[1]) Эта цитата взята из опубликованного текста сочинения Meditationes super problemate nautico, de implantatione malorum, quae proxime accessere ad praemium anno 1727 à regia scientiarum academia promulgatum (Parisiis, 1728; также: Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'académie royale des sciences, 1732, т. 2). Любопытно, что в первом варианте рукописи этого сочинения (Архив Академии наук СССР, ф. 136, оп. 1, № 157) Л. Эйлер заканчивает его описанием проведенных им экспериментов. Введением к этому описанию служит фраза, прямо противоположная цитированной. Л. Эйлер пишет: «Эту мою теорию, хотя она, насколько я могу об этом судить, выведена правильно из самых правильных и неоспоримых принципов, я, однако, счел нужным подтвердить также опытами, чтобы, если кто и пожелал бы усомниться в правильности принципов или в закономерности вывода моей теории, он мог бы увидеть, что сами факты подтверждают ее истинность, и не остается никакого места для сомнений или колебаний» (переведено с латыни Ю. Х. Копелевич).

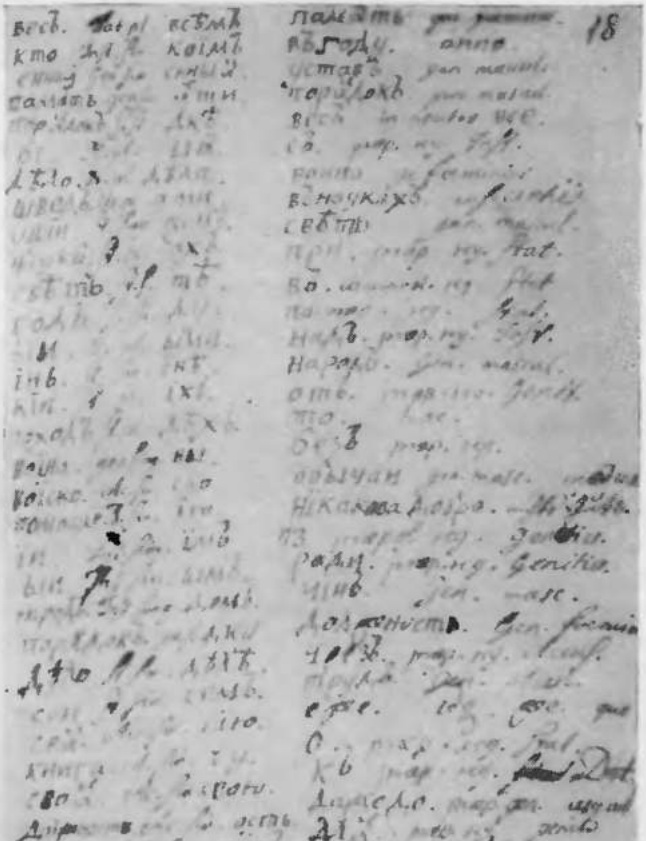


Фото 1. Репродукция страницы из второй записной книжки Л. Эйлера.

посвящено рядам, встречаются задачи по геометрии, алгебре, механике, небесной механике. Много задач на интегрирование простейших дифференциальных уравнений. Имеются заметки по теории музыки, сведения из астрономии, географии, истории.

Вместе с записями научного содержания в книжке имеются записи о денежных делах Л. Эйлера, заметки с планом работ, странички, посвященные изучению русского языка (см. фото 1), и т. д.

Наряду с первыми двумя записными книжками в Архиве Академии наук СССР хранится большое количество ранних рукописей Л. Эйлера, относящихся к тем же годам. Часть этих рукописей сохранила пометы Иоганна I Бернулли [1]).

III. Третья записная книжка, 1736—1740 гг.

Третья записная книжка имеет на титульном листе надпись: «Математические записки, начатые писанием 12 февраля 1736 года» (Adversaria mathematica, scribi incepta ad d. 12 Febr. A. 1736). В полном соответствии с заглавием, книжка посвящена почти исключительно математическим вопросам. Вопросы механики и другие, связанные с прикладными задачами, появляются на страницах книжки лишь изредка: они не составляют и 10% общего объема записей. Особо большое место на протяжении всей этой книжки занимает исследование рядов. Л. Эйлер изучает некоторые ряды довольно общего вида, а также частные числовые ряды, использует ряды как вспомогательный аппарат для решения различных задач математического анализа и т. д. Значительное место уделено различным вопросам алгебры и теории чисел. Последней Л. Эйлер занимался особенно много, в частности, зимой 1736/37 г. и в конце 1738 г. Много заметок, начиная с середины 1736 г., посвящено теории и приложениям непрерывных дробей.

---

[1]) Общий обзор неопубликованных рукописей Л. Эйлера из Архива подготовлен в совместной с акад. В. И. Смирновым статье автора «Неопубликованные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР», публикуемой в Юбилейном сборнике памяти Л. Эйлера, издаваемом Академией наук СССР совместно с Берлинской Академией наук.

Теорией дифференциальных уравнений Л. Эйлер занимался во второй половине 1737 г., когда он рассматривал, в частности, уравнения типа

$$(a+bx^n)\,x^2\,d^2v+(c+fx^n)\,x\,dv\,dx+(g+hx^n)\,v\,dx^2=0,$$

и затем позже, в 1739 г. К лету 1739 г. относятся многочисленные исследования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Вопросы вариационного исчисления представлены в этот период слабо. Однако в конце 1738 г. Л. Эйлер занимается предложенной ему Д. Бернулли изопериметрической задачей об отыскании кривых, на которых имеет место минимум или максимум интеграла

$$\int R^m\,ds,$$

где R—радиус кривизны, а s—дуга кривой, а несколько позже—более общей задачей с интегралом типа

$$\int Z\,dx,\quad Z=Z\left(x,\ y,\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\right).$$

Из вопросов, к которым Л. Эйлер неоднократно возвращается на протяжении всех этих лет, отметим еще исследование интегралов типа

$$\int x^m\,(1-x^p)^n\,dx$$

и их приложений к теории рядов.

Помимо упомянутых вопросов, Л. Эйлер затрагивает в своей записной книжке, конечно, еще множество задач геометрии, приложений к ней анализа и других. Укажем в частности, на изложенное Л. Эйлером решение задачи о линии погони (весна 1736 г., стр. 12—13), которое он приводит в связи с опубликованным в трудах Парижской академии наук решением ее, принадлежащим П. Бугеру (Bouguer Pierre, 1698—1758). Л. Эйлер сопровождает заметку упоминанием о том, что эта задача была им решена еще много лет тому назад.

Заметим, что в книжке почти полностью отсутствуют задачи из теории вероятностей и теории математических игр.

Прежде чем остановиться на немногочисленных задачах механики, рассмотренных в этой записной книжке, укажем еще на несколько вопросов, которыми занимается в ней Л. Эйлер. Это—относящийся к концу 1737 г. набросок (стр. 235—240) к работе «Определение степени тепла и холода в каждой точке земли для любого времени» (Determinatio caloris et frigoris graduum pro singulis locis ac temporibus, Comm. acad. sci. Petrop., 1739, т. 11, СПб, 1750), отдельные заметки по сферической астрономии, заметки о рефракции лучей в атмосфере (зима 1738/39 г.), по геометрической оптике (1739 г.), о локсодроме и связанных с ней навигационных задачах (зима 1739/40 г.).

Из механических задач, находящихся в этой книжке, отметим относящиеся к концу 1736 г. теорему из гидростатики (стр. 72) и набросок (стр. 88—93) работы «О движении челноков, движимых веслами в реках» (De motu cymbarum remis propulsarum in fluviis, Comm. acad. sci. Petrop., 1738, т. 10, СПб, 1747). Далее имеется заметка о телах, связанных гибкой нитью (зима 1736/37 г., стр. 121—123), несколько заметок по гидростатике, связанных с теорией корабля (начало 1737 г., стр. 126—132, 134, 139—141, 149). Л. Эйлер рассматривает здесь устойчивость плавающих тел различной формы, вычисляет восстанавливающий момент при малом крене и специально останавливается на случае параллелепипедального корабля.

К этому же периоду относится заметка о непрямом соударении тел (стр. 163—164) и несколько общих теорем по механике (стр. 133, 141, 142, 165), в частности по механике вращающихся тел и определению центров качания физического мятника. К вопросам колебания маятника и вычислению моментов инерции тел он возвращается также зимой 1737/38 г. (стр. 265—269).

Ко второй половине 1738 г. относится запись Л. Эйлера об определении истечения воды из сосуда через насадок по теории Д. Бернулли (стр. 342). Зимой 1738/39 г. он исследует поверхность жидкости, вращающейся в сосуде (стр. 383), таутохрону в жидкости, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости (стр. 388—390), раздумывает над сопротивлением движущейся в жидкости пластинки[1]) (стр. 390) и изучает истечение жидкости из канала произвольной формы (De motu fluidi per canalem cujuscunque figurae, стр. 419—421). К гидравлике истечения из сосудов Л. Эйлер возвращается вновь зимой 1739/40 г. (стр. 526—528).

Помимо этого, в записной книжке имеется заметка о правиле уменьшения трения в машинах (лето 1736 г., стр. 47), о натяжении веревки, обернутой вокруг цилиндра (конец 1738 г., стр. 361) и о форме упругой нити, нагруженной сосредоточенной силой (конец 1739 г., стр. 481). К началу 1740 г. относятся также заметки по небесной механике с приложениями к теории движения планет (стр. 529—535).

IV. Четвертая записная книжка, 1740—1744 гг.

Четвертая записная книжка представляет значительно больший интерес с точки зрения механики. Вопросам механики посвящено около четверти содержания книжки.

Математическая часть этой записной книжки сравнительно мало отличается от предыдущей книжки, так как здесь также представлены все разделы чистой и прикладной математики. Отметим лишь вкратце распределение математических вопросов по объему книжки.

В 1740 г. Л. Эйлер продолжает еще заниматься линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами и некоторыми их обобщениями.

В середине 1740 г. он рассматривает вариационную задачу для интеграла

$$\int Z\,dx, \quad Z = Z\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right).$$

Вероятно, к осени 1740 г. относится внесенная в книжку теорема об однородных функциях:

$$nZ = \frac{\partial Z}{\partial x}x + \frac{\partial Z}{\partial y}y + \frac{\partial Z}{\partial z}z.$$

---

[1]) Об опытах над сопротивлением тел различной формы упоминает Л. Эйлер и в письме к Д. Бернулли от 15 сентября 1739 г.

В конце 1740 и начале 1741 г. очень много места уделяет Л. Эйлер алгебраическим уравнениям высших степеней. Им посвящено почти подряд свыше 50 страниц записной книжки. Вопросы анализа практически отсутствуют в этот период. Имеются лишь некоторые теоремы из элементарной и аналитической геометрии (в частности, анализ общего уравнения конического сечения), заметки по теории рядов. Так продолжается, с незначительными исключениями, примерно в течение года. К середине 1741 г. появляется лишь больше заметок о рядах, и особенно по теории чисел. На стр. 185 (осень 1741 г.) находится без всяких выводов запись:

«Если x есть мнимая величина, то

$$e^x = \cos Ax \sqrt{-1} + \frac{\sin Ax \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \text{».}$$

Наконец, с зимы 1741/42 г. Л. Эйлер начинает вновь сравнительно широко возвращаться к некоторым вопросам анализа. В частности, к 1742 г. относится решение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами и некоторых других дифференциальных уравнений, к нему приводящихся. Однако вопросы теории чисел продолжают занимать весьма значительное место на страницах записной книжки и преобладают над другими разделами математики. Среди математических заметок здесь также встречаются отдельные места, посвященные сферической астрономии и вопросам определения орбит.

Перечислим кратко вопросы механики, отраженные в четвертой записной книжке.

17 страниц (стр. 13—30, весна 1740 г.) посвящены теории потенциала, причем Л. Эйлер вычисляет здесь силы притяжения неоднородного сплошного и полого сфероида (ср. с его статьей «De attractione corporum sphaeroidico-ellipticorum», Comm. acad. sci. Petrop. 1738, т. 10, 1747). После этого Л. Эйлер обращается к малым колебаниям произвольных тел вокруг положения равновесия (стр. 35—50).

Значительный интерес вызвала в дальнейшем у Л. Эйлера задача о равновесии гибких и упругих нитей. Первое исследование, относящееся к лету 1740 г., касается общей задачи о гибкой нити с распределенной нагрузкой (стр. 52—54). За ним идет исследование равновесия упругой нити в предположении справедливости гипотезы Я. Бернулли (стр. 55—60). Весной 1742 г. Л. Эйлер обращается к другой задаче об упругих телах—о колебаниях заделанного одним концом упругого стержня (стр. 280—281). Глубокий интерес к задаче о равновесии упругих нитей возникает у Л. Эйлера в конце этого года в связи с сообщенным ему Д. Бернулли новым методом исследования формы упругих линий. В письме от 20 октября 1742 г. Д. Бернулли указал Л. Эйлеру на возможность решения задачи, исходя из отыскания минимума интеграла

$$\int \frac{ds}{R^2}.$$

Л. Эйлер записывает переданный ему новый метод в своей записной книжке и углубляется на основании полученного им общего уравнения в математический анализ форм упругих линий (стр. 346—348, 354—356, 366—369).

В записной книжке отсутствует сама формула для критической продольной нагрузки стержня, но она следует, в частности, из приведенных им здесь формул.

Результаты исследований Л. Эйлера в этой области нашли отражение в знаменитом «Методе нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума...». Одновременно Л. Эйлер продолжает интересоваться и поперечными колебаниями упругих стержней (стр. 351—354, 384—385), аппарат для решения уравнения колебаний которых подготовлен в предыдущих математических работах Л. Эйлера.

Вместе с этими исследованиями Л. Эйлер обращается и к некоторым задачам сопротивления материалов при растяжении. Он изучает деформацию растяжимой нити при поперечной нагрузке (стр. 357—360). Отметим здесь же более позднюю (зима 1743/44 г.) заметку Л. Эйлера о форме свода, элементы которого поддерживают друг друга (стр. 488—489).

Несколько раз на протяжении 1741—1742 гг. Л. Эйлер возвращается к задачам о равновесии и движении твердого тела на шероховатой плоскости (стр. 129—132, 236—238, 252—257). Дважды он возвращается в 1742—1743 гг. к задачам о движении шарнирно соединенных тел (стержней) и гибких нитей на горизонтальной плоскости (стр. 348—350, 449, 451—457, 459—461, 480—483).

В 1742—1743 гг. Л. Эйлер посвящает несколько заметок движению тел (в частности, трубок), по которым движутся заданным образом другие тела (стр. 323—326, 402—405, 409, 413—422, 447—448, 457—459).

Из других заметок механического содержания отметим несколько случаев движения вращающихся тел (стр. 253—255, 375—378, 447, 491), несколько страничек, связанных с небесной механикой (стр. 433—434, 487—488), заметку о движении ядра в стволе (стр. 437—438), частный случай принципа наименьшего действия в применении к движению брошенного тела (январь 1743 г., стр. 374—375), заметки о сравнении удара с давлением (стр. 429), о сопротивлении среды движению вращающегося тела (стр. 437), о силе весел, движущих корабль (стр. 135), об упругости эфира (стр. 442), о действии центральных сил (стр. 298).

Наконец, известное место уделено классическим задачам о таутохронах (стр. 273—276, 278), брахистохроне (стр. 212), задаче И. Бернулли об отыскании угла наклона плоскости, по которой падающая в сопротивляющейся среде точка скорее всего достигает заданной вертикальной плоскости (стр. 462—463, 465, 485).

V. Пятая записная книжка, 1749—1753 гг.

Пятая записная книжка имеет заглавие «Математический дневник» (Diarium mathematicum) и весьма интересна с точки зрения механики. Ей посвящено свыше трети всей записной книжки. Математическая часть книжки не содержит значительных связных отрывков; большое число страниц посвящено теории чисел, различным геометрическим задачам на приложение анализа, во второй половине книги известное место уделено дифференциальным уравнениям.

Начало книжки, относящееся к 1749—1750 гг., почти полностью относится к механике. Книжка начинается с отрывка из теории движения Луны (стр. 3—7, 10—16, 18—21, 28—35). В дальнейшем изложении Л. Эйлер возвращается к задачам небесной механики еще несколько раз (стр. 72—75, 148—152, 157, 253—255, 274). Среди заметок по механике в начале книжки отметим заметки о трении каната (опыт Полени—стр. 40, 41), об уровне воды в движущейся трубке (стр. 40, 41), о движении винта (стр. 42—45), о движении шара в движущейся трубке (стр. 45—48), о течении рек (стр. 49—51), о теории поршневых насосов (стр. 52—55), о профиле зубчатых колес (стр. 56—58). В заметке «Исследование движения рек» (Inquisitio in motum fluminum) Л. Эйлер рассматривает течение жидкости в вертикальной плоскости и впервые подходит к задаче не в гидравлической, а в гидродинамической постановке (см. Recherches sur le mouvement des rivières, Opera omnia, II—12).

Далее следуют заметки об определении действия машин (Vera aestimatio effectus, quem machinae cujusvis generis producunt; стр. 67—69), о вращении тел (стр. 70—80), о притяжении сфероида (стр. 81—84), о маятниках (стр. 86—87) и моментах инерции (стр. 88), о преобразовании прямоугольных координат (стр. 90), о движении тела вокруг центра тяжести (стр. 91—99).

Вторая сотня страниц книжки, соответствующая, в основном, 1751 г., содержит очень мало заметок по механике. Отметим среди них заметки о сегнеровом колесе (стр. 115), о движении капли в трубке (стр. 116), о движении тел вокруг неподвижного центра тяжести (стр. 165—169).

В дальнейшем количество записей, касающихся механики, снова увеличивается. В частности, в начале 1752 г. появляются гидравлические исследования о движении воды в движущихся трубах, связанные с теорией сегнерова колеса (стр. 209, 219—221), заметки о корабельном винте (стр. 210), об определении сопротивления жидкостей (стр. 214). Затем весной Л. Эйлер переходит к вопросам общей гидродинамики идеальной жидкости (стр. 223—240). Сначала он рассматривает течения в горизонтальной плоскости, определяет давление, оказываемое при течении на стенки искривленного канала, затем переходит к выводу уравнения неразрывности пространственного несжимаемого потока. При этом он пользуется сравнением объемов при деформации движущегося жидкого тетраэдра. На стр. 226 имеется более поздняя приписка с уравнениями неразрывности сжимаемой жидкости в виде (при нынешних обозначениях):

$$\frac{\partial (Du)}{\partial x}+\frac{\partial (Dv)}{\partial y}+\frac{\partial (Dw)}{\partial z}=0$$

и

$$\frac{dD}{D\,dt}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

После этого Л. Эйлер переходит к уравнениям движения, причем рассматривает только потенциальные течения, так как они во всяком случае удовлетворяют общим уравнениям. На стр. 227 он указывает, следуя Даламберу (Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides, Paris, 1752), что для плоского потока

$$u+v\sqrt{-1}=\varphi(x-y\sqrt{-1}),$$
$$u-v\sqrt{-1}=\varphi(x+y\sqrt{-1}).$$

Далее рассматриваются частные случаи потенциальных пространственных потоков. На стр. 229 приводится формула

$$p=C+\Pi-uu-vv-ww,$$

где Π—потенциал внешних сил[1]).

После некоторых соображений об определении давления, оказываемого на тело потоком жидкости, Л. Эйлер переходит к исследованию траектории тела, брошенного в жидкости, оказывающей сопротивление, пропорциональное скорости движущегося тела. В конце он рассматривает некоторые движения жидкости на сферах.

[1]) Следует помнить, что использовавшаяся Л. Эйлером система основных единиц не соответствует принятой в наше время. Этим объясняются расхождения между формами записи уравнений у Л. Эйлера и в современной литературе. О системе единиц, применявшейся им в гидродинамических исследованиях, см. в предисловии К. Трусделла к тому II—12 Полного собрания сочинений Л. Эйлера.

Несколько ниже Л. Эйлер останавливается на теории равновесия жидкостей (стр. 244—245). К вопросам общей гидродинамики идеальной жидкости он возвращается еще раз уже в 1753 г. (стр. 310—315). В отрывке, озаглавленном «Общая теория гидродинамики» (Theoria generalis hydrodynamicae), он суммирует свои результаты по теории движения жидкостей. Здесь находится, между прочим, заметка о возможности непотенциальных движений-существование которых Л. Эйлер обнаруживает на примере

$$u=0,\quad v=Xz,\quad w=-Xy,\quad X=X\left(\sqrt{y^2+z^2}\right).$$

Далее рассматривается вопрос о движении жидкости при фиксации траекторий частиц (в так называемой постановке Лагранжа), хотя, впрочем, общие уравнения гидродинамики в лагранжевых координатах здесь еще отсутствуют.

Помимо вопросов гидродинамики, рассмотренных Л. Эйлером во второй половине записной книжки, отметим некоторые другие заметки по механике: о теории движения твердых тел (стр. 251—252, 275, 346), о движении гибкой нити (стр. 265—268, 320), о таутохроне при действии произвольной центральной силы (стр. 277), о предельном равновесии тела на горизонтальной и наклонной шероховатой плоскости (стр. 305—309).

Среди заметок нематематического содержания отметим еще несколько мест, посвященных геометрической оптике и теории рефракции (стр. 101—102, 106, 170—175, 211—215, 301—302), об определении фигуры Земли по наблюдениям параллакса Луны (стр. 243—244, 246).

VI. Шестая записная книжка, 1749—1757 гг.

Шестая записная книжка (№ 134) снабжена Л. Эйлером индексом F, который трудно поставить в соответствие с индексацией других книжек. Содержание книжки весьма пестро. В середине ее (стр. 152—165) и в конце (стр. 478—519) находятся счета, отражающие финансовые взаимоотношения Л. Эйлера с отдельными учреждениями и лицами, в том числе с Петербургской Академией наук. Судя по этим счетам, книжку следовало бы датировать 1749—1757 гг. Однако математические заметки явно не охватывают такого большого периода и относятся, по-видимому, в основном, к 1754—1757 гг., являясь продолжением пятой записной книжки.

Часть записей в начале книжки не касается математики. Книжка открывается заметкой о системах денежных единиц в различных странах. За нею следуют заметки по философии и физике. Здесь имеются замечания об онтологии Вольфа, заметки по логике, «философские тезисы», содержащие 91 предложение из теории света и цветов (стр. 15—27), «Вопросы по физике» (18 вопросов, стр. 43—44) и т. д. Вопросы физики (теория света и цветов, магнетизм, электричество, кипение и др.) освещаются также в некоторых заметках на протяжении всей книжки. Отметим, в частности, заметку о растворении металлов (стр. 372) со ссылкой на М. В. Ломоносова[1]). Имеются также таблицы астрономических наблюдений прежних лет.

Среди других нематематических записей укажем на заметки о латинском и немецком языках и на каталог библиотеки Л. Эйлера (см. фото 2), относящийся не позже, чем к 1749 г. (стр. 383—402). Этот каталог, содержащий 539 номеров, дает хорошее представление об интересах Л. Эйлера. Наряду с преобладающим количеством книг научного содержания в нем можно найти религиозные и философские сочинения, много античной и современной художественной литературы, различные словари и т. д. В библиотеке Л. Эйлера много книг, изданных на русском языке, который он знал неплохо. Находясь в Берлине, Л. Эйлер продолжал совершенствовать свои знания русского языка, о чем свидетельствуют отдельные места из его сохранившейся переписки.

В математической части шестая записная книжка относится, как сказано, вероятно, к 1754—1757 гг. Здесь много заметок по теории чисел, большое место (около

---

[1]) Разбор этого фрагмента подготовлен Л. С. Минченко в заметке «Неизвестная запись Л. Эйлера о работах М. В. Ломоносова», М. В. Ломоносов, Сб. статей и документов, т. 4.

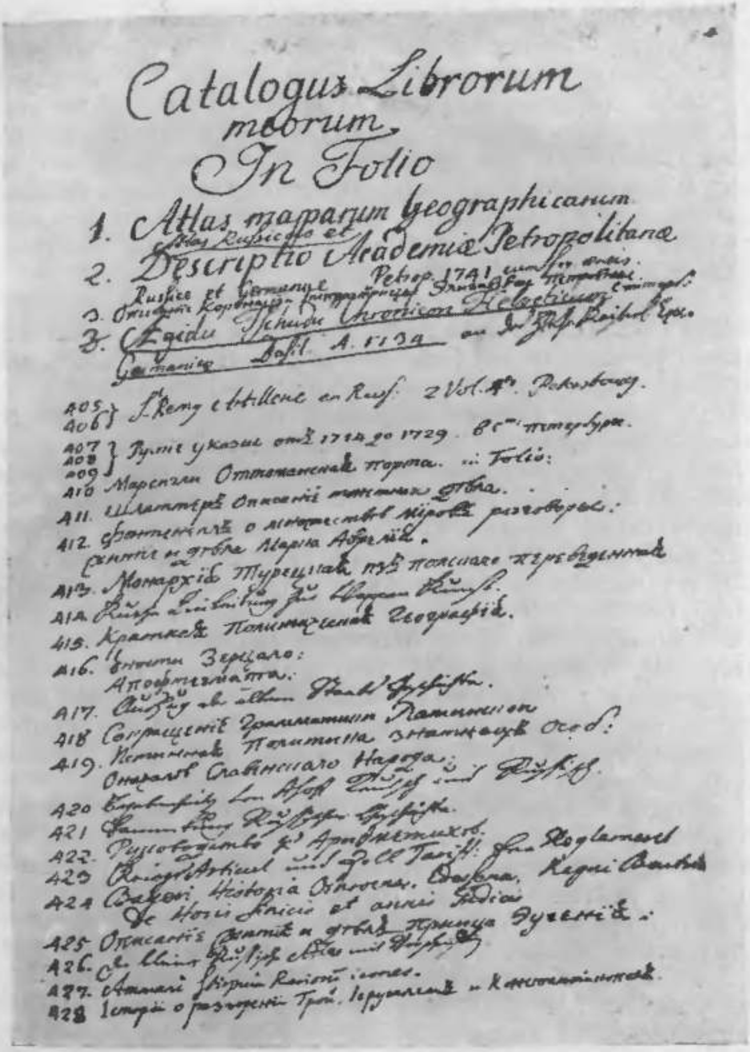


Фото 2. Фрагменты каталога (начало и №№ 405—428) библиотеки Л. Эйлера из шестой записной книжки.

30 страниц) уделено магическим квадратам, имеются, как всегда, заметки на приложение анализа к геометрии, изопериметрические задачи, много заметок об интегрировании дифференциальных уравнений. В частности, Л. Эйлер вновь возвращается к уравнению второго порядка, указанному при описании третьей записной книжки. В сравнении с предыдущими книжками здесь больше вычислений с процентами. Значительное место уделено теоретическим вопросам геометрической оптики, построению телескопических систем и пр.

Вопросы механики представлены в этой книжке довольно слабо. Имеются лишь более или менее значительные отрывки о пилах (стр. 50—58), по небесной механике и о колебании струн и нитей (стр. 172—182). Имеется заметка «математические вопросы» (стр. 79), содержащая 15 вопросов из механики. В остальном механика представлена лишь отдельными краткими заметками в первой половине книжки. Упомянем среди них критическое замечание о доказательствах некоторых теорем Даламбера по гидростатике[1]) (стр. 28), заметки по гидростатике (стр. 28—29), о пространстве и времени (стр. 40), об ударе (стр. 41), о трубке Пито (стр. 50), о водяной мельнице (стр. 80), об опытах Купле и об истечении жидкости из сосудов (стр. 81), о машинах (стр. 203) и об определении линии скорейшего спуска среди заданного семейства кривых. Во второй половине книги отметим лишь заметку об определении трения при эксцентричном вращении дисков (стр. 438—439).

Шестая записная книжка представляет значительный интерес для биографа Л. Эйлера, так как сохранившиеся в ней многочисленные счета расширяют наши сведения о круге деятельности Л. Эйлера в 50-х годах. Расчеты с Петербургской Академией наук позволяют, например, уточнить отдельные детали его деловых взаимоотношений с Академией, объем переписки Л. Эйлера с нею и с русскими учеными и т. д. В них упоминаются и некоторые из сохранившихся писем к Л. Эйлеру. Например, он отме-

---

[1]) J. le Rond d'Alembert, Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, Paris, 1744.

чает получение им 25 декабря 1754 г. письма от М. В. Ломоносова (очевидно, что это письмо от 28 ноября 1754 г.; см. Сочинения М. В. Ломоносова, т. 8, М.—Л. 1948).

VII. Седьмая, восьмая и девятая записные книжки, 1759—1764 гг.

Седьмая книжка (№ 135) содержит на первых листах несколько счетов 1759—1760 гг. Основное же содержание книжки относится, по-видимому, уже к началу 60-х годов (1761—1763 гг.)и, возможно, является продолжением восьмой книжки.

Сравнительно большая часть книжки посвящена дифференциальным уравнениям. Во второй четверти книжки много места уделено уравнениям в частных производных, связанным, в частности, с теорией распространения звука. На протяжении второй половины книжки Л. Эйлер часто возвращается к различным обыкновенным дифференциальным уравнениям и к уже упомянутому выше уравнению второго порядка. Основное внимание уделено здесь частному случаю $n=1$; рассматриваются, однако, также случай $n=2$ и общий случай. Отметим еще заметку (стр. 65—66) о вариациях (δ), введенных Лагранжем. Вопросы теории чисел в книжке почти отсутствуют.

Для датировки записей существенна запись (стр. 35) о наблюдавшемся 26 апреля 1763 г. атмосферном световом эффекте вблизи Солнца.

Механика не представлена здесь сколько-нибудь крупными связными отрывками. Наибольшее число заметок посвящено теории движения Луны и смежным задачам небесной механики (стр. 63—64, 97—99, 101—102, 135—139). Имеется раздел (стр. 32—38), в котором рассмотрено равновесие и движение упругих тел (Principium pro aequilibrio et motu corporum elasticorum; Pro motu corporum flexuris elasticis praeditorum), некоторые вопросы, связанные с преобразованием координат при движении (см. также стр. 19), задача о движении шарнирно закрепленного тела под действием двух грузов, действующих через блоки, и один парадокс с действием пружины.

Несколько заметок посвящено образованию голосов труб (стр. 48—51), причем рассмотрены задачи о цилиндрической и конической трубах.

Наряду с заметками математического содержания в записной книжке имеется незначительное число заметок по оптике (преломление лучей, эксперимент Доллонда), заметка к теории музыки (стр. 119—120), записи физических констант (плотность воздуха, температурное расширение, стр. 18), несколько рецептов.

Восьмая записная книжка (№ 136) представляет собой, как и предыдущая, небольшую тетрадь[1]). Она начинается отрывком «Начала исчисления вариаций» (Principia calculi variationum, стр. 3—10), содержащим 48 пунктов и включает в основном исследования из теории чисел и по дифференциальным уравнениям, причем здесь снова рассматривается уже дважды упомянутое уравнение второго порядка (при $n=1$). Укажем еще на заметка, в которой Л. Эйлер приводит примеры неединственносту решения дифференциальных уравнений. В частности, он рассматривает уравнение (стр. 99)

$$dz=\frac{z\,dx}{x}-\frac{a\,dx}{x}-\frac{ax\,dx}{1+x},$$

которому при $x=0$, $z=a$ удовлетворяет семейство кривых

$$\frac{z}{x}=\frac{a}{x}-a\ln(1+x)+C.$$

Среди других математических записей укажем на таблицу (стр. 56—61), содержащую свыше 100 частных случаев выражения неопределенного интеграла

$$\int x^{m-1}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}\,dx$$

при целых (положительных и отрицательных) значениях m и n.

Значительное место уделено в записной книжке геометрической оптике. Отметим, например, большой отдел (стр. 133—160), где исследуется теория ахроматических

[1]) Энестрем высказал предположение о том, что часть записей в этой книжке, возможно, принадлежит руке Иоганна-Альбрехта Эйлера.

систем, разбираются эксперименты в этой области Доллонда.

Большое место занимают также вопросы колебаний. Сначала Л. Эйлер проводит исследование распространения звука через воздух (стр. 70—79). В отрывках «О распространении импульсов через воздух» (De propagatione pulsuum per aerem) и «Опыт теории распространяющихся через воздух импульсов» (Tentamen theoriae pulsuum per aerem propagatorum) он рассматривает плоскую волну, выводит волновое уравнение

$$\frac{1}{f^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial Z^2}$$

и исследует различные частные случаи, сосредоточивая основное внимание на плоской задаче. Эти заметки Л. Эйлера явились, по-видимому, основой его мемуаров о распространении звука, представленных зимой 1759/60 г. Берлинской Академии наук (Opera omnia, III-1, 428—507).

Затем Л. Эйлер изучает поперечные колебания (стр. 80—87). Он рассматривает задачу о поперечных колебаниях прямолинейного упругого слоя (lamina elastica) при начальной малой его деформации, о колебании свободно подвешенной нити, о вибрации упругого кольца (De motu vibratorio annuli elastici) и о колебаниях мембран тимпана (De vibratione superficierum tensarum veluti tympani).

В связи с этими исследованиями находятся также заметки об образовании голосов труб (стр. 104) и о движении сжимаемых жидкостей (стр. 122). В последней он рассматривает решения волнового уравнения вида

$$v=P\Phi(Q+ft),$$

где $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, и выводит необходимые условия для функций P и Q.

Из других вопросов механики отметим здесь рассмотрение зубчатых колес (стр. 63), заметки о барометре (стр. 104), о поднятии жидкости по трубке (стр. 126—129), о плоском движении гибкой нити (стр. 181).

Девятая книжка (№ 137) содержит, как уже было выше сказано, очень мало собственноручных заметок Л. Эйлера.

Общий объем их составляет лишь около 90 страниц, т. е. примерно 12% содержания книжки. Эти заметки относятся, по-видимому, к началу 1760-х годов. Более точная их датировка затруднительна (в конце книжки имеется записка от 19 мая 1764 г.).

Отметим среди них заметки о движениях воздуха в трубах постоянного сечения (лл. 130—131 об.), о зависимости давления в жидкости от плотности и температуры (л. 56), об упругой нити, нагруженной в некоторой точке сосредоточенной силой (лл. 173—173 об., 374 об.) и о соударении упругих тел (лл. 366 об.—367).

В остальном эта большая книжка содержит вплетенные в нее печатные латинские тексты «Арифметики бесконечно малых»» (Оксфорд, 1656) и «Наблюдения солнечного затмения 1654 года» (Оксфорд, 1655) Дж. Валлиса, а также ряд рукописных копий текстов второй половины XVII века по алгебре, астрономии, оптике, о часах и др. Среди них находится копия, возможно, неизвестной рукописи бельгийского астронома и математика Ж.-Ф. Готтинье (1630—1689) «Практическая диоптрика или о пользе, устройстве и употреблении микроскопов и телескопов» (Dioptrica practica sive de microscopiorum ac telescopiorum utilitate, fabrica et usu. Authore Aegidio Francisco de Gottignies Bruxellensi).

В заключение краткого описания записных книжек автор считает своим приятным долгом поблагодарить сотрудников Архива Академии наук СССР за оказанное содействие в работе над архивными материалами.

ПЕРЕПИСКА Л. ЭЙЛЕРА И Я. В. БРЮСА

Публикация Ю. Х. Копелевич[1]

Обширная переписка Леонарда Эйлера представляет не только богатый источник сведений о жизни и деятельности самого Эйлера, сведений по истории Петербургской и Берлинской Академий наук, о научной жизни в России и за границей, но и дополняет многие портреты выдающихся людей XVIII века, в том числе и русских.

В дошедшей до нас переписке имеются два письма к Эйлеру на немецком языке от (27) 16 ноября 1732 г. и (29) 18 января 1733 г., подписанные Bruce. Письма эти до сих пор не привлекали к себе внимания исследователей. С другой стороны, среди писем Эйлера имеются два черновика, без даты, адресат которых до сих пор не был известен. Из обращения этих писем можно было лишь судить о том, что они написаны к некоему графу.

Только сейчас, когда ведется работа по изучению и описанию всей переписки Эйлера, эти два письма прежде всего были примерно датированы по содержанию, а затем сопоставлены со всеми другими имеющимися у нас письмами 30-х годов, и это позволило установить, что неизвестным доселе графом является не кто иной, как Яков Вилимович Брюс (1670—1735), знаменитый сподвижник Петра I. Вместе с двумя письмами Брюса эти письма представляют хотя и очень небольшую, но законченную пере-

---

[1]) Примечания математического характера к письмам составил Б. В. Русанов. Публикацию редактировал акад. В. И. Смирнов. Примечания приведены на стр. 112—116, ссылки на них даны арабскими цифрами в прямых скобках.

писку двух выдающихся современников: молодого Эйлера, лишь недавно получившего профессуру в Петербургской Академии, и старого Брюса, который давно уже ушел в отставку и жил в своей деревне Глинки под Москвой. Из биографических материалов о Брюсе мы знаем, что он был не только крупным военным и государственным деятелем, но также одним из первых русских астрономов. Составленная и изданная им в 1707 г. карта звездного неба, издававшиеся под его руководством календари, его перевод на русский язык «Космотеороса» Гюйгенса, надзор за преподаванием в «Навигацкой школе»—все это сыграло немалую роль для распространения астрономических знаний в России. Однако Брюс был не только популяризатором астрономии. В оборудованной им в Сухаревской башне в Москве первой в России астрономической обсерватории он, начиная с 1700 г., в течение многих лет производил астрономические наблюдения, которые затем продолжил в Петербурге и в последние годы жизни—в своей домашней обсерватории в Глинках. Деятельность Брюса оказала значительное влияние на дальнейшее развитие астрономии в нашей стране [1]).

Известно также, что Брюс много работал над изготовлением для своей обсерватории различных астрономических инструментов, и это привело его к ряду изысканий в области практической оптики. Ясное представление об этом дают опубликованные несколько лет тому назад письма Брюса к Иоганну-Георгу Лейтману [2]).

Публикуемая ниже переписка Брюса с Эйлером дополняет этот уже известный нам образ Брюса-ученого. Она рисует нам Брюса как математика. До сих пор мы знали только, что Брюс получил математические знания главным образом путем самообразования и что во время пребывания в Англии, куда он сопровождал Петра I в 1698 г., он обучался математике у учителя, имя которого в соответствующей расходной записи об уплате за эти

---

[1]) См. В. Л. Ч е н а к а л, Яков Вилимович Брюс—русский астроном начала XVIII века.—Астрономический журнал, т. XXVIII, вып. 1, 1951, стр. 3—14.

[2]) Научное наследство, т. II, М., 1951, стр. 1083—1101.

занятия названо Иван Колсун[1]) (возможно, John Colson). Под надзором Брюса в так называемой «гражданской типографии» издавались и учебные пособия по математике[2]). В домашней библиотеке Брюса, переданной после его смерти в Академию наук, имелось значительное количество математических книг на различных языках, в том числе книги И. Ньютона, Хр. Вольфа, И.-Г. Лейтмана, Дж. Валлиса, Н. Биона[3]). Из настоящих писем мы видим, что Брюс наряду с практической астрономией на всю жизнь сохранил также интерес к чистой математике и уже в старости, вдали от государственных дел, внимательно следил за состоянием математических наук в молодой Петербургской Академии наук, сумел оценить замечательное дарование молодого Эйлера и обсуждал выдвигаемые Эйлером математические проблемы, завязав с ним научную переписку, которая, однако, очень скоро прервалась из-за болезни и смерти Брюса.

Немецкий текст писем публикуется с сохранением орфографии оригинала.

ПИСЬМО 1

Л. Эйлер—Я. В. Брюсу

Конец 1732, Петербург [1]

Высокородный граф,

Милостивый граф и господин,

Г-н Гросс [2] заверил меня, что Ваше высокородное Превосходительство не только благосклонно принимаете математические открытия, но, более того, весьма желаете,

---

[1]) М. М. Богословский, Петр I. Материалы для биографии, т. 2, М., 1941, стр. 378.

[2]) П. Пекарский, Наука и литература в России при Петре Великом, т. II, СПб., 1862, стр. 371, 653, а также И. Я. Депман. Геометрия практика.—Историко-математические исследования, вып. VIII, М., 1955.

[3]) Материалы для истории имп. Академии наук, т. 5, 1889, стр. 152—277.

чтобы такие открытия постоянно сообщались в письмах к Вашему превосходительству. Поэтому я осмеливаюсь с нижайшим почтением адресовать Вашему высокографскому Превосходительству эти строки и твердо полагаюсь на то, что Ваш милостивый прием возместит незначительность этих скромных открытий.

Раздумывая над прекрасным открытием Гюйгенса [3] о свойстве циклоиды, что маятник, который движется по этой кривой линии, совершает все колебания в равное время, я напал на мысль, что кроме циклоиды то же самое свойство имеют, возможно, еще другие кривые линии. Когда я дальше исследовал этот вопрос, я нашел, что не обманулся в этом предположении. Это свойство может проявляться даже весьма различным образом, так что если взять произвольную кривую линию AC, всегда можно найти для нее другую AD, так, что маятник, который движется по ней, т. е. по пути CAD, совершает все колебания в равное время [см. черт. в немецком оригинале письма, стр. 101]. Линия же AD находится по заданной AC следующим образом. Если провести произвольно горизонтальную линию MN, из точки A провести вертикаль и обозначить линии AP через x и [длину] кривой линии AM через s, то будет

$$PN = \int \sqrt{\left(\frac{a\,dx^2}{x} + ds^2 - dx^2 - 2\,ds\,dx\sqrt{\frac{a}{x}}\right)}\,[4].$$

Линия a может быть принята произвольной, и поэтому имеется бесконечное множество кривых линий, которые, взятые вместе с заданной AC, дают то же, что и циклоида. Колебание же совершается в такое же время, как у маятника, длина которого $\frac{1}{2}a$. По найденному дифференциальному уравнению $PN = \int \sqrt{\left(\frac{a\,dx^2}{x} + ds^2 - dx^2 - 2ds\,dx\sqrt{\frac{a}{x}}\right)}$ всегда можно описать линию AD, если прибегнуть к помощи квадратур. Я хочу показать применение этого на нескольких примерах и для начала предположить, что заданная линия AC — прямая линия и образует с вертикалью AP такой угол, что AM равна AP, умноженной на n [см. черт. на стр. 102]. Отсюда получается $s = nx$ и $ds = n\,dx$.

Если теперь в вышеупомянутое уравнение вместо ds подставить $n\,dx$, то получается

$$PN=\int dx\sqrt{\frac{a}{x}+n^2-1-2n\sqrt{\frac{a}{x}}},$$

что не может быть интегрируемо ни в каком другом случае, кроме того, когда $n=1$ [5]. Это имеет место, когда линия AC вертикальна, ибо тогда $AM=AP$. Таким образом, получается уравнение $PN=\int dx\sqrt{\frac{a}{x}-2\sqrt{\frac{a}{x}}}$ или, после того как мы возьмем интеграл от $dx\sqrt{\frac{a}{x}-2\sqrt{\frac{a}{x}}}$, получим следующее алгебраическое уравнение:

$$PN=\frac{2a\sqrt{a}-2\left(a-2\sqrt{ax}\right)^{3/2}}{3\sqrt{a}}=Z,$$

если вместо PN писать Z. Это уравнение, если его привести к рациональному виду, будет 4-й степени, и самая кривая имеет форму $ANDE$, а именно вершину в D и две совершенно равные между собою части DA и DE. Если далее на первом чертеже принять, что заданная кривая AC есть полуциклоида, то из найденного уравнения получается, что искомая AD тоже должна быть полуциклоидой, что, впрочем, легко усмотреть без всякого вычисления. Однако, поскольку при таком решении можно предположить, что получающаяся кривая CAD не является единой линией, а составлена из двух различных кривых, тогда как циклоида идет непрерывно и обе части могут быть выражены одним уравнением, то я старался найти все случаи, когда искомая линия образует вместе с заданной непрерывную кривую и обе могут быть выражены единым уравнением. Таких линий я нашел бесконечное количество, но среди них только одну алгебраическую или геометрическую: все остальные, как циклоида, трансцендентны и требуют для своего описания квадратуры круга или другой кривой линии.

Эта алгебраическая линия имеет начерченную здесь фигуру $CMAMC$ [см. черт. на стр. 104], а именно в A острую вершину и по обе стороны две совершенно одинаковые части AMC и AMC. Если провести вертикальную линию AB, то она разделяет всю кривую на две равные части, и уравнение для нее, если обозначить AP через t, а PM через z, будет $81z^4+216\ atz^2+256\ at^3-18\ a^2z^2=0$, т. е. есть уравнение лишь 4-й степени. Если же маятник движется так, что его центр колебания всегда находится на половине этой кривой AMC, то все колебания, будь то большие или малые, совершаются в равное время и каждое из них длится столько, сколько колебание простого маятника, длина которого равна $\frac{1}{2}a$. Итак, это есть алгебраическая кривая, которая имеет такое же свойство, как циклоида, и может также быть использована в часах. Для этого нужно жесть, направляющую качание маятника, искривить по эволюте этой кривой, которая выражается алгебраическим уравнением 5-й степени. У этой кривой линии можно, между прочим, заметить некоторые замечательные свойства, во-первых, что она квадрируема, во-вторых, спрямляема и, наконец, в-третьих, что это есть та самая линия, которая была уже найдена раньше, когда заданная линия была прямая вертикальная линия [6]. Все это, однако, справедливо только тогда, когда движение маятника может происходить совершенно свободно и нет налицо ни какого-либо трения, ни сопротивления воздуха. Но поскольку избежать их невозможно, то я нашел, по какой кривой линии должен двигаться маятник, чтобы все колебания происходили в равное время и тогда, когда он испытывает некоторое сопротивление как от трения, так и от воздуха. Эту задачу я считаю одной из наиболее трудных в механике, и я был вынужден применить к ней совсем особый способ, без которого едва ли было возможно получить решение.

Вот, милостивый государь, то, что я хотел написать Вашему высокографскому Превосходительству и тем менее колебался в своем желании, чем больше слышал ото всех похвалы Вашей необыкновенной доброте и высокой любви ко всяким научным занятиям.

Покорнейше вверяю себя Вашей высокой милости и покровительству и остаюсь с совершенным почтением на всю жизнь,

Высокородный граф, Милостивый государь,
Вашего превосходительства
покорно преданный слуга.

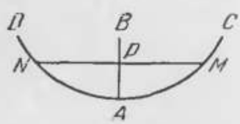
ОРИГИНАЛ ПИСЬМА 1

Hochgebohrner Graf

Gnädiger Graf und Herr,

Daß Ewre Hochgebohrne Excell. nicht nur die Matematischen Erfindungen gnädig aufzunehmen pflegen, sondern noch überdas ein grosses Verlangen haben, daß dergleichen an Ew. Hochgebohrne Excell. jederzeit möchten schriftlich überschicket werden, habe von dem H. Groß die gewisse Versicherung bekommen. Ich nehme derohalben die Freyheit diese Zeilen Ew. Hochgräfl. Exc. mit schuldigstem Respect zuzuschicken und habe das feste Vertrauen, daß, was diesen schlechten Inventionen an Würdigkeit manglet, Deroselben gnädige Aufnahm ersetzen werde.

In Betrachtung der schönen Invention des Hugenii, daß die Cyclois diese Eigenschaft habe, daß ein Pendulum, welches sich in dieser krummen Linie bewegt, alle Oscillationen in gleicher Zeit verrichte, bin ich auf die Gedancken gefallen, daß ausser derselben vielleicht noch andre krumme Linien eben diese Eigenschaft haben. Und in dieser Muthmassung habe ich mich auch nicht betrogen befunden, nachdem ich der Sach weiter nachgedacht. Dann auf sogar vielerley Art kan diese Eigenschaft stattfinden, daß man nach Belieben eine krumme Linie, wie AC annehmen kan, zu welcher allzeit eine andre, als AD, kan gefunden werden; so daß ein Pendulum, welches sich nach denselben be-



Черт. 1.

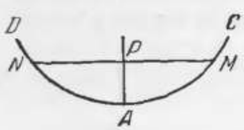
wegt oder in der Linie *CAD* seine Weg nimmt, alle Oscillationen in gleicher Zeit verrichtet. Es wird aber die Linie *AD* auf folgende Art aus der gegebenen *AC* gefunden. Wann man nach Belieben eine Horizontal Linie *MN* ziehet und aus dem Punct *A* eine Verticale, und nennet die Linie *AP*, x; die krumme Linie *AM*, s, so wird seyn

$$PN = \int \sqrt{\left(\frac{a\,dx^2}{x} + ds^2 - dx^2 - 2\,ds\,dx\sqrt{\frac{a}{x}}\right)}.$$

Hier kan für a eine Linie angenommen werden, so gross als man will, und deswegen gibt es unendlich viel krumme Linien, welche mit der gegebenen *AC* zusammen genommen eben den Dienst thun als die Cyclois. Eine Oscillation wird aber in gleicher Zeit verrichtet, als von einem Pendulo dessen Länge ist $\frac{1}{2}a$. Aus der gefundenen Differential-Aequation

$$PN = \int \sqrt{\left(\frac{a\,dx^2}{x} + ds^2 - dx^2 - 2\,ds\,dx\sqrt{\frac{a}{x}}\right)}$$

kan aber allzeit die Linie *AD* beschrieben werden, wann man die Quadraturen mitzu Hülfe nimmt. Ich will den Gebrauch davon in einigen Exemplen weisen und für das erste setzen, die gegebene Linie *AC* sey eine gerade Linie und mache mit der Vertical *AP* einen solchen Winkel, daß *AM* gleich sey der *AP* mit n multiplicirt, woraus entstehet $s = nx$ und $ds = n\,dx$.

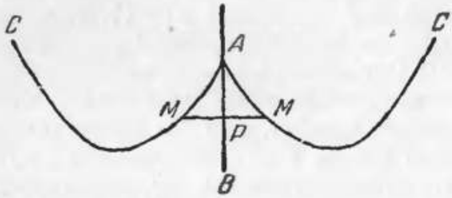


Черт. 2.

Wann nun in obiger Aequation anstatt ds gesetzt wird $n\,dx$, so kommt heraus $PN = \int dx\sqrt{\frac{a}{x} + n^2 - 1 - 2n\sqrt{\frac{a}{x}}}$, welche in keinem andren Fallkan integrirt werden, als wann $n = 1$. Das ist, wann die Linie *AC* vertical wird, dann da wird $AM = AP$. Man bekommt allso diese Gleichung $PN = \int dx\sqrt{\frac{a}{x} - 2\sqrt{\frac{a}{x}}}$ oder nachdem man von dem

$dx\sqrt{\frac{a}{x}-2\sqrt{\frac{a}{x}}}$ würklich das Integrale genommen, folgende algebraische Aequation: $PN=\frac{2a\sqrt{a}-2(a-2\sqrt{ax})^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{a}}=Z$; wann für PN geschrieben wird Z. Diese Aequation, wann sie rational gemacht wird, bekommt 4 Dimensionen, und die Curva selbst hat die Figur $ANDE$, nehmlich in D eine Spitze, und die zwey Theile DA, DE sind einander vollkommen gleich. Wann man weiter in der ersten Figur setzt, die gegebene Curva AC sey eine halbe Cyclois, so findet man aus der gefundenen Aequation, daß die gesuchte AD gleichfalls eine halbe Cyclois seyn musse; welches zwar ohne einige Rechnung leicht zu sehen wäre. Da aber bey dieser Solution könnte ausgesetzet werden, daß die herauskommende Curva CAD nicht eine einige Linie, sondern aus zwey unterschiedlichen Curvis zusammengesetzt sey, dahingegen die Cyclois in einem fortgehe und beyde Theile unter einer Aequation begriffen seyen; so habe ich mich beflissen, alle diejenige Casus auszufinden, allwo die gesuchte Linie mit der gegebenen eine Curvam continuam ausmache, und beyde durch eine einige Aequation ausgedrückt würden. Dergleichen habe ich auch eine unendliche Anzahl gefunden, unter allen aber nur eine algebraische oder geometrische; die übrigen alle sind, wie die Cyclois, transcendentes und erforderen zu ihrer Beschreibung entweder des Circuls oder einer andern krummen Linie Quadratur.

Diese Algebraische Linie hat nun beystehende Figur $CMAMC$ nehmlich in A eine scharfe Spitze und beyderseits zwey ganz gleiche Theile AMC, und AMC. Wann derohalben die Verticallinie AB gezogen wird, so theilet dieselbe die gantze Curvam in zwey gleiche Theile, und ist die Aequation für dieselbe so AP genennt wird t, und PM, z, wie folget $81z^4+216\,atz^2+256\,at^3-18\,a^2z^2=0$, und allso nur von 4 Dimensionen. Wann sich nun ein Pendulum so beweget, daß sein Centrum oscillationis in einer Hälfte von dieser Curva als AMC immer fortgehet, so verrichten alle Oscillationen sie seyen groß oder klein in gleicher Zeit, und dauert eine jede so lang, als eine Oscillation eines einfachen Penduli, dessen Länge ist $\frac{1}{2}a$. Dieses ist allso eine Curva algebraica, welche eben die Eigenschaft hat, als die Cyclois, and in den Uhren eben so wohl könnte angebracht werden. Es muß allso hierzu die Bleche oben, über welcher sich das Pendulum schwinget, nach der Evoluta von dieser Curva gekrummt werden, welche durch eine algebraische Aequation von 5 Dimensionen exprimirt wird. Von dieser krummen Linie sind sonsten einige schöne Eigenschaften zu bemerken, erstlich, daß sie quadrabel ist,



Черт. 3.

zweitens auch rectificabel, und dann drittens daß sie eben diejenige Linie sey, welche vorher schon ist gefunden worden, da die gegebene Linie eine gerade Verticallinie war. Dieses alles aber ist nur zu verstehen, wann die Bewegung des penduli gänzlich frey geschehen kan, und weder einige Friction noch der Wiederstand der Luft vorhanden wäre. Da es aber nicht möglich ist dieselben zu vermeiden, so habe ich aufgefunden, nach was für einer krummen Linie sich ein Pendulum bewegen müsse, daß, wann er sowohl von einer Friction als von der Luft einige Resistenz leidet, dennoch alle Oscillationen in gleicher Zeit geschehen. Dieses Problema halte ich für eines von den allerschwersten in der Mechanic und ich habe dazu eine ganz sonderbahre Methode gebrauchen müssen, ohne welche es kaum möglich seyn wurde, zu der Solution zu gelangen. Dieses ist nun, Gnädiger Herr, welches Ew. Hochgräflichen Excellenz zu überschreiben, um so viel weniger Bedenken getragen je mehr Deroselben ungemeine Läutseligkeit und hohe Neigung zu allen Studiis von jedenmann habe rühmen hören. Dero hohen Gnade und Protection empfehle ich mich unterthänigst und verharre mit vollkommener Veneration Zeit meines Lebens

Hochgebohrner Graf Gnädiger Herr
Ewrer Excellenz unterthänigst
gehorsamster Diener.

ПИСЬМО 2

Я. В. Брюс—Л. Эйлеру

16 ноября 1732 г. Москва [1]

Высокоблагородный и высокоученый,
Высокопочтенный г-н профессор,

Поскольку я всегда был большим другом и любителем математики, я был весьма огорчен, что г-н профессор Герман [2], человек весьма опытный и искусный в этой науке, ушел из импер. Академии и возвратился к себе на родину, поскольку от него еще можно было ожидать многих прекрасных и полезных открытий. Но вместе с тем мне было очень отрадно узнать из рассказа г-на секретаря посольства Гросса, как он сам слышал из уст упомянутого г-на профессора, что тот оставляет после себя такого человека, который столь же силен в этой науке, как он сам. Сейчас, когда Ваше высокоблагородие соблаговолили почтить меня своим письмом, я к моему удовольствию из него понял, что речь шла именно о Вас, ибо из этого письма достаточно ясно видны Ваши сила и искусство как в алгебре, так и в механике.

Поэтому я Вам весьма обязан тем, что Вы взяли на себя большой труд сообщить мне образчик Ваших занятий, и я желал бы только увидеться с Вами, чтобы мы могли устно поговорить об этом, ибо я в свое время уже размышлял над этими вопросами.

Вы можете быть уверены, что если я могу оказать Вам какую-нибудь услугу, я сделаю это с готовностью и охотно.

Позволяю себе послать Вам приложенный рисунок [3] с просьбой, если это Вам угодно, на досуге посмотреть, будут ли равны длины эллипса и гиперболически изогнутой линии.

Если Ваше высокоблагородие опубликовали задачу, о которой Вы упоминаете в конце своего письма, я прошу Вас сообщить мне об этом. Желаю Вам всего наилучшего и остаюсь

Вашего высокоблагородия,
моего высокопочтенного г-на профессора
покорнейший *Я. В. Брюс*

Москва, 16 ноября
1732

ОРИГИНАЛ ПИСЬМА 2

Hochedler und Hochgelahrter
Hochzuehrender Herr Professor,

Indem ich jederzeit ein großer Freund und Liebhaber der Mathematic gewesen bin, so sahe sehr ungern daß der Herr Professor Hermann ein sehr geübter und geschickter Mann in dieser Wißenschafft von der Kayserl. Academie seinen Abschied nahm, und wiederum nach seiner Heymath gieng, inmaßen man sich von Ihme noch viel schöne und nützliche Erfindungen hätte versprechen können. Inzwischen aber war mir sehr lieb zu vernehmen, als der Herr Legationssecretarius Gross mir erzehlte, er hätte selbst aus erwehnten Herrn Professoris Munde gehöret, daß Er ein solches Subjectum noch zurücke ließe, welches in dieser Wißenschafft eben so starck wäre, als Er selbst. Und da nun Ewr. Hochedl. mit Dero Zuschrifft mich beehren wollen, so erkenne daraus zur Gnüge, daß eben Sie dadurch gemeinet sind, in dem aus demselben Jhre force und Geschicklichkeit beydes in der Algebra und in der Mechanic gnügsam hervor leuchtet.

Demnach bin ich Ihnen sehr verbunden, daß Sie sich so viele Mühe geben wollen, eine Probe davon an mich zu überschreiben, wolte nur wünschen so nahe beyeinander zu seyn, daß wir mündlich deßwegen miteinander conferiren könten indem schon vor einiger Zeit in dieser Materie Speculationes gemachet habe.

Indeßen aber können Dieselben versichert seyn, daß, worinnen ich Ihnen einige Gefälligkeit erweisen kan, ich dazu mich bereit und willig werde finden laßen.

Beygehende Figur habe Ihnen übersenden wollen, mit dem Ersuch, wan Sie plaisier finden, bey müßiger Zeit zu sehen, ob die peripherie der Ellipsis und der Hyperbolischen Inflex linie gleich sey.

Solten Ewr. Hochedlen das Problema wovon Sie zurletzt ihres Briefes Meldung gethan haben offenbahr machen, so bitte mir auch davon die communication aus. Womit Denenselben alles erwünschte Wohlergehen anwünsche und verharre

Ewr. Hochedlen
Meines Hochzuehrenden Herrn Professoris
dienstwilliger *J. D. Bruce*

Moscau den 16 Novemb.
A. 1732.

ПИСЬМО 3

Л. Эйлер—Я. В. Брюсу

Начало 1733, Петербург [1]

Высокородный граф,

Милостивый граф и господин,

С нижайшим почтением сознаю высокую честь, которую Ваше высокографское Превосходительство оказали мне, почтив меня своим милостивым ответом, честь, за которую я Вам покорнейше обязан. И хотя я никоим образом не заслуживаю тех высоких похвальных слов, которые Ваше Превосходительство соблаговолили обо мне сказать, я, однако, приложу все усилия, чтобы быть как можно более достойным этих похвал. Задачу, касающуюся равенства периферии эллипса и гиперболически изогнутой линии [2], я, правда, сначала не мог понять, ибо уже из чертежа видел, что эта изогнутая линия не является простой гиперболой, а скорее представляет трансцендентную кривую, природа и свойство которой, из-за недостатка подробного описания, мне были совершенно неизвестны. Но потом, когда я дальше раздумывал над этим и искал различные кривые линии, которые имеют одинаковую длину с эллипсом, я неожиданно напал на такие колоколообразные фигуры, среди которых, несомненно, будет находиться и эта гиперболически изогнутая линия. Чтобы Ваше превосходительство могли видеть, достиг ли я истинной цели, допустим, что на приложенном здесь чертеже *ACBDA* есть заданный эллипс, бо́льшая ось которого *AB*, меньшая *CD*, а *E* и *F*—фокусы. На диаметре *EF* я описываю окружность *ELFLE*, а с ее помощью колоколообразную линию *GMEMH*, обладающую таким свойством, что ордината *PM* всегда относится к соответствующей дуге круга *EL*, как меньшая ось *CD* к фокусному расстоянию *EF*. Если таким образом описать линию *GMEMH*, то длина ее будет совершенно равна периферии эллипса *ACBDA*. Что эта фигура есть именно та самая, которую нашли, Ваше высокографское Превосходительство, у меня нет никаких сомнений, ибо если принять, что $AB = 200\,000$, и $CD = 100\,000$, то отсюда следует $EF = 173\,205$, и к тому же найденная кривая имеет описанную фигуру и требуемое свойство.

При этом исследовании я случайно напал на особый способ довольно удобно находить периферию заданного эллипса путем приближения, что обычно представляет весьма трудное дело, и не зависит ни от квадратуры круга, ни от квадратуры гиперболы. Пусть будет бо́льшая ось эллипса a, меньшая c, p—периферия круга диаметра a, а n обозначает для краткости $\frac{a^2-c^2}{a^2}$. Тогда периферия эллипса будет равна p, помноженной на следующий ряд:

$$1-\frac{1\cdot n}{2\cdot 2}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot n^2}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot n^3}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot n^4}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8} \text{ и т. д.}$$

Поскольку p известно так точно, как только можно желать, из числа Лудольфа ван Цейлен [3], то с помощью этого ряда можно точнейшим образом найти периферию эллипса [4]. Что же касается той кривой линии, по которой движется маятник в жидкости, совершая все колебания в равное время, то я нашел ее еще в 1729 г. и тогда доложил в нашей Конференции [5], а посвященная этому статья вместе со статьей о бесчисленных таутохронах в вакууме [6], о которых я имел честь писать в прошлый раз, будет опубликована в 4-м томе наших «Комментариев», который скоро начнет печататься [7]. Самая линия, однако, которую я нашел, весьма трансцендентна и требует довольно сложного построения. Но если Ваше Превосходительство прикажете, я в ближайшее время буду иметь честь прислать полный анализ и построение.

ОРИГИНАЛ ПИСЬМА 3

Hochgebohrner Graf

Gnädiger Graf und Herr,

Die hohe Gnade, derer Ew. Hochgräfl. Excell. mich durch Dero so gnädiger Antwortschreiben gewürdiget erkenne mit allem unterthänigen Respect und bin dafür gehorsamst verbunden. Und ob ich gleich die grossen Lobsprüche, so Ew. Excell. mir beyzulegen geruhen wollen, keines wegs verdiene so werde mich dennoch äusserst befleissigen, mich derselben je mehr und mehr würdiger zu machen. Das Problema betreffend die Gleichheit der Peripherien zwischen der Ellipsis und der Hyperbolischen Inflexlinie habe zwar nicht gleich verstehen können, indeme ich wohl aus der Figur sehe, daß diese Inflexlinie keine gemeine Hyperbola, sondern vielmehr eine Transcendental curva seye, derer Natur und Eigenschaft mir wegen Mangel einer ausführlichen Beschreibung unbekant war. Nachdem ich aber der Sach weiter nachgedacht und verschiedene krumme Linien gesucht, welche mit der Ellipsi einerley Länge haben, bin ich unvermuthet auf dergleichen Glockenförmige Figuren gefallen, unter welchen sich diese Hyperbolische Inflexlinie ohne Zweifel befinden wird. Damit nun Ew. Excellenz sehen können, ob ich den rechten Endzweck erreichet, so ist in beyligender Figur *ACBDA* die vorgegebene Ellipsis, davon der grössere Axis ist *AB*, der kleinere *CD*, und *E* und *F* die Foci. Auf dem Diametro *EF* beschreibe ich den Circul *ELFLE*, und durch Hülfe desselben die Glockenförmige Linie *GMEMH* von dieser Eigenschaft, daß sich allenthalben die Applicata *PM* zu dem respondirenden Circulbogen *EL* verhält, wie der kleinere Axis *CD* zu der Weite der Focorum *EF*. Wann nun auf diese Weise die Linie *GMEMH* beschrieben wird, so wird die Länge derselben vollkommen gleich seyn der Peripherie der Ellipsis *ACBDA*. Daß aber diese Figur eben diejenige sey, welche Ew. Hochgräfl. Excellentz gefunden, habe ich um so viel weniger einigen Zweifel, weilen wann man setzet, $AB = 200\,000$, und $CD = 100\,000$, herauskommt $EF = 173\,205$, und dazu die gefundene Curva die beschriebene Figur und verlangte Eigenschaft hat. Bey dieser Untersuchung bin ich von ungefehr auf eine Manier gefallen die Peripherie einer gegebenen Ellipsis ziemlich bequem durch die Approximation zu finden, welches sonnsten eine sehr schwehre Sach ist, und weder von der Quadratur des Circuls noch der Hyperbolae dependirt. Es sey der Ellipsis grössere Axis a, die kleinere c, die Peripherie eines Circuls p, dessen Diameter gleich ist a, and n bedeutet der Kürze halben $\frac{a^2-c^2}{a^2}$. Alsdann wird die Peripherie der Ellipsis gleich seyn p multiplicirt durch die nachfolgende seriem

$$1-\frac{1\cdot n}{2\cdot 2}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot n^2}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot n^3}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot n^4}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8}-\text{etc.}$$

Weilen nun p so genau, als man verlangen kan, durch die Zahlen des Ludolfs a Ceulen bekannt ist, so kan̄ auch durch Hülfe dieser Progression die Peripherie des Ellipsis auf das genaueste gefunden werden. Was diejenige krumme Linie anbelange, nach welcher ein Pendulum, so sich in einem fluido bewegt, alle Oscillationen in gleicher Zeit verrichtet, habe dieselbe schon A. 1729 gefunden und damals in unseren Conferenzen vorgelesen, die vollige Abhandlung davon zusammt den unendlich vielen in vacuo, davon ich das vorige Mal zu schreiben die Ehre gehabt, werden allso in den 4-ten Tomum unserer Commentarien kommen, welcher bald wird angefangen gedruckt zu werden. Die Linie selbst, welche ich gefunden, ist aber sehr transcendent und erfordert eine zimmlich weitläufige Construction. Wann aber Ew. Excellentz befehlen, so werde die völlige Analysin und Construction nächstens zu schicken die Ehre haben.

ПИСЬМО 4

Я. Брюс—Л. Эйлеру

18 января 1733, Москва [1]

Высокоблагородный и высокоученый
особо высокопочтенный г-н профессор,

Ваше письмо я получил и прочитал с удовольствием. Я охотно ответил бы на него раньше, если бы тому не мешало мое непрерывное нездоровье. Между тем, посылаю при этом чертеж эллипса и гиперболы [2], как они мне представились в свое время; хотел бы надеяться, что они понравятся Вам. Я имею еще несколько кривых линий, которые я оставляю, чтобы сообщить о них, когда состояние моего здоровья будет лучше. В остальном остаюсь как всегда

Вашего высокоблагородия
преданный *Я. В. Брюс*

Москва, 18 января
1733.

ОРИГИНАЛ ПИСЬМА 4

Hochedler und Hochgelahrter
Insonders Hochgehrter Herr Professor,

Deßen Brief habe wohl empfangen und mit Vergnügen durchgelesen. Es würde auch selbiger gerne von mir eher seyn beantwortet worden, woferne meine continuirliche

Unpäßlichkeit nicht solches verhindert hette. Unterdeßen übersende hiemit die Zeichnung der Ellipsis und Hyperbole, wie selbige mir vormahls eingefallen sind; wolte wünschen, daß sie Ihnen gefällig seyn möchten. Ich habe noch ein paar krumme Linien, die ich verspahre zu communiciren, bis ich in beßern Zustand meiner Gesundheit seyn werde. In übrigen verbl. wie allemahl

Ew. Hochedl. dienstwilliger
J. D. Bruce

Moscau den 18 Jan.
1733.

ПРИМЕЧАНИЯ

К письму 1

1. Публикуется по собственноручному черновику, Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 1, лл. 68—69 об. Письмо не датировано. Время его написания определяется приблизительно по ответному письму Брюса, датированному 16 ноября 1732 г.

2. Христиан-Фридрих Гросс, профессор нравоучительной философии в Петербургской Академии с января 1726 г., в 1731 г. был назначен секретарем Брауншвейгского посольства. Находясь с этого времени преимущественно в Москве, Гросс, по-видимому, встречался с Брюсом. Что именно Христиан-Фридрих Гросс рекомендовал Эйлера Брюсу и был инициатором их переписки, мы узнаем также из ответного письма Брюса.

3. Христиан Гюйгенс (Christian Huygens, 1629—1695) — знаменитый математик и механик, по происхождению голландец, член Парижской Академии наук. Открытие Гюйгенса, о котором идет речь в письме, изложено в его трактате «Horologium oscillatorium», 1673.

4. У Эйлера горизонтальная ось z направлена влево, а вертикальная x вверх. Начало координат находится в низшей точке кривой. Пусть уравнение правой части линии (при $z<0$) будет $z=\varphi_1(x)$, а уравнение левой части (при $z>0$) $z=\varphi_2(x)$. Время T, в течение которого тело движется под действием силы тяжести вдоль линии из точки $x=h$, $z=\varphi_1(h)$ до точки $x=h$, $z=\varphi_2(h)$, будет равно

$$T(h)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{\sqrt{1+\varphi_1'^2}+\sqrt{1+\varphi_2'^2}}{\sqrt{h-x}}\,dx\,[1],$$

[1]) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, § 79.

где g — ускорение силы тяжести. Чтобы T не зависело от h, должно быть:

$$\sqrt{1+\varphi_1'^2}+\sqrt{1+\varphi_2'^2}=\sqrt{\frac{a}{x}}, \quad \text{где} \quad a=\frac{T^2}{\pi^2}2g\,^{1)}.$$

Отсюда

$$\varphi_2(x)=\int\limits_0^x \sqrt{\frac{a}{x}dx^2+ds^2-dx^2-2dx\,ds\sqrt{\frac{a}{x}}},$$

где $ds^2=(1+\varphi'^2)\,dx^2$.

Если в точке (0, 0) линии $z=\varphi_1(x)$ и $z=\varphi_2(x)$ не имеют общей касательной (точка излома линии), то считается, как это видно из рассматриваемого далее примера, что в таком случае скорость материальной точки мгновенно изменяет направление, сохраняя величину.

5. Это замечание неверно. Упомянутый интеграл вычисляется в элементарных функциях при любом постоянном n с помощью подстановок, указанных самим Эйлером. Возможно, Эйлер имеет в виду алгебраические квадратуры.

6. В статье «De innumerabilibus curvis tautochronis in vacuo» в «Commentarii», на которую делается ссылка в следующем письме Брюсу (см. прим. 6 к письму 3), Эйлер доказывает, что таутохрона, обе части которой могут быть заданы одним уравнением, имеет следующее параметрическое представление:

$$x=\frac{v^2}{a}, \quad \zeta=\int\limits_0^v \sqrt{1+v^2+2v-\frac{4t^2}{a^2}}\,dt,$$

где $v(t)$ — произвольная нечетная функция своего аргумента. Ось x направлена вверх, ось ζ — влево. Левой половине таутохроны соответствуют положительные значения параметра v, правой — отрицательные. Эйлер отмечает, что только при $v=\frac{2t}{a}$ ему удалось получить алгебраическую кривую.

В этом случае

$$\zeta=\zeta_1=\frac{a}{6}\left\{\left(1+4\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^{3/2}-1\right\} \quad \text{при} \quad \zeta>0,$$

$$\zeta=\zeta_2=\frac{a}{6}\left\{\left(1-4\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^{3/2}-1\right\} \quad \text{при} \quad \zeta<0.$$

Из этих формул следует $\sqrt{1+\zeta_1'^2}+\sqrt{1+\zeta_2'^2}=\sqrt{\frac{a}{x}}$ и, значит, колебания материальной точки по этой кривой совершаются

---

[1]) См. сноску на стр. 112.

за одно и то же время $T=\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$, равное полупериоду малого колебания математического маятника длины $\frac{a}{2}$. Полагая $t=\frac{a}{6}-x$ и $z=\zeta+\frac{a}{16}$ и исключая иррациональности, придем к указанному Эйлером уравнению: $81z^4+216atz^2+256at^3-18a^2z^2=0$. Кроме того, правая часть уравнения для ζ_2 при замене a на $4a$ с точностью до множителя -1 совпадает с уравнением линии, найденной Эйлером для того случая, когда заданная половина таутохроны — вертикальная прямая.

Легко видеть, что интегралы $\int\zeta_{1,2}\,dx$, $\int\sqrt{1+\zeta'^2_{1,2}}\,dx$ выражаются через элементарные функции. Координаты X, Z эволюты кривой даются известными формулами: $Z=\zeta+\frac{\zeta'^2+1}{\zeta''}$, $X=x-\frac{\zeta'^2+1}{\zeta''}\zeta'$. Подставляя сюда выражение для ζ и исключая x, придем к алгебраическому уравнению 5 степени для X, Z.

К письму 2

1. Публикуется по подлиннику, Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 5, лл. 28—29.

2. Яков Герман (1678—1733), профессор математики в Падуе и Франкфурте-на-Одере, подписал контракт с Петербургской Академией в январе 1725 г. и был первым по времени членом Петербургской Академии. В конце 1730 г. Герман получил отставку с сохранением звания иностранного члена Академии и назначением пенсии. Уехал в Базель 14 (25) июля 1731 г.

3. Посланный Брюсом чертеж не сохранился.

К письму 3

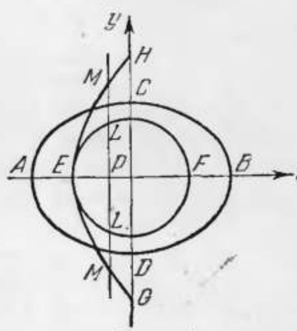
1. Публикуется по собственноручному черновику, Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 1, лл. 64, 65. Черновик Эйлера не датирован. Письмо написано, очевидно, в последние дни 1732 г. или в начале 1733 г., поскольку ответное письмо Брюса датировано 18 января 1733 г.

2. По-видимому, имеется в виду следующее построение: обозначим большую и малую полуоси эллипса через a и b, а расстояние между фокусами E и F через $2c$.

Пусть S_L — дуга окружности, построенной на EF, отсчитываемая от E до некоторой точки L. Построим кривую EMH так, что ордината y переменной точки M на этой кривой будет $y=\frac{b}{c}S_L=$ $=b\int\limits_{-c}^{x}\frac{dx}{\sqrt{c^2-x^2}}$, причем точки L и M имеют одинаковую абсциссу x. Отсюда длина дуги $S_к$ кривой между точками E и H будет

$$S_к=\int\limits_{-c}^{0}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int\limits_{-c}^{0}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{c^2-x^2}}\,dx=\int\limits_{-a}^{0}\sqrt{\frac{a^2-x^2e^2}{a^2-x^2}}\,dx,$$

где $e=\frac{c}{a}$. Такое же выражение мы имеем для длины дуги эллипса $S_э$ между точками A, C. Из выражения для y следует, что линия $GMEMH$ есть косинусоида $x=-c\cos\frac{y}{b}$.



Черт. 4.

3. Лудольф ван Цейлен (Ludolf van Ceulen, 1540—1610)—голландский математик, профессор в Лейдене. Число Лудольфа ван Цейлен или так называемое «лудольфово число» — приближенное значение для числа π с 32 верными десятичными знаками. Содержится в опубликованном посмертно, в 1615 г., сочинении Лудольфа «De arithmetische en geometrische Fondamenten» (Об основах арифметики и геометрии).

4. Указанный ряд сразу получается из выражения для длины дуги эллипса:

$$S_э=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,dt=4a\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+n\sin^2 t}\,dt=$$

$$=2\pi a\left\{1-\frac{n}{4}-\sum_{k=2}^{\infty}n^k\frac{[(2k-3)!!]^2(2k-1)}{[(2k)!!]^2}\right\}.$$

5. Статья Эйлера «Curva Tautochrona in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum» (Таутохронная кривая в жидкости, оказывающей сопротивление согласно квадрату скоростей) написана в октябре 1729 г., как об этом гласит помета на 67 стр. 4-го тома «Комментариев». Протоколы конференции за 1729 г. не сохранились. Статья представлена проф. Крафтом

для опубликования в 4-м томе 15 марта 1734 г. (Протоколы, т. I, стр. 100).

6. В том же 4-м томе, стр. 49—67, помещена статья Эйлера «De innumerabilibus curvis tautochronis in vacuo» (О бесчисленных таутохронных кривых в вакууме).

7. В действительности 4-й том «Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae» начал печататься только в начале 1735 г. (Протоколы, т. I, стр. 151, 156, 174).

К письму 4

1. Публикуется по подлиннику, Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 5, л. 30.

2. Чертеж Брюса не сохранился.

ПЕРЕПИСКА Л. ЭЙЛЕРА И ДЖ. СТИРЛИНГА

Публикация Т. А. Красоткиной[1])

В начале 30-х годов XVIII века Леонард Эйлер заинтересовался работами членов Лондонского королевского общества и пожелал установить научные связи с математиками, входящими в это общество. По просьбе Эйлера Ф. Вегерслёф[2]) сообщил об этом членам Королевского общества; в письме Эйлеру от 27 марта 1736 г.[3]) Ф. Вегерслёф писал, что Джемс Стирлинг принял предложение Эйлера как большую честь, рад служить Эйлеру и хотел бы переписываться с ним на латинском или на французском языке. Результатом явилась кратковременная, но представляющая большую ценность для истории математики переписка Л. Эйлера с Дж. Стирлингом. Письма относятся к 1736—1738 гг. и содержат интересный и живой обмен мнений по многим проблемам математических наук. Корреспондент Эйлера Джемс Стирлинг (James Stirling, 1696—1770)—известный шотландский математик, с 1729 г. член Лондонского королевского общества.

---

[1]) Примечания математического характера к письмам составил Б. В. Русанов. Перевод проверил И. Н. Веселовский; публикацию в целом отредактировал В. И. Смирнов. Примечания помещены на стр. 151—158, ссылки на них даны арабскими цифрами в прямых скобках.

[2]) Фридрих Вегерслёф (Friderich Weggersløff, 1702—1763)—датский морской офицер, имевший математические способности; в 1735—1740 гг. переписывался с Л. Эйлером. Просьба Эйлера была изложена в неизвестном пока его письме Ф. Вегерслёфу от 16 ноября 1734 г., на которое Вегерслёф ответил письмом от 17 февраля 1735 г. (Архив АН СССР ф. 136, оп. 2, № 6, лл. 260—261, нем.).

[3]) Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 6, л. 262, англ.

Вскоре после получения письма от Вегерслёфа Эйлер написал первое письмо Стирлингу от 8 (19) июня 1736 г.

Письмо содержит похвальный отзыв о трактате Стирлинга «Methodus differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum» (Дифференциальный метод, или трактат о суммировании и интерполировании бесконечных рядов, Лондон, 1730). Особенно понравился Эйлеру один из предложенных в этой книге способов преобразования рядов. В этом же письме Эйлер предлагал на суд Стирлинга свой метод суммирования рядов четных степеней дробей, обратных целым числам. Далее Эйлер сообщал особую запись гармонического ряда и выводил из нее некоторые специальные ряды для логарифмов целых чисел. В письме от 14 сентября 1736 г.[1]) Вегерслёф извещает Эйлера, что письмо Стирлингу было передано его брату и, вероятно, уже доставлено. Стирлинг долго не отвечал; 22 мая 1738 г. Вегерслёф писал Эйлеру[2]), что он спрашивал Стирлинга о причине его молчания, но все еще не получил ответа. Между тем ответное письмо Стирлинга в это время уже находилось в пути: это письмо, единственное известное письмо Стирлинга Эйлеру, помечено 16 апреля 1738 г. В нем Стирлинг положительно отзывался о работах Эйлера, особенно о суммировании рядов $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots$, где n—целое четное число. Вместе с тем он указывал на возможность, суммирования рядов $1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\ldots$, где n—целое нечетное число. Построение рядов для логарифмов целых чисел на основе гармонического ряда, изложенное у Эйлера довольно запутанно, представилось Стирлингу неясным. В конце письма Стирлинг указывал на совпадение формулы суммирования у Эйлера с результатом Маклорена[3]), изложенным в его «Трактате о флюксиях», находившемся в то время в печати; в связи с этим Стирлинг предлагал

[1]) Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 6, лл. 263—264, англ.

[2]) Там же, лл. 265—266, англ.

[3]) Колин Маклорен (Colin Maclaurin, 1698—1746)—шотландский математик, член Лондонского королевского общества. Основные работы его посвящены математическому анализу, исследованию фигур равновесия тяжелой вращающейся жидкости и пр.

поместить письмо Эйлера в «Philosophical Transactions». В ответном письме Эйлера от 27 июля 1738 г. приводилась формула суммирования в трех видах, а также вычисление сумм рядов

$$1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\left(+\frac{1}{5}\right)^n+\left(-\frac{1}{7}\right)^n+\ldots,$$

где n—число целое. Далее Эйлер упоминал о письме Николая Бернулли[1]), содержащем вычисление сумм рядов $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$ и $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$, и предлагал другой метод вычисления суммы ряда $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$; указывал величину одного бесконечного произведения; сообщал решение одной вариационной геометрической задачи и решение задачи о нахождении двух алгебраических кривых, спрямление которых зависит от данной квадратуры и которые имеют спрямляемую сумму дуг, соответствующих общей абсциссе.

В настоящее время мы не располагаем сведениями, продолжалась ли переписка Эйлера и Стирлинга после 1738 г.; известно лишь, что в 1746 г. Эйлер при содействии Стирлинга был избран членом Лондонского королевского общества, а Стирлинг при содействии Эйлера—членом Берлинской Академии наук[2]).

Перевод писем на русский язык печатается впервые. В письмах, датированных по старому стилю, в скобках указаны даты по новому стилю.

* * *

О т р е д а к ц и и. Следует указать, что два из публикуемых писем, именно письма 1738 г., были опубликованы по-латыни Ч. Туиди в его книге о Дж. Стирлинге: Ch. T w e e d i e, James Stirling. A sketch of his life and works along

[1]) Николай Бернулли (Nicolaus Bernoulli, 1687—1759)—профессор математики университета в Падуе, затем в Базеле, племянник Якова и Иоанна Бернулли.

[2]) Письма Эйлера К. Ветштейну от 16 июля 1746 г. (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 22, лл. 3 об.—4 об.) и от 19 ноября 1746 г. (там же, лл. 4 об.—5).

with his scientific correspondence, Oxford, 1922. Эта книга не была найдена в библиотеках Ленинграда и Москвы. Благодаря любезности секретаря Эйлеровской комиссии Германской Академии наук в Берлине д-ра К.-Р. Бирмана экземпляр книги Туиди, имеющийся в библиотеке названной Академии, смог просмотреть А. П. Юшкевич. Туиди опубликовал черновик письма Стирлинга от 16 апр. 1738 г. со всеми авторскими поправками (стр. 178—181), а также письмо Эйлера от 27 июля (7 августа) 1738 г. (стр. 181—191). Оригинал письма Эйлера от 8 (19) июня 1736 г. Туиди в Англии не обнаружил. Туиди напечатал письма Стирлинга и Эйлера без комментариев, если не считать беглых замечаний относительно независимости Эйлера и Маклорена в открытии формулы суммирования (стр. 212)[1]).

ПИСЬМО 1

Л. Эйлер—Дж. Стирлингу

8 (19) июня 1736 г. Петербург [1]

Славнейшему мужу Якову Стирлингу
шлет нижайший привет Леонард Эйлер

Давно уже охвачен я желанием установить научные связи с выдающимся математиком вашего народа, чтобы

[1]) В этой связи представляет интерес отрывок из напечатанного в книге Туиди (стр. 89) письма Стирлинга Маклорену от 26 окт. 1738 г.: «Я недавно получил письмо от г. Эйлера из Петербурга и рад узнать, что он не обеспокоен тем, что Вы пришли к той же теореме, что и он, ибо он около четырех лет назад публично доложил ее и ее доказательство Академии; это позволяет мне быть вполне спокойным на этот счет, так как я боялся, что дал основание для подозрения, ибо долго не отвечал на его первое письмо: его последнее полно множества остроумных вещей, но оно длинное, и я не вполне разбираюсь во всех частностях», (I have lately had a letter from Mr. Euler at Petersburgh, who I am glad to find is under no uneasiness about your having fallen on the same Theorem with him, because both his and the demonstration were publicly read in the Academy about four years ago; which makes me perfectly at quiet about it, for I was afraid of giving grounds of suspicion because I had long neglected to answer his first letter: his last one is full of a great many ingenious things, but it is long and I am not quite master of all the particulars).

получить пользу от ваших замечательных открытий, и главным образом для того, чтобы принести этим больше пользы нашей Академии. В этом отношении я весьма благодарен ученейшему Вегерслёфу [2], который особенно рекомендовал мне Тебя, славнейший муж; ибо чем более изучал я Твои замечательные труды о природе рядов, исследованием коих я также много занимался,—труды, которые встречал в Ваших Transactions [3], тем сильнее желал я познакомиться с Тобой, чтобы и еще большему у Тебя научиться и получить возможность представлять на твой суд мои размышления.

Однако, прежде чем писать Тебе, я с большим старанием разыскивал везде Твою превосходную книгу о дифференциальном методе [4], краткое упоминание о которой я недавно видел в Acta Lipsiensia [5], пока, наконец, не достиг своей цели. Тщательно прочитав эту книгу, я был сильно изумлен столь великим обилием блестящих методов, содержащимся в столь малой книге, которыми Ты учишь то легко суммировать медленно сходящиеся ряды, то интерполировать труднейшие в употреблении последовательности. Прежде всего понравилась мне теорема XIV части 1, где Ты предлагаешь способ легко суммировать ряды, у которых закон составления последующих членов остается неизвестным, на основании одного только соотношения последних членов; этот способ действительно является очень широким и весьма полезным. Однако доказательство этой теоремы, по-видимому, умышленно Тобою скрытое, стоило мне большого труда, пока я, наконец, с величайшим удовольствием не вывел его из предыдущих, а это и было причиною того, что я еще не смог в совершенстве уяснить все остальные теоремы [6]. Что касается суммирования очень медленно сходящихся рядов, то я в прошлом году предложил нашей Академии особый метод [7], с помощью которого я небольшой затратой труда достаточно точно определил суммы многих рядов. Пусть, например,

$$S=\overset{1}{A}+\overset{2}{B}+\overset{3}{C}+\ldots+\overset{x}{X},$$

где числа, написанные наверху, означают, который будет каждый член по порядку. Итак, сумма этих членов от первого члена A до какого-нибудь члена X будет

$$\int X\,dx + \frac{X}{1\cdot 2} + \frac{dX}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\,dx} - \frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,dx^3} + \frac{d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6\,dx^5} - \frac{3d^7X}{1\cdot 2\ldots 9\cdot 10\,dx^7} + \frac{5d^9X}{1\cdot 2\ldots 11\cdot 6\,dx^9} - \frac{691\,d^{11}X}{1\cdot 2\ldots 13\cdot 210\,dx^{11}} + \frac{35\,d^{13}X}{1\cdot 2\ldots 15\cdot 2\,dx^{13}} - \frac{3617\,d^{15}X}{1\cdot 2\ldots 17\cdot 30\,dx^{15}} + \frac{2\,423\,279\,d^{17}X}{1\cdot 2\ldots 19\cdot 1890\,dx^{17}}$$ [1]) — и т. д.

Так как в этом выражении X принимается выраженным через x, то $\int X\,dx$ и остальные члены могут быть определены; в написании же этих членов я пользовался способом Лейбница, вынужденный необходимостью, так как было бы неудобно вместо $d^{17}X$ писать 17 точек над X. Затем, поскольку интегрирование $\int X\,dx$ допускает добавление постоянной величины, ее надо определить таким образом, чтобы S была равна 0, если x принимается равным 0 [8]. Таким образом, с помощью этой формулы могут суммироваться все ряды с любым числом членов и притом точно, если только флюксии X высоких порядков исчезают, что имеет место, когда X будет целой положительной степенью x или суммой таких степеней.

Итак, если нужно найти сумму последовательности

$$1 + 2^{12} + 3^{12} + 4^{12} + 5^{12} + \ldots + x^{12},$$

то будет

$$X = x^{12}, \quad \int X\,dx = \frac{x^{13}}{13}, \quad \frac{dX}{dx} = 12x^{11}, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = 12\cdot 11\cdot 10x^9,$$
$$\frac{d^5X}{dx^5} = 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8x^7$$

---

[1]) Ошибочно вместо $\frac{43867\;d^{17}X}{19!\;42\;dx^{17}}$. — *Б. Р.*

и, наконец,

$$\frac{d^{11}X}{dx^{11}} = 12\cdot 11\cdot 10 \ldots 2x,$$

и все последующие члены исчезают. Следовательно, сумма этих членов будет

$$S = \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{2} + x^{11} - \frac{11x^9}{6} + \frac{22x^7}{7} - \frac{33x^5}{10} + \frac{5x^3}{3} + \frac{691x}{2730}.$$

Если же данный ряд нигде не прерывается, то, по крайней мере, находится достаточно приближенная сумма. Так, если будет предложен ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x},$$

то найдется сумма этих членов

$$S = b + lx + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \\ + \frac{1}{240x^8} - \frac{1}{132x^{10}} + \frac{691}{32\,760x^{12}} - \text{и т. д.}$$

Однако в этом случае трудно определить предложенным способом искомую постоянную b. Поэтому я принимаю $x = 10$ и фактически складываю десять членов, сумма которых будет $S = 2{,}9289682539682539$; отсюда $b = 0{,}5772156649015329$. Найдя эту постоянную, легко определить сумму любого числа членов этого ряда. Таким образом, я нашел, что сумма тысячи членов $S = 7{,}4854708605503449$ и сумма миллиона членов $S = 14{,}3927267228657236$. Относительно этого ряда, обычно именуемого гармоническим, я заметил, что если его разбить на части с бесконечным и одинаковым числом членов следующим образом:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \ldots \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty+1} + \ldots + \ldots \frac{1}{2\infty} + \\ + \frac{1}{2\infty+1} + \ldots + \ldots \frac{1}{3\infty} + \frac{1}{3\infty+1} + \ldots + \ldots \frac{1}{4\infty} + \ldots$$

и т. д.,

то первая часть имеет значение $l\frac{1}{0}$, вторая $= l\frac{2}{1}$ ..., третья $= l\frac{3}{2}$, четвертая $= l\frac{4}{3}$ и т. д. [9].

Отсюда следует:

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \text{ и т. д.;}$$

как известно,

$$l3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8} + \text{и т. д.,}$$

$$l4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8} + \text{и т. д.,}$$

$$l5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \text{и т. д.}$$ [10].

Таким же образом будет

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{x^2} = S = b -$$
$$- \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{30x^5} - \frac{1}{42x^7} + \frac{1}{30x^9} - \frac{5}{66x^{11}} + \text{и т. д.}$$ [11]

Постоянная же величина b, которую можно приближенно определить, фактически складывая некоторое число членов, равна сумме ряда, бесконечно продолженного, а именно 1,64493406684826473647; эта сумма в точности совпадает с суммой, данной Тобою, славнейший муж. Впрочем, другим путем я нашел, что суммы рядов степеней, обратных целым числам, при четных показателях будут все связаны с квадратурой круга, и если положить, что диаметр круга относится к окружности, как 1 к p, то будет:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{и т. д.} = \frac{1}{6} p^2,$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \qquad \text{и т. д.} = \frac{1}{90} p^4,$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{и т. д.} = \frac{1}{945} p^6,$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{и т. д.} = \frac{1}{9450} p^8.$$

Это свойство представляется мне тем более заслуживающим внимания, что оно не может быть доказано ни одним из общепринятых методов. Итак, я прошу Тебя благосклонно принять это и удостоить меня Твоего благоволения и дружбы. Прощай.

Петербург 8 июня
1736 г.

ОРИГИНАЛ ПИСЬМА 1

Viro clarissimo Jacobo Stirling
s[alutem] p[lurimam] d[icit] Leonhardus Euler

Jam pridem desiderio flagravi cum Eminente Nationis Vestrae Mathematico commercium litterarium instituendi cum ut eximiis inventis vestris proficerem, tum etiam praecipue ut hoc pacto Academiae nostrae magis satisfacerem. Hanc ob rem summas eruditissimo Wegerslovio habeo gratias, quod Te potissimum, Vir Clarissime, mihi comparaverit: quo plura enim ex Tuis Eximiis scriptis, quae passim in Transactionibus Vestris vidi, circa naturam serierum in quo studio equidem multum laboravi, addidici, eo magis semper optavi in Tui cognitionem perfingere, quo tam plura ex Te Ipso accipere, quam mea meditata judicio Tuo submittere possem.

Antequam autem ad Te scripturus essem, hic ubique excellentem librum Tuum de methodo differentiali, cujus quidem umbram brevi adhinc tempore in Actis Lipsliensibus] videram magno studio anquisivi, quoad voti mei compos sim factus. Quem cum diligenter pervolvissem, vehementer sum admiratus tantam excellentium methodorum copiam tam exiguo volumine contentam, quibus tam series lente convergentes expedite summare, quam tractatu difficillimas progressiones interpolare doces. Imprimis autem mihi placuit partis I prop[ositio] XIV, in qua methodum tradis series, quarum lex progressionis ne quidem constat, ex solo ultimorum terminorum relatione tam facile summandi, quae methodus profecto latissime patet, maximamque habet utilitatem. Demonstratio vero hujus propositionis, quam studio cellasse videris, ingentem mihi creavit difficultatem, donec tandem eam maxima cum voluptate ex praecedentibus essem assecutus, id quod in causa est, quod nondum omnes sequentes propositiones perfecte perspicere potuerim. Quod quidem ad summationem serierum lentissime convergentium attinet, ego praeterito anno quoque coram Academia nostra methodum peculiarem praelegi, cujus ope plurium serierum exiguo labore summas satis prope dedi. Sit scilicet $S=\overset{1}{A}+\overset{2}{B}+\overset{3}{C}\ldots\ \overset{x}{X}$, ubi numeri supra scripti denotant, quotus sit quisque terminus in ordine. Horum nunc terminorum a primo A usque ad terminum quemvis X summa est

$$\int X\,dx+\frac{X}{1\cdot 2}+\frac{dX}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2dx}-\frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6dx^3}+$$
$$+\frac{d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6dx^5}-\frac{3d^7X}{1\cdot 2\ldots 9\cdot 10dx^7}+\frac{5d^9X}{1\cdot 2\ldots 11\cdot 6dx^9}-$$
$$-\frac{691d^{11}X}{1\cdot 2\ldots 13\cdot 210dx^{11}}+\frac{35d^{13}X}{1\cdot 2\ldots 15\cdot 2dx^{13}}-\frac{3617d^{15}X}{1\cdot 2\ldots 17\cdot 30dx^{15}}+$$
$$+\frac{2423279d^{17}X}{1\cdot 2\ldots 19\cdot 1890dx^{17}}-\text{etc.}$$

In qua expressione cum X dari ponatur in x tum $\int X\,dx$ tum reliqui termini omnes erunt assignabiles; usus sum autem in scribendis his terminis modo Leibnitiano necessitate coactus cum loco $d^{17}X$ incommodum fuisset 17 puncta ipsi X superscribere. Deinde cum integratio ipsius $\int X\,dx$ adjectionem quantitatis constantis admittat, ea ita debet esse comparata, ut fiat $S=0$, si ponatur $x=0$. Ope hujus ergo formulae omnes series in indefinitum possunt summari idque exacte si tandem fluctiones altiorum graduum ipsius X evanesca[n]t uti accidit, si X fuerit potestas affirmativa ipsius x seu hujusmodi potestatum aggregatum.

Ita si quaeratur summa progressionis $1+2^{12}+3^{12}+$ $+4^{12}+5^{12}+\ldots+x^{12}$, erit ob $X=x^{12}$, $\int Xdx=\frac{x^{13}}{13}$; $\frac{dX}{dx}=12x^{11}$; $\frac{d^3X}{dx^3}=12\cdot 11\cdot 10x^9$; $\frac{d^5X}{dx^5}=12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8x^7$, tandemque $\frac{d^{11}X}{dx^{11}}=12\cdot 11\cdot 10\ldots\ 2x$ et sequentes termini omnes evanescent. His igitur terminis colligendis prodibit summa $S=\frac{x^{13}}{13}+\frac{x^{12}}{2}+x^{11}-\frac{11x^9}{6}+\frac{22x^7}{7}-\frac{33x^5}{10}+\frac{5x^3}{3}+\frac{691x}{2730}$.

Quando autem series data nusquam abrumpitur, tum saltem summa vero proxima invenitur. Ut si proposita fuerit series $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{x}$ reperietur horum terminorum summa $S = b + lx + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \frac{1}{240x^8} - \frac{1}{132x^{10}} + \frac{691}{32760x^{12}} - \text{etc.}$

Hoc autem casu difficile est constantem requisitam b praescripto modo definire. Hanc ob rem pono $x = 10$, decemque terminos actu addo, quorum summa erit $S = 2{,}9289682539682539$; unde erit $b = 0{,}5772156649015329$. Hac que constante inventa in promptu erit summam quolibet terminorum illius seriei assignare. Ita summam mille terminorum inveni $= 7{,}4854708605503449$ summam que millies mille terminorum $14{,}3927267228657236$. De hac serie vulgo harmonica dicta observavi, si in membra aequali et infinito terminum numero constantia distinguatur hoc modo $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty + 1} + \ldots \frac{1}{2\infty} + \frac{1}{2\infty + 1} + \ldots \frac{1}{3\infty} + \frac{1}{3\infty + 1} + \ldots \frac{1}{4\infty} + \ldots \text{etc}$; tum primum membrum valere $l\,\frac{1}{0}$, secundum esse $= l\,\frac{2}{1}$, tertium $= l\,\frac{3}{2}$, quartum $= l\,\frac{4}{3}$ etc. Hinc sequitur fore

$l\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ etc., ubi constat

$l\,3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8}$ etc.,

$l\,4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8}$ etc.,

$l\,5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ etc.

Simili modo erit $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{x^2} = S = b - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{30x^5} - \frac{1}{42x^7} + \frac{1}{30x^9} - \frac{1}{66x^{11}} + \text{etc.}$ Constans vero b, quam aliquot actu addendis terminis inveniri convenit, aequalis est summae seriei in infinitum continuatae puta $1{,}64493406684822643647$ quae summa cum ea, quam Tu dedisti, Vir Clarissime, apprime congruit. Ceterum alia via inveni summas serierum potes[ta]tum reciprocas si exponentes fuerint nu[me]ri pares, omnes a quadratura circuli pendere posita enim ratione diametri ad peripheriam ut I ad p erit ut sequitur

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.}=\frac{1}{6}p^2,$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{etc.}=\frac{1}{90}p^4,$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\text{etc.}=\frac{1}{945}p^6,$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\text{etc.}=\frac{1}{9450}p^8.$$

Quae proprietas mihi eo magis consideratione digna videtur, quod ne ullis quidem receptis methodis demonstrari queat. Haec igitur rogo ut aequi bonique accipias meque favore. Tuo atque amicitia digneris. Vale. Dabam Petropoli d. 8 Junii 1736.

ПИСЬМО 2

Дж. Стирлинг—Л. Эйлеру

16 апреля 1738 г. Эдинбург [1]

Славнейшему и ученейшему мужу Леонарду Эйлеру шлет нижайший привет Яков Стирлинг

Прошло уже столько времени с тех пор, как Ты удостоил меня своим письмом, что я едва осмеливаюсь отвечать Тебе, разве только надеясь на Твое снихождение. В течение этих двух лет я был занят многими делами, вынуждавшими меня часто ездить в Шотландию и затем возвращаться в Лондон. Это было одной из причин как того, что Твое письмо поздно было мне вручено, так и того, что до сих пор я не нашел времени, чтобы прочитать его с должным вниманием. Ибо после того как научные занятия бывают надолго прерваны, чтобы не сказать совсем забыты, то приходится вооружаться терпением для того, чтобы побудить ум снова о них размышлять. Итак, я впервые пользуюсь случаем, чтобы засвидетельствовать Тебе мою преданность и одновременно выразить давно уже следуемую благодарность за письмо, в котором говорится о столь выдающихся открытиях.

Более всего понравилась мне Твоя теорема о суммировании рядов с помощью площади кривой и с помощью дифференциалов или флюксий членов, так как она является общей и удобна на практике. Я сразу заметил, что она может быть распространена на многие виды рядов и, что особенно важно, большей частью даст быстрейшее приближение. Может быть, Ты не заметил, что моя теорема о суммировании логарифмов есть не что иное, как частный случай Твоей общей теоремы. Это открытие было для меня, однако, тем более приятным, что я прежде также размышлял на эту тему, но я не пошел дальше первого члена и с помощью его одного я нашел достаточно удобно приближенные значения рядов путем повторения вычисления, как при решении соответствующих уравнений; образец этого я дал в наших «Philosophical Transactions».

Сказанное Тобою относительно нахождения логарифмов с помощью гармонического ряда представляется мне довольно темным, так как я не вполне понимаю обозначение. Более же всего мне нравится Твой способ суммировать любые ряды с помощью степеней окружности круга. Я считаю это крайне остроумным и действительно новым [открытием]; ибо я не вижу, что у него общего с принятыми методами, поэтому я легко верю, что ты почерпнул его из совершенно нового источника.

Твои ряды содержались в общей форме

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\text{ и т. д.},$$

которая без всякого труда сводится к следующей:

$$1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\text{ и т. д.},$$

а ее Ты предлагаешь суммировать с помощью степени окружности с показателем n, но только он должен быть четным числом. Впрочем, если знаки членов взаимно чередуются, так что получается ряд

$$1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\text{ и т. д.},$$

то этот ряд всегда можно суммировать через степень окружности с показателем n, если только он будет нечетным; таким образом, если

$$n=1,\quad \frac{1}{4}\,p=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{ и т. д.},$$

$$n=3,\quad \frac{1}{32}\,p^3=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\text{ и т. д.},$$

$$n=5,\quad \frac{5}{1536}\,p^5=1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\text{ и т. д.}$$

Я совершенно не сомневаюсь, что это же заметил и ты, или, во всяком случае, легко усмотришь из своего основного положения, и я охотно поверю, если это так тебе представлялось.

Впрочем, здесь тебе следует заметить, что профессор математики в Эдинбурге Маклорен намерен через некоторое время издать книгу о флюксиях, несколько напечатанных страниц которой он мне уже прислал; там есть две теоремы о суммировании рядов с помощью дифференцирования членов, из которых одна совершенно та же самая, которую ты мне прислал, о чем я сообщил ему. Хотя он охотно обещал засвидетельствовать это в своем предисловии, я оставляю на Твое усмотрение, пожелаешь Ты или нет издать Твое письмо в наших «Philosophical Transactions». Если Ты хочешь что-нибудь опубликовать или доказать и быстро напишешь мне, то я позабочусь, чтобы это было издано в свет прежде, чем выйдет его книга. Если угодно Тебе при этом случае быть избранным в члены нашего Королевского общества, я не сомневаюсь, что это будет приятно и остальным, когда они увидят Твои замечательные труды. Мне же Ты будешь всегда приятным, если удостоишь меня продолжения Твоей дружбы.

Эдинбург, 16 апреля
1738.

ОРИГИНАЛ ПИСЬМА 2

Illustrissimo Doctissimo Viro Leonhardo Euler

S[alutem] P[lurimam] d[icit] Jacobus Stirling

Tantum temporis elapsum est ex quo dignatus es mihi scribere, ut jam rescribere vix ausim, nisi Tua humanitate fretus. Per hosce duos annos plurimis negotiis implicitus sum, quae occasionem mihi dederunt frequenter eundi in Scotiam, et dein Londinum redeundi. Et haec inter alia in causa fuerunt tum quod epistola Tua sero ad manus meas pervenit, tum quod in hunc usque diem vix suppeterat tempus eandem perlegendi ea qua meretur attentione. Nam postquam speculationes sunt diu interruptae, ne dicam obsoletae, patientia opus est antequam induci possit animus de iisdem iterum cogitare. Hanc igitur primam arripio occasionem testandi meam in Te observantiam, et simul agendi gratias dudum debitas propter literas eximiis inventis repertas.

Gratissimum mihi fuit Theorema Tuum pro summandis seriebus per aream curvae et differentias, sive fluxiones terminorum; quippe generale et praxi expeditum. Statim percepi idem extendi ad plurima serierum genera, et quod praecipuum est, celerrime plerumque approximat. Forte non observasti Theorema meum pro summandis Logarithmis nihil aliud esse quam casum particularem Theorematis Tui generalis. Sed et eo gratius mihi fuit hocce inventum, quod de eodem quoque ego olim cogitaveram; sed ultra primum terminum non processi, et per eum solum approximavi pro lubitu ad valores serierum satis expedite scilicet per repetitionem calculi ut in resolutione aequationum affectarum, cujusque specimen dedi in Philosophicis nostris Transactionibus.

Quae habes de inveniendis Logarithmis per seriem harmonicam, obscura mihi saltem videntur, quoniam notationem non recte intelligo.

Imprimis autem mihi placuit methodus Tua summandi quasdam series per potestates peripheriae circuli. Hoc fateor admodum ingeniosum et omnino novum; nam non video, quod habeat quidquid commune cum methodis receptis, adeo ut facile credam, Te idem ex novo fonte hausisse.

Series Tuae continentur in forma generali:

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\text{etc.}$$

Eadem nulla negotio reducitur ad formulam sequentem, scilicet

$$1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\text{etc.}$$

Et hanc doces summare per potestatem peripheriae, cujus index est n, modo sit numerus par. Ceterum si signa terminorum alternorum mutentur, ut series evadat

$$1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\text{etc.}$$

Hac inquam semper summari potest per dignitatem peripheriae cujus index sit n, modo sit numerus impar; utique si sit

$$n=1,\quad \frac{1}{4}p=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{etc.}$$

$$n=3,\quad \frac{1}{32}p^3=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\text{etc.}$$

$$n=5,\quad \frac{5}{1536}p^5=1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\text{etc.}$$

etc.

Et nullus dubito Te idem hactenus observasse; aut facile saltem observaturum ex Tuo fundamento, quod libenter videbo, quando ita Tibi visum fuerit.

Hic autem monendus es D. Maclaurin Matheseos professorum Edinburgi, post aliquod tempus editurum librum de fluxionibus, cujus paginas aliquot jam impressas mecum communicavit; in quibus duo habet theoremata pro summando seriebus per differentias terminorum, quorum alterum ipsissimum est, quod Tu mihi misisti, cujus ego illico eum certiorem feci. Et etiam si ille libenter promiserat idem testari in sua praefatione, judicio tamen Tuo submitto, annon velles epistolam tuam edere in Philosophicis nostris Transactionibus. Et si vis quaedam illustrare vel demonstrare, et cito mihi rescribere, curabo, ut lucem videat, antequam liber ejus prodierit. Quod si animus sit, hac occasione elegi unus ex Sociis nostrae Societatatis regiae, idem reliquis gratum procul dubio erit, quando viderint praeclara Tua inventa. Mihi vero semper gratissimus ut amicitiam continuare digneris.

Edinburgi 16 Aprilis
1738.

ПИСЬМО 3

Л. Эйлер—Дж. Стирлингу

27 июля (7 августа) 1738 г. Петербург[1]

Знаменитому и славнейшему мужу Якову Стирлингу
шлет нижайший привет Леонард Эйлер

С чем бо́льшим нетерпением ожидал я письма от Тебя, славнейший муж, с тем большей радостью получил Твой любезнейший ответ на мое письмо, и тем более восхищен им, что вижу, что не только мое письмо не было Тебе неприятным, но Ты сам приглашаешь меня продолжить эту переписку. Итак, я очень Тебе благодарен, что Ты соблаговолил столь милостиво принять мои слабые размышления и сообщить мне о них Твое суждение. Что же касается того, что Ты считаешь мое послание достойным быть включенным в Ваши «Transactions» [2], я отношу это к Твоей величайшей любезности; для этой цели я счел необходимым добавить некоторые дополнения и разъяснения, которые Ты можешь добавить или опустить по Твоему желанию. Однако я совсем не хотел бы в этом вопросе умалить славу знаменитого Маклорена, поскольку он, вероятно, раньше меня напал на эту теорему для суммирования рядов и поэтому заслуживает быть названным как бы первым изобретателем [3]. Я же нашел эту теорему примерно четыре года назад, когда я подробно изложил нашей Академии ее доказательство и применение; это мое рассуждение, так же как и то, которое я составил о суммировании рядов при помощи степеней окружности круга, скоро будет опубликовано в наших «Комментариях».

В наших «Комментариях» уже имеется несколько публикаций различных моих методов суммирования рядов [4]; некоторые из этих методов имеют большое сходство с твоими, изданными в блестящем Твоем труде, но в то время я еще не знал о твоем дифференциальном методе, и поэтому не мог упомянуть о нем, как следовало бы. Уже много лет тому назад я послал славнейшему вашему президенту Слоану [5] некую статью, в которой я изложил общий принцип решения следующего уравнения: $\dot{y}=y\dot{y}x+ax^m\dot{x}$, о котором раньше очень много говорили и которое решено было только для очень малого числа значений показателя m. Это рассуждение, если только оно не утрачено, могло бы быть представлено в качестве образца Вашему Обществу, когда оно удостоит меня быть избранным его членом, каковой честью я буду обязан одному Тебе, славнейший муж. Я, впрочем, боюсь, будет ли мое избражение подходящим для Вашего славного Общества, так как я настолько тесно связан с нашей императорской Академией, что любые мои размышления должен прежде всего представлять сюда.

Если вернуться теперь к теореме, с помощью которой может быть найдена сумма любого ряда, если дан общий член, то данная формула, очевидно, будет иметь тем больше пользы, чем большее количество в ней будет членов, однако продолжение ее до тех пор, пока будет угодно, представляет большие трудности. Я не пошел далее двенадцати членов, из которых последний был найден мною совсем недавно. Формула эта заключается в следующем: если первый член ряда будет A, второй B и т. д. и если член с номером x будет$=X$, то сумма этих членов будет

$$A+B+C+\ldots+X=$$
$$=\int X\,dx+\frac{X}{1\cdot 2}+\frac{dX}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\,dx}-\frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,dx^3}+$$
$$+\frac{d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6dx^5}-\frac{3d^7X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9\cdot 10dx^7}+$$
$$+\frac{5d^9X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 11\cdot 6dx^9}-\frac{691d^{11}X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 13\cdot 210dx^{11}}+$$

$$+\frac{35d^{13}X}{1\cdot2\cdot3\ldots15\cdot2dx^{15}}-\frac{3617d^{15}X}{1\cdot2\cdot3\ldots17\cdot30dx^{15}}+$$
$$+\frac{43867d^{17}X}{1\cdot2\cdot3\ldots19\cdot42dx^{17}}-\frac{1222277d^{19}X}{1\cdot2\cdot3\ldots21\cdot110dx^{19}}+\text{ и т. д.[6]}.$$

Это выражение, несколько измененное, может быть использовано также для нахождения суммы ряда от члена X до бесконечности. Кроме большого удобства для приближенного вычисления, оно весьма полезно для нахождения сумм алгебраических рядов, суммы которых могут быть получены и точно. Пусть нужно найти сумму такой последовательности: $1+2^{12}+3^{12}+4^{12}+\ldots x^{12}$; пусть $X=x^{12}$; $\int X\,dx=\frac{x^{13}}{13}$; $\frac{dX}{dx}=12x^{11}$; $\frac{d^3X}{dx^3}=10\cdot11\cdot12x^9$ и т. д. наконец, $\frac{d^{13}X}{dx^{13}}$ вместе с остальными членами $=0$.

Следовательно, отсюда получается искомая сумма $=\frac{x^{13}}{13}+\frac{x^{12}}{2}+x^{11}-\frac{11x^9}{6}+\frac{22x^7}{7}-\frac{33x^5}{10}+\frac{5x^3}{3}-\frac{691x}{2730}$. Не знаю, может ли эта сумма быть так легко найдена каким-нибудь другим способом. Этим же способом может быть одинаково удобно определена сумма последовательности $1+2^{21}+3^{21}+$ $+4^{21}+\ldots X^{21}$ — задача, при употреблении других способов представляющая неодолимые трудности.

Если же члены предложенного ряда соединены между собой поочередно знаками $+$ и $-$, то эту теорему уже не так удобно применять, так как в этом случае нужно было бы соединять два члена в один. Впрочем, для рядов такого вида у меня есть другая теорема, имеющая некоторое сходство с первой; она состоит в следующем: пусть нужно найти сумму такого ряда: $A-B+C-D\ldots\pm X$, где X есть член с номером x и имеет знак $+$ или $-$, смотря по тому, четное число x или нечетное. Я утверждаю, что сумма этой последовательности будет

$$\text{постоянная}\pm\Big(\frac{X}{1\cdot2}+\frac{dX}{1\cdot2\cdot2dx}-\frac{d^3X}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot2dx^3}+\frac{3d^5X}{1\cdot2\cdot3\ldots6\cdot2dx^5}-$$
$$-\frac{17d^7X}{1\cdot2\cdot3\ldots8\cdot2dx^7}+\frac{155d^9X}{1.2\cdot3\ldots10\cdot2dx^9}-\frac{2073d^{11}X}{1\cdot2\cdot3\ldots12\cdot2dx^{11}}+$$
$$+\frac{38227d^{13}X}{1\cdot2\cdot3\ldots14\cdot2dx^{13}}-\text{ и т. д. [7]}\Big).$$

Постоянная же должна быть определена так, чтобы она удовлетворяла одному частному случаю. А если ряд, который нужно суммировать, связан с геометрическим рядом следующим образом: $An + Bn^2 + Cn^3 \ldots + Xn^X$, то менее удобно пользоваться двумя предыдущими теоремами: сумма есть постоянная $+ n^X\Big(\frac{n}{n-1}X - \frac{\alpha\, dX}{1\,(n-1)^2\,dx} +$

$$+ \frac{\beta d^2X}{1\cdot 2\,(n-1)^3 dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\,(n-1)^4 dx^3} + \frac{\delta d^4X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,(n-1)^5 dx^4} - \text{и т. д.}\Big);$$

значения же коэффициентов будут следующие:

$$\alpha = n$$
$$\beta = n^2 + n$$
$$\gamma = n^3 + 4n^2 + n$$
$$\delta = n^4 + 11n^3 + 11n^2 + n$$
$$\varepsilon = n^5 + 26n^4 + 66n^3 + 26n^2 + n \text{ и т. д. [8].}$$

Итак, вот три теоремы этого рода, из которых каждая в определенных случаях бывает весьма полезна для нахождения сумм рядов. Что же касается моего способа суммировать ряд вида

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{и т. д.},$$

где n — число четное, то я получил его двояким образом, из которых первый, чтобы ты правильно понял, славнейший муж, я вывел из ряда $1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} +$ и т. д., а другой получается непосредственно, и с помощью его я тотчас пришел к сумме этого ряда. Первым способом я также получил сумму такого ряда $1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} +$ и т. д., если n — число нечетное, и нашел одним словом так же, как и Ты:

$$\frac{p}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{и т. д.}$$
$$\frac{p^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{и т. д.}$$
$$\frac{p^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{и т. д.}$$

$$\frac{p^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{и т. д.}$$

$$\frac{5p^5}{1536} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{и т. д.}$$

$$\frac{p^6}{960} = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{и т. д.}$$

$$\frac{61p^7}{184\,320} = 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \text{и т. д.}$$

$$\frac{17p^8}{161\,280} = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{и т. д.}$$

каковые ряды все содержатся в этом общем $1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(+\frac{1}{5}\right)^n + \left(-\frac{1}{7}\right)^n + \left(+\frac{1}{9}\right)^n +$ и т. д., причем n — целое число. Если n — четное число, тогда все члены имеют знак $+$, если же n — нечетное число. тогда знаки взаимно чередуются.

Все эти суммы я вывел из рассмотрения бесконечного уравнения: $0 = 1 - \frac{S}{1a} + \frac{S^3}{1\cdot 2\cdot 3a} - \frac{S^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a} +$ и т. д., которым выражается отношение между дугой S и ее синусом a в круге, радиус которого $= 1$. Но поскольку тому же самому синусу a соответствует бесчисленное множество дуг, становится очевидным, что если S рассматривать как своего рода корень этого уравнения, то оно будет иметь бесконечное множество значений, и все они будут известны. Итак, пусть будут A, B, C, D, E и т. д. все те дуги, которые имеют один и тот же синус a, тогда будет в соответствии с природой уравнений $1 - \frac{S}{1a} + \frac{S^3}{1\cdot 2\cdot 3a} - \frac{S^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a} +$ $+$ и т. д. $= \left(1 - \frac{S}{A}\right)\left(1 - \frac{S}{B}\right)\left(1 - \frac{S}{C}\right)\left(1 - \frac{S}{D}\right)$ и т. д. [9]

Рассматривая дроби $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$, $\frac{1}{D}$ и т. д., заметим, что сумма их всех будет равна коэффициенту при $-S$, который есть $\frac{1}{a}$; таким же образом сумма произведений [двух из] этих дробей по две равняется коэффициенту при S^2, который $= 0$; сумма произведений по три будет равна коэффициенту при $-S^3$, который $= -\frac{1}{6a}$, аналогично будут получаться другие уравнения. Из суммы произведений по два и из суммы самих дробей выводится сумма квадратов тех же самых дробей; отсюда и из суммы произведений дробей по три — сумма кубов и т. д. Если продолжать таким образом, получатся превосходные суммирования общих рядов с помощью дуг окружностей и их степеней, из которых, принимая $a=1$, следуют все те, которые я сообщил Тебе. Я заметил, однако, что здесь существует тесная связь между выражением сумм этих рядов и коэффициентами указанного ряда $\int X\,dx + \frac{X}{1\cdot 2} + \frac{dX}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2dx} +$ и т. д., который я дал для суммирования всяких рядов [10]. В самом деле, имеется следующее:

$$\frac{2^1\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2}p^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ и т. д.}$$

$$\frac{2^3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}p^4 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \text{ и т. д.}$$

$$\frac{2^5\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6}p^6 = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{ и т. д.}$$

$$\frac{2^7\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9\cdot 10}p^8 = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{ и т. д.}$$

$$\frac{2^9\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 11\cdot 6}p^{10} = 1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \text{ и т. д.}$$

$$\frac{2^{11}\cdot 691}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 13\cdot 210}p^{12} = 1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \text{ и т. д.}$$

$$\frac{2^{13}\cdot 35}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 15\cdot 2}p^{14} = 1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \text{ и т. д.}$$

$$\frac{2^{15}\cdot 3617}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 17\cdot 30}p^{16} = 1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \text{ и т. д.}$$

$$\frac{2^{17}\cdot 43\,867}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 19\cdot 42}p^{18} = 1 + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{3^{18}} + \frac{1}{4^{18}} + \text{ и т. д.}$$

$$\frac{2^{19}\cdot 1\,222\,277}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 21\cdot 110}p^{20} = 1 + \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{4^{20}} + \text{ и т. д.}$$

Итак, отметив это совпадение, можно перейти к последнему, а именно к изложению самого метода, хотя этот труд и будет весьма тяжелым. Поэтому я не сомневаюсь, что если я более углубленно исследую эту удивительную связь, тем самым будут получены важные вспомогательные средства для развития анализа. Ты, славнейший муж, может быть, без труда обнаружишь эту связь из самого существа дела.

Пока я писал это, я получил от славнейшего Николая Бернулли, базельского профессора и члена Вашего общества, особенное доказательство суммы следующего ряда: $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-$ и т. д., которую он вывел из суммы ряда $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-$ и т. д., причем первый ряд приравнивается квадрату второго, из которого вычитаются удвоенные произведения попарно взятых членов: рассматривая в отдельности эти суммы, он остроумно свел их числовые значения к квадратуре круга. Однако таким путем славнейшему мужу, конечно, нельзя было бы получить суммы следующих степеней. Этим же недостатком страдает также и некий другой мой метод, которым я непосредственно с помощью анализа нашел сумму ряда $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+$ и т. д., из которого равным образом я не получил никакой пользы при дальнейшем суммировании; метод же этот заключается в следующем: флюента [11] $\frac{\dot{x}}{\sqrt{(1-xx)}}$ является дугой круга, синус которой есть x при радиусе $=1$; я умножаю ее на флюксию [12] $\frac{\dot{x}}{\sqrt{(1-xx)}}$, и флюента полученного выражения будет $\frac{ss}{2}$, где s — дуга, синус которой есть x. Поэтому, если после суммирования принять $x=1$, то получится $S=\frac{p}{2}$, если обозначить $p:1$ отношение окружности к диаметру. Следовательно, в этом случае получится $\frac{pp}{8}$. Флюента же

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{(1-xx)}}=X+\frac{1}{2\cdot3}X^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}X^5+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}X^7+\text{и т. д.}$$

Затем отдельные члены умножаются на $\frac{\dot{x}}{\sqrt{(1-xx)}}$ так, чтобы они исчезали, если принять $x=0$, а затем полагаем $x=1$. Таким образом будет $\int\frac{x\dot{x}}{\sqrt{(1-xx)}}=1-\sqrt{(1-xx)}=1$, если $x=1$; таким же образом найдем

$$\int\frac{1x\cdot 3\dot{x}}{2\cdot 3\sqrt{(1-xx)}}=\frac{+1}{3^2} \text{ и } \int\frac{1\cdot 3x^5\dot{x}}{2\cdot 4\cdot 5\sqrt{(1-xx)}}=\frac{1}{5^2} \text{ — и т. д.,}$$

до тех пор, когда мы найдем $\frac{pp}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+$ и т. д.[13]. Но я уже слишком задержался в этом рассуждении, поэтому и прошу Тебя, славнейший муж, соблаговоли сообщить мне, что Ты думаешь об этом предмете.

Я случайно нашел однажды это весьма достойное внимания выражение $\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29 \text{ и т. д.}}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 12\cdot 12\cdot 16\cdot 20\cdot 24\cdot 28 \text{ и т. д.}}$ [14], в котором все числители суть простые числа; а знаменатели — четно-четные числа, отличающиеся от числителей на единицу; я могу доказать, что такое же значение имеет дуга окружности, диаметр которой $=\frac{\pi}{4}$, так что это выражение равно выражению Валлиса [15]

$$\frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot \text{ и т. д.}}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot \text{ и т. д.}}.$$

Для того, чтобы написать Тебе, славнейший муж, что-нибудь новое и представить Твоему острейшему суждению, я сообщу Тебе несколько задач, которыми недавно обменивались славнейшие мужи Бернулли и я. Среди других задач мне была предложена следующая: найти среди многих кривых такую, в которой $\int r^m\dot{s}$ имело бы наименьшее значение, если s — дуга кривой и r — радиус кривизны, — задача, которую нельзя разрешить с помощью обычных методов, так как в r встречаются вторичные флюксии. Однако я уже давно нашел общий метод решения задач такого типа; следуя этому методу, я задал искомую кривую следующим уравнением: $a^m x+B^m y=$

$=(m+1)\int r^m\dot{s}$ [16], в котором x и y обозначают координаты этой кривой. Затем требовалось найти среди всех кривых такой же самой длины кривую, для которой $\int r^m\dot{s}$ было бы наименьшим; такую кривую я нашел, выразив ее уравнением $a^m x+b^m y+c^m s=(m+1)\int r^m\dot{s}$. Затем следует, что в первом вопросе в случае, когда $m=1$, получается циклоида.

Я с своей стороны предложил такую задачу: найти две алгебраические кривые, не поддающиеся спрямлению, но спрямление которых зависело бы от данной квадратуры, которые имеют спрямляемую сумму дуг, соответствующих общей абсциссе. Я получил следующее решение для этой задачи: пусть будет общая абсцисса $=x$ и пусть ордината первой кривой $=y$, последней же $=z$. Берется новая переменная u, при помощи которой x, y и z должны быть определены; затем обозначим $\int v\,du$ ту квадратуру, от которой должно зависеть спрямление обеих кривых; пусть p и q будут любые алгебраические величины, составленные из u и из постоянных; примем ради краткости

$$\sqrt{(1+pp)}+\sqrt{(1+qq)}=r \text{ и } \sqrt{(1+pp)}-\sqrt{(1+qq)}=s.$$

Тогда возьмем следующие величины: $A=\frac{dq}{dp}$; $B=\frac{dr}{dp}$; $C=\frac{ds}{dp}$, а также $D=\frac{dB}{dA}$; $E=\frac{dC}{dA}$ и $F=\frac{dE}{dD}$. При их помощи снова образуем $P=\frac{V\,du}{dF}$, $Q=\frac{dP}{dD}$ и $R=\frac{dQ}{dA}$. Наконец, из этих величин, которые все являются алгебраическими, если положить абсциссу $x=\frac{dR}{dp}$, должно получиться $y=\frac{p\,dR}{dp}-R$ и $z=\frac{q\,dR}{dp}-AR+Q$. Действительно, эти кривые будут алгебраическими, и спрямление их обеих зависит от $\int v\,du$; с другой стороны, сумма обеих дуг, соответствующих одной и той же абсциссе, выражается алгебраически [1]). Однако я опасаюсь, что чрезмерно утомил Тебя, написав такое длинное письмо; поэтому прошу Тебя извинить мое многословие и объяснить его моим величайшим к Тебе уважением. Прощай, славнейший муж, и продолжай быть ко мне благосклонным.

Петербург, 27 июля
1738.

$$dx = d\left(\frac{dR}{dp}\right), \quad dy = pd\left(\frac{dR}{dp}\right), \quad dz = qd\left(\frac{dR}{dp}\right),$$

$$\int dx\left(\sqrt{1+pp} - \sqrt{1+qq}\right) = \int s\,dx = S,$$

$$\int \sqrt{dx^2+dy^2} - \sqrt{dx^2+dz^2} = \int sd\frac{dR}{dp} = \frac{s\,dR}{dp} - \int C\,dR = \\ = \frac{s\,dR}{dp} - CR + \int R\,dC;$$

$$\int R\,dC = \int dQ\,\frac{dC}{dA} = \int E\,dQ = EQ - \int QdE = EQ - \int \frac{dP\,dE}{dD} = \\ = EQ - \int F\,dP = EQ - FP + \int P\,dF = EQ - FP + \int V\,du,$$

$$\int\left(\sqrt{dx^2+dy^2} - \sqrt{dx^2+dz^2}\right) = sx - CR + EQ - FP + \int V\,du,$$

$$\int \sqrt{(dx^2+dy^2)} + \sqrt{dx^2+dz^2} = rx - BR + DQ - P.$$

ОРИГИНАЛ ПИСЬМА 3

Illustrissimo Clarissimoque Viro
Jacobo Stirling
S[alutem] p[lurimam] d[icit]
Leonh [ardus] Euler

Quo maiore desiderio litteras a Te, Vir Celeberr[ime], expectavi, eo maiore gaudio Responsionem Tuam humanissimam ad litteras meas accepi, qua eo magis sum delecta-

[1]) После текста письма приведены подробные вычисления, поясняющие указанное Эйлером решение этой задачи.

tus, quod non solum meas litteras tibi non ingratas fuisse video, sed Te etiam ad continuandum istud commercium Ipsum invitare. Gratias igitur Tibi habeo maximas, quod tenues meas meditationes tam benevole accipere, Tuumque de iis Iudicium mecum communicare volueris. Epistolam autem meam a Te dignam censeri, quae Transactionibus Vestris inseratur, id summae Tuae tribuo humanitati, atque in hunc finem nonnullas amplificationes et dilucidationes adjicere visum est, quas pro arbitrio vel adjungere vel omittere poteris. Hac autem in re nihil omnino laudis Celeb. D. Maclaurin detrahi vellem, cum is forte ante me in idem Theorema seriebus summandis inserviens inciderit, et idcirco tanquam primus Inventor nominari mereatur. Ego enim circiter ante quadriennium istud Theorema inveni, quo tempore etiam ejus demonstrationem et usum coram Academia nostra fusius exposui, quae dissertatio mea pariter ac illa, quam de summatione serierum per potestates peripheriae circuli composui, in nostris Commentariis brevi lucem publicam aspiciet. In Commentariis autem nostris jam editis aliquot exstant diversae methodi meae series summandi, quarum quaedam multum similitudines habent, cum Tuis in Egregio Tuo opere editis, sed tum temporis nondum Tuam methodum differentialem videram, et hanc ob causam ejus mentionem facere non potui uti debuissem. Jam ante complures annos ad Illustris[simum] Praesidem Vestrum Sloane misi schediasma quodpiam, in quo generalem constructionem huius aequationis $y = yy\dot{x} + ax^m\dot{x}$ tradidi, quae ante multum erat agitata at paucissimis tantum casibus exponentis m constructa. Haecque dissertatio, si etiam-num praesto esset, simul tanquam specimen produci posset, coram Societate Vestra quando me tanquam membrum recipere esset dignatura, quem quidem honorem Tibi Uni, Vir Celeb [errime], deberem. Sed vereor ut Inclutae Societati vestrae expediat, me socium eligere, qui ad Academiam nostram Imperialem tam arcte sum alligatus, ut meditationes meas qualescunque hic primum producere tenear.

Ut autem ad Theorema, quo summa cujusque seriei ex dato termino generali inveniri potest, revertar, perspicuum est formulam datam eo majorem afferre utilitatem, quo plures ejus termini habeantur; summe autem difficile est, eam quousque lubuerit continuare. Ego quidem ad plures quam duodecim terminos non pertigi, quo[ru]m ultumum non ita pridem demum inveni. Haec autem expressio se habet ut sequitur. Si seriei terminus primus fuerit A, secundus B, etc, isque cujus exponens est x sit $= X$; erit summa horum terminorum scilicet *

$$A+B+C+\ldots+X=\int Xdx+\frac{X}{1\cdot 2}+$$

$$+\frac{dX}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\,dx}-\frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,dx^3}+\frac{d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6dx^5}-$$

$$-\frac{3d^7X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9\cdot 10dx^7}+\frac{5d^9X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 11\cdot 6dx^9}-\frac{691d^{11}X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 13\cdot 210dx^{11}}+$$

$$+\frac{35d^{13}X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 15\cdot 2dx^{13}}-\frac{3617d^{15}X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 17\cdot 30\,dx^{15}}+\frac{43867d^{17}X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 19\cdot 42dx^{17}}-$$

$$-\frac{1222277d^{19}X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 21\cdot 110dx^{19}}+\text{etc.}$$

quae expressio parumper mutata etiam ad summam seriei a termino X in infinitum usque inveniendam accommodari potest. Hujus autem expressionis praeter insignem facilitatem in approximando, eximius est usus ad summas serierum algebraica[ru]m inveniendas, qua[ru]m quidem summae absolute exhiberi possunt. Ut si quaeratur summa hujus progressionis: $1+2^{12}+3^{12}+4^{12}\ldots+x^{12}$; erit $X=x^{12}$;
$\int X\,dx=\frac{x^{13}}{13}$; $\frac{dX}{dx}=12x^{11}$; $\frac{d^3X}{dx^3}=10\cdot 11\cdot 12x^9$ etc.
donec fiat $\frac{d^{13}X}{dx^{13}}$, una cumsequentibus terminis $=0$. Ex his ergo emerget summa quaesita $=\frac{x^{13}}{13}+\frac{x^{12}}{2}+x^{11}-\frac{11x^9}{6}+\frac{22x^7}{7}-$ $-\frac{33x^5}{10}+\frac{5x^5}{3}-\frac{691x}{2730}$, quam summam nescio, an ea per ullam aliam methodum tam expedite inveniri queat. Potest autem hac ratione aeque commode definiri summa progressionis $1+2^{21}+3^{21}+4^{21}+\ldots+X^{21}$, quod per alias methodus labor insuperabilis videtur.

Sin autem seriei propositae termini alternatim signis $+$ et $-$ fuerint affecti, tum hoc theorema minus commode adhiberi posset, quia binos terminos in unum colligi opporteret. Sed pro hoc serierum genere aliud habeo theorema priori quidem fere simile, quod ita se habet: si quaeratur summa huius seriei $A-B+C-D+\ldots\pm X$, ubi X est terminus indicis x, habet signum vel $+$ vel $-$, prout x numerus erit vel impar vel par. Dico autem huius progressionis summam esse $=$ Const. $\pm\left(\frac{X}{1\cdot 2}+\right.$

$$+\frac{dX}{1\cdot 2\cdot 2dx}-\frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2dx^3}+\frac{3d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 6\cdot 2dx^5}-\frac{17d^7X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 8\cdot 2dx^7}+$$

$$\left.+\frac{155d^9X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 10\cdot 2dx^9}-\frac{2073d^{11}X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 12\cdot 2dx^{11}}+\frac{38227d^{13}X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 14\cdot 2dx^{13}}-\text{etc.}\right).$$

Constantem autem ita determinari oportet, ut uni casui satis fiat. At si series summanda connexa sit cum Geometrica hoc modo: $An+Bn^2+Cn^3+\ldots+Xn^x$, tum minus congrue utrumque praecedentium theorematum adhiberetur; summa enim ita commodius exprimetur, dum ea

$$\text{est}=\text{Const.}+n^x\cdot\left(\frac{n}{n-1}X-\frac{\alpha\, dX}{1\,(n-1)^2\,dx}+\frac{\beta d^2X}{1\cdot 2\,(n-1)^3\,dx^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\,(n-1)^4\,dx^3}+\frac{\delta d^4X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,(n-1)^5\,dx^4}-\text{etc.}\right),$$ valores autem coefficientium sunt sequentes:

$$\alpha=n$$
$$\beta=n^2+n$$
$$\gamma=n^3+4n^2+n$$
$$\delta=n^4+11n^3+11n^2+n$$
$$\varepsilon=n^5+26n^4+66n^3+26n^2+n \text{ etc.}$$

Ea igitur tria hujus generis theoremata, quae singula certis casibus eximiam habebunt utilitatem ad summas serierum inveniendas. Quod deinde attinet ad methodum meam summandi ejusmodi series $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+$etc. existente n numero pari, eam duplici modo obtinui, quo[ru]m priorem uti recte conjectas, Vir Celeb[errime], deduxi ex serie $1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+$etc. alter vero directe procedit, eoque immediate ad summam illius seriei perveni. Priore modo utique summam etiam hujus modi serierum $1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+$etc. existente n numero impare, detexi, invenique esse prorsus uti Tu reperisti:

$$\frac{p}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{etc.}$$

$$\frac{p^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{etc.}$$

$$\frac{p^3}{32}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\text{etc.}$$

$$\frac{p^4}{96}=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{etc.}$$

$$\frac{5p^5}{1536}=1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\text{etc.}$$

$$\frac{p^6}{960}=1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\text{etc.}$$

$$\frac{61p^7}{184\,320}=1-\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}-\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9^7}-\text{etc.}$$

$$\frac{17p^8}{161\,280}=1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\text{etc.}$$

etc.

quae series omnes continentur in hac generali

$$1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\left(+\frac{1}{5}\right)^n+\left(-\frac{1}{7}\right)^n+\left(+\frac{1}{9}\right)^n+\text{etc.}$$

existente n numero integro. Si enim n est numerus par, tum omnes termini habebunt signum $+$; sin autem n sit impar, tum signa sese alternatim sequentur.

Omnes autem has summas derivavi ex consideratione hujus aequationis infinitae

$$0=1-\frac{S}{1a}+\frac{S^3}{1\cdot 2\cdot 3a}-\frac{S^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a}+\text{etc.}$$

qua relatio inter arcum S secumque sinum a exprimitur in circulo, cujus radius $=1$. Quia autem eidem sinui a innumerabiles arcus S respondent, manifestum est, si S consideretur tanquam radix illius aequationis, eam habituram esse infinitos valores eosque omnes cognitos. Sint igitur A, B, C, D, E etc. omnes illi arcus eundem sinum a habentes, erit ex natura aequationum

$$1-\frac{S}{1a}+\frac{S^3}{1\cdot2\cdot3a}-\frac{S^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5a}+\text{etc.}=$$
$$=\left(1-\frac{S}{A}\right)\left(1-\frac{S}{B}\right)\left(1-\frac{S}{C}\right)\left(1-\frac{S}{D}\right)\text{etc.}$$

Posita nunc ista fractionum $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$ etc., perspicuum est summam ea[ru]m omnium aequari coefficienti ipsius — $-S$, qui est $\frac{1}{a}$; simili modo summa facto[ru]m ex binis ha[ru]m fractionum aequabitur coefficienti ipsius S^2, qui est $=0$; atque summa factorum ex ternis aequales erit coefficienti ipsius $-S^3$, qui est $=-\frac{1}{6a}$, et ita porro ejus modi habebuntur aequationes. At ex summa factorum ex binis ipsaque singulorum summa derivatur summa quadrato[ru]m earundem fractionum; atque hinc et ex summa facto[ru]m ex ternis, summa cubo[ru]m et ita porro. His vero evolutis egregiae oriuntur summationes serierum generalium ope arcuum circularium eo[ru]mque potestatum ex quibus facto $a=1$, sequentur omnes illae, quas Tecum communicavi. Notavi autem hic convenit eximia affinitate inter expressiones summa[ru]m harum serierum atque terminos superioris seriei $\int X\,dx+\frac{X}{1\cdot2}+\frac{dX}{1\cdot2\cdot3\cdot2dx}$ etc., quam ad quascunque series summandas dedi. Est enim ut sequitur:

$$\frac{2^1\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot2}p^2=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.}$$

$$\frac{2^3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}p^4=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\text{etc.}$$

$$\frac{2^5\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot6}p^6=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{etc.}$$

$$\frac{2^7\cdot3}{1\cdot2\cdot3\ldots9\cdot10}p^8=1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\text{etc.}$$

$$\frac{2^9\cdot5}{1\cdot2\cdot3\ldots11\cdot6}p^{10}=1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\text{etc.}$$

$$\frac{2^{11}\cdot691}{1\cdot2\cdot3\ldots13\cdot210}p^{12}=1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\text{etc.}$$

$$\frac{2^{13}\cdot 35}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 15\cdot 2}p^{14}=1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\text{etc.}$$

$$\frac{2^{15}\cdot 3617}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 17\cdot 30}p^{16}=1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\text{etc.}$$

$$\frac{2^{17}\cdot 43\,867}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 19\cdot 42}p^{18}=1+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{3^{18}}+\frac{1}{4^{18}}+\text{etc.}$$

$$\frac{2^{19}\cdot 1\,222\,277}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 21\cdot 110}p^{20}=1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\text{etc.}$$

Hac ergo convenientia animadversa, ulterius progredi licuit quam ipsam methodum traditam secutum, quippe qua labor fit nimis operosus. Quamobrem non dubito, quin nexu hoc admirando penitius cognito, praeclara adjumenta ad analyseos promotionem sint proditura. Tu forte, Vir Celeb[errime], non difficulter nexum hunc ex ipsa rei natura derivabis.

Dum haec scribo, accipio a Cel[eberrimo] Nicolao Bernoullio Prof[essore] Bas[ilensi] et Membro Societatis vestrae peculiarem demonstrationem summae hujus seriei $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}$, quam deducit ex summa hujus seriei $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{etc.}$ dum illa series aequatur quadrato hujus demtis duplis factis ex binis terminis: haec autem dupla facta seorsim contemplans, eo[ru]m valorem tandem ingeniosissime ad quadraturam circuli deducit. Sed hac via certe Viro Celeb[errimo] non licuisset ad summas sequentium potestatum pertingere. Eodem incommodo quoque laborat alia quaedam mea methodus, qua directe per analysin ad summam hujus seriei pertigi $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.}$ ex qua pariter nullam utilitatem ad sequentes summandas sum consecutus; haec autem methodus ita se habet. Fluentem hujus $\frac{\dot{x}}{\sqrt{(1-xx)}}$, qua arcus circuli indicatur, cujus sinus est x existente radio $=1$; multiplico per fluxionem $\frac{\dot{x}}{\sqrt{(1-xx)}}$, ejusque fluens erit $=\frac{SS}{2}$ posito S pro illo arcu, cujus sinus est x. Quare si post summationem ponatur $x=1$, fiet $S=\frac{p}{2}$, denotante p ad 1 rationem peripheria ad diametrum, hoc ergo casu habebitur $\frac{pp}{8}$. Fluens autem ipsius $\frac{\dot{x}}{\sqrt{(1-xx)}}$ est $=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7$ etc. Ducantur nunc singuli termini in $\frac{\dot{x}}{\sqrt{(1-xx)}}$ et sumantur ita ut evanescant posito $x=0$, deinde fiat $X=1$. Ita erit $\int\frac{x\dot{x}}{\sqrt{(1-xx)}}=1-\sqrt{(1-xx)}=1$ posito $x=1$, simili modo reperietur $\int\frac{1\cdot x^3\dot{x}}{2\cdot 3\sqrt{(1-xx)}}=\frac{+1}{3^2}$; et $\int\frac{1\cdot 3x^5\dot{x}}{2\cdot 4\cdot 5\sqrt{(1-xx)}}=\frac{1}{5^2}$ et ita porro, adeo ut reperiatur $\frac{pp}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+$etc.

Sed huic argumento jam nimis sum immoratus; quo circa Te rogo, Vir Celeb[errime], ut mecum, quae eodem de re es meditatus communicare velis.

Incidi aliquando in hanc expressionem notatu satis dignam $\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot \text{etc.}}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20\cdot 24\cdot 28\cdot \text{etc.}}$, cujus numeratores sunt omnes numeri primi, denominatores vero sunt numeri pariter pares unitate differentes a numeratoribus; hujus autem valorem esse arcam circuli, cujus diameter est $=\frac{\pi}{4}$[1], demonstrare possum; ita ut haec expressio aequalis sit Wallisianae $\frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot \text{etc.}}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot \text{etc.}}$.

Ut autem novi quiddam Tibi, Vir Celeb[errime], perscribam, Tuoque acutissimo Judicio subjiciam, communicabo quaedam problemata, quae inter Viros Celeb[errimos] Bernoullios et me ab aliquo tempore sunt versata. Proponebatur mihi autem inter alia problemata hoc, ut inter omnes curvas investigarem eam, in qua $\int r^m\dot{s}$ habeat minimum valorem, denotante s arcum curvae et r radium curvitudinis[2]) quod problema ope consueta[ru]m methodo[ru]m

[1]) В оригинале: 1.
[2]) В оригинале: curvedinis

resolvi non potest, quia in r fluxiones secundae ingrediuntur. Inveni autem jam ante methodum universalem omnia hujus modi problemata resolvendi, qua sequentem pro curva desiderata dedi aequationem $a^m x + b^m y = (m+1)\int r^m \dot{s}$ in qua x et y coordinatas hujus curvae denotant. Deinde quaerebatur inter omnes tantum curvas ejusdem longitudinis ea, in qua esset $\int r^m \dot{s}$ minimum, hancque curvam inveni, hac exprimi aequatione $a^m x + b^m y + c^m s = (m+1)\int r^m \dot{s}$. Sequntur autem priori quaestioni casu quo $m=1$ satisfacere cycloidem.

Ego vero contra istud proposui problema, ut inveniantur duae curvae algebraicae non rectificabiles, sed quarum rectificatio a data quadratura pendeat, quae vero arcuum communi abscissae respondentium summam habeant rectificabilem. Pro quo problemate sequentem adeptus sum solutionem. Posita abscissa communi $=x$; sit prioris curvae applicata $=y$; posterioris vero $=z$. Sumatur nova variabilis u, ex qua x, y et z definiri debent, atque exprimat $\int v\,du$ illam quadraturam, a qua rectificatio utriusque curvae pendere debet; sintque p et q quantitates quaecunque algebraicae ex u et constantibus compositae; et ponatur brevitatis gratia $\sqrt{(1+pp)} + \sqrt{(1+qq)} = r$ et $\sqrt{(1+pp)} - \sqrt{(1+qq)} = s$. Tum sumantur sequentes valores: $A = \frac{dq}{dp}$; $B = \frac{dr}{dp}$; $C = \frac{ds}{dp}$; item $D = \frac{dB}{dA}$; $E = \frac{dC}{dA}$; atque $F = \frac{dE}{dD}$. Ex hic denuo formentur $P = \frac{V du}{dF}$, $Q = \frac{dP}{dD}$ et $R = \frac{dQ}{dA}$.

Ex his denique valoribus, qui omnes erunt algebraici, sumta abscissa $x = \frac{dR}{dp}$; fieri debet $y = \frac{p\,dR}{dp} - R$ atque $z = \frac{q\,dR}{dp} - AR + Q$. Hae enim curvae erunt algebraicae, et utriusque rectificatio pendebit a $\int v du$; ambo[ru]m arcuum autem eidem abscissae respondentium summa algebraica exprimetur. At vereor ne tam longam epistolam scribendo Te nimium fatigem; quamobrem rogo ut prolixitati meae veniam des eamque tribuas summa mea Tui existimationi. Vale, Vir Celeberrime, mihique favere perge.

Dabam Petropoli d. 27 Jul. 1738.

$$dx = d\left(\frac{dR}{dp}\right),$$

$$dy = pd\left(\frac{dR}{dp}\right),$$

$$dz = qd\left(\frac{dR}{dp}\right),$$

$$\int dx\left(\sqrt{1+pp} - \sqrt{1+qq}\right) = \int s\,dx = S,$$

$$\int \sqrt{dx^2+dy^2} - \sqrt{dx^2+dz^2} = \int sd\,\frac{dR}{dp} = \frac{s\,dR}{dp} - \int C\,dR =$$

$$= \frac{s\,dR}{dp} - CR + \int R\,dC; \quad \int R\,dC = \int dQ\,\frac{dC}{dA} = \int E\,dQ =$$

$$= EQ - \int Q\,dE = EQ - \int \frac{dP\,dE}{dD} = EQ - \int F\,dP =$$

$$= EQ - FP + \int P\,dF = EQ - FP + \int v\,du,$$

$$\int \left(\sqrt{dx^2+dy^2} - \sqrt{dx^2+dz^2}\right) =$$

$$= sx - CR + EQ - FP + \int v\,du,$$

$$\int \sqrt{(dx^2+dy^2)} + \sqrt{(dx^2+dz^2)} = rx - BR + DQ - P.$$

ПРИМЕЧАНИЯ

К письму 1

1. Печатается по копии (Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 22, лл. 75—77 об.).

Пометы: «Представлено 1736 июня 4». «Cum originali congruit. L. Euler». (Соответствует оригиналу Л. Эйлер.—Собственноручная помета Л. Эйлера.)

Представлено Л. Эйлером для снятия копии 4 июня 1736 г. (Протоколы заседаний Конференции имп. Академии наук, т. I, СПб, 1897, стр. 276. Далее эта книга цитируется под названием «Протоколы»; копия была проверена Эйлером 7 июня 1736 г. (там же, стр. 277).

2. Из переписки Ф. Вегерслёфа с Л. Эйлером видно, что Эйлер в неизвестном до сих пор письме Вегерслёфу от 16 ноября 1734 г. просил его сообщить членам Лондонского королевского общества о желании Эйлера вступить в научные связи с членами Общества. Вегерслёф обещал это сделать, как только ему позволит его болезнь (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 6, лл. 260—262).

3. Имеется в виду журнал «Philosophical Transactions», издававшийся в Лондоне Королевским научным обществом, начиная с марта 1664 г.

4. Речь идет о главном произведении Стирлинга: «Methodus differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum» (Дифференциальный метод, или трактат о суммировании бесконечных рядов), Londini, 1730, 153 стр. Эта книга была переиздана в Лондоне в 1736, 1753 и 1764 гг.

5. Имеется в виду анонимная рецензия на «Methodus differentialis» Дж. Стирлинга в лейпцигском журнале «Nova Acta Eruditorum», ноябрь 1734 г., стр. 515—526.

6. Речь идет о следующей теореме (см. цит. соч. Стирлинга, стр. 72—75): Omnis series $A+B+C+D+E+\ldots$, in qua ultima relatio terminorum est $rT+sT'+tT''=0$ assumendo $n=r+s+t$ et ponendo:

$$\begin{aligned} &A_2=rA+sB+tC \quad &A_3=rA_2+sB_2+tC_2 \quad &A_4=rA_3+sB_3+tC_3\\ &B_2=rB+sC+tD \quad &B_3=rB_2+sC_2+tD_2 \quad &B_4=rB_3+sC_3+tD_3\\ &C_2=rC+sD+tE \quad &C_3=rC_2+sD_2+tE_2 \quad &C_4=rC_3+sD_3+tE_3 \end{aligned}$$

bipartitur in sequentes:

$$s+t \text{ in } \frac{A_1}{n}+\frac{A_2}{n^2}+\frac{A_3}{n^3}+\ldots$$

$$+t \text{ in } \frac{B_1}{n}+\frac{B_2}{n^2}+\frac{B_3}{n^3}+\ldots,$$

т. е.: «Всякий ряд $A+B+C+D+E\ldots$, в котором последнее (предельное) соотношение между членами будет $rT+sT'+tT''=0$, принимая $n=r+s+t$ и полагая $A_2=rA+sB+tC$ и т. д., разлагается на две части следующим образом:

$$(s+t)\left(\frac{A_1}{n}+\frac{A_2}{n^2}+\frac{A_3}{n^3}+\ldots\right)+t\left(\frac{B_1}{n}+\frac{B_2}{n^2}+\frac{B_3}{n^3}+\ldots\right)».$$

Так как общий член сходящегося ряда (обозначим его T_n) стремится к нулю, то «предельное соотношение» $rT+sT'+T''=0$ следует, по-видимому, понимать так: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(r+s\frac{T_{n+1}}{T_n}+t\frac{T_{n+2}}{T_n}\right)=0$.

Затем у Стирлинга приводятся примеры. Эта теорема, вообще говоря, неверна. Так, например, рассматривая сходящийся при $|x| < 2$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k \left\{ \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{2k}} \right\},$$

у которого $r = x^2$, $s = x$, $t = 2$, можно установить, что теорема Стирлинга будет верна лишь для x, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{4}{3} < x < 2 \quad \text{или} \quad -\frac{4}{13}(\sqrt{14}+1) < x < \frac{4}{13}(\sqrt{14}-1),$$

хотя условие теоремы выполнено. Если, однако, все члены одного из последующих рядов A_k, B_k, C_k, ... обращаются в нуль, указанная теорема справедлива, и исходный ряд суммируется в конечном виде. Стирлинг рассматривает примеры именно такого типа.

7. Об этом методе Эйлер впервые доложил в Конференции 5 марта 1731 г. (Протоколы, т. I, стр. 38); 7 марта 1735 г. статья Эйлера с изложением этого метода была представлена в Конференции для включения в «Комментарии» за 1731 г. (там же, стр. 167), после чего была напечатана под заглавием «De summatione innumerabilium progressionum» (О суммировании бесконечных прогрессий) в «Commentarii Acad. Scient. Petropolitanae», т. V (1730/1), 1738, стр. 91—105.

8. Эйлер приводит здесь формулу, известную в настоящее время под названием формулы Эйлера—Маклорена:

$$\sum_{m=1}^{N} f(m) = \int_1^N f(t)\,dt + \frac{1}{2} f(N) + \sum_{s=1}^{T} f^{(2s-1)}(N) \frac{|B_s|}{(2s)!}(-1)^{s+1} + C + R_T.$$

Здесь $f(t)$ — некоторая функция, непрерывная со своими производными при $t \geqslant 1$; B_s — числа Бернулли. Остаточный член R_T имеет вид:

$$R_T = 2(-1)^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k\pi)^{2T}} \int_1^N f^{(2T)}(t) \cos 2k\pi t\,dt.$$

Постоянная C определяется, если положить $N = 1$. Эйлер в настоящем письме дает эту формулу при $T = 9$ без остаточного члена. Формула с остаточным членом была получена в первой половине XIX века.

9. Это, по-видимому, следует понимать так:

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}\right)=\infty=\ln\frac{1}{0},$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N+1}+\ldots+\frac{1}{2N}\right)=\ln\frac{2}{1},$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2N+1}+\ldots+\frac{1}{3N}\right)=\ln\frac{3}{2}$$

и т. д. Эти равенства легко проверяются.

10. Написанные ряды получаются следующим образом: согласно соотношениям, отмеченным в прим. 9, будет:

$$\ln 2=\lim_{N\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{2N}-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{N}\right\}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2N}\right\}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots,$$

$$\ln 3=\lim_{N\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{3N}-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{N}\right\}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\ldots-\frac{2}{3N}\right\}=$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\ldots \text{ и т. д.}$$

Все полученные ряды сходятся и имеют указанные суммы.

11. Этот ряд суммируется с помощью формулы Эйлера—Маклорена.

К письму 2

1. Печатается по копии (Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 26, *лл.* 47—48 об.).

Представлено в Конференцию 16 августа 1738 г.

Прочитано Эйлером в Конференции 25 сентября 1738 г. (Протоколы, т. I, стр. 503).

К письму 3

1. Печатается по собственноручному черновику (Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 27, лл. 52—56 об.), идентичному с копией, писанной посторонней рукой с собственноручной подписью Эйлера и его поправками (Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 27, лл. 47—50 об. и 57—59 об.).

Пометы: Представлено в Академию наук 16 августа 1738 г. Прочитано Эйлером 25 сентября 1738 г. (Протоколы, т. 1, стр. 503).

3 июня 1740 г. копия письма была передана Эйлеру для проверки (там же, стр. 614).

2. Письмо Эйлера в журнале «Philosophical Transactions» опубликовано не было.

3. Здесь говорится о работах К. Маклорена, опубликованных в 1742 г. в «Трактате о флюксиях» (Treatise of fluxions, Edinburgh, 1742, стр. 272—273, § 327), но, очевидно, получивших распространение до опубликования. В этом трактате Маклорен дает формулу суммирования рядов (стр. 292—293, §§ 352—353), совпадающую с формулой суммирования рядов, предложенной Эйлером в его работе «Methodus generalis summandi progressiones». (Общий метод суммирования последовательностей), Commentarii Academiae Scient. Petropolitanae, т. VI (1732—33), 1738, стр. 68—97.

4. Эйлер имеет в виду работы «De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt» (О трансцендентных последовательностях, или о таких, общие члены которых не могут быть выражены алгебраически), Commentarii Acad. Scient. Petropolitanae, т. V (1730—31), 1738, стр. 36—57б; «De summatione innumerabilium progressionum» (О суммировании бесчисленных последовательностей), там же, стр. 91—105; «Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali» (Нахождение суммы любого ряда по данному общему члену), которая была им представлена в Академическом собрании 13 октября 1735 г. (Протоколы, т. 1, стр. 224) и опубликована в «Комментариях»: «Commentarii Acad. Scient. Petropolitanae», т. VIII (1736), 1741, стр. 9—22, и другие работы.

5. Ганс Слоан (Sloane, Hans, 1660—1753) — английский врач, ботаник. с 1727 по 1741 г. — президент Лондонского королевского общества.

6. По сравнению с предыдущим письмом в формуле добавлен еще один член.

7. Приведенная формула получается из общей формулы Эйлера—Маклорена (см. прим. 8 к письму 1), если положить $f(t)=g(t)\cos\pi t$. Простые вычисления дают для этого случая

$$\sum_{m=1}^{N}(-1)^m g(m)=$$

$$=(-1)^N\left\{\frac{1}{2}g(N)+\sum_{s=1}^{T}(-1)^{s+1}|B_s|\frac{2^{2s}-1}{(2s)!}g^{(2s-1)}(N)\right\}+C+R_T.$$

Здесь $R_T=(-1)^T\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2}{[(2k-1)\pi]^{2T}}\int\limits_1^N g^{(2T)}(t)\cos(2k-1)\pi t\,dt$. Эйлер приводит эту формулу при $T=7$ без остаточного члена.

8. Эта формула получается из общей, если там положить $f(t)=g(t)e^{at}$. Вычисления в этом случае дают:

$$\sum_{m=1}^{N} e^{am}g(m)=e^{aN}\sum_{s=0}^{T}\frac{g^{(s)}(N)}{(s+1)!}\frac{d^s}{da^s}\left(\frac{e^a}{e^a-1}\right)+C+R_T,$$

где $R_T=(-1)^T\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a+2k\pi i)^T}\int\limits_1^N g^{(T)}(t)\,e^{(a+2k\pi i)t}\,dt$. Если написать эту формулу при $T=4$ без остаточного члена R_T и положить $e^a=n$, то для $\sum\limits_{m=1}^{N}n^m g(m)$ получим выражение, приведенное Эйлером.

9. Рассуждения Эйлера здесь не вполне строги, однако конечный результат получается верный. Разложение функции $1-\sin z$, о котором говорит Эйлер (при $a=1$), имеет вид

$$1-\sin z=e^{-z}\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{2z}{(4k+1)\pi}\right)^2 e^{\frac{4z}{(4k+1)\pi}},$$

или после группировки членов

$$1-\sin z=\left(1-\frac{2z}{\pi}\right)^2\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{2z}{(4k+1)\pi}\right)^2\left(1+\frac{2z}{(4k-1)\pi}\right)^2.$$

10. Упомянутые коэффициенты имеют вид $\frac{2}{(2\pi)^{2s}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2s}}$.

11. Флюента — термин, введенный Ньютоном и равносильный первообразной функции.

12. Флюксия — термин, введенный Ньютоном и означающий скорость изменения, т. е. производную флюенты.

13. То есть $s=\arcsin x=\int\limits_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$,

$$\frac{(\arcsin x)^2}{2}=\int_0^x \arcsin t\,d(\arcsin t)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_0^t\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

В интеграле по ξ подынтегральное выражение разлагается в ряд и интегрируется почленно, что законно при $0 \leqslant x < 1$. Таким образом,

$$\frac{s^2}{2} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \left(t + \sum_{k=1}^{\infty} t^{2k+1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2k+1)} \right).$$

Ряд, стоящий в скобках, равномерно сходится при $|t| \leqslant 1$ и отсюда, полагая $x=1$ $\left(\text{и, следовательно, } s=\frac{\pi}{2}\right)$, найдем:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2k+1)} \int_0^1 \frac{t^{2k+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

14. Действительно, при $x > 1$ справедливо следующее равенство:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\left(1+\frac{1}{7^x}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{11^x}\right)\cdots\left(1\pm\frac{1}{p_k^x}\right)\cdots} = $$

$$= 1 - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} - \ldots,$$

где p_k — последовательность всех простых чисел, начиная с 3, причем знак плюс или минус в знаменателе левой части берется в зависимости от того, будет ли простое число вида $4n-1$ или $4n+1$. Это соотношение доказывается разложением каждого из выражений в бесконечную прогрессию и перемножением полученных рядов. Равенство, указанное Эйлером, получается из вышеприведенного предельным переходом при $x \to 1$. Предельный переход требует дополнительного обоснования. См., например, E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, т. 1, § 109.

15. Речь идет о выражении $\frac{\pi}{4}$, указанном английским математиком Дж. Валлисом (Wallis, John, 1616—1703) в его книге «Arithmetica infinitorum» (Арифметика бесконечных величин, 1655).

16. Действительно, уравнение Эйлера для вариационной задачи $\int_{x_0}^{x_1} r^m\,ds = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(1+y'^2)^{\frac{3m+1}{2}}}{(y'')^m}\,dx = \min$ будет иметь вид $\frac{d}{dx}F'_{y'} - \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''} = 0$, где через $F(y', y'')$ обозначена подынтегральная функция. Отсюда

$$F'_{y'} - \frac{d}{dx}F'_{y''} = C_1,$$

при этом, если правый конец свободен, то $C_1=0$. Итак,

$$\frac{(3m+1)(m+1)y'(1+y'^2)^{\frac{3m-1}{2}}}{(y'')^m}-\frac{(m+1)m(1+y'^2)^{\frac{3m+1}{2}}}{(y'')^{m+2}}y'''=C_1.$$

или

$$(m+1)\frac{d}{dx}\left\{\frac{(1+y'^2)^{\frac{3m+1}{2}}}{(y'')^m}\right\}=C_1y'',$$

отсюда

$$C_1y+C_2x+C_3=(m+1)\int_{x_0}^{x}\frac{(1+y'^2)^{\frac{3m+1}{2}}}{(y'')^m}dx=(m+1)\int_{x_0}^{x}r^m\,ds.$$

В случае изопериметрической задачи $\int_{x_0}^{x_1}r^m\,ds=\min$ при $\int_{x_0}^{x}ds=A$ уравнение Эйлера приводится к виду

$$\lambda\frac{y'y''}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}+(m+1)\frac{d}{dx}\frac{(1+y'^2)^{\frac{3m+1}{2}}}{(y'')^m}=C_1y'',$$

откуда $C_1y+C_2x+C_3=(m+1)\int_{x_0}^{x}r^m\,ds+\lambda\int_{x_0}^{x}ds$. В первом случае, при $m=1$, для y и x получаем выражения $y+C_3=\int\frac{(C_1p+C_2)p}{(1+p^2)^2}dp$, $x+C_4=\int\frac{C_1p+C_2}{(1+p^2)^2}dp$, где за параметр p взято y'. Производя вычисления и вводя новый параметр t так, что $p=\operatorname{tg}\frac{t}{2}$, найдем: $x\cos\alpha+y\sin\alpha+A=C\cos t=x\sin\alpha+y\cos\alpha+B=C(t+\sin t)$. Это — параметрические уравнения циклоиды, различным образом ориентированной в зависимости от постоянных A, B, α; постоянная C определяет размер циклоиды.

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР О КВАДРАТУРЕ КРУГА

А. П. Юшкевич

Исследования Эйлера, связанные с установлением различных свойств и вычислением числа π, давно привлекали внимание историков математики. В своем обзоре истории задачи о квадратуре круга, написанном еще в 1892 г., Ф. Рудио отвел небольшой параграф Эйлеру [1]). Рудио отмечает заслуги Эйлера в разработке тригонометрии, особенно открытие зависимости между показательной и тригонометрической функциями и, в частности, соотношения $e^{\pi i} = -1$, которое было позднее использовано в первом доказательстве трансцендентности π (Ф. Линдеман, 1882). Рудио указывает некоторые выражения π и его степеней в виде бесконечных рядов, произведений и цепных дробей, содержащиеся в статьях Эйлера и первом томе его «Introductio in analysin infinitorum» (1748). Далее Рудио приводит эйлерово разложение в цепную дробь числа $\frac{e-1}{2}$, явившееся отправным пунктом в первом доказательстве иррациональности e и π, данном И. Г. Ламбертом. В заключение автор обзора напоминает, что Эйлер

---

[1]) Ф. Рудио, Обзор истории задачи о квадратуре круга от древности до наших дней. В книге: Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр, О квадратуре круга, пер. с нем. С. Н. Бернштейна, 2-е изд., М.—Л., 1934, стр. 66—74 (нем. издание вышло в 1892 г.). Далее этот сборник цитируется под названием «О квадратуре круга».

ввел в обиход символ π для отношения длины окружности к ее диаметру[1]).

О способах вычисления π Эйлер часто говорит в своей переписке и этому вопросу он посвятил, помимо ряда мест во «Введении в анализ бесконечных», семь статей, из которых первая была представлена Петербургской Академии наук 20 февраля 1738 г., а последняя, более чем 40 лет спустя, 17 июня 1779 г. Краткое изложение этих статей имеется в последнем параграфе обзора мемуаров Эйлера по теории рядов, принадлежащего Г. Фаберу (1935)[2]).

В настоящей статье рассмотрены преимущественно те заметки Эйлера о квадратуре круга, которые содержатся в неопубликованных ранее материалах, хранящихся в Архиве Академии наук СССР. И в первый и во второй периоды петербургской жизни великого математика ему не раз приходилось по поручению Академии разбирать работы, содержавшие попытки дать точное элементарно-геометрическое или арифметическое решение задачи о квадратуре круга. В отзывах, связанных с ними письмах и протоколах Конференции имеются или отражены общие суждения Эйлера о возможности задачи, даются новые геометрические и аналитические приближения π, а также оценки

---

[1]) Впервые знак π в принятом теперь смысле употребил в 1706 г. У. Джонс; еще ранее У. Оутред обозначал отношение длины окружности к диаметру $\frac{\pi}{\delta}$, не пользуясь буквой π отдельно (1647). В письме к Х. Гольдбаху от 13. X 1729 и некоторых других Эйлер обозначает это отношение $\frac{p}{d}$, позднее (1734, 1738) пользуется одной буквой p. В «Mechanica» 1736 г. Эйлер несколько раз применял знак π (вероятно, от περιφέρεια — окружность), затем он пользуется тем же знаком в статье, упоминаемой Рудио: «Variae observationes circa series infinitas» (представлена Петербургской Академии наук 25 апр. 1737 г., опубликована в «Commentarii Acad. Petrop.», т. IX за 1737 г., 1744), в переписке с Гольдбахом в 1739 г. и т. д. Подробнее см. Fl. Cajory, A history of mathematical notations, vol. II, Chicago, 1929, p. 8—13.

[2]) G. Faber, Übersicht über die Bände 14, 15, 16, 16* der ersten Serie. В книге: Leonhardi Euleri, Opera omnia, ser. prima, Opera mathematica, vol. 16, sectio altera ed. C. Boehm. Basileae, 1935, 16.

приближений, интересные для характеристики исключительного внимания Эйлера к точности и простоте вычислительных приемов. Материалы эти, далее, рисуют ход занятий Эйлера проблемой квадратуры круга (не случайно первая из упомянутых семи статей была написана почти одновременно с рецензированием двух попыток ее решения); кое в чем материалы дополняют математическое содержание печатных публикаций Эйлера[1]).

I.

Петербургская Академия наук впервые высказала свое мнение о задаче квадратуры круга в серии статей, напечатанных в 1729 г. в «Исторических, генеалогических и географических примечаниях в ведомостях». «Примечания» представляли собой первый русский научно-популярный журнал, издававшийся Академией наук еженедельно на 8 страницах. Название журнала связано было с тем, что в нем давались разъяснения к кратким сообщениям, которые печатались в газете «Санктпетербургские ведомости», также издававшейся два раза в неделю Академией наук[2]). В «Примечаниях» сотрудничали академики, со-

---

[1]) За разрешение использовать эти материалы выражаю благодарность Директору Архива АН СССР Г. А. Князеву. Я очень признателен также И. А. Перельмутеру, который подготовил немецкие тексты использованных далее двух отзывов Эйлера, и особенно Ю. Х. Копелевич, которая проверила эти тексты, скопировала публикуемое мною письмо Эйлера к Маринони и отзыв о квадратуре круга Возанвилля и, наконец, навела по моей просьбе ряд архивных справок, которых я не мог сделать в Москве.

[2]) «Санктпетербургские ведомости» явились преемником основанных Петром I «Ведомостей о военных и иных делах» (1703—1727). «Примечания» к новой газете Академия наук издавала с февраля 1728 г., а приведенное в тексте название они получили с 1729 г. Редактор газеты и «Примечаний» к ней был в первые годы акад. Г. Ф. Мюллер, историк и одно время непременный секретарь Академии. «В свое время, — писал выдающийся наш библиограф А.Н. Неустроев,—„Примечания", бесспорно, при тогдашней бедности русской литературы имели большое влияние на русскую публику они долго и охотно читались публикою и по прекращении издания: это подтверждается даже письмом М. В. Ломоносова, писанном им спустя 12 лет в 1754 году к И. И. Шувалову, в котором Ломоносов одобрительно отзывался о «Примечаниях» и просил их

биравшиеся по субботам для обсуждения ближайшего номера. Переводчиками работали В. Е. Ададуров, В. К. Тредьяковский и др. В журнале печатались статьи различного содержания, например, в 1729 г. были помещены статьи «О бывшем недавно совокуплении Венеры с Луною», «О прибывании большой воды в реке Неве», «О приливе и отливе моря». Заботясь о пользе читателей, редакция не забывала об их увеселении, сопровождая иные примечания шутливыми и, случалось, весьма игривыми стишками, например, по поводу сообщения о примирении некоего князя Карбоньано с изменившей ему супругой.

Первая статья по механико-математическим наукам появилась в «Примечаниях» за август 1728 г.; она была посвящена часам с маятником Гюйгенса. Интересующая нас статья была написана в связи с сообщением из Парижа, что некий отец Ромуальд ле Мие дал решение трех классических задач о квадратуре круга, трисекции угла и удвоении куба. Автором статьи был академик Г. В. Крафт (1701—1754), автор ряда небольших мемуаров по математике, физике, астрономии, метеорологии, нескольких учебников и многих популярных статей[1]). Так как статьи в «Примечаниях» помещались без подписи и сначала обсуждались в кругу академиков, то можно считать, что содержащиеся в статье соображения не вызывали возражений

возобновления».—См. А. Н. Неустроев, Историческое розыскание о русских повременных изданиях и сборниках за 1703—1802 гг. СПб,, 1874, стр. 14—15, а также П. Пекарский, История имп. Академии наук в Петербурге, т. I, СПб., 1870, стр. 311.

[1]) На авторство Крафта указал П. Пекарский, цит. соч., т. I, стр. 465. В статье «Эйлер и русская математика в XVIII в.» (Труды Института истории естествознания, т. III, М.—Л., 1949, стр. 98) я высказал предположение, что автором был Л. Эйлер. В действительности прав Пекарский. В своем отчете о деятельности в Петербургской Академии наук с начала работы в ней, датированном 17 января 1743 г., Крафт перечисляет названия статей своих в «Примечаниях» и под первым номером указывает «1. Von der Quadratura Circuli, Trisectione Anguli und Duplicatione Cubi. 7. Stücke» (Архив АН СССР, ф. 3, оп. 1, № 786, л. 54 об., нем.). Статья Крафта печаталась с 15 июля по 30 августа 1729 г. в № 53, 56—57, 65—67, 69. Цитируя эту статью, я указываю соответствующие страницы «Примечаний» в тексте.

у большинства математиков, работавших тогда в Петербургской Академии наук.

Крафт начинал с замечания, что нынешние времена особо обильны решениями проблем вечного двигателя, философского камня, астрологических предсказаний и упомянутых трех классических задач математики. Ходят разговоры, что один лондонский парикмахерский подмастерье изобрел тщетно искавшийся способ определения долготы в море, какой-то француз — перпетуум-мобиле, а к ним теперь присоединился о. Ромуальд с его тремя геометрическими доказательствами.

Несколько первых страниц статьи отведено вопросу о вечном двигателе, специально—претензиям Орфиреуса, заинтересовавшим еще Петра I[1]). Далее Крафт переходит к задаче квадратуры круга. Евклид показал возможность «квадровать» любую прямолинейную замкнутую фигуру. Первую кривую—параболу квадрировал Архимед. Открытие «интегрального счета» привело ко множеству новых квадратур «криволинейных плоскостей», но, к досаде и несчастью геометров, не «циркульной плоскости» (стр. 230).

Если бы поиски квадратуры круга оказались успешными, это могло бы иметь, помимо «того увеселения, которые некоторые при таких размышлениям имеют» (стр. 231), и научное значение. «В геометрии,—заявлял Крафт,— каждое изыскание многим другим помощь дает, и такие изыскания никогда так не чинятся, чтобы от оных другие пользы не происходили. И хотя не все такие изыскания в человеческом житии и обхождении полезны суть, то однакож может хотя одно из оных пользу приносить и получено в сем деле по случаю некоторых изысканных кривых линий уже несколько разов некоторое искусство, как мы о том с описанием Гугения [т. е. Гюйгенса.—*А. Ю.*] черты Cyclois (Циклоис) имянуемой и полезного ее употребления в часах с висящим маятником уже прежде того

[1]) В 1715 г. в Лейпциге вышло сочинение Орфиреуса о «счастливо изобретенном вечном двигателе» (O r f f y r e u s, Gründlicher Bericht von dem glücklich inventirten Perpetuo per se mobili), вызвавшее отклики Хр. Вольфа и др. Подробнее см. J. F. M o n t u c l a, Histoire des mathématiques, t. III, Paris, An. X (1802), pp. 816—819.

пример объявили» (стр. 231—232). Квадратура круга была бы полезна и в астрономии, так как из нее вытекала бы точная квадратура «элиптической плоскости». Объяснив причины, привлекавшие столь многих к решению задачи, автор перечисляет семь неудачников, тщетно тративших на нее силы, добавляя, что к ним «мы скоро и самое новое изыскание отца Ромуальда, по которому случаю мы о сем деле рассуждали, в нашем реестре яко осмый пример сообщить надеемся» (стр. 246).

Выражая, таким образом, полное сомнение в успехе о. Ромуальда, Крафт не утверждает все же категорически, что квадратура круга в классической постановке задачи, т. е. посредством циркуля и линейки, невозможна. Доказательство невозможности, говорит Крафт, имело бы не меньшее значение, чем положительное решение, «ибо в таких вещах почти все равно хотя предложение решить, или невозможность решения доказать» (стр. 259). До сих пор, однако, попытки доказать невозможность квадратуры круга были неудачны. Крафт называет при этом Чирнгаузена (1683) и Сорена (1720). В заключение Крафт высказывает убеждение, что занятия проблемой квадратуры круга, не приведя к успеху в положительном решении самой задачи, попутно породят другие важные открытия: «Ежели о вопросе нашем в протчей истории наук посмотрим, то признаемся, что знатнейшие изобретения, которые мы ныне имеем, не того ради изобретены, что их искали, но понеже нечто иное напрасно искали, а между тем некоторые попалися, которые будто незванные гости сами пришли и с собою великую ползу принесли. Тако и о сем вопросе надеятися можно, что скорее иное что незнаемое по случаю квадратуры циркуля найдется, нежели как она сама» (стр. 261)[1]. Как лучшее в малых числах

[1] Ср. слова Гюйгенса в предисловии к его знаменитому трактату «De circuli magnitudine inventa» (1654) по поводу найденных им новых результатов (различных неравенств, служащих для приближения π): «Я держусь того мнения, что эти доказательства полезны не только для изучения указанных результатов, но также именно вследствие своей новизны они могут оказаться способными побуждать к открытию скрытых еще фактов, так как мне думается, что и в этой области, в которой раньше работали все с величайшим напряжением своих сил, осталось еще сорвать не один до-

приближение к «пропорции поперечника к циркумференции» приводится значение Адриана Меция 113 : 355.

На частях статьи Крафта, посвященных задачам трисекции угла и удвоения куба, мы останавливаться не будем [1]).

II.

В 1729—1730 гг. вопрос о квадратуре круга несколько раз поднимался в переписке Л. Эйлера с Х. Гольдбахом. Оба они полагали, что π не является рациональным числом; вместе с тем Эйлер не исключает возможность точного выражения π с помощью простых иррациональностей и логарифмов рациональных чисел; вероятно, основанием для этого было установление им связи между $\sqrt{\pi}$ и логарифмами мнимых чисел.

В первом письме Эйлера к Гольдбаху от 24. X 1729 г. выявляется ряд новых важных свойств числа π. Так, например, в связи с проблемой интерполирования целочисленной последовательности $1!, 2!, 3!, 4!, \ldots, f(n) = n!$, т. е. разыскания в некоторых предположениях значений $f(n)$ при дробном n, Эйлер находит, что

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{-1}\ln(-1)},$$

или же, добавляет он, стороне квадрата, равновеликого кругу с диаметром 1, т. е. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. «Из последнего ясно,— пишет Эйлер,—что природа вопроса не позволяет числен-

---

стойный труда плод». Сборник «О квадратуре круга», стр. 105. Сам Гюйгенс, как позднее и Дж. Грегори (1667), полагал, что элементарными средствами квадратура круга неосуществима.

[1]) Крафт выражает сомнение в успехах о. Ромуальда и в этих двух случаях. Замечу, что статья богата историческими справками, но конкретного разбора решений о. Ромуальда, в Петербург, очевидно, тогда еще не попавших, не содержит.

Позднее Крафт опубликовал довольно изящные механические построения квадратуры круга в статье «Peripheria circuli mechanice dupliciter rectificata» («Двоякое механическое спрямление окружности круга», Comm. Acad. Petrop., т. XIII за 1741—1743 гг. (1751). См. также прим. 2 на стр. 184.

но выразить общий член»[1]), другими словами что $\sqrt{\pi}$ не является рациональным числом. В ответном письме от 1. XII 1729 г. Гольдбах заметил, что, насколько ему известно, невозможность квадратуры круга с помощью рациональных чисел еще никем не была установлена[2]). Через полгода, 15.VI 1730 г., Эйлер сообщает, что извлек некую квадратуру круга из одного предложения Григория из С. Винцента, «ложности которого до сих пор никто не обнаружил»[3]). Именно

$$\pi = \frac{3(1+A)\sqrt{3}}{2(2A-1)},$$

где

$$A = \left(\frac{11}{5}\right)^{\frac{\ln \frac{11}{5}}{\ln \frac{205}{53}}}.$$

«Это выражение очень близко к $\frac{22}{7}$, и если бы оно оказалось верным, то конечно, это было бы большое открытие»[4]).

В ответном письме от 26. VI 1730 г. Гольдбах высказывает сильное сомнение в точности этой квадратуры круга, хотя она и близка к истинному значению. Как весьма

---

[1]) Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle... publiée par P. Fuss, St. Pétersbourg, t. I, 1843, p. 5.

Даты цитируемых мною писем приведены по новому стилю, математические обозначения заменены на нынешние.

Значение $f\left(\frac{1}{2}\right)$ есть не что иное, как $\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)$; в этом письме Эйлера впервые рассмотрен ряд свойств введенной им функции, которой А. М. Лежандр много позднее присвоил название «гамма».

[2]) Там же, стр. 8—9. Неудачную попытку доказать несоизмеримость площади круга с диаметром сделал И. Х. Штурм в 1689 г. См. сборник «О квадратуре круга», стр. 183, 231.

[3]) Correspondance mathématique et physique, стр. 24. В предложении о квадратуре круга Григория из С. Винцента (1647), на котором основывался Эйлер, содержалась ошибка, отмеченная еще Гюйгенсом в одной работе, изданной в 1651 г. Подробнее см. Jos. E. Hofmann, Das Opus geometricum des Gregorius a S. Vincentio und seine Einwirkung auf Leibniz, Berlin, 1941, S. 69—72.

[4]) «Correspondance mathématique et physique...», стр. 24.

простое и хорошее приближение в иррациональных числах он предлагает $3+\frac{\sqrt{2}}{10}$ с погрешностью менее $\frac{2}{10\,000}$ [1]). Тем временем Эйлер уже обнаружил ошибку в предложении Григория из С. Винцента, лежащем в основе указанной выше квадратуры с помощью логарифмов,—об этом он говорит в письме от 6.VII 1730 г.[2]).

В письме от 31.VII 1730 г. Гольдбах поздравляет Эйлера с обнаружением ошибки у Григория из С. Винцента. Продолжая обсуждение вопроса о вычислении π, Гольдбах замечает, что с точки зрения легкости закона, по которому происходит приближение, нет ничего лучше для квадратуры круга, чем известный ряд Лейбница[3]). Однако с точки зрения быстроты приближения наилучшим является метод, использованный при вычислении π Ланьи в 1719 г. в записках Парижской Академии наук; Гольдбах просит Эйлера сообщить, что ему известно о методе Ланьи[4]). Эйлер 21.VIII 1730 г. ответил, что записок Парижской Академии наук за 1719 и следующие годы в Петербургской библиотеке не имеется; он пишет также, что весьма быстро сходящийся ряд для вычисления π предложил их коллега академик Ф. X. Майер[5]). К этому же вопросу Эйлер возвращается в письме от 28. X 1730 г., говоря, что рукопись Майера увидеть ему не удалось. Для вычисления π, продолжает Эйлер, можно применить еще ряд

$$S=x+\frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3\cdot b^2}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot b^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot b^6}+\ldots,$$

где b—диаметр окружности, x—какая-либо хорда и S—

---

1) «Correspondance mathématique et physique...» стр. 27.

2) Там же, стр. 30.

3) То есть ряд

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Ряд этот был Лейбницу известен не позднее начала 1674 г. или конца 1673 г. (опубл. в 1632 г.). Дж. Грегори еще ранее (1671 г.) нашел общее разложение arctg x в степенной ряд.

4) Correspondance mathématique et physique...», т. I, стр. 33.

5) Там же, стр. 36. Впоследствии Эйлер познакомился с работой Ланьи, о чем см. далее. Майер скончался в конце 1729 г.

соответствующая дуга[1]). Этот ряд сходится тем быстрее, чем меньше x, но с его применением связано неудобство: «чтобы отсюда можно было вывести отношение окружности к радиусу, необходимо, чтобы S было соизмеримо со всей окружностью, а x с диаметром. До сих пор для этой цели не было найдено рациональной хорды, меньшей, чем хорда, соответствующая $60°$, величина которой $= \frac{1}{2}\,b$» [2]). Поэтому целесообразнее брать иррациональные хорды, соответствующие малым частям окружности. Упомянем еще, что Эйлер предлагает тут же для определения π произведение

$$4(1+n)\frac{4\cdot16\cdot36\ldots(2n)^2}{9\cdot25\cdot49\ldots(2n+1)^2}\sqrt{\frac{2n+2}{2n+3}},$$

о котором говорится, что оно всегда больше истинного значения π и тем точнее, чем более n. Эйлер, впрочем, не указал здесь, что это произведение имелось в «Arithmetica infinitorum» Дж. Валлиса (1655), изучение которой сообщило первый толчок общим исследованиям Эйлера по интерполированию рядов[3]).

III.

Несколько лет спустя Эйлеру пришлось несколько раз выступить в качестве рецензента поступавших в Петербургскую Академию наук работ о квадратуре круга. В протоколе академической Конференции от 17. II (ст. ст.)

---

[1]) Разложение арксинуса в степенной ряд произвел Ньютон около 1666 г.

[2]) Там же, стр. 46. Впоследствии Эйлер предпочел вместо ряда для арксинуса употреблять ряд для арктангенса.

[3]) Не приходится сомневаться в том, что Эйлер был тогда уже знаком с трудом Валлиса. В знаменитой статье «О трансцендентных последовательностях, общие члены которых не могут быть выражены алгебраически» (De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt), опубликованной в «Comm. Ac. Petr.», т. V за 1730—1731 гг. (1738), бесконечное произведение Валлиса и его имя приводятся уже во втором параграфе. См. L e o n h a r d i E u l e r i, Opera omnia, series I, t. XIV, ed. C. Boehm et G. Faber, Lipsiae et Berolini, 1925, p. 3. Замечу, что в Архиве АН СССР среди бумаг Эйлера сохранился его личный экземпляр «Arithmetica infinitorum» Валлиса.

1735 г. говорится, что Эйлеру предлагается дать отзыв об одной статье о квадратуре круга, напечатанной в Аугсбурге 1733 г. «Он [т. е. Эйлер—*А. Ю.*],—гласит протокол,—должен и в дальнейшем продолжать разбор таких курьезов»[1]). Через четыре дня 21. II 1735 г. Эйлер «подробно и даже с выкладками доказал, что в этой работе имеются различные ошибки и нелепости», и рецензируемое сочинение было оставлено в академическом Архиве[2]).

Три года спустя на суд Эйлера были представлены геометрические построения задач о трисекции угла и о квадратуре круга, придуманные академическим механиком Брукнером (Isaac Bruckner). И. Брукнер (1686—1762), уроженец Базеля, работавший в звании королевского географа в Париже, побывавший также в Англии и Голландии, начал службу в Петербургской Академии в 1733 г. Он был давнишним знакомым Эйлера, который рекомендовал его как механика еще в письме к Д. Бернулли из Базеля, от 18. I 1727 г.[3]). Осенью 1748 г. Брукнер переехал из Петербурга в Берлин, где жил у Эйлера, а через несколько месяцев летом 1749 г. покинул Берлин, побывал в разных странах Европы и в 1752 г. возвратился в Базель[4]). Брукнер был весьма искусным мастером и, например, получил в 1750 г. премию Парижской Академии наук за изобретенный им инструмент для определения долготы. Он изготовил несколько замечательных для своего времени глобусов, опубликовал морской атлас и т. д.

Глобус и карты Брукнера, представленные Берлинской Академии наук, получили хорошую оценку Л. Эйлера.

[1]) Протоколы заседаний Конференции имп. Академии наук в Петербурге, т. I—IV, СПб., 1897—1911, т. I, стр. 155. Далее цитируется как Протоколы.

[2]) Там же, стр. 157. Мне неизвестно, о каком сочинении идет речь, отзыв Эйлера пока не обнаружен.

[3]) П. Пекарский, История имп. Академии наук в Петербурге, т. I, стр. 251. О приглашении Брукнера Эйлер переписывался позднее с Я. Германом (см. письма последнего из Базеля от 15. III 1732 г. и 11.IV 1733 г. в Архиве АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 1, лл. 32 и об., 6 и об.).

[4]) О пребывании Брукнера в Берлине см. письма Л. Эйлера к И. Шумахеру от 10.IX 1748 г. (Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 37, л. 126 и об.); 5. X 1748 г. (ф. 121, оп. 2, № 164, лл. 23—24); 15.VII 1749 г. (ф. 1, оп. 3, № 37, лл. 336—337).

В протоколе заседания Академии от 30 янв. 1749 г. мы читаем, что «Г-н Проф. и Дир. Эйлер заявил, что он рассмотрел этот глобус и нашел его действительно пригодным для применений, которые ему приписывает его автор»; на основании этого глобус был одобрен Академией [1]). 5 июня того же года Эйлер дал отзыв о морских картах Брукнера, как о превосходящих все прочие по полноте и точности [2]).

Построения Брукнера, к сожалению, обнаружить еще не удалось, но в Архиве Академии наук хранится письменный отзыв о них Эйлера на двух листах с оборотом. Рукопись Эйлера написана торопливо и довольно небрежно, орфография беспорядочна, как и расстановка знаков препинания; в рецензии имеются три чертежа [3]). Как явствует из отзыва Эйлера, тогдашний начальник Академии барон И. А. Корф привел Брукнера на заседание Конференции 6. III 1738 г., где последний и доложил свои соображения. В протоколе Конференции от 20.III. 1738 г. сказано, что барон Корф «передал в Архив представленное г. Эйлером отношение в 1 лист, где излагается то, что произошло 6-го с. м. между ним и академическим механиком Брукнером в зале заседания по вопросу о квадратуре круга. При этом было и написанное Брукнером на одной странице полулиста» [4]).

Отзыв Эйлера интересен, поскольку содержит, с одной стороны, некоторые общие замечания о квадратуре круга, а с другой—принадлежащие самому Эйлеру уточнения одного из построений, предложенных Брукнером, и построения, предложенного много ранее Гюйгенсом. Построения Эйлера просты и весьма точны; сопровождающие

---

[1]) См. E. Winter, Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften. 1746—1766. Dokumente für das Wirken Leonhard Eulers in Berlin, Berlin, 1957, стр. 134.

[2]) Там же, стр. 138.

[3]) Архив АН СССР, разр. I, оп. 64, № 6/2. Немецкий текст отзыва Эйлера печатается (с соблюдением орфографии оригинала) в приложении к статье, без чертежей, которые даны в статье (см. стр. 204—206).

[4]) Протоколы, т. I, стр. 466. О каких бумагах Эйлера и Брукнера говорится в протоколе и что именно происходило между ними в заседании 6 марта—неизвестно.

их вычисления примечательны содержащимися в них оценками погрешностей.

Отзыв Эйлера можно разделить на четыре части.

1. Эйлер дает хорошую оценку данной Брукнером трисекции угла, называя ее «весьма замечательной», так как ошибка при углах, меньших 80°, менее $1'$, а при углах, меньших 70°, менее $\frac{1'}{2}$. Никогда, говорит Эйлер, он не встречал лучшего и более удобного решения. И хотя для углов, бóльших 80°, погрешность значительно возрастает и, например, при 90° составляет $13'$, а при 120° даже $53'$, но это не порочит метода, поскольку трисекцию больших углов всегда можно свести к трисекции малых углов (л. 1).

2. Обе квадратуры круга у Брукнера дают слишком грубые приближения. Одно приближение недостаточное дает для π значение 3,13864, а приближение с избытком дает значение 3,15470 [1]). Эти приближения хуже архимедова приближения $\frac{22}{7} = 3,14285$, причем первое дает ошибку примерно вдвое большую, чем $\frac{22}{7}$, а второе — ошибку, более чем десятикратную (л. 1 об.)[2]).

3. Эйлер предлагает собственное построение, улучшающее первое построение Брукнера. Полуокружность ADB с центром C делится в точке D пополам, четверть круга AD также делится в точке E пополам (черт. 1). Проводится прямая ADI, причем $DI = AD$, из точки I, как центра, через E проводится дуга окружности до пересечения с AD в G; на EC откладывается от F к C отрезок $FH = FG$ и, наконец, IA продолжается на $AK = EH$. Тогда, утверждает Эйлер, отрезок IK приближенно равен полуокружности BDA. Это построение дает

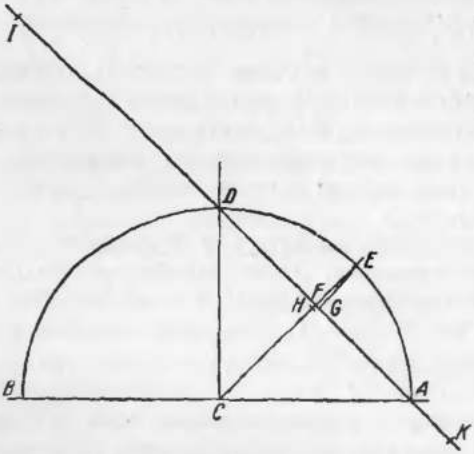
---

[1]) Сам Эйлер не употребляет здесь какого-либо символа для отношения окружности к диаметру, а все оценки производит в футах для круга с диаметром в 100 000 футов.

[2]) Брукнер, по-видимому, усматривал в своих построениях не приближенные, а точные элементарные решения задачи, и считал, как сказано в отзыве Эйлера, много более важным как раз то построение, которое дает худшее приближение.

для π значение 3,14149, т. е. его погрешность почти в 30 раз меньше, чем погрешность первого построения Брукнера (л. 1 об.).

Проверим выкладки Эйлера. Из прямоугольных треугольников на черт. 1, к которым мысленно присоединим



Черт. 1

треугольник IFE, следует при $AC=1$, что

$$IA=2\sqrt{2},\ CF=\frac{\sqrt{2}}{2},\ EF=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ IF=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$IG=IE=\sqrt{6-\sqrt{2}},\ FH=FG=\left(\sqrt{6-\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$AK=EH=\left(\sqrt{6-\sqrt{2}}+1-2\sqrt{2}\right)$$

и, наконец,

$$IK=IA+AK=\left(1+\sqrt{6-\sqrt{2}}\right)\approx 3{,}14149\ ^{1)}.$$

Как видно, первое построение Эйлера очень просто и имеет погрешность лишь в 10^{-4}.

[1]) Значение, приведенное Эйлером, не точно в последнем знаке. Быть может, он брал $6-\sqrt{2}$ с пятью цифрами, а корень извлек с шестью

Еще лучше, продолжает Эйлер, чем это построение, способ Меция, который полагает $\pi = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{113}$, что при круге с диаметром в 100 000 футов дает ошибку меньше дюйма [1]). Таким образом, добавляет Эйлер, можно приближаться к истинному значению окружности сколь угодно близко, никогда не получая ее точно (accurat aber niemals).

4. Замечателен способ приближенного спрямления дуги, предложенный Гюйгенсом [2]). Данная дуга окружности AB делится в C пополам (черт. 2), проводятся хорда AB и отрезок ACD, равный удвоенной хорде AC полудуги AC. Из A, как центра, через D проводится дуга окружности DG, пересекающая продолжение AB в G, и AD удлиняется на DE, треть отрезка BG. Отрезок AE дает с большой точностью приближенное спрямление дуги ACB [3]). Так, заме-

---

[1]) Приближение голландского инженера Адриана Антонисзоона, прозванного Мецием, было еще ранее получено китайским ученым V века Цзу Чун-чжи; в десятичных дробях $\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$ Целью Меция было опровергнуть утверждение одного математика, заявившего в 1584 г., будто круг равновелик квадрату, сторона которого составляет $\frac{39}{44}$ диаметра, что соответствовало бы $\pi = 3{,}1425$. По методу Архимеда Меций нашел для π границы $\frac{333}{106}$ и $\frac{377}{120}$ и далее взял значение, числитель и знаменатель которого являются соответственно средними арифметическими этих двух чисел. См. сборник «О квадратуре круга», стр. 51—52.

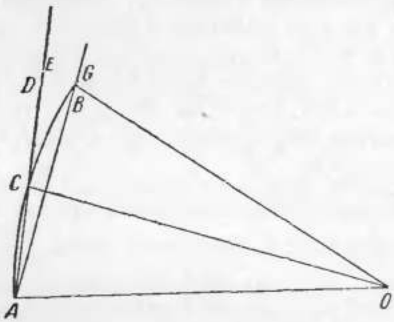
[2]) Речь идет о сочинении Гюйгенса «De circuli magnitudine inventa» (1654), русский перевод которой напечатан в сборнике «О квадратуре круга». Сочинение это отличается изяществом геометрических предложений, дающих весьма хорошие приближения для спрямления дуг окружности, и чрезвычайно высоким уровнем вычислений, неизменно сопровождаемых оценками снизу и сверху возможных погрешностей. Название сочинения Гюйгенса следует по-русски перевести «Открытия о величине круга», а не «О найденной величине круга». Ср. H. W i e l e i t n e r, Geschichte der Mathematik, II Teil, II Hälfte, Berlin u. Leipzig, 1921, S. 134.

[3]) Эйлер излагает третью задачу упомянутого сочинения Гюйгенса. Гюйгенс добавляет, что построенный таким образом отрезок дает приближение с недостатком, причем для дуги $\breve{AB}$, не большей четверти окружности:

$$AE < \breve{AB} < AE + \frac{1}{1200} AE,$$

чает Эйлер, при радиусе $AO = 100\,000$ футов и дуге $45°$ вычисление дает AE равным $78\,535 \frac{93}{100}$, тогда как дуга ACB при этом есть $78\,539 \frac{81}{100}$, так что ошибка менее 4 футов. Погрешность значительно уменьшается с уменьшением дуги ACB (л. 2).

Данный способ Гюйгенса можно улучшить следующим образом. Начало построения прежнее, Эйлер только ме-



Черт. 2.

няет названия некоторых точек (черт. 3): центр теперь C, середина дуги AB обозначается D, удвоенная хорда полудуги AD есть AF. Как и ранее, на продолжении AB откладывается отрезок $BG = AF - AB$ и, кроме того,

---

а для дуги, не большей шестой части окружности:

$$AE < \overset{\frown}{AB} < AE + \frac{1}{6000} AE.$$

Числовые расчеты Гюйгенс дает для дуг в 90 и 60°. Далее Гюйгенс выводит другие весьма удобные и точные оценки, и полагая дугу равной $^1/_{60}$ окружности, Гюйгенс с помощью своих теорем очень легко получает для π десять правильных десятичных знаков. См. сборник «О квадратуре круга», стр. 134—136, 165 и в статье Ф. Рудио, стр. 57—60 (там же см. о других работах Гюйгенса по измерению круга, в частности, о его критике интересной попытки Дж. Грегори доказать невозможность квадратуры круга; Гюйгенс замечает, что не доказана еще даже несоизмеримость круга с квадратом на его диаметре).

$BI=20\ BG$. Строится линия синуса BE дуги AB и на нее накладывается

$$BH=AG=AF.$$

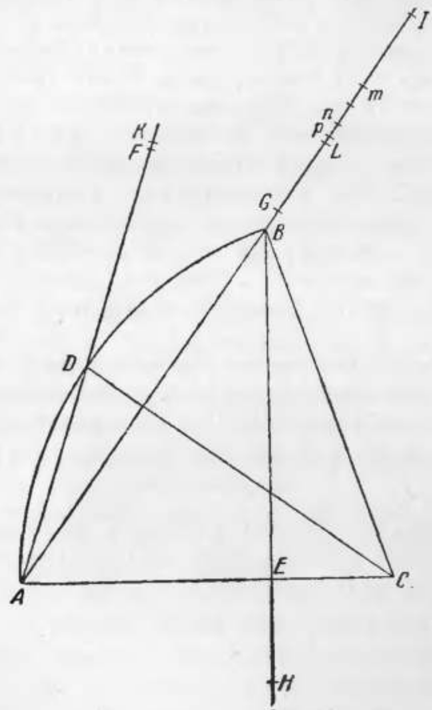
На продолжении отрезка AB откладывается

$$BL=HE=BH-BE$$

и затем последовательно берутся

$$Lm=\frac{1}{5}LI,\ Ln=\frac{1}{3}Lm,\ Lp=\frac{1}{3}Ln=\frac{1}{45}LI.$$

Наконец, отрезок AF продолжается на $FK=Lp$. Отрезок



Черт. 3.

AK и дает искомое приближенное спрямление дуги ADB. При прежних числовых данных, т. е. дуге ADB в 45°, равной $78\,539\,\frac{81}{100}$, отрезок $AK = 78\,539\,\frac{49}{100}$, т. е. погрешность с недостатком составляет примерно $^1/_5$ фута, что, говорит Эйлер, при столь большом радиусе не следует принимать в расчет (л. 2 об.).

Все эти выкладки интересны еще и в другом отношении. Теперь довольно часто полагают, что оценка точности вычислений, которой еще придавали большое значение математики XVII века, перестала беспокоить ученых следующего столетия (в частности, Эйлера), которые лишь на глаз определяли пригодность результатов своих вычислений. В каком-то смысле такое мнение не лишено оснований. Подлинный прогресс «математика неравенств» вновь испытала лишь в XIX веке, после Коши, Вейерштрасса и др., когда стали разрабатывать общие методы оценок различных приближений. Начало положил в этом направлении Лагранж, давший общее выражение остатка в формуле Тейлора. Но в конкретных вычислениях ученые XVIII века также нередко не ограничивались прикидкой на глазок и пресловутой верой в авторегулирование математических процессов. Там, где удавалось, они также старались оценивать точность найденных числовых результатов.

Приведенное построение Эйлера дает для π значение 3,1415916 с погрешностью в 10^{-6}. Гюйгенс для $^1/_6$ окружности при радиусе 100 000 получает приближение $10\,470\,\frac{1}{3}$, т. е. π приближенно равным 3,14110 с погрешностью $5 \cdot 10^{-4}$.

Сопоставим построения Гюйгенса и Эйлера, выразив соответствующие приближения степенными рядами. Если положить дугу AB равной 2φ, то в построении Гюйгенса

$$AB = 2\sin\varphi,$$

$$AC = 2\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$BG = 2AC - AB = 4\sin\frac{\varphi}{2} - 2\sin\varphi,$$

$$AE = AC + \frac{1}{3}BG = \frac{16}{3}\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{2}{3}\sin\varphi$$

и

$$\overset{\frown}{AB} \approx AE = 2\varphi - \frac{1}{240}\varphi^5 + \frac{15}{24\cdot 5040}\varphi^7 - \ldots$$

В построении Эйлера

$$BI = 20BG = 20\left(4\sin\frac{\varphi}{2} - 2\sin\varphi\right),$$

$$BL = HE = BH - BE = AF - BE = 4\sin\frac{\varphi}{2} - \sin 2\varphi,$$

$$IL = BI - BL = 76\sin\frac{\varphi}{2} - 40\sin\varphi + \sin 2\varphi,$$

$$FK = Lp = \frac{1}{45}IL,$$

$$AK = AF + FK = \frac{256\sin\frac{\varphi}{2} - 40\sin\varphi + \sin 2\varphi}{45}$$

и

$$\overset{\frown}{AB} \approx AK = 2\varphi - \frac{2}{5040}\varphi^7 + \ldots$$

Таким образом, погрешность построения Гюйгенса начинается с члена 5-й степени относительно φ, погрешность в построении Эйлера—с члена 7-й степени.

Следует думать, что в своем построении Эйлер исходил как раз из разложений в ряды, подбирая соответствующие коэффициенты в выражении для AK так, чтобы члены до некоторого порядка уничтожались.

Далее Эйлер замечает, что так можно получить все более точные построения, но они становятся все более громоздкими, а также мало полезны.

В конце отзыва Эйлер высказывает твердую уверенность в том, что точное спрямление произвольной дуги окружности невозможно: «Абсолютно невозможно, чтобы удалось найти совершенно точный способ спрямления любой дуги, и невозможность этого устанавливается и доказывается столь же отчетливо, как и то, что две стороны треугольника, взятые вместе, не могут быть менее третьей. Таким образом, все прилагаемые к этому усилия, труд и затраты теряются впустую» (л. 2, об.). По-видимому, Эйлер имеет в виду иррациональность π [1]), но, может быть, и невозможность его выражения посредством элементарных построений. Замечание о том, что невозможность точного спрямления произвольной дуги окружности доказана, непонятно: к этому времени подобного доказательства еще не было, и сам Эйлер также им не располагал [2]).

IV.

Почти одновременно с разбором построений Брукнера Эйлеру было поручено рассмотреть сочинения еще одного автора, претендовавшего на открытие квадратуры круга. В протоколе Конференции от 25.XI 1737 г. сказано, что Эйлеру по его требованию переданы поступившие 23 того же месяца работы о квадратуре круга Лейстнера [3]). После этого имя Лейстнера встречается в протоколах не раз. 20.II 1738 г. записано, что Эйлер передал полученные от Маринони замечания к недавно опубликованному доказательству квадратуры, причем имеется в виду «доказательство» Лейстнера [4]). 22.X 1739 г. сообщается, что Эйлеру переданы, помимо трех сочинений Лейстнера, еще другие его сочинения на ту же тему, его же письмо из Вены от 4.XI 1737 г. и другие бумаги; 3 ноября, что Эйлер возвратил все взятые сочинения Лейстнера с просьбой передать их для просмотра Гольдбаху; 8 ноября, что проф. И. Вейтбрехт (физиолог) передал Конференции отзыв Эйлера [5]). Наконец, в протоколе 9.XI 1739 г. сказано: «Г. проф. Эйлер прочитал свои представленные вчера

---

[1]) Ср. слова Эйлера в отзыве о работах Лейстнера, приведенные далее на стр. 181.

[2]) Весьма изящное приближенное геометрическое спрямление четверти окружности Эйлер дал впоследствии в статье, написанной в связи с одним также приближенным построением Декарта: «Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem», представленной 20.VII. 1758 г. Берлинской Академии и 15.X 1759 г. Петербургской Академии и опубликованной в «Novi Comm. Ac. Petrop.», т. VIII, за 1760/1761 г. (1763); см. L e o n h a r d i E u l e r i, Opera omnia, Series I, vol. XV, ed. G. Faber, Lipsiae et Berolini, 1927. Ср. также G. F a b e r, цит. статья, стр. CX—CXI.

[3]) Протоколы, т. I, стр. 440—441.

[4]) Там же, стр. 460.

[5]) Там же, стр. 577, 579, 580.

замечания относительно работ ротмистра Лейстнера о квадратуре круга, после окончания этого чтения сочинение было оставлено в Архиве, и его превосходительство [т. е. барон Корф.—*А. Ю.*] приказал, чтобы для отсылки была изготовлена чистая копия, а черновик вместе с работами Лейстнера сохранялся в целости»[1]). Черновик этого отзыва Эйлера, написанный по-немецки, озаглавлен «Bedencken über des Herrn Rittmeister Leistner Quadraturam Circuli», т. е. «Соображения о квадратуре круга господина ротмистра Лейстнера». Это довольно объемистая рукопись на 15 листах, занимающих 31 страницу машинописи[2]).

Ротмистр австрийской армии И. И. К. Лейстнер принадлежал к числу неудачников, занимавшихся задачами о квадратуре круга и им подобными без сколько-нибудь серьезной подготовки и одержимых навязчивой идеей[3]). Еще в рассмотренной выше статье в «Примечаниях» к петербургским «Ведомостям» о таких людях говорилось, что они по неискусности своей «в субтильном и зело высоком рассуждении, в котором сие дело зависит, помешались или оного неосторожно лишились» (стр. 245). Уже одни названия изданных в 1737—1738 гг. сочинений Лейстнера, высокопарные, самоуверенные и многословные, характеризуют их автора; в русском переводе мы приведем название лишь одного из них: «С сотворения мира почитавшаяся невозможной, но теперь милостью божией и ревностным исследованием осуществленная квадратура круга. То-есть: открытие и как арифметическое, так и геометрическое доказательство истинного, хорошо обоснованного и неопровержимого отношения окружности к ее диаметру к особой чести немецкой отчизны и вящего успеха благородной математики, а также общего блага, напечатанное в качестве предвестника последующей совершенной арифметики Иозефом Игнатием Карлом фон Лейстнером,

---

[1]) Протоколы, т. I, стр. 580.

[2]) Хранится в Архиве АН СССР, ф. 136, оп. 1, № 169.

[3]) Какими-либо дополнительными данными о жизни Лейстнера, кроме приводимых в статье и названиях его сочинений, я не располагаю.

императ. ротмистром и бывшим полковым квартирмейстером. Вена... 1737»[1]).

В трех присланных Петербургской Академии наук сочинениях Лейстнер предлагал весьма примитивные

---

[1]) Вот подлинные заголовки трех сочинений Лейстнера, хранящихся а Архиве АН СССР (разр. I, оп. 56, № 4):

1) Die von Anbegin der Welt für unmöglich gehaltene: nun aber durch die Gnade Gottes und emsiges Nachforschen in Möglichkeit gebrachte Quadratur des Circuls. Das ist: wahre, wohlgegründete und unwidersprechliche Proportion des Umkreises zu dessen Diameter, erfunden und sowohl Arithmeticè als Geometricè zu besonderer Ehren des Teutschen Vatter-Landes und mehreren Aufnahm der Edlen Mathematic, dann des gemeinen Bestens demonstriret und als einen Vorlauffer der künftig-folgenden vollkommenen Arithmetic in Druck gegeben von Joseph Ignati Carl von Leistner, Kayserl. Ritt—und gewesten Regiments—Quartier—Meistern. Wien... 1737.

2) Unwiderrufflicher, Wohlgegründeter und Ohnendlicher Beweiss der Wahren Quadratur des Circuls, oder des Durchmessers zu seinem Umcreyss wie 1225. zu 3844. oder 3844. zu 1225. zu abermaligen und noch mehreren Ehren—Ruf der gantzen Hoch—Edlen Teutschen Nation und Aufnahm der edlen Mathematischen Wissenschaften. auch zum Besten des gemeinen Weesens und Nutzens der studirenden Jugend, besonders aber zur Erkandtnuß[sic] der goldenen Wahrheit wider die sich anmassende und ungegründete Widerlegung Hn. J. J. Marinonii verabfasset, und zu einem unpartheyischen Urtheil der gantzen Welt in offentlichen Druck befordert von Josepho Ignatio Carolo de Leistner Der Römisch—Kayserlichen Majestät Rittmeistern, als inventore quadraturae circuli. Wien... 1737.

3) Die Sechs und Neuntzig eckete Ausrechnung per Extractionem Radicum, Tabulas Sinuum et Logarithmorum nebst denen dabey vermeintlichen Gegensätzen, und allegirten fünfferley Zeugenschafften de verbo ad verbum: wie sie Anno 1737 unter dem Titul: Anmerckungen über den ohnlängst in Wienn zum offentlichen Druck beförderten Beweiß der Quadratur des Circuls von einem Anonymo verabfasset, und in alle Welt ausgebreitet worden. Dann die hierüber erforderliche Beantwortung, in welchen das widerrechtliche Verfahren des Herrn Anonymi gründlich widerleget, das 96. Eck., per extractionem radicum ausgerechnet, sein Minor verò reprobiret, hingegen aus dem Archimede und Euclide sowohl nach Geometrischer Abtheilung als nach Arithmetischen Grunde abermahlen bewiesen wird wie die Zahlen 1225. zu 3844. und 3844. zu 1225. die eigentliche wahre und ohndisputirliche Proportion des Diametri ad Circumferentiam Circuli in sich führen. Beedes sowohl die Anmerckungen als die Beantwortungen zur mehrern und höhern Erkantnuß der hierüber ausgestreuten Gegensätzen, wider den Anonymum zum offentlichen Druck befordert von Josepho Ignatio Carolo à Leistnern, Kayserlichen Ritt meistern quā Invent. Quadraturae Circuli. Wien... 1738.

по ошибочности решения квадратуры круга, отвечал одному из своих критиков, Маринони, о котором я скажу несколько слов далее, а заодно давал еще весьма грубое решение задачи об удвоении куба и пытался доказать неправильность употребительных таблиц синусов, тангенсов и логарифмов. Заблуждения Лейстнера Эйлер разбирает терпеливо и подробно.

Основным убеждением Лейстнера было, что отношение окружности к диаметру точно выражается отношением двух целых квадратных чисел, именно 3844 к 1225 ($\approx 3,138$). Я приведу выдержки из отзыва Эйлера, отчасти характеризующие манеру Лейстнера рассуждать: «Чтобы подтвердить приведенное им отношение между диаметром и окружностью, господин автор прежде всего указывает, что оба числа, выражающих как диаметр, так и окружность,—квадратные числа, именно 1225 и 3844, и потому сторона квадрата, равного по площади кругу, выразится рациональными числами, так что если диаметр круга есть 1225, то сторона равного кругу квадрата будет 1085» (л. 1 об.). Эйлер показывает, что такое свойство имеет место для любых других пар квадратных чисел [1]). Например, если бы отношение длины окружности к диаметру было 49 : 16, то сторона равновеликого кругу квадрата была бы 14, однако, продолжает Эйлер, «из этого никто не заключит, что диаметр круга относится к его окружности, как 16 к 49, и здесь требуются совсем другие доказательства, которые должны быть извлечены из природы круга. Однако господин Лейстнер совершенно не приводит таких доказательств, но постоянно предполагает без какого бы то ни было указания на основание, что если диаметр круга есть 1225, то окружность должна быть 3844, а это и есть как раз тот пункт, который надлежало бы доказать. Ибо то, что господин автор в этом предположении на различные лады вычисляет то по данному диаметру окружность и площадь круга, то по окружности диаметр и площадь,

[1]) Если $\frac{C}{d}=\frac{a^2}{b^2}$ и взять $d=b^2$, то площадь круга $S=\frac{Cd}{4}=\frac{a^2b^2}{4}$ и сторона равновеликого квадрата есть $\frac{ab}{2}$.

то по площади или стороне равного кругу квадрата диаметр и окружность, ни в малейшей степени не доказывает истинности его отношения, а является только примером того, как следовало бы пользоваться этим отношением, если бы оно было истинным. Нет ничего удивительного в том, что все эти вычисления согласуются друг с другом, ибо все они основаны на одном соотношении...» (л. 2).

В дальнейшем Эйлер замечает, что основной довод Лейстнера в пользу его отношения 1225: 3844 таков: числа, выражающие диаметр и окружность, должны быть квадратными, так как иначе сторона равновеликого кругу квадрата не будет рациональной. Но откуда, спрашивает Эйлер, автору известно, что сторона такого квадрата рациональна? Сам Эйлер выражает убеждение, что отношение окружности к диаметру как раз не может быть выражено рациональным числом, и говорит, что это было бы легко показать, хотя это еще и не установлено (л. 11 об.) [1]). Говоря несколько ранее о высокой точности, достигнутой в вычислении π (этот символ в отзыве не применяется), Эйлер также выражает уверенность в неразрешимости задачи. Известные уже приближения столь точны, что ими можно довольствоваться, «пока не будет найдено истинное [решение задачи.—*А. Ю.*], что никогда не случится» (л. 8) [2]).

Разумеется, для Лейстнера не имело значения, что предложенное им значение π не согласовалось с другими, вычисленными Архимедом или Лудольфом ван Цейленом; Лейстнер даже усматривал у Архимеда ошибки. Эйлер приводит границы, установленные Лудольфом ван Цейленом (1596) и дающие 20 верных цифр десятичного разложения, причем показывает, что значение, предлагаемое Лейстнером, лежит вне этих границ; затем Эйлер

[1]) «Ja es wäre sogar leicht zu erweisen, daß die Peripherie und der Diameter eines Circuls nicht nur nicht durch Quadratzahlen, sondern nicht einmal durch Rationalzahlen ausgedrückt werden können. So wenig nun dieses ausgemacht ist, so ist noch viel weniger erwiesen, dass die angegebenen quadrat—Zahlen nehmlich 1225 und 3844 die wahre Proportionem Diametri ad Peripheriam enthalten».

[2]) «Allein dieselbe ist doch anjetzo so genau bestimmet, daß man sich damit begnügen kan, so lang biß man die wahre findet, welches nimmer geschehen wird».

сообщает значение π, вычисленное со 127 знаками «знаменитым французским математиком» Ланьи (лл. 3 об.—4)[1]). По поводу числа Лудольфа Эйлер замечает, что оно неудобно в вычислениях, так как содержит слишком много цифр, и потому возникла задача выразить отношение диаметра к окружности в возможно малых числах, что весьма счастливо осуществил многими способами знаменитый Валлис, все приближения которого обладают тем свойством, что «точнее задать отношение окружности к диаметру невозможно, а можно лишь посредством бóльших чисел» (лл. 6—6 об.)[2]). Этот пассаж отзыва был развит Эйлером в самом конце первого тома «Введения в анализ» (гл. XVIII о непрерывных дробях, § 382), где он со ссылкой на Валлиса ставит ту же задачу и дает ее решения с помощью подходящих непрерывных дробей; для значения Меция Эйлер приводит оценку погрешности, меньшей чем $1/113 \cdot 33\,102$[3]).

В пользу Лейстнера, говорит далее Эйлер, можно привести только то свойство взятых им квадратных чисел 1225 и 3844, что меньшими квадратными числами выра-

[1]) Значение π, вычисленное Ланьи, Эйлер приводит и во «Введении в анализ» (т. I, гл. VIII, § 126; русск. изд.: Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, т. I, пер. Е. Л. Пацановского под ред. С. Я. Лурье, М. — Л., 1936, стр. 123). Впоследствии (1794) известный автор логарифмических таблиц Г. Вега, показал, что у Ланьи неверен 113-й знак (у Ланьи стоит на этом месте 7, а должно быть 8).

[2]) «Weilen aber des Ludolfi a Zeulen Zahlen, ohngeacht sie weit accurater sind als alle vorhergehenden, sehr groß und folglich zum Rechnen nicht bequem sind, so hat man sich bemühet, in kleinen Zahlen, so nahe als es seyn kann, die Proportion zwischen dem Diametro und der Peripherie anzuzeigen; welches der berühmte Wallisius sehr glücklich praestinet, indem er viel hundert solche Proportionen aus den Ludolfischen Zahlen ausgerechnet, welche alle so beschaffen, daß es unmöglich in kleineren Zahlen die Verhältniss der Peripherie zum Diametro näher anzugeben, wohl aber mit grösseren Zahlen». При этом Эйлер добавляет, что как бы ни точно согласовалось такое приближение с истинным, всегда можно получить другие, еще более близкие к истине: «dann so genau auch eine Proportion mit der wahren Verhältniß der Peripherie zum Diametro übereinkommt, so ist allzeit möglich noch andere welche noch näher mit der Wahrheit übereinkommen anzuzeigen» (л. 6 об.).

[3]) Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, т. I, стр. 322.

зить с той же точностью π невозможно. Но можно получить с помощью бо́льших квадратных чисел лучшие приближения. На этом пункте Эйлер останавливается потому, что в полемике с Маринони Лейстнер отверг предложенные последним квадратные числа, как дающие слишком большие отклонения, и предложил своим оппонентам указать лучшие приближения в квадратных числах (л. 12). Эйлер, «идя навстречу» Лейстнеру, приводит 41 пару квадратных чисел, отношения которых дают все более точные приближения для $\frac{1}{\pi}$, указывая всякий раз, является ли приближение избыточным или недостаточным. Мы приведем часть таблицы Эйлера, завершающейся восьмизначными квадратными числами (л. 12 об.).

Диаметр	Окружность	
16	49	мало
25	81	велико
81	256	велико
169	529	мало
484	1521	велико
1225	3844	мало
	......	
960 400	3 017 169	мало
	......	
23 242 041	73 017 025	мало
24 880 144	78 163 281	велико

Все отношения, следующие за лейстнеровым, замечает Эйлер, точнее, чем 1225: 3844, и каждое последующее лучше предыдущих. Относительно отношения 960 400 : : 3 017 169 Эйлер шутливо замечает, что последнее число имеет своим квадратным корнем 1737, т. е. число, соответствующее году открытия этого отношения. Значение $\frac{3\,017\,160}{960\,400}$ в десятичных дробях будет 3,141575385 ... и имеет погрешность около одной шестидесятитысячной (лл. 12 об.—13).

В конце отзыва Эйлер выразил сожаление, что усилия Лейстнера оказались бесплодными и даже привели его к бедности, чего он избежал бы, если бы последовал добрым советам Маринони и других более осведомленных в математике лиц (л. 15 об.).

Лейстнер, несомненно, отличался большим упорством, а может быть, располагал и какими-либо связями. Во всяком случае он добился назначения специальной императорской комиссии для проверки его открытия. По докладу Маринони комиссия отвергла претензии Лейстнера [1]), но имя его не так скоро исчезло из литературы. В 1740 г. он выступил с новыми возражениями против своих оппонентов в сочинении «Nodus Gordius etc.» (Гордиев узел и т. д.). Но этим дело не ограничилось. Священник Меркель (Merkel) из Равенбурга в Швабии в сочинении, опубликованном в 1751 г., заявил свои права на выражение отношения четверти окружности к диаметру в квадратных числах: по его словам, он еще до Лейстнера нашел отношение 1225 : 961 [2]). В 1765 г. сочинение Меркеля переиздал штеттинский профессор Бишоф, который в своих примечаниях и проверках подтверждал точность приближения Меркеля. Год спустя эти числа появились в газетах с заявлением, что теперь искать квадратуру круга бесполезно, так как она уже открыта в третий раз. Обо всем этом сообщает И. Г. Ламберт в п. 3 своего знаменитого труда «Vorlaüfige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen», т. е. «Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга» (1766, опубл. в 1768 г. [3]). По-видимому, рассуждения Меркеля и Бишофа были сходны с «аргументами» Лейстнера. Я не мог познакомиться с их сочинениями, но на это указывают слова Ламберта: «Затем все эти 8 способов проверки таковы, что их выдерживает любая пара квадратных чисел» [4]). Ламберт продолжает: «Я не буду останавливаться здесь на доказательстве этого, но предпочитаю доказать, как при помощи некоторого общего правила можно

---

[1]) См. J. F. Montucla, Histoire ds mathématiques, t. IV. Paris An. X (1802), 3ème supplément. Histoire de quadrature du cercle, p. 630.

[2]) Квадратуру круга Меркеля подверг разбору Г. В. Крафт: G. W. Krafft, Dissertatio de quadratura circuli praesertim Merkeliana, Tubingae, 1752 (в 1744 г. Крафт уехал из Петербурга в Тюбинген). Сочинение это осталось мне недоступным.

[3]) См. стр. 172 — 174 русского перевода, опубликованного в сборнике «О квадратуре круга».

[4]) Там же, стр. 174.

находить такие квадратные числа, которые дают с тем большею точностью отношение квадрата диаметра к площади круга, чем они сами больше. Это, между прочим, может послужить для того, чтобы в будущем не попадать на эти квадратные числа случайно и не выдавать их за точные решения квадратуры круга»[1]). С этой целью Ламберт разлагает в цепную дробь отношение $a : b = 2 : \sqrt{\pi}$ и составляет начало таблицы отношений вида $b^2 : a^2$, дающих последовательно все лучшие и лучшие приближения для $\frac{\pi}{4}$, поочередно с избытком и с недостатком:

$$\begin{aligned} b^2 : a^2 &= 49 : 64 + \\ &= 64 : 81 - \\ &= 961 : 1\,225 + \\ &= 1\,521 : 1\,936 - \\ &= 11\,881 : 15\,129 + \\ &= 21\,904 : 27\,889 - \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

«Отсюда видно,—заключал Ламберт,—что Лейстнер, Меркель, Бишоф и др. лишь случайным образом набрели на числа 961, 1225»[2]).

Главное содержание работы Ламберта составляло доказательство иррациональности e и π. В иррациональности π не сомневалось большинство крупных математиков XVII и первой половины XVIII века. Соответствующие высказывания Эйлера в его письменных отзывах приводились выше; он не раз заявлял об этом и в печати. Во «Введении в анализ» (т. I, гл. VIII, § 126) он писал: «достаточно ясно, что окружность этого круга [с радиусом 1.—*А. Ю.*] рациональными числами точно выразить нельзя»[3]). Можно лишь догадываться, на чем основывался Эйлер, говоря, что это ясно или же, как в отзыве на работы Лейстнера, что это было бы легко показать. Не имел ли здесь Эйлер в виду фактически обнаруживающиеся им на большом отрезке свойства разложений π в цепную

[1]) См. стр. 172—174 русского перевода, опубликованного в сборнике «О квадратуре круга».

[2]) Там же, стр. 176. Нетрудно заметить, что приводимые Ламбертом приближения содержатся среди тех, которые дал Эйлер в отзыве на работы Лейстнера.

[3]) Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, т. I, стр. 123.

и десятичную дроби? Позднее, в резюме упоминавшейся статьи о декартовом приближенном построении квадратуры круга, Эйлер говорит о сложном характере иррациональности π: «Однако окружность круга, по-видимому, должна быть отнесена к гораздо более высокому роду иррациональностей, которого можно достичь только посредством бесконечного повторения извлечения корней, и потому геометрически нельзя добиться большего, чем непрестанно все более близкое выражение истинного отношения окружности к диаметру» [1]).

Исходя из разложения в цепную дробь $\frac{e-1}{2}$, данного Эйлером, Ламберт доказал два основных предложения:

1. При рациональном $x \neq 0$ значение e_x не может быть рационально.

2. При рациональном $x \neq 0$ значение $\operatorname{tg} x$ не может быть рационально. Поскольку $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, отсюда немедленно вытекала иррациональность π [2]).

В своем доказательстве Ламберт использовал одно недоказанное свойство цепных дробей. Этот пробел восполнил А. М. Лежандр в IV замечании к его «Началам геометрии» (Elements de géométrie) в издании 1800 г. [3]).

---

[1]) См. Leonhardi Euleri, Opera omnia, series I, vol. XV, pp. 1—2. Вероятно, Эйлер имеет здесь в виду представление

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\cdots,$$

найденное в конце XVI века Ф. Виетом.

[2]) Предложение об иррациональности тангенса рациональной дуги высказал еще Т. Ф. де Ланьи в той же работе, в которой вычислил π со 127 знаками (Th. F. de Lagny, Mémoire sur la quadrature du cercle, et sur la mesure de tout arc, tout secteur et tout segment donné; представлена в 1717 г., опубликована в Mémoires de l'acad. des sciences de Paris за 1719 г., 1721). В другой статье, напечатанной в тех же «Мемуарах» за 1727 г. (1729), Ланьи писал о невозможности точного и геометрического спрямления произвольной дуги окружности. Об этих и других работах Ланьи см. H. Wieleitner, Geschichte des Mathematik, II Teil, I Hälfte, Leipzig, 1911, S. 84 и II Teil, II Hälfte, S. 137—138.

[3]) Русский перевод этой работы, в которой доказана также иррациональность π^2, напечатан в сборнике «О квадратуре круга».

Разумеется, из работы Ламберта не вытекала еще невозможность квадратуры круга, но и Ламберт и—несколько менее определенно—Эйлер полагали, что π не только иррационально, но и трансцендентно, что удалось доказать около ста лет спустя Линдеману.

Высказывания Эйлера в этом направлении не вполне четки, но в целом все же достаточно показательны, как, например, приведенные выше его слова о «более высоком роде иррациональности» π. Все же Эйлер еще в 1775 г. осторожно писал:

«До сих пор представляется совершенно неясным, могут ли трансцендентные количества, как-то включающие окружность круга или логарифмы, выражаться через какие-либо радикальные количества, ибо до сих пор невозможность этого никем не обнаружена. Вместе с тем представляется вполне бесспорным, что окружность π круга, диаметр которого$=1$, не допускает выражения с помощью простых квадратичных радикалов, так как иначе непрерывная дробь, равная π, должна была бы иметь периодические указатели, что, однако, никоим образом не обнаруживается» [1]).

Эйлер утверждал, что π не выражается и более сложными квадратичными иррациональностями.

Ламберт высказал свое мнение об арифметической природе чисел e и π решительнее. В одном письме 1768 г. он заявлял: «способ, которым я это [т. е. иррациональность e и π.—*А. Ю.*] доказал, допускает распространение на доказательство того, что круговые и логарифмические величины не могут быть корнями рациональных уравнений» [2]).

Наконец, Лежандр писал:

«Представляется вероятным, что число π даже не принадлежит к классу алгебраических иррациональностей, т. е. что оно не может быть корнем никакого алгебраи-

---

[1]) См. § 10 статьи Эйлера «De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda», представленной 14. VIII 1775 г. и опубликованной в: L e o n h a r d i E u l e r i, Opuscula analytica, t. II, Petropoli, 1785.

[2]) Цит. по H. W i e l e i t n e r, Geschichte der Mathematik, II Teil, I Hälfte, S. 85.

ческого уравнения с конечным числом членов, коэффициенты которого рациональны. Но эту теорему, по-видимому, очень трудно строго доказать» [1]).

V.

В отзыве Эйлера о сочинениях Лейстнера упоминалась критика квадратуры круга Лейстнера, анонимно опубликованная итальянским астрономом и математиком Дж. Маринони (G. J. Marinoni, 1676—1755), с 1730 г. жившим в Вене, где он работал в звании королевского астронома. Маринони пользовался в свое время известностью, в 1746 г. был избран членом Берлинской Академии наук и 11 октября (ст. ст.) того же года почетным членом Петербургской Академии. Сочинение Маринони «Anmerckungen über den ohnlängst in Wienn zum öffentlichen Druck beförderten Beweis der Erfindungen der Quadratur des Circuls», Wien, 1737 (Замечания о недавно опубликованном в Вене доказательстве открытий по квадратуре круга) было получено в нашей Академии незадолго до 20. II 1738 г., как это видно из протокола Конференции за это число [2]); оно хранится в Архиве АН СССР вместе с сочинениями Лейстнера.

В Архиве АН СССР имеется также письмо Эйлера к Маринони от 12 (23) июля 1740 г. [3]). В этом письме отражены работы Эйлера по усовершенствованию методов приближенного вычисления числа π.

В начале письма Эйлер благодарит за присланные Маринони изложение споров с Лейстнером и наблюдения прошлогоднего солнечного затмения. Эйлер выражает убеждение, что Лейстнер теперь признает свои ошибки и успокоится (в этом Эйлер ошибся), а затем пишет, что с величайшим удовольствием прочитал весьма уче-

---

[1]) Сборник «О квадратуре круга», стр. 209.

[2]) Протоколы, т. I, стр. 460; см. также протокол за 3.IV 1738 г., там же, стр. 463.

[3]) Копия письма с собственноручной подписью Эйлера хранится в ф. 1, оп. 3, № 30, лл. 60—62 об. Латинский текст письма публикуется в приложении к настоящей статье (см. стр. 207—209).

ное сочинение Миковини, опровергающее ошибки Лейстнера.

Небольшая брошюра венгерского математика С. Миковини, опубликованная в Вене в 1739 г. в форме письма к Маринони [1]), была получена в Петербурге летом 1740 г.; 4 июля 1740 г. ее принес на заседание Конференции Гольдбах, и она тут же была передана Эйлеру [2]). Через неделю 11 июля сочинение Миковини подверглось подробному обсуждению и затем было еще передано астроному и географу акад. Х. Н. Винцгейму [3]).

Как видно из письма Эйлера, Миковини вычислил некоторые границы для π, пользуясь рядом

$$\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots$$

В этой связи Эйлер замечает, что ряд Лейбница приносит в этом деле большую помощь, но если не применить особые сокращающие приемы, то извлечения корней весьма увеличивают труд. Этот ряд при радиусе круга 1 позволяет тем легче и удобнее определить дугу, чем меньше берется тангенс; например, при $t = \frac{1}{10}$ нетрудно получить длину соответствующей дуги с любым числом цифр. Однако отсюда ничего нельзя вывести для определения π (этот знак Эйлер здесь не использует), так как отношение дуги, тангенс

---

[1]) Samuelis Mikovini nobilis Hungari S. C. C. Maiestatis Aulico-Cameralis, et ad Mineras Regni Hungariae constituti Geometrae, Regiaeque scientiarum societatis Beroliensis Membri Epistola ad Illustrem ac celeberrimum virum D. Jo. Jac. Marinonium patricium utinensem, Caesareum consiliarium et Aulae Mathematicum Occasione Quaestionis de Quadratura Circuli Nuper perperam motae et falso definitae a D. Joseph. Jgn. Car. Leistnero, centurione Caesareo, qua Diametri ad peripheriam ratio Lestneriana refellitur; genuina in seriebus infinitis exhibetur; deque theoriae cum praxi cognatione et utili ac necessaria connexion disseritur. Viennae... 1739.

Брошюра Миковини (8 листов с двумя таблицами чертежей) хранится в Архиве АН СССР вместе с сочинениями Маринони и Лейстнера.

Мне не удалось найти какие-либо сведения о Миковини.

[2]) Протоколы, т. I, стр. 619—620.

[3]) Там же, стр. 620.

которой есть $\frac{1}{10}$, ко всей окружности невыразимо (nullam teneat rationem assignabilem). Поэтому для использования ряда Лейбница следует взять тангенс такой малой дуги, которая находится в известном отношении (in cognitam rationem) к окружности. «Здесь, однако,—пишет Эйлер,— мы тотчас наталкиваемся на то огромное неудобство, что не существует меньшего, чем радиус, рационального тангенса, которому соответствовала бы дуга, соизмеримая со всей окружностью». А из иррациональных тангенсов наиболее удобным представляется тангенс 30°, равный $\frac{1}{\sqrt{3}}$, и равенством $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ пользовались Миковини, а до него А. Шарп[1]) и Ланьи. Но такого рода вычисления сопряжены с чрезвычайным трудом, так как затруднительно уже извлечение квадратного корня из 3 или $\frac{1}{3}$ с большим числом знаков. Далее, поскольку цифры этого квадратного корня следуют без всякого порядка, то много времени отнимает развертывание отдельных членов ряда в десятичные дроби, чего не было бы при рациональном. Наконец, ряд

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3^3\cdot 7}+\frac{1}{3^4\cdot 9}-\ldots\right)$$

слабо сходится (series non admodum convergit): чтобы получить 100 цифр десятичного разложения π, требуется взять более 210 его членов.

Взвесив эти неудобства, продолжает Эйлер, он стал размышлять над тем, нельзя ли найти π посредством рациональных тангенсов, и «обнаружил, что это можно сделать, соединив две или более таких дуг, тангенсы которых рациональны». Здесь Эйлер развивает прием, который впервые применил английский астроном Дж. Мечин, вычисливший сто цифр числа π на основании тождества

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

---

[1]) А. Шарп вычислил 72 десятичных знака π (опубл. в 1705 г.).

и ряда для арктангенса[1]). Эйлер не упоминает здесь имени Мечина и, быть может, пришел к той же идее самостоятельно; во всяком случае, он применяет ее более общим образом, представляя π в виде различных линейных комбинаций нескольких дуг с рациональными тангенсами.

Прежде всего Эйлер формулирует тождество

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

откуда

$$\frac{\pi}{4}=\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot4\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4^2\cdot5}-\frac{1}{2\cdot4^3\cdot7}+\ldots, \\ +\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot9\cdot3}+\frac{1}{3\cdot9^2\cdot5}-\frac{1}{3\cdot9^3\cdot7}+\ldots \end{array}\right. \tag{1}$$

Хотя здесь приходится суммировать два ряда, но зато каждый из них сходится много быстрее (multo citius convergit) и вычисления с ними много легче и короче, чем с рядом для $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$. В последнем члены убывают примерно в отношении 1 : 3, а в рядах Эйлера в отношении 1 : 4 и, соответственно, 1 : 9. Чтобы получить 100 цифр, нужно взять 167 членов первого ряда и 105—второго, но это компенсируется тем, что можно сразу начинать вычисления, не извлекая предварительно с большим числом знаков квадратный корень. Наконец,—и это наиболее облегчает дело,—отдельные члены этих двух рядов развертываются в десятичные дроби быстро и легко, например $\frac{1}{2}=0{,}50000\ldots$, $\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots$, и вообще во многих членах

[1]) Мечин (J. Machin, ум. в 1751 г.) опубликовал свои вычисления в книге W. Jones, Synopsis palmariorum matheseos (1706), в которой отношение длины окружности к диаметру было впервые обозначено π. В основе приема Мечина—Эйлера лежит теорема о тангенсе суммы

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}.$$

При $a+b=\frac{\pi}{4}$, т. е. $\operatorname{tg}(a+b)=1$,

$$\operatorname{tg}b=\frac{1-\operatorname{tg}a}{1+\operatorname{tg}a}$$

рационален при рациональном $\operatorname{tg}a$.

сразу наступает повторение цифр (revolutio in figuris), чего никогда не бывает в членах для $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Выразив надежду, что этот метод встретит одобрение, Эйлер еще сообщает, что располагает, помимо приведенных, еще многими другими рядами, удобными для выражения числа π в десятичных дробях. Обозначая четверть окружности при радиусе 1 буквой q, он приводит следующие три разложения, члены которых вычисляются довольно легко, поскольку в них участвуют степени только 2 или же 2 и 5:

$$q=\frac{1}{1}+\frac{1}{3\cdot 2}-\frac{1}{5\cdot 2^2}-\frac{1}{7\cdot 2^3}+\ldots$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\ldots, \quad (2)$$

$$q=1+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{5\cdot 2^6}-\frac{1}{7\cdot 2^9}+\ldots$$
$$+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^7}-\frac{1}{5\cdot 2^{12}}-\frac{1}{7\cdot 2^{17}}+\ldots+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3\cdot 2^8}+\frac{1}{5\cdot 2^{14}}-\frac{1}{7\cdot 2^{20}}+\ldots$$
$$+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{3\cdot 2^{15}}+\frac{1}{5\cdot 2^{25}}-\frac{1}{7\cdot 2^{35}}+\ldots, \quad (3)$$

$$q=1+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 2^4}-\frac{1}{7\cdot 2^6}-\frac{1}{9\cdot 2^7}-\frac{1}{11\cdot 2^{10}}+\ldots$$
$$+\frac{2}{5}-\frac{2}{3\cdot 5^3}+\frac{2}{5\cdot 5^5}-\frac{2}{7\cdot 5^7}+\frac{2}{9\cdot 5^9}-\frac{1}{11\cdot 5^{11}}+\ldots \quad (4)$$

В конце письма Эйлер отмечает, что попытка Миковини доказать несоизмеримость длины окружности с диаметром, не достигает цели. Из рассуждения Миковини вытекала бы невозможность точного спрямления любой кривой, между тем как неисчислимое количество кривых спрямляемо.

Вопросы, рассмотренные в письме к Маринони, Эйлер кратко рассматривает в письме к Гольдбаху из Берлина от 9 апреля 1743 г. Приведя представления π в формах (1) и (2), он отмечает по-прежнему неудобства ряда для $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$, в членах которого, как он теперь выражается, нет периодического повторения цифр (revolutio periodica figurarum), на основании которого можно последующие цифры находить по предыдущим. «Напротив,—писал Эйлер,— в моих рядах это преимущество имеет место в каждом члене, так что я мог бы развернуть в десятичные дроби 10 членов моих рядов раньше, чем Ланьи развернул бы один-единственный член своего»[1]).

В том же круге идей составлена статья Эйлера «De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi» (О различных способах весьма точно выражать в числах квадратуру круга), представленная Конференции 20 февраля (ст. ст.) 1738 г. и опубликованная в «Comm. Acad. Petrop.», т. IX за 1737 г. (1744). Несомненно, что появление этой работы было тесно связано с описанными выше занятиями Эйлера проблемой квадратуры круга. Основная цель статьи—усовершенствование приближенных методов вычисления π с помощью бесконечных рядов. Содержание статьи выходит за рамки письма к Маринони; в некоторых пунктах письма Эйлер высказывается подробнее, чем в статье, в целом они друг друга дополняют.

В начале статьи Эйлер упоминает о вычислении длины окружности с помощью вписанных и описанных 96-угольников, произведенном Архимедом. Этот прием дал бы для π границы

$$96\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}<$$

$$<\pi<\frac{192\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}.$$

Затем упоминаются результаты вычислений Мечина и Ланьи и приводится 127 знаков, найденных последним.

---

[1]) Correspondance mathématique et physique..., t. I, p. 224. Свойства простых и смешанных периодических дробей были известны еще Дж. Валлису (1657, 1685).

Более предпочтительным, продолжает Эйлер, чем прием Архимеда, является применение бесконечных сходящихся рядов. При этом ряд должен быть «сильно сходящийся (vehementer convergens), т. е. такой, что всякий член много меньше предыдущего»[1]). Другое требование заключается в том, чтобы отдельные члены ряда составлялись из простых (simplicibus) чисел. Особо желательно, чтобы десятичное разложение каждого последующего члена легко получалось из предшествующего ему. Этому требованию лучше всего удовлетворяют геометрическая прогрессия и родственные ей ряды, всякий член которых получается путем простого деления предыдущего. Поэтому из рядов, выражающих круговые дуги, особенно подходят те, которые определяются по данному тангенсу соответствующей дуги, ибо они отличаются от геометрических прогрессий лишь тем, что отдельные члены приходится делить еще на нечетные числа, а это мало отягощает вычисления [2]).

Приведя ряд для $\operatorname{arctg} x$, Эйлер говорит об удобствах его вычисления при $x = \frac{1}{10}$ или $\frac{1}{100}$, или $\frac{1}{1000}$ и вместе с тем о трудности, возникающей из того, что соответствующие дуги несоизмеримы с окружностью. Сам ряд Лейбница сходится столь медленно, что для вычисления π со 100 цифрами потребовалось бы взять более 10^{50} его членов [3]).

Далее указываются неудобства, связанные с вычислением суммы ряда $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Как видно, Эйлер по своему обыкновению подробно знакомит читателя с достоинствами и недостатками излагаемых методов. Некоторые моменты освещены в письме к Маринони более выпукло (периодичность десятичного разложения для рациональных дробей и др.).

---

[1]) Leonhardi Euleri, Opera omnia, series I, vol. XIV, edid. C. Boehm et G. Faber. Lipsiae et Berolini, 1925, p. 247.

[2]) Там же.

[3]) При обычной оценке остатка ряда Лейбница получится $\frac{1}{2} 10^{100}$.

Коротко остановившись на преобразовании остатка ряда $\operatorname{arctg} x$ посредством известной формулы суммирования, Эйлер переходит к вычислениям, основанным на разложении дуги, тангенс которой 1, на две или более дуг с рациональными тангенсами. Он выписывает в несколько отличных обозначениях формулу

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{a} + \operatorname{arctg}\frac{1}{b},$$

где

$$1 = \frac{a+b}{ab-1} \quad \text{или} \quad b = \frac{a+1}{a-1},$$

и при $a=2$ и $b=3$ прежде всего получает разложение (1), причем подсчитывает, сколько требуется взять членов в каждом из составляющих рядов, чтобы вычислить π со 100 или 200 цифрами.

Таким же путем, добавляет Эйлер, π можно разбивать на две или более дуг бесконечным числом способов, дающих значительно более сходящиеся ряды (series multo magis convergentes). В частности, тождество

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{p} = \operatorname{arctg}\frac{1}{p+q} + \operatorname{arctg}\frac{q}{p^2+pq+1}$$

при $p=2$, $q=1$ дает

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7},$$

так что

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7};$$

соответствующее разложение сходится быстрее, чем для $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Еще удобнее разложения, основанные на формулах

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{70} + \operatorname{arctg}\frac{1}{99}.$$

Весьма удобны также другие ряды, как

$$\operatorname{arctg}\frac{p}{p^2-1}=\frac{1}{p}+\frac{2}{3p^3}+\frac{1}{5p^5}-\frac{1}{7p^7}-\frac{2}{9p^9}-\frac{1}{11p^{11}}+\ldots, \quad (5)$$

$$\operatorname{arctg}\frac{2p}{2p^2-1}=\frac{1}{p}+\frac{1}{3\cdot 2p^3}-\frac{1}{5\cdot 2^2p^5}-\frac{1}{7\cdot 2^3p^7}+\ldots, \quad (6)$$

$$\operatorname{arctg}\frac{3p}{3p^2-1}=\frac{1}{p}-\frac{1}{5\cdot 3^2p^5}+\frac{1}{7\cdot 3^3p^7}-\frac{1}{11\cdot 3^5\cdot p^{11}}+\ldots, \quad (7)$$

$$\operatorname{arctg}\frac{3p(p^2-1)}{p^4-4p^2+1}=\frac{3}{1p}+\frac{3}{5p^5}-\frac{3}{7p^7}-\frac{3}{11p^{11}}+\frac{3}{13p^{13}}+\ldots \quad (8)$$ [1])

Из (8) при $p=2$ получается удобное разложение для $\operatorname{arctg} 18$, а тогда в силу

$$\frac{\pi}{2}=\operatorname{arctg}18+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}$$

нетрудно вычислить π, разлагая $\operatorname{arctg}\frac{1}{18}$ в обычный степенной ряд. Точно так же, подставляя в (6) $p=1$ и используя тождество

$$\frac{\pi}{2}=\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}\frac{1}{2},$$

Эйлер получает разложение, совпадающее с (2) в письме к Маринони. Из только что приведенных общих разложений можно получить и остальные два выражения для π в письме к Маринони.

Разложение (3) вытекает из тождества

$$\frac{\pi}{2}=2\operatorname{arctg}\frac{4}{7}+\operatorname{arctg}\frac{8}{31}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\operatorname{arctg}\frac{1}{32}.$$

Здесь следует представить $\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$ как значение суммы (6) при $p=2$, $\operatorname{arctg}\frac{8}{31}$ как значение той же суммы при $p=4$; третье и четвертое слагаемые раскладываются в обычный ряд арктангенса.

[1]) Эйлер не сообщает, как получил свои разложения. Проверить их можно, продифференцировав обе части равенства по $t=\frac{1}{p}$. Например, для (6) получается

$$\frac{1+t^2}{1-t^2+t^4}=1+2t^2+t^4-t^6-2t^8-t^{10}+\ldots,$$

Наконец, разложение (4) следует из тождества

$$\frac{\pi}{2}=2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+2\operatorname{arctg}\frac{2}{3},$$

в котором $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$ представлен как значение суммы (5) при $p=2$.

Мы не будем входить в дальнейший разбор тех частей статьи Эйлера, которые не связаны с рассмотренными нами ранее вопросами, как, например, разложение π в бесконечные ряды арктангенсов, разложение $\sin x$ в некоторое бесконечное произведение и т. д. [1]). Краткое изложение этой работы и других родственных статей Эйлера читатель найдет в упоминавшемся обзоре Г. Фабера. Ограничимся двумя замечаниями.

Во-первых, укажем, что резюме соображений о вычислительных проблемах, связанных с применением к вычислению π ряда арктангенса, и разложение (1) Эйлер включил во «Введение в анализ» (т. I, гл. VIII, §§ 141 — 142).

Во-вторых, заметим, что усовершенствование приемов вычисления π занимало Эйлера почти до конца жизни. Так, в статье «Investigatio quarundam serierum, quae ad rationem peripheriae circuli ad diametrum vero proxime definiendam maxime sunt accomodatae» (Рассмотрение некоторых рядов, которые особенно подходят для весьма точного определения отношения окружности круга к диаметру), представленной Петербургской Академии наук 7 июня 1779 г., Эйлер использует весьма удобный для вычислений ряд

$$\operatorname{arctg} t=\frac{t}{1+t^2}\left[1+\frac{2}{3}\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3+\ldots\right],$$

впервые встречающийся у Иоганна Бернулли (1742), в

[1]) Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, т. I, стр. 135—136. Ср. также некоторые разложения в «Institutiones calculi differentialis» (1755), ч. II, гл. IV, § 86—93 (русск. изд.: Л. Эйлер, Дифференциальное исчисление, пер. М. Я. Выгодского, М. — Л., 1949, стр. 266 и след.).

сочетании с тождествами вроде

$$\pi = 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

$$\pi = 8 \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{7},$$

$$\pi = 20 \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 8 \operatorname{arctg}\frac{3}{79}.$$

Первое из этих тождеств Эйлер применял в письме к Маринони несколько ранее ряд (9), и первые два тождества применил для вычисления π Ч. Геттон (1776). Последнее тождество дает Эйлеру весьма быстро сходящийся ряд

$$\pi = \frac{28}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{2}{100} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \ldots\right] + \\ + \frac{30\,336}{100\,000}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{144}{100\,000} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{144}{100\,000}\right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{144}{100\,000}\right)^3 + \ldots\right].$$

В другой статье с помощью этого ряда Эйлер, по его собственным словам, вычислил π с 20 знаками примерно за один час [1]). Нынешних счетных машин, дающих за несколько десятков часов более 2000 знаков, тогда ведь не было.

VI.

В годы жизни и работы в Берлине Эйлеру также пришлось несколько раз выступать с отзывами о сочинениях о квадратуре круга. Упоминания о поступавших в Берлинскую Академию наук работах на эту тему не раз встречаются в ее протоколах за 1748, 1749, 1750, 1752—1755 и 1766 гг. [2]).

---

[1]) См. G. Faber, цит. статья, стр. CIX—IX.

[2]) См. E. Winter, Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften, стр. 132, 133, 135, 138, 140, 141, 148, 184, 191, 206, 218, 320, 323.

Мы кратко рассмотрим две рецензии Эйлера, хранящиеся в Архиве Германской Академии наук в Берлине [1]).

5 марта 1750 г. Эйлеру было передано на отзыв сочинение инженера и архитектора Тибо из Авиньона[2]). Полное название небольшой записки Тибо (2 листа большого формата) таково: «Sisteme [sic!] trouvé de la quadrature du cercle», подписано оно «Le chevalier Thibault ingenieur et architecte» и датировано 9 февраля 1750 г. [3]). Тибо без всякого обоснования рекомендовал для окружности длиной в 60 единиц принять диаметр равным 19, площадь круга—равновеликой площади квадрата с периметром, равным длине окружности, и поверхность шара равной 6-кратной площади большого круга. «Механика квадратуры круга,—писал Тибо,—относится к числу простейших, как это явствует из чертежа; нужно лишь сделать круг из картона...» и т. п. (л. 1). В конце записки автор заявлял, что, поскольку истинная квадратура теперь найдена, можно будет «без труда придти к познанию долгот» (л. 2 об.).

В своем отзыве от 15 марта 1750 г., написанном по-французски, Эйлер указывал, что вряд ли когда-либо встречалось столь нелепое сочинение по данному вопросу, как настоящее. Отметив грубые ошибки Тибо, Эйлер заключал: «Этого достаточно, чтобы показать, что автор не только не имеет никакого представления о трактуемом

---

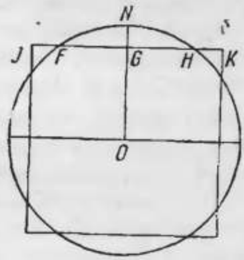
[1]) Не обнаружены пока отзыв Эйлера на сочинение о квадратуре круга, присланное из Парижа Клерже (Clerget), и ответ Эйлера Клерже на письмо, в котором последний рассматривал возражения в отзыве Эйлера. См. там же, стр. 138—141 (протоколы от 5 и 12 июня 1749 г. и от 10 июля и 4 сентября 1750 г.).

[2]) Там же, стр. 148. В протокольной книге на полях стоит помета К. Якоби: «То и другое еще сохранились» (Beides noch vorhanden).

[3]) Считаю своим приятным долгом выразить благодарность директору Архива Германской Академии наук в Берлине г-ну Ф. Ланге (F. Lange), который познакомил меня с рассматриваемыми здесь двумя сочинениями о квадратуре круга и отзывами на них, а также разрешил публикацию последних. Я благодарен также д-ру К.-Р. Бирману (K.-R. Biermann), который сообщил мне о существовании отзывов Эйлера. Материалы эти еще не имеют индекса Архива.

вопросе, но также есть полный невежда в первых началах Геометрии» [1]).

Через два с половиной года, в заседании 31 августа 1752 г., на котором присутствовал и Эйлер, секретарь Берлинской Академии Формей представил сочинение о квадратуре круга баварского инженера-капитана Гемпеля (Hempel). «Ему было поручено ответить,—гласит протокол,—что Академия не может уделять никакого внимания подобным открытиям» [2]). Тем не менее, еще два года спустя, когда в заседании 19 декабря 1754 г. секретарь представил сочинение о квадратуре круга Пюшеля из Митавы [3]), Эйлер решил дать о нем письменный отзыв.



Черт. 4.

Рукопись Пюшеля, написанная по-латыни на $6\frac{1}{2}$ листах большого формата, разделена на 55 параграфов. В первых 43 автор излагал некоторые свойства вписанных в круг многоугольников и луночек, а затем переходил к квадратуре круга. Он принимает площадь круга с диаметром d «точнейшим образом равной» (exactissime equale) сумме площадей квадрата, равновеликого $\frac{3}{4}d^2$, и утроенной площади прямоугольника со сторонами JF и GN (см. черт. 4, где сторона $JFGHK$ упомянутого квадрата проходит, как показывает Пюшель, через вершины F и H правильного вписанного 12-угольника) [4]).

---

1) Французский текст отзыва Эйлера публикуется в приложении к статье (см. стр. 210).

2) Там же, стр. 184.

3) Вот полное название сочинения Пюшеля: «Planimetria Circularis. Perfectum Tetragonismum, sive Quadraturam Circuli Finitam, Geometrica constructione demonstratam exhibens J. Georgio Henrico Püschel Germ. Soc. Reg. in Prussia Membro. A. 1754».

Каким-либо дополнительными сведениями о Пюшеле я не располагаю.

4) Обозначения на чертеже отличны от чертежа Пюшеля.

В отзыве от 21 марта 1754 г. [1]) Эйлер прежде всего замечает, что содержание первых 43 параграфов работы не вызывает возражений. Однако основное утверждение Пюшеля могло бы быть верным только в том случае, если бы величина $3 \cdot JF \cdot GN$ (которая у Пюшеля и в рецензии Эйлера обозначена в силу недосмотра первого $3 \cdot JF \times \times FN$) была точно равновелика площади 12 сегментов, заключенных между окружностью и вписанным правильным 12-угольником [2]). Доказательства такого равенства не существует, и искать его было бы потерянным трудом, так как, согласно Пюшелю, для площади круга единичного радиуса получается величина, большая чем 3,147114 и, следовательно, имеющая погрешность по избытку в 0,005522, или примерно в $^1/_{181}$ [3]).

Во второй период жизни Эйлера в России ему еще три раза пришлось иметь дело с сочинениями о квадратуре круга, представлявшимися Петербургской Академии наук.

В протоколе Конференции от 10 ноября 1774 г. сказано, что по просьбе некоего советника консистории Гартмана из Ростока «г. Эйлер-отец представил напечатанную квадратуру круга капитана артиллерии Ж.-Ф. Гроте; так как его теорема дает совершенно неправильные результаты, Конференция оставила ее без внимания» [4]). Через несколько месяцев в протоколе от 22 мая 1775 г. говорится, что Эйлер-отец взял на себя возвратить с кратким отзывом работу о квадратуре круга церковному старосте и школь-

---

[1]) Латинский отзыв Эйлера приведен в приложении к статье (см. стр. 210).

[2]) Площадь квадрата $\frac{3}{4}d^2 = 3r^2$ равновелика площади правильного вписанного 12-угольника.

[3]) Площадь $3 \cdot JF \cdot GN = 0{,}147114$ может быть вычислена при $r=1$ так:

$$JF = JG - FJ = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1), \quad GN = ON - OG = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}),$$

$$3 \cdot JF \cdot GN = \frac{3}{4}(3\sqrt{3} - 5) = \frac{\sqrt{243} - 15}{4} = 0{,}1471143\ldots$$

[4]) Протоколы, т. III, стр. 159—160. В протоколе Гроте назван Jean-François Grote: в это время протоколы писались по-французски.

ному учителю в Штеллау (Голштиния) Г. Варнгольцу, который представил свой труд 7 июля 1774 г. [1]).

В последний раз при жизни Эйлера задача о квадратуре круга упоминается в протоколах Конференции 13 марта 1780 г. В этот день была представлена Конференции брошюра астронома, корреспондента Парижской Академии наук Робергерра де Возанвилля (Alexandre—Henry—Guillaume Le Rohbergherre или Le Roberger de Vausenville, род. в 1722 г.) под названием: «Essai physico-géometrique contenant 1° la détermination du centre de gravité d'un secteur de cercle quelconque. 2° la résolution géometrique du problème de la quadrature définie du cercle-exposé à la censure du publique—dédié à Sa Sainteté et aux Monarques» [2]). Брошюра была передана Н. И. Фуссу для сообщения Л. Эйлеру. В протокольных бумагах хранится подробный отзыв, написанный по-французски рукой Фусса; можно полагать, что Фусс ознакомил своего наставника с сочинением Робергерра и с рецензией [3]). Из отзыва видно, что автор, несмотря на свое высокое ученое звание, в самом начале допустил грубые ошибки в механике и математике, которые дают для определения π уравнение

$$\sqrt{3}\pi^2 - 2\pi - 6\sqrt{3} = 0, \text{ из которого } \pi = \frac{1+\sqrt{19}}{\sqrt{3}} \approx 3{,}093962$$

Этот отзыв, однако, не был послан претенденту. В том же протоколе записано: «В записке, приложенной к этому сочинению, автор просит имп. Академию рассмотреть его

---

[1]) Протоколы, т. III, стр. 181—182. Сочинение Варнгольца (см. там же, протокол за 7 июля 1774 г., стр. 139) называлось: «Die wahre Quadratur des Circuls synthetisch ausgerechnet und theoretice völlig ins Licht gestellt von Hans Warnholtz».

Работы Гроте и Варнгольца и отзывы о них в протокольных бумагах Конференции не обнаружены.

[2]) «Физико-геометрический опыт, содержащий 1. определение центра тяжести любого сектора круга, 2. геометрическое решение задачи определенной квадратуры круга, представляется на суд публики и посвящается его святейшеству и монархам».

[3]) Отзыв Н. И. Фусса под названием «Examen de la Quadrature du Cercle, proposée par M^r le Rohberg—Herr de Vausenville» хранится в Архиве АН СССР, протокольные бумаги, разр. I, оп. 2—1780, № 3, лл. 3—5. Черновик отзыва есть в фонде Фусса (ф. 40, оп. 1, № 154).

открытие и сообщить ему формально свое суждение; но Конференция сочла более уместным вовсе не отвечать ему на такое предложение и, как она уже много лет поступала в подобных случаях, хранить полное молчание»[1]).

Поступая таким образом, Петербургская Академия наук присоединялась к решению, принятому незадолго перед тем Парижской Академией, которая, основываясь на печальном и долгом опыте, отказалась в 1775 г. от рассмотрения решений задач о квадратуре круга, трисекции угла, удвоении куба и о вечном двигателе [2]).

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. ОТЗЫВ Л. ЭЙЛЕРА О ТРИСЕКЦИИ УГЛА И КВАДРАТУРЕ КРУГА, ПРЕДЛОЖЕННЫХ И. БРУКНЕРОМ

Den 6-ten Martii hujus 1738 Anni ist H. Mechanicus Bruckner von des H. Cammerherrn von Korff Excellenz in die Conferenz introducirt worden, da derselbe zweyerley Arten der Quadraturae Circuli nebst einer geometrischen Trisectione Anguli proponirt.

I. Was nun erstlich die Trisectionem Anguli anlangt, so ist dieselbe sehr merkwürdig, weilen der fehler bey Winkeln, so kleiner

---

[1]) Протоколы, т. III, стр. 459—460.

В Архиве АН СССР хранится еще письмо сыну Л. Эйлера Иоганну-Альбрехту, бывшему тогда конференц-секретарем, от еще одного изобретателя квадратуры круга, их однофамильца Ф. К. Эйлера. Письмо датировано 1 мая 1775 г. Вот несколько строк из него в переводе Т. Н. Кладо: «... может быть, Ваше благородие, еще вспомните, что три года назад я взял на себя смелость запросить Вас, чего может ожидать от имп. Академии изобретатель геометрического доказательства квадратуры? По-видимому, Вы сочли излишним ответить на это и ничего мне не сообщили...». Автор письма считает справедливым установить «маленькое вознаграждение» за доказательство того, что длина окружности уклонится, скажем, на $^1/_{1000}$ диаметра от принятого значения, и удваивать премию за каждую следующую $^1/_{1000}$. Он просит Иоганна-Альбрехта Эйлера сообщить ему «благосклонным письмом, на что может надеяться в блистательной России автор подобного открытия» (Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 62, лл. 95—96). Денежное вознаграждение было целью не одного Ф. К. Эйлера. Это относится и к Робергерру, убийственную характеристику которого см. у J. F. Montucla, Histoire des mathématiques, t. IV, p. 632.

[2]) Подробнее см. J. F. Montucla, Histoire des mathématiques, t. IV, pp. 641—643.

als 80 grade sind niemals auf eine Minute, und bey Winkeln so kleiner als 70° niemals auf eine halbe Minute kommt. Weswegen...[1]) frey gestehe, daß mir noch keine bessere und bequemere Art jemals vorgekommen. Ohngeacht aber sich diese Methode auf grössere Winkel als von 80°, nicht erstreckt, indem bey 90° Graden um 13′, bey 120° aber um 53′ gefehlet wird, so gereichet doch dieses der Methode selbst zum nicht geringsten Nachtheil, indem die Trisectio grosser Winkel allzeit auf die Trisectionem kleiner Winkel gebracht werden kan.

II. Was die beyden Quadraturas Circuli anbelangt, so ist eine zu groß, und die andere zu klein. Diejenige welche zu klein ist und mit mir vorher communicirt worden, giebt in einem Circul dessen Diameter 100 000 Schuh hält, für die Peripherie 313 864 Schuh da nun die wahre Länge der Peripherie ist 314 159, so ist diese Quadratura Circuli um 295 Schuh zu klein in einem Circul nehmlich dessen Diameter 100 000 Schuh hält.

III. Die andere Quadratura Circuli, welche der *H*. Bruckner selbst für weit wichtiger hält, giebt für die Peripherie 315470 Schuh, wann der Diameter 100 000 Schu hält, demnach ist diese gefundene Peripherie grösser als die wahre und das um 1311 Schuh. Wann man nun des Archimedis angegebene Proportion von 7 zu 22 dagegen hält, so kommt nach derselben für die Peripherie eben desjenigen Zirkuls 314285 Schu, ist allso des Archimedis Fehler nur 126 Schu. Dahero des *H*. Bruckners erstere Quadratur ungefehr zweymal, die letztere aber mehr als 10 mal mehr fehlt als der Archimedes.

Die erstere Art des H. Bruckners könnte aber auf diese Art verbesseret werden: Als um die Länge der halben Peripherie ADB, so theile man dieselbe in D und AD wiederum in E in zwey gleiche Theile. Ferner ziehe man die Chordam AD, und verlängere dieselbe in J, so daß DJ so groß wird als AD. Weiter aus J durch E ziehe man den Bogen Eg, und auf EC aus F setze man Fh gleich Fg. Endlich setze man zu JA noch AK gleich dem Eh, so wird die Linie JK beynahe so groß seyn, als die halbe Peripherie BDA. Dann wann der Diameter von 100000 Schuen angenommen wird, so kommt auf diese Art die Peripherie von 314149 Schuen, fehlt allso nur um 10 Schu, und ist folglich 30 mal accurater als die, welche H. Bruckner gegeben.

Weit accurater aber ist des Metii Manier welcher um die gantze Peripherie eines Circuls zu finden, den Diameter drey mal nimmt, und dazu noch den siebenten Theil des Diameters hinzusetzt; von diesem siebenten Theil aber schneidt er noch seinen $\frac{1}{113}$ Theil ab; da dann diese Linie der Peripherie so nah kommt, daß in einem Circul dessen Diameter 100000 Schu halt nicht um einen Zoll gefehlt wird, und auf diese Art kann man noch allzeit näher kommen, ja so nah als man will, accurat aber niemals.

Merkwürdig ist diejenige Methode durch welche der vermals berühmte Hugenius einen jeglichen Circulbogen in eine grade Linie

[1]) Не разобрано одно слово.

verwandeln gelehrt. Als es sey der Bogen ACB gegeben, so zieht er erstlich seine Chordam AB, und auch des halben Bogens Chardam AC, welche er in D verlängert, so daß CD so groß ist als AC. Ferner zieht er aus A mit der Zirculöffnung AD den Bogen Dg, welcher die Chordam AB in g durchschneiden wird, und nimmt von Bg den dritten theil welchen er noch zu AD setzt, als De. Wann dieses geschehen, so wird die Linie Ae dem Bogen ACB ziemlich genau gleich sein. Wann zum Exempel der Radius AO gesetzt wird von 100000 Schuen; und der Bogen ACB von 45°; so ist die Chorda AB gleich 76536 $\frac{68}{100}$; und die Chorda AC gleich 39018 $\frac{6}{100}$ Schuh, folglich die doppelte Chorda $AD=78036\,\frac{12}{100}$; dahero ist $Bg=1499\,\frac{44}{100}$ Schuh dessen drittel nehmlich De beträgt 499 $\frac{81}{100}$ Schuh; diese zu AD gethan machen 78535 $\frac{93}{100}$ Schuh. Der Bogen ACB aber selbst hält 78539 $\frac{81}{100}$ Schuh. So daß bey diesem Bogen nicht gar um 4 Schuh gefehlt wird. Der fehler aber wird noch weit kleiner, je kleiner der Bogen ACB angenommen wird. Eben diese Art aber kan noch verbessert werden, so daß sie sehr viel näher ei-n trifft. Allso nachdem man den Bogen AB in D in zwey gleiche Theiel zertheilet, so ziehe man die Chordas AB, AD wie auch den Sinum BE. Hierauf nehme man AD doppelt als AF [1]), und dieser AF schneide man gleich ab die Linien AG und BH. Ferner nehme man BJ zwanzigmal so groß als BG und setze darauf BL so groß als EH. Weiter theile man LJ in 5 gleiche Theile, davon Lm einer sey und von Lm nehme man den drittel Ln, und endlich noch von Ln seinen drittel Lp. Diesem Lp setze man FK gleich, so wird die Linie AK dem Bogen ADB gleich seyn. Wenn man wie im vorigen den Radium AC von 100000 Schuen und den Bogen ADB von 45° graden setzt, so wird auf diese Art der Bogen ADB von 78539 $\frac{49}{100}$ Schuen gefunden, fehlt allso ungefehr nur um einen fünftel Schuh; welches bei einem so grossen Circel als wir setzen, nicht considerabel ist. Auf diese Art könnte man weiter fortfahren noch immer accuratere Constructionen auszufinden, dieselben aber werden immer weitläufiger, und würden auch von geringem Nutzen seyn. Daß man aber eine vollkommen accurate Art einen jeglichen Bogen zu rectificiren sollte finden können, ist absolute unmöglich, und die Unmöglichkeit eben so deutlich dargethan und bewiesen worden, als daß in einem Triangel zwey Seiten zusammen genommen nicht kleiner seyn können als die dritte. Ist allso alle Mühe, Arbeit und Unkösten verloren, welche hierauf angewandt werden.

---

[1]) Эйлер здесь допускает описку: должно быть AF doppelt als AD.

2. ПИСЬМО Л. ЭЙЛЕРА К ДЖ. МАРИНОНИ

Viro amplissimo
J. J. Marinonio
S. P. D.
Leonhard Euler

Accepi Vir amplissime ex humanitate Tua decisionem controversiae Leistnerianae una cum observationibus Ecclipsis Solaris anno praeterito factis maximasque Tibi habeo gratias, quod utrumque mecum tam benevole communicare voluisti. Neque amplius dubito quin Leistnerus cum ob summam judicii auctoritatem tum etiam ob gravissimas rationes expositas maximos suos errores tandem agnoscat atque submisse acquiescat. Perlegi etiam summa cum voluptate scripta Clarissimi Micovini ingenti eruditione repleta, in quibus non solum foedissimos Leistneri errores acerrime perstringit et quaestionis momentum doctissime enucleat, verum etiam quadraturae circuli limites a Ludelfo a Ceulen datos proprio calculo per seriem Leibnitianam qua arcus circuli ex tangente definitur, confirmat. Affert quidem ista series in hoc negotio maximam subsidium verumtamen nisi peculiaria compendia adhibeantur, radicis extractiones laborem vehementer multiplicant. Nam posito circuli radio $=1$, si tangens capiatur $=t$ erit utique arcus respondens $=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+$etc. hujusque seriei ope eo facilius et expeditius arcus potest definiri, quo minor accipiatur tangens t; ita si t ponatur $=\frac{1}{10}$ levi labore longitudo arcus ad quotcunque figuras exhiberi posset, interim tamen inde nihil ad rationem, quam peripheria tota ad diametrum tenet, definiendam concludere licet, eo quod arcus cujus tangens est $=\frac{1}{10}$ ad totam peripheriam nullam teneat rationem assignabilem. Quam ob rem si hanc seriem ad utilitatem accomodare velimus, pro t non solum tangentem arcus exigui substituere debemus, sed etiam ejusmodi arcus, qui ad totam peripheriam cognitam teneat rationem: hic autem statim occurrit ingens incommodum, ut nulla tangens radio minor existat rationalis, cui respondeat arcus toti peripheriae commensurabilis. Ex irrationalibus vero aptissima videtur tangens 30 graduum, quae est $=\frac{1}{\sqrt{3}}$, qua non solum Clarissimus Micovinus est usus, sed ante eum jam Sharpius Anglus et adeo Lagny, qui ejus ope stupendo labore expressionem peripheriae ad 127 figuras produxit. Facile autem intelligitur quantus labor ob irrationalitatem tangentis ad calculum accedat; primo enim jam insignem parit difficultatem extractio radicos ex 3 vel $\frac{1}{3}$ ad tot figuras; deinde etsi unica radicis extractio ad omnes terminos sufficit, tamen evolutio singulorum seriei terminorum ob figuras istius radicis nullo ordine progredientes multum temporis requiret, quod non eveniret, si tangens rationalis acciperetur. Tertio quoque series non admodum convergit, nam posita tangente $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ sit arcus $= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \right.$ $\left. + \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^3\cdot 7} + \frac{1}{3^4\cdot 9} - \text{etc.}\right)$, cujus seriei termini tantum in tripla fere ratione decrescunt. Quare si hinc peripheria ad centum figuras expressa desideretur, terminos plus quam 210 accipere opporteret. His incommodis perpensis in id sum meditatus, an non ex tangentibus rationalibus ratio peripheriae ad diametrum cognosci queat; hocque ita fieri posse deprehendi, si duo pluresve ejusmodi arcus quorum tangentes sint rationales conjungantur. Ita arcus 45°, cujus tangens est $=1$, in duos arcus secari potest, quorum alterius tangens est $= \frac{1}{2}$, alterius $= \frac{1}{3}$; horum igitur binorum arcuum uterque satis expedite per seriem illam poterit investigari, quibus inventis summa eorum dabit arcum 45°. Erit itaque arcus 45° seu octans totius peripheriae his duabus seriebus, simul sumtis aequalis.

$$+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4^2\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 4^3\cdot 7}+\frac{1}{2\cdot 4^4\cdot 9}-\frac{1}{2\cdot 4^5\cdot 11}+\text{etc.}$$

$$+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 9\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 9^2\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 9^3\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9^4\cdot 9}-\frac{1}{3\cdot 9^5\cdot 11}+\text{etc.}$$

Quamquam autem hoc modo duae series summandae occurrunt, tamen labor calculi ob plures rationes multo facilior et brevior erit, quam ille, quem superior series et tangente $\frac{1}{\sqrt{3}}$ nata, postulabat. Primo enim utraque series multo citius convergit, quam illa, prior scilicet in ratione quadrupla, et posterior in ratione nonnupla; atque ut expressio ad 100 figuras exacta inveniatur, sufficiet prioris seriei terminos 167, posterioris vero 105 assumsisse. Deinde hoc modo calculus statim incipi potest, neque ante opus est radicem quadratam ad totidem figuras extrahere, qui labor certe tantumdem fere temporis requirit, quam evolutio centum terminorum ex his meis seriebus, quo ipso major terminorum numerus, qui mea methodo sumi debent, plus quam compensatur. Tertio, quod maximum afferet adiumentum, singuli mearum serierum termini admodum facile et cito evolvuntur; sic erit $\frac{1}{2} = 0{,}5000$ etc. et $\frac{1}{3} = 0{,}3333$ etc. cum in illa serie ex tangente $\frac{1}{\sqrt{3}}$ orta jam primus terminus tantum ut scribatur multum temporis requirat. Tum vero etiam in plurimis sequentibus terminis, mearum serierum, dum evolvuntur, statim revolutio in figuris observabitur, quod in terminis illius seriei nunquam contingit. Atque haec methodus fortasse Clarissimo Micovino non displicebit, quam ideo, si Tibi Vir *amplisime commodum* videbitur, cum ipso communicare poteris.

Habeo praeterea alias complures series satis idoneas ad rationem peripheriae ad diametrum in fractionibus decimalibus exprimendam. Sit nempe quadrans peripheriae$=q$ posito radio$=1$, inveni esse

$$\text{I}\qquad q=\begin{cases}\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3\cdot 2}-\dfrac{1}{5\cdot 2^2}-\dfrac{1}{7\cdot 2^3}+\dfrac{1}{9\cdot 2^4}+\dfrac{1}{11\cdot 2^5}-\text{ etc.}\\[2mm] +\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{3\cdot 2^3}+\dfrac{1}{5\cdot 2^5}-\dfrac{1}{7\cdot 2^7}+\dfrac{1}{9\cdot 2^9}-\dfrac{1}{11\cdot 2^{11}}+\text{ etc.}\end{cases}$$

$$\text{II}\qquad q=\begin{cases}+1+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}-\dfrac{1}{5\cdot 2^6}-\dfrac{1}{7\cdot 2^9}+\dfrac{1}{9\cdot 2^{12}}+\dfrac{1}{11\cdot 2^{15}}-\text{ etc.}\\[2mm] +\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^7}-\dfrac{1}{5\cdot 2^{12}}-\dfrac{1}{7\cdot 2^{17}}+\dfrac{1}{9\cdot 2^{22}}+\dfrac{1}{11\cdot 2^{27}}-\text{ etc.}\\[2mm] +\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3\cdot 2^8}+\dfrac{1}{5\cdot 2^{14}}-\dfrac{1}{7\cdot 2^{20}}+\dfrac{1}{9\cdot 2^{26}}-\dfrac{1}{11\cdot 2^{32}}+\text{ etc.}\\[2mm] +\dfrac{1}{2^5}-\dfrac{1}{3\cdot 2^{15}}+\dfrac{1}{5\cdot 2^{25}}-\dfrac{1}{7\cdot 2^{35}}+\dfrac{1}{9\cdot 2^{45}}-\dfrac{1}{11\cdot 2^{55}}+\text{ etc.}\end{cases}$$

in quibus seriebus aliae praeter binarii potestates non occurrunt; quamob rem evolutio satis erit expedita

$$\text{III}\qquad q=\begin{cases}1+\dfrac{1}{3\cdot 2}+\dfrac{1}{5\cdot 2^4}-\dfrac{1}{7\cdot 2^6}-\dfrac{1}{9\cdot 2^7}-\dfrac{1}{11\cdot 2^{10}}+\dfrac{1}{13\cdot 2^{12}}+\dfrac{1}{15\cdot 2^{13}}+\text{ etc.}\\[2mm] \dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{3\cdot 5^3}+\dfrac{2}{5\cdot 5^5}-\dfrac{2}{7\cdot 5^7}+\dfrac{2}{9\cdot 5^9}-\dfrac{1}{11\cdot 5^{11}}+\dfrac{1}{13\cdot 5^{13}}-\dfrac{1}{15\cdot 5^{15}}+\text{ etc.}\end{cases}$$

quae ob potestates binarii et quinarii non difficulter expedietur. Ceterum credo Clariss. Micovinum in sua ad Te data epistola priori non animadvertisse demonstrationem, quam dedit ad incommensurabilitatem peripheriae cum linea recta evincendam negotium prorsus non conficere; ex ea enim non solum sequeretur, circulum cum linea recta comparari non posse, sed etiam nullam omnino lineam curvam futuram esse rectificabilem, id quod tot innumerabilium linearum curvarum rectificationes aliter ostendunt.

Vale vir Amplissime mihique favere perge

Dabam Petropoli d. 12 Julii 1740

L. Euler

3. ОТЗЫВ Л. ЭЙЛЕРА О КВАДРАТУРЕ КРУГА ТИБО

Ayant lû l'ecrit de Mr. Thibault, où il pretend d'avoir trouvé la quadrature du cercle, je doute soit qu'on ait jamais vu une piećе aussi absurde sur ce sujet, que celle-cy. D'abord il pretend que la circonference d'un cercle etant exprimée par 60. son diametre sera 19. dont la fausseté est evidente de soi meme. Mais ce qui montre la plus profonde ignorance dans la Geometrie c'est que quand meme la proportion de 60. à 19. seroit juste, toutes les conclusions qu'il en tire, ne laisseroient pas d'être grossierement fausses. Car pour trouver l'aire du cercle il ne multiplie pas la circonference par le quart du diametre, mais par la seizieme partie de la circonference meme. D'où il tire l'aire d'un cercle, dont la circonference est 60, exprimée par 225, or on sait que dans ce cas l'aire est plus grande que 286.

L'Auteur commet encore une faute nouvelle egalement grossiere, quand il veut trouver la surface d'un globe laquelle est, à ce qui est demontré dans tous les elemens, quatre fois plus grande que l'aire d'un grand cercle. Mais l'Auteur la soutient six fois plus grande.

Cela suffit pour faire voir, que l'Auteur n'a non seulement aucune idée de la question dont il s'agit, mais qu'il est meme entierement ignorant dans les premiers elemens de Geometrie.

Berlin ce 15 Mars 1750 — *L. Euler*

4. ОТЗЫВ Л. ЭЙЛЕРА О КВАДРАТУРЕ КРУГА ПЮШЕЛЯ

Examinata Cl. Püschelii Planimetria Circulari omnia recte se habere deprehendi usque ad § 43 inclusive, postquem custos § 44 polliceri videtur, cujus loco autem problema sequitur quod constructionem quadrati circulo aequalis promittit.

Ibi autem affirmat aream circulari aequalem esse $^3/_4$ quadrati diametri una cum triplo rectanguli $JF \times FN$, id quod verum esse nequit, nisi hoc triplum rectangulum aequale sit vel duodecim segmentis inter circulum et dodecagonum relictis, vel sex illis segmentis x, quae figura 14 exhibet. Verum nusquam in praecedentibus aequali tatem hanc inter illud triplum rectungulum et memorata segmenta demonstravit, neque adeo huiusmodi demonstrationis, in qua cardo rei versatur, ullum vestigium reperitur. Quin etiam Cl. Auctor in hac demonstratione indaganda operam esset perditurus, cum inde sequeretur, si quadratum radii unitate exponatur, aream circuli futuram esse majorem quam $3\frac{147\,114}{1\,000\,000}$, dum tamen certum est, eam minorem esse quam $3\frac{141\,592}{1\,000\,000}$: ita ut Auctor in excessu peccet parte 5522/1 000 000 seu 1/181 circiter.

Berolini d. 21 Dec. 1754 — *L. Euler*

ЭЙЛЕР И ЕГО АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

И. Г. Мельников

1. Вопросы теории чисел интересовали крупнейших математиков древности. Ими занимались: Пифагор (VI век до н. э.), Евклид (IV—III век до н. э.), Эратосфен (III век до н. э.), Диофант (III век).

Глубокий интерес к задачам теории чисел проявил величайший математик XVII века Пьер Ферма. Ему удалось открыть ряд важных предложений, которые он без доказательства записал на полях «Арифметики» Диофанта. В научном наследии Ферма почти нет указаний на методы доказательства его арифметических теорем, нет никаких указаний и о путях, приведших его к познанию этих теорем.

Ясно, что такое положение не могло способствовать каким-либо приложениям теорем Ферма и интенсивному развитию науки. «В этом состоянии,—писал П. Л. Чебышев,—открытия Ферма служили только вызовом геометров на изыскания в теории чисел. Но несмотря на весь интерес этих изысканий, до Эйлера на них никто не вызывался. И это понятно: эти изыскания требовали не новых приложений приемов, уже известных, и не новых развитий приемов, прежде употреблявшихся; эти изыскания требовали создания новых приемов, открытия новых начал, одним словом, основания новой науки. Это было сделано Эйлером» [1]).

---

[1]) П. Л. Чебышев, Полное собрание сочинений, т. I, М.—Л., 1944, стр. 10.

До Эйлера теории чисел как самостоятельной науки не было.

Леонард Эйлер (1707—1783) был первым профессиональным ученым, проявившим подлинную заботу о развитии теории чисел.

Эйлер создал теорию степенных вычетов, разработал теорию квадратичных вычетов, развил теорию делимости, положил начало теории квадратичных форм, исследовал вопрос о разложении больших чисел на простые множители. Много внимания он уделил различным задачам так называемого диофантова анализа. Эйлер является основоположником аддитивной теории чисел. Он первый стал применять средства и методы математического анализа в различных теоретико-числовых исследованиях и таким образом является основателем аналитической теории чисел.

Можно без преувеличения сказать, что работы Эйлера заложили прочный фундамент общей теории чисел, дали начало совершенно новым направлениям этой науки, подготовили условия для дальнейшего ее развития [1]).

Блестящие успехи Лагранжа, Лежандра и в особенности Гаусса в области теории чисел несомненно были связаны с огромной предварительной работой, выполненной Эйлером.

Интерес П. Л. Чебышева к проблемам теории чисел, по-видимому, возник в связи с изучением арифметического наследия Эйлера.

Разумеется, влияние Эйлера испытали на себе многие другие арифметики, включая и современных.

2. На своей родине, в Швейцарии, Эйлер не имел никаких побуждений к исследованиям в области теории чисел. Математические интересы Эйлера складывались под влиянием выдающегося аналиста того времени И. Бернулли (1667—1748). Можно было предвидеть, что при наличии благоприятных условий задача дальнейшего усовершенствования математического анализа будет ведущей во всей научной деятельности Эйлера.

[1]) О вкладе Эйлера в теорию чисел см. Б. А. Венков, О работах Леонарда Эйлера по теории чисел. «Леонард Эйлер. 1707—1783». Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти, Изд. АН СССР, М.—Л., 1935, стр. 81—87.

Открытия, сделанные Эйлером в области анализа, оказались столь значительными, что впоследствии Лаплас с полным основанием называл его великим аналитиком, отцом современного анализа.

После анализа наиболее почетное место среди наук, интересовавших Эйлера принадлежит теории чисел. Исключительно важные заслуги Эйлера в этой области позволяют отнести его к числу величайших арифметиков.

Теорией чисел Эйлер заинтересовался в Петербурге, частью в процессе переписки с одним из первых русских академиков Христианом Гольдбахом (1690—1764).

Гольдбах, находившийся в Москве, в приписке к письму от 1 декабря 1729 г. спрашивал Эйлера: «Известно ли тебе замечание Ферма о том, что все числа вида $2^{2^{x-1}}+1$, именно 3, 5, 17 и т. д., суть простые, причем сам он, по его признанию, не мог этого доказать и, насколько я знаю, после него никто не доказал» [1]).

22-летний Эйлер, уже испытавший свои силы в различных отделах математического анализа и его приложений, охотно откликнулся на этот вопрос.

С этого момента проблемы теории чисел в переписке Эйлера с Гольдбахом начинают занимать видное место. Теория чисел становится излюбленным предметом занятий Эйлера. Академик В. Я. Буняковский в статье «Краткий исторический обзор успехов теории чисел» охарактеризовал отношение Эйлера к теории чисел следующим образом: «Эйлер, объявший необыкновенным своим гением все отрасли точных наук, с особенною страстию занимался теорией чисел, особливо же в последние годы своей жизни. Одно поименование всех его открытий на сем поприще наполнило бы целые страницы» [2]).

Теорией чисел Эйлер занимался полвека. За это время он написал около ста статей. Каждый новый результат, каждое новое доказательство, полученное Эйлером в этой области, радовали его в особенности.

---

[1]) Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle, т. I, СПб., 1843, стр. 10.

[2]) Летопись факультетов (С.-Петербургского университета) на 1835 г., изданная в двух книгах А. Галичем и В. Плаксиным, книга II, стр. 109—110.

Эйлер любил подчеркивать своеобразие арифметических истин. В мемуаре «Арифметические теоремы, доказанные новым методом»[1]), представленном в 1758 г. в Петербургскую Академию наук, он писал: «Приходится немало удивляться резкому различию, которое в этом отношении существует между арифметическими и геометрическими теоремами: едва ли можно найти хоть одно геометрическое предложение, доказательство истинности или ложности которого не было бы вполне доступно; напротив, относительно природы чисел известны многие предложения, истинность которых мы можем признать, но отнюдь не доказать. Множество теорем этого рода оставил Ферма, который утверждал, что нашел доказательства для большей их части, и приходится немало сожалеть о том, что эти доказательства, к великому ущербу для нашей науки, погибли вместе с его записями. Но в тех доказательствах арифметических теорем, которые стали нам известны или были восстановлены, блистает столь выдающаяся сила ума, какую мы едва ли можем усмотреть в каком-либо другом роде доказательств; так что в этих случаях должна быть ценима не столько польза для науки о числах, сколько величайшая тонкость, отличающая доказательства этого рода перед другими. Поэтому, хотя я работал в этой области больше, чем многим показалось бы нужным, я не считаю свой труд потерянным и думаю, что не бесполезны будут и предлагаемые здесь теоремы»[2]).

Последние слова цитаты относятся к теоремам о важнейшей числовой функции—«функции Эйлера» и к «теореме Эйлера», обобщающей малую теорему Ферма.

3. Весьма знаменательно, что деятельность Эйлера в области теории чисел началась с опровержения гипотезы Ферма.

В своем первом мемуаре по теории чисел «Замечания об одной теореме Ферма и других теоремах, относящихся

---

[1]) L. Euler, Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata.—Novi Comment. Petr., т. VIII за 1760—1761 гг. (1763), стр. 74; Comm. arith. coll., т. I, СПб., 1849, стр. 274; Opera omnia, серия 1, т. II, 1915, стр. 533—534.

[2]) Эта и дальнейшие цитаты из сочинений Эйлера приводятся в переводе с латинского, выполненном Я. М. Боровским.

к простым числам»[1]), Эйлер указал, что теорема Ферма неверна: не все числа вида $2^{2^m}+1$ являются простыми. Он обнаружил, что число $2^{2^5}+1=4\,294\,967\,297$ делится на 641.

Это открытие, сделанное Эйлером случайно, означало, что «...Задача нахождения простого числа, бо́льшего любого заданного числа, остается до сих пор не решенной». Заключение Эйлера не утратило своего значения и в наши дни.

Первые изыскания Эйлера носят исключительно эмпирический характер. Наблюдение, пусть несовершенной индукции,—единственное средство, которым Эйлер пока располагает.

Свои замечания о числах вида 2^n-1 он сопровождает следующим откровенным заявлением: «Эти наблюдения я вывел из одной изящной теоремы, доказательства которой у меня также нет, но в истинности которой я твердо уверен. Теорема такова: a^n-b^n всегда делится на $n+1$, если $n+1$ — простое число, а a и b на него не делятся; доказательство же ее я считаю тем более трудным, что она справедлива только, если $n+1$—простое число».

Затем Эйлер формулирует еще шесть теорем. Об этих теоремах он сообщает следующее: «... Они либо вовсе не поддаются доказательству, либо вытекают как следствие из таких предложений, которые не могут быть доказаны; я счел поэтому уместным привести их здесь».

Отсюда видно, какие огромные трудности испытывал Эйлер в самом начале своих теоретико-числовых исследований; свои первые результаты он не сразу сумел обосновать.

И все же этот начальный этап имел немаловажные последствия. Среди теорем, сформулированных Эйлером, мы обнаруживаем малую теорему Ферма—важное следствие его «изящной теоремы». Уже здесь встречается частный случай известной «теоремы Эйлера»: «При n простом каж-

[1]) L. Euler, Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus.—Commentarii Acad. Sc. Petr., т. VI за 1732—1733 гг. (1738), стр. 103—107; Comm. arith. coll., т. I, стр. 1—3; Opera omnia, серия 1, т. II, стр. 1—5.

дая степень, показатель которой равен $n^{m-1}(n-1)$, будучи разделена на n^m, дает в остатке либо 0, либо 1». Далее правильно сформулированы теоремы о делимости чисел $3^n \pm 1$, $3^n \pm 2^n$, $6^n \pm 1$ на простое число $2n+1$.

Первая работа показательна во многих отношениях. Эйлер не скрывает своих неудач, он почти не знает арифметического наследия Ферма (это видно из того, что открытие малой теоремы Ферма Эйлер приписывает себе), но он уже догадывается о связи между отдельными, казалось бы чуждыми друг другу, фактами теории чисел. Эйлер формулирует теоремы, значение которых позднее он сам раскроет в теориях степенных и квадратичных вычетов.

4. Начав теоретико-числовые исследования с раскрытия ошибки Ферма, Эйлер естественно должен был проявить известную настороженность по отношению к другим утверждениям Ферма. В этой связи представляет интерес высказывание, содержащееся в мемуаре «Доказательство некоторых теорем, относящихся к простым числам»[1]). Эйлер указывает, что если бы удалось подтвердить истинность арифметических теорем Ферма, то это «весьма содействовало бы развитию науки о числах, часто [содержащей положения], не поддающиеся анализу».

Но так как сам Ферма нигде не изложил свои доказательства, Эйлер заключает: «По-видимому Ферма к большей части своих теорем пришел посредством индукции, которая представляет собой едва ли не единственный путь нахождения этих положений. Однако я мог бы на многих примерах показать, как мало значения приходится придавать индукции в этих вопросах; достаточно будет привести один из этих примеров, исходящий от самого Ферма». Затем приводится уже известное нам утверждение, к которому Ферма действительно мог придти лишь путем несовершенной индукции.

«По указанной причине, — пишет далее Эйлер, — все такие свойства чисел, которые опираются на одну только индукцию, я считаю недостоверными до тех пор, пока они

---

[1]) L. Euler, Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio.—Comment., т. VIII за 1736 г. (1741), стр. 141—146; Comm. arith. coll., т. I, стр. 21—23; Opera omnia, серия 1, т. II, стр. 33—37.

не будут либо подкреплены аподиктическими доказательствами, либо вовсе опровергнуты».

Этот уже давно сложившийся критерий представляет характеристическую особенность всей математики. Эйлер его формулирует для молодой только формирующейся еще науки теории чисел.

Арифметик может наблюдать явления в мире чисел лишь на первом этапе своей работы, когда он «нащупывает», открывает истину. Здесь он экспериментирует точно так же, как физик, химик и другие представители индуктивных наук. На следующем этапе он должен доказать свое утверждение, а это гораздо сложнее, чем первое.

В поисках доказательства Эйлеру нередко приходится идти длинным, тернистым путем. Последовательность и терпение, проявляемые им при этом, поистине удивительны. Приведем один пример.

В письме к Гольдбаху от 6 марта 1742 г.[1]) Эйлер впервые доказывает теорему Ферма: сумма двух взаимно-простых квадратов не имеет делителей вида $4n-1$, иначе говоря, простыми делителями суммы двух взаимно-простых квадратов могут быть только число 2 и числа вида $4n+1$.

Через пять лет, в письме к Гольдбаху от 6 мая 1747 г.[2]), Эйлер дает доказательство важной теоремы: сумма двух взаимно-простых квадратов не может иметь делителей, не являющихся суммой двух квадратов.

Нетрудно видеть, что если бы можно было показать, что к а ж д о е простое число вида $4n+1$ является делителем суммы двух взаимно-простых квадратов, то отсюда вытекала бы знаменитая теорема Ферма о том, что всякое простое число вида $4n+1$ есть сумма двух квадратов. Но именно это Эйлеру не сразу удалось сделать.

В работе «О числах, которые представляют агрегат двух квадратов»[3]) Эйлер приводит читателя к этому решающему

---

[1]) Correspondance..., т. I, стр. 116—117.

[2]) Там же, стр. 417—418.

[3]) L. E u l e r, De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum.—Novi Comment. Petr., т. IV за 1752—1753 гг. (1758), стр. 3—40; Comm. arith. coll., т. I, стр. 155—173; Opera omnia, серия 1, т. II, стр. 295—327.

пункту и предлагает «попытку доказательства» (Tentamen demonstrationis). Она состоит в следующем: для любого простого $p=4n+1$ и чисел a и b, не делящихся на p, число

$$a^{4n}-b^{4n}=(a^{2n}-b^{2n})(a^{2n}+b^{2n})$$

делится на p. Поэтому, если можно будет выбрать a и b так, чтобы число $a^{2n}-b^{2n}$ не делилось на p, то p будет делителем $a^{2n}+b^{2n}$ и, следовательно, само будет суммой двух квадратов. Эйлер не сомневался в том, что такие числа a и b всегда существуют, но доказать этого он не мог. И в этом он чистосердечно признавался.

Чтение мемуаров Эйлера, посвященных одному или нескольким близким вопросам, представляет огромный интерес. Читатель является свидетелем упорной атаки, которая в большинстве случаев заканчивается успехом.

«Попытка доказательства» представляет интерес с двух точек зрения: во-первых, она, по мнению Эйлера, усиливает достоверность теоремы, во-вторых, она дает направление, идя по которому можно будет, наконец, найти искомое доказательство.

И действительно, уже в следующем мемуаре «Доказательство теоремы Ферма о том, что всякое простое число вида $4n+1$ есть сумма двух квадратов» [1]) Эйлер превращает «попытку доказательства» в строгое доказательство.

Этот мемуар пользуется особой известностью: в нем содержится первое доказательство теоремы Ферма, и здесь Эйлер дал первое применение метода конечных разностей к решению теоретико-числовой задачи.

С каждым новым успехом Эйлер глубже понимает значение изысканий Ферма в области теории чисел. Теперь, доказав, наконец, теорему Ферма, он пишет: «Впрочем, я не могу похвалиться, что дал в этом случае нечто новое, так как сам Ферма объявил, что уже нашел доказательство этой теоремы; все же, поскольку он его нигде не опубликовал, его потеря, как и потеря весьма многих других

[1]) L. Euler, Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum primum formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum.— Novi Comment. Petr., т. V за 1754—1755 гг. (1760), стр. 3—58; Comm. arith. coll., т. I, стр. 210—233; Opera omnia, серия 1, т. II, стр. 328—337.

выдающихся открытий этого ученого, ведет к тому, что вещи лишь ныне как бы восстанавливаемые из этих потерь не без основания можно приравнять к новым открытиям. И так как никто никогда столь успешно не проникал в тайны чисел, как Ферма, весь труд, затрачиваемый на дальнейшую разработку этой науки, представляется тщетным, если предварительно не будет как бы снова извлечено на свет то, что уже было исследовано этим величайшим ученым. Ибо хотя после него многие ученые испытали свои силы в этой области, по большей части они не достигли ничего, что могло бы сравниться с гениальностью этого мужа».

Эйлер—творец теории чисел. В его высказываниях мы обнаруживаем программу действий, а в изысканиях его можно усмотреть первый в истории пример планомерного систематического развития науки о свойствах целых чисел.

В литературе иногда встречаются замечания, характеризующие Эйлера как нестрогого математика.

Эйлер в ряде случаев, указывает С. Смит, «довольствуется индукцией без строгого доказательства» [1]).

Ф. Кеджори говорит о наивных приемах Эйлера и проводит параллель между методом его работы в теории чисел и индуктивным методом Ч. Дарвина [2]).

В иной связи аналогичную мысль высказывает М. Я. Выгодский: «...Когда Эйлеру нужно установить какой-либо закон, имеющий место для целочисленных значений аргумента, он поступает не так, как поступил бы математик нашего времени. Он ограничивается *наблюдением* этого закона для некоторого (притом довольно небольшого) числа значений, подобно тому, как естествоиспытатель устанавливает всеобщий закон природы из конечного числа наблюдений» [3]). Приведя пример, иллюстри-

---

[1]) H. J. S. Smith, Collected works, т. I, Oxford, 1894, стр. 192.

[2]) F. Cajori, Zahlentheorie. В книге: M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, т. IV, Leipzig, 1908, стр. 171—172.

[3]) М. Я. Выгодский, Вступительное слово к «Дифференциальному исчислению» Л. Эйлера. В книге: Леонард Эйлер, Дифференциальное исчисление, перевод с латинского М. Я. Выгодского, М.—Л., 1949, стр. 23.

рующий высказанную мысль, М. Я. Выгодский далее заключает: «Не нужно думать, что Эйлер не дает в таких случаях общего доказательства ввиду его трудности или, наоборот, предоставляет проведение легкого доказательства читателю. Нет, для него самого «неполная индукция» вполне убедительна».

Мы полагаем, что об отношении Эйлера к «неполной индукции» следует судить прежде всего по высказываниям самого Эйлера. Последние же, как это видно из приведенных выше цитат, могут вполне удовлетворить любого из современных нам математиков.

Впрочем, можно привести еще одно весьма поучительное высказывание Эйлера, содержащееся в резюме к мемуару «Пример употребления наблюдений в чистой математике» [1]).

«Может показаться довольно парадоксальным, что в той части математики, которая обычно называется чистой, мы приписываем большое значение наблюдениям, которые представляются уместными лишь для внешних объектов, затрагивающих наши чувства; так как числа сами по себе должны быть отнесены исключительно к чистому разуму, трудно усмотреть, какую силу по отношению к ним могут иметь наблюдения и едва ли не опыты. Однако мы здесь показали при помощи самых веских соображений, что большинство известных нам до сих пор свойств чисел первоначально было установлено только посредством наблюдений, и притом задолго до того, как мы подтвердили их истинность строгими доказательствами. Даже еще и теперь нам известны многие свойства чисел, которых мы не можем доказать и к познанию которых мы приведены одними только наблюдениями. Отсюда видно, что в науке о числах, которая доныне весьма несовершенна, надо ожидать весьма многого от наблюдений, ибо они постоянно приводят нас к новым свойствам, над доказательством которых приходится работать. Такое познание, опирающееся только на наблюдения, до тех пор пока оно не получило

---

[1]) L. Euler, Specimen de usu observationum in mathesi pura.—Novi Comm., т. VI за 1756—1757 гг. (1761), стр. 19; Opera omnia, серия 1, т. II, стр. 45

доказательства, необходимо тщательно отличать от истины и относить к индукции. Между тем нет недостатка в примерах, когда индукция сама по себе приводила к ошибкам. Итак, если мы наблюдениями найдем какие-либо свойства чисел, опирающиеся, следовательно, только на индукцию, то надо всячески остерегаться принимать их за истину, но тем самым мы получаем повод, внимательнее исследовав их, показать либо истинность их, либо ложность, а полезно как то, так и другое».

Переход от n к $n+1$ Эйлер опускает там, где это не вызывает каких-либо осложнений. В таких случаях он, естественно, может ограничиться небольшим числом наблюдений.

В других случаях, когда Эйлеру доказательство не сразу дается, он действительно уподобляется натуралисту. Он приводит огромное число наблюдений и набрасывает приблизительное доказательство истинности того или иного факта, с тем чтобы получить какое-нибудь основание для практических приложений.

Это лишь первый этап на пути к истине. Здесь Эйлер четко формулирует положения, которые подлежат еще доказательству и как бы приглашает читателя принять участие в его дальнейших изысканиях.

На следующем этапе либо дается окончательное вполне убедительное доказательство, либо углубляются наблюдения и намечаются новые связи.

Именно поэтому заключение о приемах Эйлера в области теории чисел нельзя делать на основании его отдельных работ, нужно рассматривать комплекс его работ, посвященных одной или близким проблемам.

В последнее время индуктивные приемы Эйлера были подвергнуты тщательному рассмотрению Г. Полиа в его двухтомном исследовании «Математика и правдоподобное рассуждение» [1]).

В первом томе, называемом «Индукция и аналогия в математике», Г. Полиа пишет (стр. 90): «Из всех матема-

---

[1]) G. P o l y a, Mathematics and plausible reasoning, т. I—Induction and analogy in mathematics, т. II—Patterns of plausible inference, Princeton, 1954.

тиков, с трудами которых я в некоторой мере знаком, Эйлер представляется наиболее важным для нашего исследования.

Мастер индуктивных изысканий в математике, он сделал важные открытия (о бесконечных рядах, в теории чисел и в других областях математики) посредством индукции, т. е. с помощью наблюдений, смелой догадки и хитрой проверки. В этом отношении, однако, Эйлер не одинок: другие математики, большие и малые, широко пользовались индукцией в своих трудах. Но Эйлер представляется мне почти единственным в одном отношении— он берет на себя труд выявить существенную индуктивную очевидность и выполняет это заботливо, в деталях, по порядку» [1]).

Замечания, изложенные в настоящем параграфе, мы считаем уместным заключить словами Г. Харди: «Ошибочно считать Эйлера «нестрогим» математиком, хотя его язык может иногда показаться нестрогим на современный слух; он даже иногда высказывает точки зрения, далеко опережавшие общие идеи того времени» [2]).

5. Вопрос о библиографии и издании сочинений Эйлера в связи с его арифметическими работами представляет самостоятельный интерес. Здесь мы можем коснуться лишь основных вех на этом пути, поскольку это касается издания теоретико-числовых работ.

Первая библиография сочинений Эйлера была составлена академиком Н. И. Фуссом (1755—1825). Ему же, по-видимому, принадлежала и первая мысль об издании Полного собрания сочинений Эйлера.

Фусс приехал в Россию в 1773 г. В течение 10 лет он был лучшим помощником Эйлера. Н. И. Фуссу и его сыновьям П. Н. (1798—1855) и Н. Н. (1810—1867) Фуссам [3])

---

[1]) Цитируется по статье С. А. Яновской, Об одном применении истории математики.—Вопросы истории естествознания и техники, вып. I, М., 1956, стр. 292.

[2]) Г. Харди, Расходящиеся ряды, пер. с английского Д. А. Райкова, М., 1951, стр. 29.

[3]) В 1784 г. Н. И. Фусс женился на Альбертине Эйлер, дочери старшего сына Эйлера. Сыновья Фусса являются правнуками Эйлера.

принадлежит большая заслуга в опубликовании рукописного и эпистолярного наследства Эйлера.

Мы уже указывали, что Эйлер написал около 100 мемуаров по теории чисел[1]), но при его жизни из них было опубликовано только 57. Около 40 мемуаров было опубликовано Петербургской Академией наук с 1784 по 1830 г. В 1844 г. П. Н. Фусс обнаружил ряд рукописей Эйлера, которые ошибочно считались опубликованными. Находящиеся среди них мемуары по теории чисел были напечатаны в 1849 г. Публикация арифметических работ Эйлера была в основном закончена к середине XIX века.

В 1843 г. П. Н. Фусс издал два тома писем под общим названием: «Переписка нескольких знаменитых геометров XVIII века о математических и физических предметах»[2]).

Первый том этого издания воспроизводит переписку между Эйлером и Гольдбахом (177 писем), продолжавшуюся с 1729 по 1764 г.[3]). Значительная часть этого тома, посвященная вопросам теории чисел, представляет большой интерес для истории арифметики.

В первом томе П. Н. Фусс опубликовал свой «Систематический список трудов Эйлера». П. Н. Фусс дополнил список, составленный его отцом, и разбил работы Эйлера по отделам. В этот список вошло 756 работ. Список П. Н. Фусса мог служить исходным пунктом при составлении плана Полного собрания сочинений Эйлера.

Необходимость такого издания была уже полностью осознана в Академии наук. Большой знаток и почитатель Эйлера К. Г. Якоби активно поддерживал эту идею, предлагал конкретную помощь и в письмах к П. Н. Фуссу давал ценные указания и советы[4]).

[1]) Если к ним отнести статьи, посвященные теории непрерывных дробей, и некоторые мемуары, в которых теория чисел играет вспомогательную роль, то число их окажется значительно больше.

[2]) См. примечание[1]) на стр. 213.

[3]) Недавно стало известно, что в этот том не вошло последнее письмо Эйлера. См. А. П. Юшкевич, Последнее письмо Л. Эйлера к X. Гольдбаху.—Историко-математические исследования, вып. VII, М., 1954, стр. 625—629.

[4]) P. Stäckel und W. Ahrens, Der Briefwechsel zwischen C. G. I. Iacobi und P. von Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers, Leipzig, 1908, см. также: Biblioth. Matem. (3), т. VIII, 1907—1908, стр. 233—306.

В феврале 1844 г. в Академии наук уже было заведено «Дело» об издании полного собрания сочинений Эйлера. Однако осуществить это издание не удалось[1]).

Вместо полного собрания сочинений было предпринято издание Leonhardi Euleri «Opera minora collecta».

В соответствии с пожеланием К. Г. Якоби первые два тома «Opera minora» были посвящены арифметическому наследию Эйлера. Эти книги были изданы братьями П. Н. и Н. Н. Фуссами в 1849 г. под названием: Leonhardi Euleri «Commentationes arithmeticae collectae». Этим и ограничилось издание «Opera minora».

При отборе мемуаров для двухтомника были учтены советы К. Г. Якоби. В это собрание вошло несколько еще неопубликованных статей Эйлера. В частности, впервые было напечатано незаконченное сочинение «Трактат по теории чисел». Оба тома содержат 94 мемуара и пять дополнений. Почти все мемуары написаны на латинском языке, исключение представляют пять мемуаров, написанных по-французски. Статьи расположены в хронологическом порядке, по датам поступления в печать.

В первом томе содержится систематический указатель на французском языке, составленный В. Я. Буняковским и П. Л. Чебышевым. Наличие этого указателя значительно облегчает использование рассматриваемого издания.

Все арифметические работы Эйлера авторы указателя распределили по четырем отделам:

Отдел I. Делимость чисел

a) О целых числах в отношении их разложения на множители. Таблицы простых чисел. О числе чисел, простых с данным целым и меньших его. О суммах делителей чисел. Дружественные числа.

b) Делимость различных формул.

c) Теория остатков и квадратичных вычетов.

Примечания к первому отделу.

---

[1]) См. К. Н. Кострюков, Об одной попытке издать труды Леонарда Эйлера. — Историко-математические исследования, вып. VII, М., 1954, стр. 630—640.

Отдел II. Разложение чисел на суммы различных форм

a) Разложение чисел на квадраты, на треугольные числа и члены, пропорциональные квадратам.

b) Разбиение чисел.

Примечание ко второму отделу.

Отдел III. Анализ Диофанта

a) Определение двух или многих неизвестных, заданных одним уравнением. Невозможные уравнения.

b) Определение многих неизвестных, заданных двумя уравнениями.

c) Определение многих неизвестных, заданных тремя уравнениями.

d) Определение многих неизвестных, заданных четырьмя уравнениями.

e) Определение многих неизвестных, заданных более чем четырьмя уравнениями.

f) Неопределенные задачи, приводящие к уравнениям, число которых превосходит число неизвестных.

Примечания к третьему отделу.

Разное

Внутри отдела, рядом с заглавием мемуара, авторы указателя поместили краткую аннотацию. В аннотации раскрываются тема работы, содержание задачи, иногда в самых общих чертах достигнутый результат. Аннотации весьма лаконичны.

Вот как, например, выглядят первые два номера указателя:

1. XLVII О таблице простых чисел до миллиона и далее, в которой вместе с тем указаны наименьшие делители всех составных чисел (т. II, стр. 64).	О строении таблиц простых чисел и наименьших делителей составных чисел от 1 до 1 000 000 и далее.

2. XXVI Как исследовать очень большие числа, простые они или нет? (т. I, стр. 372).	Исследование о числах вида $4m+1$ в отношении того, являются ли они простыми или составными.

Несмотря на предельную краткость аннотаций, указатель дает достаточно полное впечатление об исключительном богатстве исследований Эйлера в области теории чисел.

Издание «Commentationes arithmeticae collectae» сделало возможным практически обозреть обширное арифметическое наследие Эйлера и несомненно способствовало его дальнейшему изучению.

В начале XX века в связи с приближением 200-летия со дня рождения Эйлера интерес к научному творчеству Эйлера заметно возрастает.

В октябре 1902 г. А. А. Марков и А. М. Ляпунов заявляют общему собранию Академии наук, что лучшим ознаменованием этой годовщины они считают издание полного собрания сочинений Эйлера. Избранная Конференцией комиссия, в состав которой вошли академики Б. Б. Голицын, К. Г. Залеман, А. М. Ляпунов, А. А. Марков и А. С. Фаминцин (председатель), собиралась несколько раз: в 1902, 1903 и 1904 гг.

10 апреля 1904 г. Коференция предложила академику А. С. Фаминцину «войти в сношение с Берлинской Академией» для обсуждения предложений комиссии об издании сочинений Эйлера при участии Берлинской Академии наук» [1]).

К сожалению, ценное начинание нашей Академии наук не было поддержано. Письмом от 7 февраля 1907 г. Берлинская Академия сообщила, что не считает возможным принять участие в этом деле[2]). Комиссия прекратила свою деятельность.

Однако обе академии откликнулись на призыв IV Международного математического съезда (Рим, 1908 г.) принять участие в издании полного собрания сочинений

---

[1]) Известия Академии наук, VI серия, т. III, 1909, № 12, стр. 798—800.

[2]) Текст письма за подписью академика Ауверса напечатан в Изв. Академии наук, VI серия, т. II, 1908, № 1, стр. 4—5.

Эйлера, предпринимаемого на этот раз на родине Эйлера в Швейцарии.

Большая работа по отбору многочисленных архивных материалов и пересылке их в Швейцарию, выполненная в 1909—1910 гг. комиссией, в состав которой вошли академики О. А. Баклунд, К. Г. Залеман, Б. Б. Голицын, А. М. Ляпунов, А. А. Марков и Н. Я. Сонин, явилась существенным вкладом Академии наук в это весьма сложное и трудоемкое дело [1]).

Список работ Эйлера, уточненный Энестромом [2]) в 1909 г., содержал уже 865 названий. В дополнение к этому списку был дан перечень работ И.-А. Эйлера, старшего сына Л. Эйлера, написанных под влиянием Эйлера или даже самим Эйлером. Список Энестрома был положен в основу издания: Leonhardi Euleri «Opera omnia».

В 1911 г. вышел из печати первый том первой серии (Opera mathematica), содержащий «Алгебру» Эйлера с известными примечаниями Лагранжа ко второму разделу второй части этой книги (диофантов анализ).

В соответствии с принятым планом следующие три тома первой серии должны были охватить все арифметические сочинения Эйлера. Предполагалось, что издателями этих томов будут Ф. Рудио и А. А. Марков.

В процессе работы выяснилось, что сочинения Эйлера по теории чисел «Commentationes arithmeticae» займут четыре тома.

Первые два тома «Commentationes» были изданы в 1915 и 1917 гг. Ф. Рудио, третий и четвертый в 1941 и 1944 гг. Р. Фуэтером [3]). Издателям удалось устранить ряд опечаток и неточностей в вычислениях, имевших место в предыдущих изданиях, к каждой статье они дали историко-библиографическую справку и в каждом томе поместили обзор соответствующих статей Эйлера. В этом издании

---

[1]) Известия Академии наук, VI серия, т. III, 1909, № 14, стр. 929—930.

[2]) G. Eneström, Verzeichnis der Schriften Leonard Eulers, 2 выпуска, Лейпциг, 1909 и 1913.

[3]) А. А. Марков скончался в 1922 г. Все исправления, внесенные им в статьи III и IV томов, отмечены его инициалами: *А. М.*

мемуары расположены так же, как и в списке Энестрома, по годам выхода из печати и публикуются на языке оригиналов.

Многим мемуарам предшествует резюме (Summarium). Резюме иногда содержат дополнительный материал, из чего можно заключить, что составлялись они после отправления статьи в печать.

На всем издании лежит печать большой заботы и любви к научному наследию Эйлера (качество бумаги, формат книги и печать увеличивают ценность этого издания).

Издание «Opera omnia» является важным этапом в осмысливании эйлеровского вклада в науку.

Арифметические работы Эйлера изданы полностью. Но еще немало времени потребуется для того, чтобы полностью оценить все богатство идей и результатов, содержащихся в них.

В свое время они привлекали внимание Лагранжа, Лежандра, Гаусса, Якоби, Чебышева, Кронекера и многих других математиков.

Чтение их в наши дни является поучительным не только в плане ознакомления с классическим наследием Эйлера. Богатый фактический материал, разнообразие приемов исследования, исключительная простота и ясность изложения еще долго будут привлекать внимание к замечательным арифметическим творениям Эйлера.

К ВОПРОСУ О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ЭЙЛЕРОМ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРВООБРАЗНОГО КОРНЯ

И. Г. Мельников* и *А. А. Киселев

1. Уже в первой своей теоретико-числовой работе «Замечания об одной теореме Ферма и о других теоремах, относящихся к простым числам» Эйлер сумел оценить особую роль в различных арифметических исследованиях так называемой малой теоремы Ферма:

«Если p—простое число и a не делится на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p» [1]).

Эта теорема является одним из наиболее важных результатов теории степенных вычетов; она решает вопрос о корнях сравнения $x^{p-1}-1\equiv 0 \pmod p$ и служит основой для теории сравнений высших степеней. Глубокое значение этой теоремы выясняется в теории групп и в высших областях теории чисел. А. Я. Хинчин остроумно заметил, что «Если измерять важность той или другой теоремы ее ролью и значением в развитии данной отрасли науки», то эту теорему давно уже можно было бы назвать «великой теоремой Ферма» [2]).

---

[1]) L. Euler, Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus.—Comment. Acad. Sc. Petrop., т. VI за 1732—1733 гг. (1738), стр. 103—107; Leonhardi Euleri, Comm. arith. coll., т. I, СПб., 1849, стр. 1—3; Leonhardi Euleri, Opera omnia, серия I, т. II, Lipsiae et Berolini, 1915, стр. 1—5.

[2]) А. Я. Хинчин, Элементы теории чисел, Энциклопедия элементарной математики, книга первая, М.—Л., 1950, стр. 280.

Свое первое доказательство теоремы Ферма Эйлер изложил в мемуаре «Доказательство некоторых теорем, относящихся к простым числам»[1]).

Это доказательство, если воспользоваться гауссовым знаком сравнения, можно изложить следующим образом.

Если p — простое число, то легко обосновать сравнение:

$$2^p=(1+1)^p=1+p+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}+\ldots+p+1\equiv 2 \pmod p.$$

Допустим, что $a^p\equiv a \pmod p$. Тогда с помощью сравнения $(a+1)^p\equiv a^p+1 \pmod p$ найдем, что $(a+1)^p-(a+1)\equiv \equiv a^p-a\equiv 0 \pmod p$. Итак, $(a+1)^p\equiv a+1$, если $a^p\equiv a$. Но $2^p\equiv 2$, следовательно, $3^p\equiv 3$ и т. д. Таким образом, при любом натуральном a верно сравнение $a^p\equiv a \pmod p$. Следовательно, если a не делится на p, то имеет место сравнение $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$.

Эйлер подчеркивает, что эту и некоторые другие теоремы первоначально он обнаружил посредством индукции и что «в их истинности теперь нельзя более сомневаться», так как он «особым методом достиг убедительнейших доказательств».

Любопытная деталь. В своих первых работах по теории чисел открытие малой теоремы Ферма Эйлер приписывал себе. В первой работе Эйлера она фигурирует в качестве следствия теоремы, найденной им эмпирическим путем:

Если p — простое число, а числа a и b не делятся на p, то

$$a^{p-1}-b^{p-1}\equiv 0 \pmod p.$$

Там же теорема Ферма содержится и в другом его утверждении, представляющем частный случай так называемой теоремы Эйлера и также полученном с помощью наблюдений:

Если p — простое число и a не делится на p, то

$$a^{p^{n-1}(p-1)}-1\equiv 0 \pmod{p^n}.$$

---

[1]) L. Euler, Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio.— Comment. Acad. Sc. Petrop., т. VIII за 1736 г. (1741), стр. 141—146; Comm. arith. coll., т. I, стр. 21—23; Opera omnia, серия 1, т. II, стр. 33—37.

В более поздних работах эту теорему Эйлер связывал уже с именем Ферма. Ферма впервые сформулировал ее в письме к Френиклю от 18 октября 1640 г. [1]). Имя Ферма упоминается Эйлером все чаще и чаще. С большим и искренним чувством он восторгается гениальностью этого величайшего представителя науки. Доказательство утверждений Ферма, полученных, по мнению Эйлера, преимущественно индуктивным путем, Эйлер считает делом первостепенной важности. Во-первых, потому, что они вскрывают глубочайшие свойства целых чисел, во-вторых, потому, что поиски необходимых доказательств должны способствовать созданию методов теории чисел.

В конце прошлого столетия доказательство теоремы Ферма было обнаружено в рукописях Лейбница[2]). Последний также использовал свойства биномиальных коэффициентов и метод математической индукции. Разумеется, Эйлер не мог знать об этом доказательстве.

В руках Эйлера теорема Ферма стала мощным орудием исследования. С ее помощью Эйлер установил справедливость целого ряда важнейших фактов теории чисел.

Отметим здесь несколько простых фактов, доказанных Эйлером в работе «Теоремы о делителях чисел» [3]).

§ 12. Если целые числа a и b не делятся на простое число $p=2m+1$, то $a^{2m}-b^{2m}\equiv 0 \pmod p$.

§ 13. При тех же предположениях $a^{2m}+b^{2m}=(a^{2m}-b^{2m})+2b^{2m}$ не делится на $2m+1$.

§ 14. Ни одно простое число вида $4n-1$ не может быть делителем суммы двух взаимно-простых квадратов [4]).

---

[1]) Oeuvres de Fermat, т. II, Paris, 1894, стр. 209.

[2]) G. Vacca, Intorno alla prima dimostrazione di un teorema di Fermat.—Biblioth. Mathem. (2), т. 8. 1894, стр. 46—48; D. Mahnke, Leibniz auf der Suche nach einer allgemeinen Primzahlgleichung, Biblioth. Mathem. (3), т. 13, 1912—1913, стр. 29—61.

[3]) L. Euler, Theoremata circa divisores numerorum.—Novi Commentarii Acad. Sc. Petrop., т. I за 1747—1748 гг. (1750), стр. 20—48; Comm. arith. coll., т. I, стр. 50—61; Opera omnia, серия 1, т. II, стр. 62—85.

[4]) Ферма в письме к Робервалю сообщал, что владеет доказательством этой теоремы, и указывал, что она будет полезна при отыскании простых чисел. Так, для решения вопроса, является ли

Действительно, если a и b не делятся на простое число $p=4n-1$, то $a^{4n-2}-b^{4n-2}\equiv 0 \pmod{p=4n-1}$.

Но в таком случае (§ 13) $a^{4n-2}+b^{4n-2}$ не делится на p. А так как $a^{4n-2}+b^{4n-2}=(a^2)^{2n-1}+(b^2)^{2n-1}$, то и сумма оснований, т. е. a^2+b^2, не будет делиться на $p=4n-1$.

§ 20. Нечетные делители суммы двух взаимно-простых квадратов могут быть только вида $4n+1$.

§ 21. Все нечетные делители суммы двух взаимно-простых биквадратов могут быть только вида $8n+1$.

Действительно, нечетные делители суммы $a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2$ могут быть только вида $4n+1$, т. е. либо вида $8n+1$, либо вида $8n-3$. Если $8n-3$ — простое число, то (§ 13) сумма $a^{8n-4}+b^{8n-4}$ на него не делится.

Но $a^{8n-4}+b^{8n-4}=(a^4)^{2n-1}+(b^4)^{2n-1}$, слодовательно, и a^4+b^4 не делится на $8n-3$.

Аналогичными рассуждениями устанавливается (§ 26), что нечетные делители суммы a^8+b^8 будут вида $16n+1$ и вообще (§ 29), что сумма $a^{2^m}+b^{2^m}$ может иметь нечетные делители только вида $2^{m+1}n+1$. В частности (§ 32), и число $2^{2^5}+1$ может иметь простые делители только вида $64n+1$. Его наименьший простой делитель 641 получается при $n=10$.

Заметим, что делимость числа $2^{2^5}+1$ на 641 была обнаружена Эйлером совершенно случайно еще в 1732 г. С помощью этого факта Эйлер в своей первой теоретико-числовой работе опроверг гипотезу Ферма о том, что все числа вида $2^{2^m}+1$ простые.

2. Начало теории степенных вычетов было положено Эйлером в мемуаре «Теоремы о вычетах, получающихся от деления степеней», представленном в Петербургскую Академию наук в 1755 г. [1]). Здесь Эйлер исследует вопрос

число $10\,000\,000\,001=100\,000^2+1$ простым или составным, его не нужно будет делить на 3, 7, 11 и т. д. Доказательство Ферма неизвестно. См. Oeuvres de Fermat, т. II, стр. 204.

[1]) L. Euler, Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta.—Novi Comment., т. VII за 1758—1759 гг. (1761), стр. 49—82; Comm. arith. coll., т. I, стр. 260—273; Opera omnia, серия 1, т. II, стр. 493—518.

об остатках, которые дают степени одного и того же числа при делении на данное простое число.

Пусть p — простое число и a — целое число, не делящееся на p, тогда ни один из членов геометрической прогрессии:

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots$$

не делится на p и, значит, различных остатков, получающихся при делении степеней числа a на p, может быть не более чем $p-1$.

Если a^μ и a^ν дают один и тот же вычет, т. е. $a^\mu \equiv a^\nu \pmod p$, то при $\mu > \nu$ имеем:

$$a^{\mu-\nu} \equiv 1 \pmod p,$$

и следовательно, в прогрессии содержится бесконечное множество членов, имеющих вычетом единицу.

Если λ — такое наименьшее натуральное число, что

$$a^\lambda \equiv 1 \pmod p,$$

то членами прогрессии, сравнимыми с единицей, являются только

$$1,\ a^\lambda,\ a^{2\lambda},\ a^{3\lambda},\ \ldots$$

Эти числа оказываются первыми членами периодов прогрессии:

$1,\ a,\ a^2,\ \ldots,\ a^{\lambda-1} \mid a^\lambda,\ \ldots,\ a^{2\lambda-1} \mid a^{2\lambda},\ \ldots,\ a^{3\lambda-1} \mid$ и т. д.

Первый период

$$1,\ a,\ a^2,\ \ldots,\ a^{\lambda-1}$$

доставляет λ различных вычетов. Последующие периоды дают те же вычеты и в том же порядке.

Таким образом, прогрессия порождает только λ различных вычетов, причем $\lambda \leqslant p-1$.

Если $\lambda < p-1$, то среди вычетов приведенной системы модуля p найдется число, например k, не являющееся вычетом ни одного члена первого периода прогрессии. Числа

$$k,\ ka,\ ka^2,\ \ldots,\ ka^{\lambda-1}$$

доставят λ новых представителей приведенной системы вычетов.

Если имеющиеся теперь 2λ вычетов модуля p исчерпывают все вычеты приведенной системы, то $2\lambda = p-1$. В противном случае, когда $2\lambda < p-1$, найдется натуральное число $r < p$, отличное от любого из имеющихся 2λ вычетов, и числа

$$r,\ ra,\ ra^2,\ \ldots,\ ra^{\lambda-1}$$

доставят еще λ новых вычетов модуля p. Если 3λ окажется меньше чем $p-1$, то, повторяя предыдущее рассуждение, мы непременно обнаружим число n такое, что $n\lambda = p-1$.

Таким образом, показатель λ наименьшей степени, сравнимой с единицей по простому модулю p, равняется числу $p-1$ или составляет аликвотную часть его.

Этот результат Эйлера в теории степенных вычетов играет основную роль. С его помощью легко получается новое доказательство малой теоремы Ферма. О нем Эйлер говорил, что оно более естественно для теории чисел, чем его первое доказательство, опирающееся на биномиальную теорему.

Заметим, что красивые и важные результаты получаются здесь на основе исключительно простых предпосылок. Особенного внимания заслуживает прием, с помощью которого Эйлер показал, что $\lambda = \frac{p-1}{n}$. Эти изыскания Эйлера Гаусс переизложил в своих «Арифметических исследованиях» (§ 45—50)[1]. Гауссу еще не были известны теоретико-групповые понятия. Поэтому в рассуждениях Эйлера он мог усмотреть лишь остроумный подход к решению конкретной задачи.

Сущность рассуждений Эйлера полностью выясняется в теории групп. Эйлер имел дело с группой классов вычетов, взаимно-простых с модулем p. Порядок этой группы $p-1$. Классы вычетов, представителями которых служит одно из чисел $1,\ a,\ a^2,\ \ldots,\ a^{\lambda-1}$, составляют подгруппу этой группы порядка λ.

Показав, что λ является делителем числа $p-1$, Эйлер по существу на частном примере предвосхитил открытие

[1]) C. F. Gauss, Disquisitiones arithmeticae (1801).—Werke, т. I, Göttingen, 1863. В последующих ссылках на этот труд Гаусса указываются только параграфы.

того основного факта теории конечных групп, что порядок подгруппы есть делитель порядка группы.

Прием, впервые примененный Эйлером, позволял провести доказательство последней теоремы в самом общем виде. В рассуждениях Эйлера давался метод разложения группы на смежные классы по данной группе.

Эйлер, по-видимому, хорошо понимал, что при сходных обстоятельствах его новый прием может принести дальнейшие плодотворные результаты.

В 1758 г. Эйлер представил в Петербургскую Академию наук мемуар «Арифметические теоремы, доказанные новым способом»[1]). Мемуар можно разделить на две части. В первой части впервые рассматривается одна из важнейших числовых функций, функция $\varphi(N)$, обозначающая число натуральных чисел, не превосходящих число N и с ним взаимно-простых.

Общепринятое теперь обозначение «функции Эйлера» посредством символа φ было введено Гауссом (1801). Натуральные числа, меньшие N и взаимно-простые с ним, Эйлер называл «частями, простыми относительно N» (partes primae), а число их обозначал строчной буквой, в данном случае через n. Позднее (1780) это число Эйлер обозначал через πN. Заметим, что Чебышев в «Теории сравнений» (1849) придерживается первого обозначения Эйлера.

Способ, которым пользовался Эйлер для установления вида функции $\varphi(N)$, нередко излагается в современных нам книгах по теории чисел. В основе этого способа лежит важное свойство функции Эйлера:

Если числа A и B взаимно-просты, то

$$\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B).$$

Эйлер совершенно строго доказывает, что если N дано в канонической форме: $N=p^\lambda q^\mu \ldots s^\xi$, то

$$\varphi(N)=p^{\lambda-1}(p-1)\,q^{\mu-1}(q-1)\,\ldots\, s^{\xi-1}(s-1).$$

[1]) L. Euler, Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata.—Novi comment., т. VIII за 1760—1761 гг. (1763), стр. 74—104; Comm. arith. coll., т. I, стр. 274—286; Opera omnia, серия 1, т. II, стр 531—555.

Во второй части мемуара рассматриваются вычеты, получающиеся при делении степеней данного числа x на любое число N при обычном предположении, что x и N взаимно-просты.

Так же как и раньше, в случае простого делителя эти вычеты являются представителями тех классов, которые составляют подгруппу группы классов вычетов, взаимно-простых с модулем.

Поэтому с помощью метода разложения группы на смежные классы по данной подгруппе Эйлеру удается доказать, что если x^{ν} есть наименьшая степень, сравнимая с единицей по модулю N, то ν либо равно $\varphi(N)$, либо составляет аликвотную часть $\varphi(N)$.

Отсюда уже легко получается известная теорема Эйлера: если x взаимно-просто с N, то

$$x^{\varphi(N)} \equiv 1 \pmod N.$$

Малая теорема Ферма есть лишь частный случай теоремы, открытой и доказанной Эйлером.

3. Большое значение для дальнейшего развития теории степенных вычетов имел мемур Эйлера «Доказательства, относящиеся к вычетам, происходящим от деления степеней на простые числа»[1]).

В этом мемуаре, представленном на акте Петербургской Академии наук от 18 мая 1772 г., Эйлер вводит понятие первообразного корня, доказывает существование его для каждого простого числа, определяет число первообразных корней и дает важные приложения первообразных корней.

Рассматривая вычеты, получающиеся при делении членов геометрической прогрессии $1, a, a^2, \ldots$ на простое число p (в предположении, что a не делится на p), Эйлер замечает, что при одних значениях a эти вычеты совпадают со всеми натуральными числами, меньшими p, при других же значениях—лишь с некоторыми из этих чисел.

В первом случае ряд вычетов Эйлер называет полным, а число a («корень прогрессии»), порождающее полный

---

[1]) L. Euler, Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia.—Novi comment., т. XVIII за 1773 г. (1774), стр. 85—135; Comm. arith. coll., т. I, стр. 516—537; Opera omnia, серия 1, т. III, 1917, стр. 240—281.

ряд вычетов,—«первообразным корнем делителя p». Во втором случае, когда ряд вычетов «неполный», он доказывает, что число различных вычетов составляет аликвотную часть числа $p-1$.

Эти изыскания, завершающиеся доказательством малой теоремы Ферма, в данной работе играют роль предварительных замечаний. Подробно они были изложены в рассмотренном выше мемуаре «Теоремы о вычетах, получающихся от деления степеней».

Центральное место в работе занимает доказательство существования первообразного корня для всякого простого модуля.

Незадолго до Эйлера Ламберт[1]) утверждал, что для всякого простого числа p существует такое целое число g, что g^e-1 делится на p при $e=p-1$, но не делится, когда $0<e<p-1$. В этом утверждении и состоит теорема существования первообразного корня.

Эйлер сформулировал ее следующим образом: «Какое бы простое число ни было взято в качестве делителя p, всегда можно найти такую геометрическую прогрессию $1, a, a^2, a^3, a^4$ и т. д., из которой будет возникать полный ряд вычетов».

Идея эйлеровского доказательства весьма проста. Установив, что сравнение

$$x^n-1\equiv 0 \pmod p, \quad n<p, \tag{*}$$

при простом p имеет не более n корней. Эйлер выдвигает вопрос об «особых случаях» (casus proprii) сравнения (*), понимая под этим такие решения его, которые не удовлетворяют ни одному сравнению того же вида низшей степени. В современной литературе такие решения иногда называются первообразными. Число 1, например, удовлетворяет сравнению $x-1\equiv 0 \pmod p$, поэтому оно не будет особым случаем ни при одном $n>1$.

Подсчитывая число особых случаев сравнения (*), Эйлер исходит из предположения, что оно при любом n имеет точно n решений.

---

[1]) J. H. Lambert, Adnotata quaedam de numeris eorumque Anatomia.—Nova Acta Eruditorum, Leipzig, 1769, стр. 127—128.

Если n—делитель числа $p-1$, то сравнение (*) действительно имеет n решений, т. е. ему удовлетворяют целые числа из n различных классов по модулю p. Такие решения Эйлер называет «вещественными». Если же n не является делителем $p-1$, число «вещественных» корней оказывается меньше n, и тогда Эйлер полагает, что наряду с вещественными корнями сравнение обладает «мнимыми» или «невозможными» корнями в таком количестве, что общее число корней (вещественных и мнимых) есть n.

Если $n=dk$, то все вещественные и мнимые решения сравнения $x^d-1\equiv 0 \pmod p$ удовлетворяют сравнению (*). Поэтому число особых случаев последнего получается при вычитании из n числа особых случаев всех сравнений $x^d-1\equiv 0 \pmod p$, где d—любой собственный делитель числа n.

Такой способ определения числа особых случаев приводит Эйлера к заключению, что последнее совпадает с числом натуральных чисел, меньших n и взаимно-простых с ним.

Разумеется, среди обнаруженных $\varphi(n)$ особых случаев некоторые, а иногда и все могут оказаться мнимыми.

В специальном же случае, когда $n=p-1$, все особые случаи сравнения $x^{p-1}-1\equiv 0 \pmod p$ непременно окажутся вещественными (ибо сравнение обладает только вещественными решениями). Поэтому каждый особый случай сравнения $x^{p-1}-1\equiv 0 \pmod p$ может быть принят за первообразный корень модуля p и тем самым существование первообразного корня установлено.

Эйлер, по-видимому, не сомневался в надежности своего доказательства. Судить об этом можно по многочисленным приложениям, имеющимся в этой и других его работах.

Критические замечания по поводу эйлеровского доказательства впервые были сделаны Гауссом. Гаусс (§ 56) писал: «Однако доказательство, которое предлагает остроумный автор, страдает двумя недостатками. Первый состоит в том, что в § 31 и сл. он молчаливо принимает, что сравнение $x^n\equiv 1$ (если употребляемый там способ выражения представить в наших обозначениях) действительно имеет n различных корней, хотя до этого было лишь доказано, что оно может иметь не более чем n корней; второй состоит в том, что формулу § 34 он выводит только на основании индукции».

Читатель, основываясь на первом возражении Гаусса, может подумать, что Эйлер сам себе противоречит и поэтому его доказательство не заслуживает никакого внимания.

Предлагая в качестве приложения к настоящей статье извлечение из мемуара Эйлера, мы хотим показать, что дело обстоит иначе.

Гаусс, как известно, предложил два доказательства существования первообразного корня. Каждое из них может служить замечательным образцом арифметического рассуждения.

Это обстоятельство и возражения Гаусса привели к тому, что доказательство Эйлера было полностью предано забвению.

Авторы обзорных статей и книг по теории чисел, например С. Смит [1]), Ф. Кеджори [2]) и др., ограничивались только ссылками на замечание Гаусса.

Первый, кто указал на формальный характер критики Гаусса, был Ф. Рудио. Признав, что первое возражение Гаусса, направленное против §§ 31 и 32 (см. приложение), обоснованно, Рудио заявляет: «Но Гаусс, кажется, просмотрел, что указанный недостаток (который легко может быть устранен) не распространяется на решающий § 35, где $n=p-1$». Далее Рудио пишет: «Второе возражение, выдвинутое Гауссом, также не имеет большого значения. Ибо, хотя Эйлер формулу § 34 устанавливает лишь посредством индукции, он мог бы с полным правом сослаться на упоминавшуюся выше статью 271 (речь идет о мемуаре Эйлера «Арифметические теоремы, доказанные новым способом».—*Прим. авт.*), где аналогичный вывод он провел с надлежащей основательностью» [3]).

Рудио заключает: нет никаких оснований для утверждения, что Эйлер не доказал существование первообразных

---

[1]) H. J. S. S m i t h, The collected mathematical papers, т. I, Oxford, 1894, стр. 49.

[2]) F. C a j o r i, Zahlentheorie, см. M. C a n t o r, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, т. IV, Leipzig, 1908, стр. 173.

[3]) F. R u d i o, Vorwort des Herausgebers; см. L. E u l e r i, Opera omnia, серия 1, т. III, 1917, стр. XXIX—XXXI.

корней. Эйлер располагал всеми необходимыми средствами для проведения строгого доказательства. Речь может идти лишь об отсутствии необходимой четкости в проведении доказательства.

Мысль Рудио ясна: доказательство Эйлера можно улучшить, если в самом начале поставить вопрос об особых случаях сравнения $x^{p-1}-1\equiv 0 \pmod p$, ибо оно имеет точно $p-1$ решений.

Но в таком случае Эйлер должен был бы доказать, что сравнение $x^d-1\equiv 0 \pmod p$, где d—делитель $p-1$, имеет точно d решений. Последний факт, как известно, легко устанавливается с помощью теоремы Лагранжа:

Сравнение

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\equiv 0 \pmod p,$$

где $f(x)$—целочисленный многочлен, а модуль p—число простое, никогда не может иметь более n различных корней.

Хотя эта теорема содержалась в работе Лагранжа, опубликованной в 1770 г.[1]), т. е. почти за два года до рассматриваемых изысканий, Эйлеру она не была известна. Эйлер в § 28 доказывает частный случай теоремы Лагранжа, именно когда $f(x)=x^n-1$.

Весьма характерно, что Рудио не замечает этого и даже считает нужным подчеркнуть, что Эйлер доказал теорему, носящую имя Лагранжа, совершенно самостоятельно. Рудио указывает, что в 1766 г. Эйлер полностью утратил зрение и поэтому лишен был возможности следить за работами других математиков.

Нетрудно видеть, что если бы Эйлер нуждался в теореме Лагранжа, то он несомненно доказал бы и ее, ибо способ доказательства, предложенный им для частного случая, позволяет провести доказательство и в общем случае.

Попытка избавить доказательство Эйлера от «противоречий», которую делает Рудио, является неудачной.

---

[1]) J. L. Lagrange, Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers.—Mém. de l'Acad. de Berlin, т. XXIV за 1768 г. (1770), стр. 192; также Oeuvres, т. II, 1868, стр. 667—669.

В предпосылках Эйлера нет никаких противоречий. Доказав в § 28, что сравнение (*) имеет не более чем n решений, Эйлер в § 29 указывает, что число решений часто оказывается меньше чем n. Поэтому, когда в §§ 31, 32, 34 Эйлер считает его равным n, то вряд ли можно серьезно говорить о недосмотре, «который легко мог быть устранен», и оправдывать его известными особенностями изложения.

Эйлер сделал смелый шаг. Приняв число решений равным n, Эйлер наряду с решениями в общепринятом смысле, которые он называл вещественными (reales), ввел в рассмотрение «мнимые» или «невозможные решения» (solutiones impossibiles) сравнения (*). В § 29 Эйлер указывает, что, например, сравнение $x^5-1\equiv 0 \pmod 7$ имеет лишь одно решение $x=1$, «остальные же четыре случая оказываются как бы мнимыми». Там же: «Как будет видно из дальнейшего, некоторые решения оказываются невозможными во всех тех случаях, когда показатель n не является аликвотной частью $p-1$, когда же n является его аликвотной частью, все решения будут вещественными».

Заметим попутно, что последнее положение, несмотря на сделанное обещание, в дальнейшем не получило никакого обоснования. Впрочем, в рассматриваемых изысканиях оно и не имело никакого практического значения.

Это обстоятельство снова убеждает нас в том, что если Эйлер и владел теоремой Лагранжа, то во всяком случае ею он не воспользовался.

Подсчитывая особые случаи сравнения (*), Эйлер не делал никакого различия между его вещественными и мнимыми решениями. В § 35 Эйлер использует то обстоятельство, что сравнение $x^{p-1}-1\equiv 0 \pmod p$ не имеет мнимых решений и именно поэтому каждый особый случай этого сравнения, будучи числом вещественным, является первообразным корнем простого делителя p.

Введением новых мнимостей, мнимостей с точки зрения теории чисел, математика обязана Э. Галуа. Говоря о функциональном сравнении по простому модулю, не имеющем решений, Галуа в мемуаре 1830 г. писал следующее: «Но тогда корни этого сравнения нужно рассматривать как род воображаемых символов, так как они не удовлетворяют требованиям, предъявляемым к целым числам; роль этих символов в исчислении будет часто столь же полезной, как роль воображаемого $\sqrt{-1}$ в обычном анализе.

Классификацией этих чисел и сведением их к возможно меньшему количеству мы и займемся»[1]).

Работа Галуа заложила фундамент теории сравнений высших степеней. Галуа дал простой метод получения всех корней сравнения и показал, какую пользу может принести рассмотрение мнимых корней сравнения в вопросах разрешимости уравнений в радикалах.

Сам Галуа считал, что главное преимущество его теории состоит в доказательстве свойства сравнений допускать в точности столько корней, сколько содержится в показателе их степени.

Мы не берем на себя смелость утверждать, что Эйлер предвосхитил открытие «мнимостей Галуа» Вводя новые мнимости, Галуа начинал с раскрытия их реального смысла. Эйлер же был далек от какого-нибудь истолкования мнимых корней сравнения. Такие решения для него являлись только мнимыми символами, с помощью которых можно было заполнить имеющийся иногда «вакуум». Требовалось в интересах дальнейшего, чтобы сравнение (*) всегда имело n решений. И это требование удовлетворялось посредством введения мнимых решений.

Здесь, так же как и во многих других случаях, прозорливость Эйлера не имеет себе равной.

С точки зрения современного математика подход Эйлера к новым мнимостям является наивным. Но не будем слишком строги. Вспомним, что Эйлер и другие математики XVIII века с успехом пользовались мнимыми числами, хотя реальный смысл их еще и не был раскрыт п о л н о с т ь ю. Подобные явления в истории математики встречаются нередко.

---

[1]) E. G a l o i s, Sur la théorie des nombres.—Bulletin des Sciences mathématiques de M. Férussac, т. XIII, 1830, стр. 428. См. русский перевод: Э в а р и с т Г а л у а, Сочинения, перевод с французского Н. Н. Меймана под редакцией и с примечаниями Н. Г. Чеботарева, М.—Л., 1936, стр. 36 и сл.

Вернемся теперь к первому возражению Гаусса. Нетрудно видеть, что Гаусс либо не заметил прием Эйлера, состоящий в введении мнимых решений, либо отнесся к этому с присущей ему осторожностью.

Изучение научного наследства Гаусса показывает, что уже не позднее 1798 г. Гаусс владел главнейшими свойствами функциональных сравнений.

В статье «Общие исследования о сравнениях», напечатанной впервые после смерти Гаусса во II томе его сочинений [1]), вопросу о мнимых корнях сравнения посвящен специальный параграф. Отмечается, что введение таких корней представляется вполне естественным и сулит большие удобства в исследованиях. Однако сам Гаусс предпочитает обходиться без этих мнимостей, так как их природа ему еще не вполне ясна.

Именно здесь уместно было указать, что Эйлеру принадлежит первая попытка введения новых мнимостей. Гаусс этого не сделал.

Мнимости, о которых впервые говорил Эйлер, могут быть введены без каких-либо логических противоречий. В работе 1866 г. Серре показал, что «теория мнимостей Галуа» есть не что иное, как «теория сравнений по двойному модулю» [2]).

4. Вернемся теперь к мемуару Эйлера. В публикуемом извлечении содержится 38 параграфов. Всего же в мемуаре 97 параграфов. Сделаем несколько кратких замечаний относительно содержания остальной части мемуара.

В § 39 Эйлер указывает, что доказательство, которым он подтвердил существование первообразных корней, не дает метода их нахождения. Первообразный корень может быть найден посредством последовательных попыток.

В § 44 доказывается, что первообразных корней простого модуля существует $\varphi(p-1)$.

---

[1]) C. F. Gauss, Werke, т. II, 1863, стр. 212—240. См. также: C. F. Gauss, Untersuchungen über höhere Arithmetik, deutsch hrsg. von H. Maser, Berlin, 1889, стр. 602—629 (см. § 338).

[2]) J. A. Serret, Mém. Acad. Sci. de l'Institut de France, т. XXXV, 1866, стр. 617—688. См. также: J. A. Serret, Cours d'algèbre supérieure, т. II, Paris, 4-е изд., 1879, 5-е изд., 1885, 6-е изд., 1910.

В § 50 дается таблица первообразных корней для всех простых чисел $p \leqslant 37$. Рассматривая эту таблицу, Эйлер замечает: «Однако здесь нельзя уловить никакого соотношения между произвольным простым числом и соответствующими ему первообразными корнями, которое позволило бы для любого простого делителя определить хотя бы один-единственный первообразный корень; и распределение этих корней представляется столь же скрытым, как и распределение самих простых чисел».

Большой интерес представляет также и остальная часть работы, посвященная приложениям теоремы существования первообразного корня.

Здесь Эйлер на основе положений, устанавливаемых им относительно квадратичных вычетов, кубических, биквадратичных и вообще вычетов любой степени по простому модулю p, доказывает ряд важнейших теорем.

Некоторые из этих теорем были доказаны Эйлером еще раньше. Новые доказательства отличаются краткостью и изяществом.

В § 57 доказано, что -1 является квадратичным вычетом простого числа $p=2n+1$, если n—четное число, и невычетом, если n—нечетное.

Этот факт впервые был установлен Эйлером в его известной работе «Доказательство теоремы Ферма о том, что всякое простое число вида $4n+1$ есть сумма двух квадратов»[1]). В ней после значительных усилий Эйлеру удалось получить доказательство с помощью метода конечных разностей. В тесной связи с указанными результатами находятся теоремы §§ 60 и 65:

«Если дано простое число вида $4n+1$, то всегда можно указать сумму двух простых с ним квадратов, которая будет на него делиться, причем один из квадратов может быть выбран произвольно».

«Не существует ни одной суммы простых между собой квадратов, делящейся на какое-либо простое число вида $4n-1$».

---

[1]) L. Euler, Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum primum formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum.— Novi Comment., т. V за 1754—1755 гг. (1760), стр. 3—58; Comm. arith. coll., т. I, стр. 210—233; Opera omnia, серия 1, т. II, стр. 328—337.

Этим изысканиям Эйлера Гаусс уделил надлежащее внимание. Гаусс (§ 64) приводит историко-библиографические данные и подчеркивает, что Лагранж установил эти факты позднее, в 1775 г.

Далее в §§ 76—79 Эйлер решает вопрос о квадратичном характере чисел 3 и -3.

Эти изыскания по непонятной причине Гаусс оставил без внимания. Отметив, что доказательство теорем о квадратичном характере чисел ± 3 впервые было дано Эйлером, Гаусс (§ 120) ссылается только на прежнюю работу Эйлера, в которой доказательство достигается с помощью метода конечных разностей. Там же Гаусс выражает удивление по поводу того, что Эйлер не сумел решить вопрос о квадратичном характере чисел $+2$ и -2.

Все это вызывает недоумение, ибо в обсуждаемом мемуаре Эйлера, о котором сам Гаусс говорит неоднократно и даже рекомендует читателям (§ 93) как заслуживающий особого внимания, содержится (§§ 85—90) полное решение вопроса о квадратичном характере чисел $+2$ и -2.

Рудио справедливо замечает, что ни Гаусс, ни последующие математики не обратили должного внимания на доказательства, содержащиеся в рассматриваемом мемуаре Эйлера.

Но, может быть, Гаусс сознательно обходил эти изыскания Эйлера, так как они опираются на теорему существования первообразного корня, доказательство которой Гаусс подверг критике?

Такое предположение мы считали бы неправильным. Ведь новое доказательство теоремы о квадратичном характере числа -1 и теорем, примыкающих к ней, привлекло внимание Гаусса. На таком же основании Гаусс мог бы отметить и новые доказательства теорем о квадратичном характере чисел $+3$ и -3 и, конечно, не должен был обойти молчанием доказательство теорем о квадратичном характере чисел $+2$ и -2, впервые предложенных здесь Эйлером.

Невольно напрашивается одно сравнение. Гаусс (§ 76) следуя Эйлеру, дает доказательство известной теоремы Вильсона, использующее первообразный корень. При этом он ссылается на мемуар Эйлера, содержащийся в первом томе «Opuscula analytica» (1783). Гаусс неоднократно ссылается и на другие работы этого тома. Однако в этом же томе Гаусс не заметил важный мемуар Эйлера, в котором содержится полная формулировка квадратичного закона взаимности в форме, довольно близкой к той, которую предложил сам Гаусс.

Впервые на этот мемуар Эйлера обратил внимание П. Л. Чебышев (1849).

Естественно предположить, что Гауссу не хватало времени на то, чтобы тщательно изучать многочисленные мемуары Эйлера.

В литературе до сих пор повторяется указание Гаусса о том, что теоремы о квадратичном характере чисел ± 2 были впервые доказаны Лагранжем, и также отмечается безуспешность попыток Эйлера.

Рудио, комментируя одну работу Эйлера, в которой последний признавался в том, что ему еще не удалось доказать теоремы о представимости простых чисел вида $8n+1$ и $8n+3$ квадратичной формой x^2+2y^2 (другая формулировка вопроса о квадратичном характере чисел ± 2), писал, что доказательства этих теорем впервые были найдены Лагранжем [1]).

Впоследствии Рудио отказался от этого утверждения и настаивал на приоритете Эйлера [2]). И действительно, «Арифметические исследования» Лагранжа [3]), на которые ссылается Гаусс, были напечатаны не ранее 1775 г., между тем как мемуар Эйлера был опубликован уже в 1774 г.

В заключение следует заметить, что мы отнюдь не стремились дать полную историю развития теории степенных вычетов в трудах Эйлера. Основной интерес для нас представляло эйлеровское доказательство теоремы существования первообразного корня. Название статьи полностью отражает это обстоятельство.

---

[1]) F. Rudio, Vorwort des Herausgebers; см. L. Euleri, Opera omnia, серия 1, т. II, 1915, стр. XXX.

[2]) См. примечание [3]) на стр. 239.

[3]) J. L. Lagrange, Recherches d'arithmétique.—Nouveau mém. de l'Acad. de sci. de Berlin, 1775, стр. 349, 351.

Приложение

ИЗВЛЕЧЕНИЕ ИЗ МЕМУАРА Л. ЭЙЛЕРА

«Доказательства, относящиеся к вычетам, происходящим от деления степеней на простые числа» [1])

Положение

1. Вычеты, получающиеся при делении на простое число P членов геометрической прогрессии, начинающейся с единицы, будем обозначать буквами $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ и т. д. следующим образом:

Геометрическая прогрессия ... $1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6$ и т. д.

Вычеты . . . . $1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta$ и т. д.

Заключения

2. Все эти вычеты меньше делителя P, ибо пока члены геометрической прогрессии меньше делителя P, вычеты равны им самим; когда же они превосходят делитель P, то, вычитая из них делитель P столько раз, сколько возможно, мы непременно получим вычеты, меньшие чем P.

3. Если число a простое относительно делителя P, т. е. не равно ни ему самому, ни какому-либо его кратному, то никакая степень его не будет делиться на P, и следовательно, среди вычетов никогда не встретится нуль.

4. Так как все вычеты меньше делителя P, а количество чисел, меньших P, равно $P-1$, то различных вычетов может встретиться не более чем $P-1$. А так как ряд вычетов бесконечен, то в нем должны часто повторяться одни и те же вычеты.

5. По любому вычету, например ε, легко определяется следующий за ним ζ. Действительно, так как $\varepsilon=a^5-mP$, а $\zeta=a^6-nP$, то $\zeta-a\varepsilon=(ma-n)P$, и отсюда $\zeta=a\varepsilon-(n-ma)P$. Поэтому, вычитая из произведения $a\varepsilon$ делитель P столько раз, сколько это возможно, получим следующий вычет ζ.

6. По отношению к простому числу P все числа можно распределить по определенным рядам, включая в один и тот же ряд все числа, дающие при делении на P один и тот же вычет. Ряды эти будут таковы:

$$\begin{array}{rllllll}
\text{I.} & 0, & P, & 2P, & 3P, & 4P, \ldots, & mP, \\
\text{II.} & 1, & P+1, & 2P+1, & 3P+1, & 4P+1, \ldots, & mP+1, \\
\text{III.} & 2, & P+2, & 2P+2, & 3P+2, & 4P+2, \ldots, & mP+2, \\
\text{IV.} & 3, & P+3, & 2P+3, & 3P+3, & 4P+3, \ldots, & mP+3
\end{array}$$

и т. д.

7. Для каждого простого числа P окажется столько рядов чисел, сколько единиц содержится в числе P; каждый ряд харак-

[1]) Перевод с латинского Я. М. Боровского. Библиографические данные см. на стр. 236.

теризуется вычетом, общим всем его числам, и этот вычет занимает в каждом ряду первое место.

8. Так как природа каждого ряда определяется присущим ему вычетом, то любое число каждого ряда так же характеризует его природу, как и первое, представляющее собой самый вычет. Поэтому ничто не препятствует обозначать вычет ε через любое другое число $mP+\varepsilon$ того же ряда.

Наблюдения

9. Таким образом, тот же вычет ε можно будет обозначать не только положительными числами $\varepsilon+P$, $\varepsilon+2P$ и т. д., но также и отрицательными $\varepsilon-P$, $\varepsilon-2P$ и т. д. И так как при ε бо́льшем, чем половина делителя P, разность $\varepsilon-P$ меньше этой же половины, то очевидно, что, допуская отрицательные числа, можно выразить все вычеты числами, не превосходящими половины делителя P.

10. При заданном простом делителе P в зависимости от того, какой взят корень геометрической прогрессии a, может оказаться, что среди вычетов встречаются либо все числа меньшие, чем P, либо не все. Так, если взять корень $a=1$, то все вычеты обращаются в единицу, а если взять $a=P-1$, то получается такой ряд вычетов:

$$1,\ P-1,\quad 1,\ P-1,\quad 1,\ P-1 \text{ и т. д.}$$

или (§ 9)

$$+1,\quad -1,\ +1,\quad -1,\ +1,\quad -1 \text{ и т. д.}$$

11. Чтобы показать, что иногда среди вычетов встречаются все числа, меньшие делителя P, достаточно одного примера; пусть будет $P=7$ и примем корень $a=3$, имеем:

Геометрическая прогрессия . . $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^8, 3^9$ и т. д.
Вычеты . . . . $1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6$ и т. д.

12. Если при том же делителе $P=7$ корню придавать другие значения, то получатся следующие ряды вычетов:

Геометрическая прогрессия . . $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9$ и т. д.
Вычеты . . . . $1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1$ и т. д.
Геометрическая прогрессия . . $1, 4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6, 4^7, 4^8, 4^9$ и т. д.
Вычеты . . . . $1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1$ и т. д.
Геометрическая прогрессия . . $1, 5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6, 5^7, 5^8, 5^9$ и т. д.
Вычеты . . . . $1, 5, 4, 6, 2, 3, 1, 5, 4, 6$ и т. д.

13. Чтобы получить все разновидности, которые возможны для рядов вычетов, достаточно придать корню a все значения меньшие, чем делитель P, ибо если вместо a взять $a+P$, то из геометрической прогрессии $1,\ a+P,\ (a+P)^2,\ (a+P)^3$ и т. д. возникает

тот же ряд вычетов, что из геометрической прогрессии 1, a, a^2, a^3, a^4 и т. д.

14. Подобно тому, как среди вычетов мы допускаем и отрицательные числа (§ 9), с тем чтобы все они оставались меньше половины делителя P, так и для корня геометрической прогрессии можно допустить отрицательные числа, и тогда будем иметь:

Геометрическая прогрессия . . . . 1, $-a$, $+a^2$, $-a^3$, $+a^4$, $-a^5$, $+a^6$, $-a^7$ и т. д.

Вычеты . . . . 1, $-\alpha$, β, $-\gamma$, δ, $-\varepsilon$, ζ, $-\eta$ и т. д.

15. Но при корне $-a$ возникают те же вычеты, как и при корне $P-a$, откуда явствует, что для случаев, в которых корень a превосходит половину делителя P, вычеты легко могут быть найдены из случаев, в которых $a<\frac{1}{2}P$.

16. Если вместо корня a последовательно подставляются все числа меньшие, чем делитель P, то возникающие при этом ряды вычетов будут или полные или неполные, а именно *полными* я называю такие, в которых встречаются все числа меньшие, чем делитель P; *неполными* же такие, в коих некоторые из этих чисел не входят в ряд вычетов.

17. Так как мы видели, что при любом делителе P возможны такие значения корня a, как, например, $a=1$ и $a=P-1$, от которых получаются неполные ряды вычетов, то возникает вопрос, *всегда ли возможны такие геометрические прогрессии, которые доставляют полные ряды вычетов.*

18. Такие корни геометрической прогрессии, которые производят полные ряды вычетов, *я буду называть первообразными.* Так, выше мы видели, что для делителя $P=7$ корни 3 и 5 являются *первообразными.* Но вопрос о том, для всех ли простых делителей существуют первообразные корни, требует более углубленного исследования и будет рассмотрен ниже.

Леммы

19. Когда в ряду вычетов предшествующие члены начинают повторяться, то *первым повторяющимся всегда бывает единица.*

Доказательство. Предположим, что раньше, чем повторится единица, повторится какой-нибудь другой вычет ε, возникший от степени a^{μ}, и что он появляется вторично от степени $a^{\mu+\nu}$. Следовательно, так как $\varepsilon=a^{\mu}-mP$ и $\varepsilon=a^{\mu+\nu}-nP$, то $a^{\mu+\nu}-a^{\mu}=(n-m)P$, и поэтому $a^{\mu}(a^{\nu}-1)$ будет кратным P; но так как a^{μ} не может делиться на P (ибо корень a меньше делителя P и потому число, простое с ним), то второй множитель $a^{\nu}-1$ непременно будет делиться на P, и следовательно, степень a^{ν} при делении на P дает в остатке единицу, а так как эта степень ниже, чем $a^{\mu+\nu}$, то очевидно, что вычет ε не может появиться вновь ранее, чем повторится единица.

20. После того как в ряду вычетов 1, α, β, γ, δ и т. д. повторится единица, остальные вычеты будут повторяться один за другим в том же порядке, как и с самого начала.

Доказательство. Пусть единица появляется вторично от степени a^{ν}, тогда следующий вычет будет (§ 5) $a\cdot 1=a$, т. е. тот же, который возникал от второго члена a, а именно α, затем снова последуют вычеты β, γ, δ и т. д. в том же порядке, как и с самого начала.

21. Если a есть первообразный корень, то его степень a^{P-1} при делении на простой делитель P даст в остатке единицу.

Доказательство. Так как a—первообразный корень, то в ряду вычетов встречаются все числа, меньшие делителя P, количество которых есть $P-1$; необходимо, следовательно, чтобы они происходили от такого же количества членов геометрической прогрессии 1, a^1, a^2, a^3 и т. д., из которых последним будет a^{P-2}; поэтому следующий член a^{P-1} воспроизведет какой-либо из предшествующих вычетов, а таковым непременно будет единица (§ 19).

22. Если геометрическая прогрессия 1, a, a^2, a^3, a^4 и т. д. дает *неполный* ряд вычетов, то число различных вычетов будет составлять аликвотную часть числа $P-1$, т. е. простого делителя P, уменьшенного на единицу.

Доказательство. Пусть число различных вычетов 1, α, β, γ, δ и т. д., порождаемых этой геометрической прогрессией, равно r и, согласно предположению, меньше, чем $P-1$, так что некоторые числа, которые назовем $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и т. д., количество которых $=P-1-r$, исключается из ряда вычетов. Утверждаю, что так как $\mathfrak{A}$ не содержится в ряду вычетов, то там не могут встретиться ни $\alpha\mathfrak{A}$, ни $\beta\mathfrak{A}$, ни $\gamma\mathfrak{A}$ и т. д. Действительно, если $\varepsilon\mathfrak{A}$ оказалось бы вычетом, где ε возникает от определенной степени корня a, например a^{ν}, то можно было бы вместе $\varepsilon\mathfrak{A}$ рассматривать $a^{\nu}\mathfrak{A}$, и тогда следующими вычетами были бы (§ 5) $a^{\nu+1}\mathfrak{A}$, $a^{\nu+2}\mathfrak{A}$, $a^{\nu+3}\mathfrak{A}$ и т. д., вообще $a^{n}\mathfrak{A}$; но так как существует степень a^n, дающая в остатке единицу, то $\mathfrak{A}$ было бы вычетом, что противоречит предположению. Отсюда вытекает, что если дан один невычет $\mathfrak{A}$, то тем самым дано r невычетов, и если этим еще не исчерпано количество чисел $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и т. д., равное $P-1-r$, то снова присоединяются r невычетов, и так далее, откуда следует, что число $P-1-r$ необходимо будет кратным r; итак, пусть $P-1-r=nr$, тогда $r=\dfrac{P-1}{n+1}$, и поэтому число вычетов r всегда составляет аликвотную часть числа $P-1$.

23. Какое бы значение, меньшее простого делителя P, ни придать корню a, степень a^{P-1} при делении на P дает в остатке единицу, т. е. $a^{P-1}-1$ будет делиться на P.

Доказательство. Пусть r — число всех различных вычетов $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ и т. д., порожденных геометрической прогрессией:

$$1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots, a^{r-1};$$

тогда следующая степень a^r будет иметь вычетом единицу, и выражение a^r-1 будет делиться на P. А так как r — аликвотная часть числа $P-1$, то выражение $a^{P-1}-1$ будет делиться на a^r-1, а следовательно, и на сам делитель P.

24. В ряду вычетов $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ и т. д., будет ли он полным или неполным, встречаются также произведения этих вычетов, взятых по два, по три, по четыре и т. д., а следовательно, и любые степени каждого из них, если они снижены посредством деления на P.

Доказательство. Если степень a^m дает вычет μ, а степень a^n — вычет ν, то $a^m = \,..\, P+\mu$ и $a^n = \,..\, P+\nu$, где я пишу две точки .. вместо любого целого коэффициента.

Отсюда $a^{m+n} = \,..\, P+\mu\nu$, так что степень a^{m+n} дает вычет $\mu\nu$. Итак, в ряду вычетов встречается произведение двух вычетов, и наше предложение становится очевидным.

25. Если даны два вычета μ и ν, то в ряду вычетов встретится такой вычет ω, что будет $\nu=\mu\omega$ или $\nu=\mu\omega - \,..\, P$.

Доказательство. Пусть вычеты μ и ν возникают от степеней a^m и a^n, а ω является вычетом степени a^{n-m} или, если $n<m$, степени $a^{P-1+n-m}$; тогда вычет степени $a^n=a^m\cdot a^{n-m}$ будет равен $\mu\omega - \,..\, P$, и следовательно, $\nu=\mu\omega - \,..\, P$.

26. Так как единица всегда содержится в ряду вычетов, то каждому вычету μ там же соответствует такой другой ω, что $\mu\omega=1$ или $\mu\omega=1+\,..\, P$. Такие два вычета я буду называть *союзными*. Отсюда видно, что в каждом ряду вычетов члены можно сгруппировать таким образом, чтобы они были попарно союзными.

Надо только отметить, что *единица союзна сама себе*, а если встречается -1, то и она также будет союзна сама себе.

27. Сделав эти предварительные замечания, которые я подробнее развил в другом месте, я перехожу к нижеследующим теоремам, где на основании весьма замечательных начал будут доказаны многие новые истины, доступ к которым посредством применявшихся до сих пор методов представляется чрезмерно затруднительным.

Теорема

28. Выражение x^n-1 может оказаться делящимся на простое число P не более чем n способами, если $x<P$.

Доказательство. Начнем с простейших случаев. Прежде всего непосредственно очевидно, что выражение x^1-1 может делиться на простой делитель P лишь в единственном случае, когда принято $x=1$, так как значения x большие, чем P, исключаются.

Чтобы выражение x^2-1 допускало деление на P, это деление должно допускать либо $x-1$, либо $x+1$; в первом случае $x=1$, во втором $x=P-1$; никаким другим способом требование не может быть удовлетворено, если исключаются случаи $x>P$. Выражение $x^3-1=(x-1)(xx+x+1)$ делится на P, во-первых, если $x=1$, а затем, если $xx+x+1=mP$; если последнему условию удовлетворяет $x=a$, то удовлетворит и a^2, а более высокие степени ввиду того, что a^3-1 делится на P, и, значит, вычет для a^3 равен 1, сводятся к предыдущим. Утверждаю теперь, что, кроме этих трех случаев, других не существует, ибо если бы деление было возможным для какого-либо случая $x=b$, то, так как $aa+a+1$ и $bb+b+1$ делятся на P, то также делилась бы и их разность $(a-b)(a+b+1)$, т. е. либо $a-b$, либо $a+b+1$; первое дало бы $b=a$, второе при вычитании из $aa+a+1$ дало бы $aa-b=mP$, т. е. $b=aa$, каковые случаи уже учтены. Итак, более чем тремя способами деление не получается.

Переходя к выражению общего вида x^n-1, я замечу, что если оно делится на простое число P в случае $x=a$, так что $x-a$ оказывается делителем выражения x^n-1-mP, то, произведя это деление, получим выражение степени, меньшей на единицу, которое надо сделать делящимся на P; если это достигается при значении $x=b$, то мы снова понизим степень, откуда, так же как и при решении уравнений, можно заключить, что более чем n способами требование не может быть удовлетворено; если $x=a$ есть одно из подходящих значений, то таковыми будут:

$$x=1,\ x=a,\ x=a^2,\ x=a^3,\ x=a^4,\ \ldots,\ x=a^{n-1},$$

так как a^n равносильно единице.

Схолия

29. Эту теорему надо понимать в том смысле, что выражение x^n-1 может быть сделано делимым на простое число P во всяком случае не более чем n способами, если не допускать для x иных значений, кроме меньших, чем P. Действительно, если требованию удовлетворяет какое-либо значение $x=a$, то ему будут удовлетворять и все значения, даваемые формулой $x=a+mP$, и поэтому их уместно рассматривать все как один-единственный случай. С установлением этого закона число случаев часто будет оказываться меньшим, чем показатель n; так, если поставить вопрос, во скольких случаях выражение x^5-1 оказывается делящимся на 7, то обнаружим, что этого можно достигнуть не пятью, а только одним способом, при $x=1$, остальные же четыре случая оказываются как бы мнимыми. Как будет видно из дальнейшего, некоторые решения оказываются невозможными во всех случаях, когда показатель n не является аликвотной частью $P-1$;

напротив, если n является его аликвотной частью, все решения будут вещественными. А если $n=P-1$, то очевидно, что столько же существует и решений, потому что все числа меньшие, чем P, количество которых равно $P-1$, при подстановке вместо x делают выражение x^n-1 делящимся на простое число P (§ 23). Когда же показатель n больше, чем $P-1$, например $n=P-1+k$, то выражение $x^{P-1+k}-1$ сводится к x^k-1, ибо степень x^{P-1} в отношении вычетов должна считаться равносильной единице.

Определение

30. *Особые* случаи, в которых выражение x^n-1 делится на какое-либо простое число, это те, которые не являются общими ни с одним низшим выражением, где показатель n меньше

Королларий 1

31. Так как случай $x=1$ является для формулы x^n-1 общим со всеми низшими, то его всегда следует отделять от особых для нее случаев; и если число всех случаев n, то число особых случаев по крайней мере на единицу меньше.

Королларий 2

32. Если показатель n — простое число, то выражение x^n-1 не делится ни на какое низшее такого же вида, кроме x^1-1, откуда число особых случаев равно $n-1$.

Королларий 3

33. Если же показатель n — составное число, например $n=\mu\nu$, то выражение x^n-1 делится в тех же случаях, что и выражения $x^\mu-1$ и $x^\nu-1$, потому что оно делится на эти выражения; поэтому случаи, принадлежащие этим выражениям, должны быть отделены от особых случаев выражения x^n-1.

Задача

34. Определить для всех показателей n число особых случаев, в которых выражение x^n-1 может стать делимым на какое-либо простое число P, если для x допускаются только такие значения, которые меньше делителя.

Решение. Из числа всех случаев, равного n, исключим те, в которых делимыми становятся низшие формулы, содержащиеся в заданной; содержатся же в заданной формуле x^n-1 только такие низшие формулы, например $x^\nu-1$, показатель которых ν есть аликвотная часть показателя n. Но если существует несколько таких низших формул, то чтобы не приходилось исключать одни и те же случаи дважды или несколько раз, надо исключить только случаи, особые для каждой из них, после чего останутся особые случаи заданной формулы x^n-1; таким образом, можно легко переходить все время от меньших показателей к бо́льшим:

Формула	Число особых случаев
x^1-1	1
x^2-1	$2-1=1$
x^3-1	$3-1=2$
x^4-1	$4-1-1=2$
x^5-1	$5-1=4$
x^6-1	$6-2-1-1=2$
x^7-1	$7-1=6$
x^8-1	$8-2-1-1=4$
x^9-1	$9-2-1=6$

и т. д.

Отсюда, вообще, если α, β, γ, δ и т. д. — простые числа, положение будет таково:

Формула	Число особых случаев
x^1-1	1
$x^\alpha-1$	$\alpha-1$
$x^\beta-1$	$\beta-1$
$x^\delta-1$	$\gamma-1$
$x^{\alpha\alpha}-1$	$\alpha\alpha-\alpha=\alpha(\alpha-1)$
$x^{\alpha\beta}-1$	$\alpha\beta-\alpha-\beta+1=(\alpha-1)(\beta-1)$
$x^{\beta\beta}-1$	$\beta\beta-\beta=\beta(\beta-1)$
$x^{\alpha\gamma}-1$	$\alpha\gamma-\alpha-\gamma+1=(\alpha-1)(\gamma-1)$
$x^{\beta\gamma}-1$	$\beta\gamma-\beta-\gamma+1=(\beta-1)(\gamma-1)$
$x^{\gamma\gamma}-1$	$\gamma\gamma-\gamma=\gamma(\gamma-1)$
$x^{\alpha\alpha\alpha}-1$	$\alpha^3-\alpha\alpha+\alpha-\alpha+1-1=\alpha\alpha(\alpha-1)$
$x^{\alpha\alpha\beta}-1$	$\alpha\alpha\beta-\alpha\alpha+\alpha-(\alpha-1)(\beta-1)-\alpha-\beta+1=\alpha(\alpha-1)(\beta-1)$

Отсюда мы заключаем, что если будет $n=\alpha^\lambda\beta^\mu\gamma^\nu$, то число особых случаев для формулы x^n-1 будет равно

$$\alpha^{\lambda-1}(\alpha-1)\beta^{\mu-1}(\beta-1)\gamma^{\nu-1}(\gamma-1).$$

Если мы рассмотрим это более внимательно, то заметим, что для каждой формулы x^n-1 существует столько особых случаев, сколько среди чисел, меньших n, имеется простых относительно него.

Королларий 1

35. Если при простом делителе, равном P. принять показатель n равным $P-1$, то формула $x^{P-1}-1$ непременно имеет $P-1$ случаев ‹делимости›, и притом все вещественные, так как x может принимать все значения меньшие, чем P (§ 23); если отсюда исключить те случаи, которые общи данной формуле с более простыми, то оставшиеся особые случаи непременно будут все вещественные.

Королларий 2

36. Следовательно, всегда существуют числа меньшие, чем делитель P, которые представляют особые случаи формулы $x^{P-1}-1$, т. е. такие, которые не соответствуют ни одной низшей формуле.

Схолия

37. Хотя вышеизложенное может показаться слишком отвлеченным и лишенным какого-либо применения, однако я не мог обойтись без этого при построении нижеследующих доказательств, где прежде всего необходимо показать, что какое бы простое число ни было взято в качестве делителя P, всегда могут быть найдены такие геометрические прогрессии 1, a, a^2, a^3, a^4 и т. д., из которых будут получаться полные ряды вычетов, т. е. такие ряды, в которых будут встречаться все числа меньшие, чем делитель, прежде чем все по порядку вычеты возобновятся. Многим может быть это покажется настолько очевидным, что не нуждается в доказательстве, так как для небольших простых делителей такие геометрические прогрессии, дающие полные ряды вычетов, могут быть практически показаны, и при переходе ко все бо́льшим делителям основания для сомнения постепенно убывают. Но так как для непростых делителей дело обстоит иначе, то доказательство этой особенности простых чисел представилось во всяком случае необходимым.

Теорема

38. Какое бы простое число ни было взято в качестве делителя P, всегда можно найти такую геометрическую прогрессию 1, a, a^2, a^3, a^4 и т. д., из которой будет возникать полный ряд вычетов.

Доказательство. Если положить вообще корень геометрической прогрессии равным x и всегда меньшим делителя P, то член x^{P-1} при делении на P дает в остатке единицу и далее вычеты станут повторяться в том же порядке, как они шли с самого начала; надо показать, что для x можно подобрать такое число a, чтобы a^{P-1} было наименьшей его степенью, дающей при делении на P в остатке единицу; ибо если единица не встречается в ряду вычетов до этого члена, то все предшествующие вычеты непременно будут между собой различны, а так как их число $P-1$, то в ряду вычетов встретятся все числа меньшие, чем P, и следовательно, этот ряд будет полным. Итак, остается показать, что не все числа меньшие, чем делитель P, таковы, чтобы какая-то низшая степень их при делении на P давала в остатке единицу. Но если это имеет место для степени x^n, причем $n < P-1$, то, как мы уже установили (§ 22), ее показатель n непременно будет аликвотной частью $P-1$; но, как я уже показал в §§ 34—36, выражение $x^{P-1}-1$ всегда имеет свои особые случаи, например $x=a$, при котором никакое низшее выражение не допускает деления на P; итак, степень a^{P-1} будет низшей среди тех, которые дают при делении на P в остатке единицу; поэтому если число a принять за корень геометрической прогрессии, то из нее с необходимостью возникает полный ряд вычетов.

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ [1])

И. Г. Башмакова

§ 1. Введение

Основная теорема алгебры была высказана впервые Жираром (1629 г.) и Декартом (1637 г.); правда, данная ими формулировка сильно отличалась от современной: утверждалось, что уравнение может иметь столько корней, какова его степень; если же у него не существует такого количества действительных корней, то можно считать, что остальные корни являются воображаемыми.

В 40-х годах XVIII века Маклорен и Эйлер дали основной теореме алгебры формулировку, эквивалентную современной: всякое уравнение с действительными коэффициентами можно разложить в произведение множителей 1-й и 2-й степени с действительными коэффициентами, иными словами, уравнение степени n имеет n корней, действительных или комплексных $a+b\sqrt{-1}$.

Первое доказательство основной теоремы предложил в 1746 г. Даламбер. Хотя ученые XVIII века и не видели недочетов в этом доказательстве, но оно казалось им слишком аналитичным. Математики стремились обосновать основную теорему чисто алгебраически, исходя из самой теории уравнений. В настоящее время известно, что этого

---

[1]) Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность И. Р. Шафаревичу, просмотревшему эту работу в рукописи и сделавшему ряд ценных замечаний.

сделать нельзя, если не использовать в том или ином виде свойств непрерывности, однако можно свести применение этих свойств к минимуму. Первое такое «максимально алгебраическое» доказательство принадлежит Леонарду Эйлеру.

Работа «Исследования о воображаемых корнях уравнений», в которой проводится доказательство основной теоремы алгебры, была сдана Эйлером в Мемуары Берлинской Академии наук в 1749 г. и опубликована в них в 1751 г.[1]). Согласно Г. И. Якоби мемуар, озаглавленный «Theoremata de radicibus aequationem imaginarii», был представлен Эйлером Берлинской Академии наук еще 10 ноября 1746 г. Таким образом, Эйлер проводил свои исследования почти одновременно с Даламбером. Интересно, что при этом оба ученых исходили из совершенно различных принципов.

Мы не будем останавливаться на доказательстве Даламбера: оно достаточно хорошо известно, с одной стороны, и не имеет точек соприкосновения с работой Эйлера, — с другой. Доказательство Эйлера в противоположность даламберову в настоящее время почти забыто. Между тем в основе его лежит именно та идея, которая потом повторялась и варьировалась при всех так называемых алгебраических доказательствах основной теоремы. Последующие доказательства могли быть короче или длиннее, более или менее остроумными, могли быть проведены вполне строго или иметь существенные пробелы, однако основная идея оставалась неизменной.

Кроме того, в процессе доказательства Эйлер впервые применил методы исследования уравнений, которые позднее были развиты Лагранжем и стали основными в его работах, посвященных вопросу решения уравнений в радикалах, а затем вошли в качестве неотъемлемой составной части в теорию Галуа.

Забвение такой важной работы великого ученого объясняется, быть может, следующими обстоятельствами. Доказательство Эйлера не было свободно от недочетов и про-

---

[1]) Recherches sur les racines imaginaires des équations; L e o n h a r d i E u l e r i, Opera omnia, серия 1, Opera mathematica, т. VI, Лейпциг—Берлин, 1921, стр. 78—147.

белов. На это обратил внимание еще Фонсене. Он опубликовал свое доказательство основной теоремы [1]), которое также являлось нестрогим. В 1772 г. Лагранж, ценивший доказательство Эйлера именно за его алгебраичность, посвятил тому, чтобы восполнить все пробелы в этом доказательстве, специальный мемуар: «О виде воображаемых корней уравнения» (1772—1774) [2]). Для этого Лагранж привлек теорию симметрических функций, а также учение о подобных функциях, развитое им в знаменитых «Размышлениях об алгебраическом решении уравнений» [3]) (1770—1771). При этом Лагранж сохранил в неприкосновенности не только основную идею Эйлера, но и принципиальную постановку вопроса.

Наконец, в 1799 г. молодой Гаусс посвятил доказательству основной теоремы алгебры свою докторскую диссертацию. В первой части диссертации он дал критический анализ всех предшествующих доказательств этой теоремы. Разбирая работу Эйлера, он отметил не только те пробелы, на которые до него обратил внимание Лагранж, но—и это основное—подверг критике принципиальную постановку вопроса. Так как в своей работе Лагранж не изменил точки зрения Эйлера, то Гаусс приходит к выводу, что основная теорема алгебры не была доказана никем из его предшественников. Во второй части диссертации Гаусс изложил новое доказательство основной теоремы, которое с точки зрения математики XIX века до Вейерштрасса было безупречно строгим. Впоследствии он дал еще три других доказательства этой теоремы, из которых второе, очень остроумное, было столь же алгебраично, как и данное Эйлером. В дальнейшем мы будем говорить о нем подробнее.

Во второй половине XIX века в курсах алгебры стали применять либо исправленное доказательство Даламбера,

[1]) Miscellanea Philosophico-mathematica Societatis privatae Taurinensis, 1, 1759.

[2]) Sur la forme des racienes imaginaires des équations, Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1772; см. также Oeuvres, т. 3, Paris, 1869, стр. 479—516.

[3]) Reflexions sur la résolution algébrique des équations, Nouvea ux Mém. de l'Acad. de Berlin, 1770—1771; см. также Oeuvres, т. 3, Paris, 1869, стр. 205—421.

либо одно из доказательств Гаусса. Работы Эйлера и Лагранжа в этой области были забыты. Об этих работах почти нет упоминаний и в историко-математической литературе. В известных «Лекциях» М. Кантора говорится только, что Лагранж восполнил пробелы в доказательстве Эйлера, но что он, как и Эйлер, предполагал существование корней уравнения[1]). В немецкой «Энциклопедии математических наук»[2]) говорится, что попытки доказательства основной теоремы были сделаны Даламбером, Эйлером, Фонсене, Лагранжем, но что первое строгое доказательство дал Гаусс.

Между тем крупнейший алгебраист второй половины XIX века Г. Фробениус, познакомившись с работой Эйлера, писал:

«Он провел для существования корней уравнения в большей части алгебраическое доказательство, которое опирается на то, что каждое действительное уравнение нечетной степени имеет действительный корень. Я считаю несправедливым, что это доказательство приписывают исключительно Гауссу, который только придал ему окончательный вид»[3]).

Мы изложим здесь основные этапы доказательства Эйлера. Прежде всего мы остановимся на принципиальной постановке вопроса, которую без всяких возражений принял Лагранж и которая казалась столь недопустимой Гауссу.

§ 2. Постановка вопроса

Эйлер, Лагранж, Даламбер и другие математики XVIII века ставили вопрос об основной теореме алгебры следующим образом.

Предполагалось, что всякий многочлен степени n с вещественными коэффициентами можно чисто формально

---

[1]) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, т. IV, Лейпциг, 1908, стр. 119—120.

[2]) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, т. I, стр. 233—237.

[3]) Festakt der Universität Basel zur Feier des zweihundersten Geburtstages Leonhard Eulers, Basel, 1907, 15. Цит. по Leonhardi Euleri, Opera omnia, серия 1, т. VI, стр. XVI.

представить как произведения n множителей вида $x - x_i$:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + N = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — какие-то символы или воображаемые количества, о которых нам заранее ничего неизвестно, кроме того, что законы сложения, вычитания, умножения и деления для них такие же, как и для действительных чисел. Эти символы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называли корнями уравнения.

Далее Эйлер и Лагранж, формально перемножая множители

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

и сравнивая произведение с исходным уравнением, получали известные соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -A, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = B, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n N. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Исходя из соотношений $(*)$, доказывали основные теоремы о симметрических функциях. Это было возможно, потому что в процессе доказательства требовалось только, чтобы можно было под символами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ беспрепятственно осуществлять рациональные операции.

При такой постановке вопроса основная теорема алгебры состоит в утверждении, что все корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеют вид $a + b\sqrt{-1}$, где a и b вещественны.

Для доказательства этого предложения Эйлер устанавливает, что всякое алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами разлагается в произведение вещественных множителей 1-й или 2-й степени.

Вот как об этом пишет сам Эйлер: «Итак, мы полагаем, что какова бы ни была степень предложенного уравнения

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + N = 0,$$

оно всегда может быть представлено в виде

$$(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma)(x + \delta) \ldots (x + \nu) = 0,$$

где число таких множителей $= n$. А так как эти множители, будучи действительно перемноженными, должны произвести предложенное уравнение, то очевидно, что количества A, B, C, D, ..., N будут таким образом определены через количества α, β, γ, δ, ..., ν, что будет

$A =$ сумме количеств α, β, γ, δ, ..., ν,
$B =$ сумме всех их произведений по два,
$C =$ сумме произведений по три,
$D =$ сумме их произведений по четыре,
. . . .
. . . .

и, наконец, $N =$ произведению всех $\alpha\beta\gamma\delta \ldots \nu$.

Так как число этих уравнений $= n$, то значения букв α, β, γ, δ, ..., ν будут обратно из них определяться»[1]).

Все буквы α, β, γ, δ, ..., ν, которые не являются вещественными числами, Эйлер называет «воображаемыми» (imaginaire), определяя воображаемое количество чисто отрицательно, как такое, которое не больше нуля, не меньше нуля и не равно нулю. Частным случаем таких воображаемых количеств являются $\sqrt{-1}$, $a+b\sqrt{1}$.

Он говорит далее, что в алгебре обычно считают, «что воображаемые корни так распределены попарно, что как их сумма, так и произведение становятся вещественными»[2]).

Таким образом, если $2m$—число простых воображаемых множителей некоторого уравнения, то они сведутся к m вещественным множителям 2-й степени.

«Поэтому говорят, что каждое уравнение, которое нельзя разложить на действительные простые множители, имеет всегда действительные множители второй степени. Однако никто, насколько я знаю, еще не доказал достаточно строго истинность этого мнения; я постараюсь поэтому дать ему доказательство, которое охватывает все без исключения случаи» [3]).

---

[1]) Leonhardi Euleri, Opera omnia, серия 1, т. VI, стр. 79—80. Легко видеть, что исключение $n-1$ неизвестных из рассматриваемых соотношений снова приведет к исходному уравнению.

[2]) Там же, стр. 80—81.

[3]) Там же, стр. 81.

Такой же точки зрения на смысл основной теоремы алгебры придерживался и Лагранж. В мемуаре «О виде мнимых корней уравнений» он писал: «Кажется, аналисты всегда считали верным предложение, что все воображаемые корни уравнений могут быть приведены к форме

$$A+B\sqrt{-1},$$

где A и B—действительные количества; но только в последнее время удалось доказать его строгим и общим образом» [1]).

Аналогичной позиции при доказательстве основной теоремы придерживались Лаплас (1795) [2]), Вуд (1798) [3]) и др.

Эту постановку вопроса Гаусс считал неприемлемой. Основное его возражение, которое он изложил в § 3 своей диссертации, таково: «Не может ли случиться, что ни заключительное уравнение (т. е. полученное последовательным исключением корней из соотношений (*).—*И. Б.*), ни данное не удовлетворяются никакой величиной из всей области действительных и воображаемых величин?» [4])

Итак, по мнению Гаусса, в основной теореме алгебры должно доказываться существование действительного или мнимого корня, поэтому предполагать корни заранее существующими нельзя. При этом он оговаривает, что под воображаемыми величинами он тут будет понимать только величины вида $a+b\sqrt{-1}$.

В § 8 своей диссертации Гаусс специально разбирает работу Эйлера. Здесь он указывает, что недопустимо говорить о сумме корней, сумме попарных произведений корней и т. д., если вообще не доказано существование хотя бы

---

[1]) «Oeuvres de Lagrange», т. III, стр. 479.

[2]) L a p l a c e, Leçons de Mathématiques données à l'École Normale en 1795, Oeuvres complètes de Laplace, т. 14, Paris, 1912, стр. 63—65.

[3]) J. W o o d, On the roots of equations.—Phil. Trans., т. 88, London, 1798, стр. 369—377.

[4]) «Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse». Auctore C. F. Gauss.—Carl Friedrich G a u s s, Werke, т. III, Геттинген, 1878, стр. 1—30; стр. 3.

одного корня, и продолжает: «Без сомнения, те, кто еще не усмотрел ложность этого заключения, ответят: здесь не доказывается, что уравнение $X=0$ [1]) может быть удовлетворено (так как выражение «оно имеет корни» говорит как раз об этом), но только, что его можно удовлетворить значениями x, содержащимися в форме $a+b\sqrt{-1}$, первое же принимается как основное предположение» [2]).

Против такого хода мыслей Гаусс приводит следующее возражение:

«Так как помимо действительных и воображаемых величин $a+b\sqrt{-1}$ нельзя представить никаких других видов величин, то не совсем ясно, чем отличается то, что надо доказать, от того, что предполагается в качестве основного предложения; но даже если бы можно было придумать еще и другие виды величин как F, F' F'',..., то и тогда нельзя было бы принять без доказательства, что каждое уравнение удовлетворяется либо действительным значением x, либо значением вида $a+b\sqrt{-1}$, либо вида F, либо F' и т. д. Поэтому это основное предложение может иметь только такой смысл. Каждое уравнение может удовлетворяться либо действительным значением неизвестной, либо мнимым вида $a+b\sqrt{-1}$, либо, может быть, некоторым значением другого еще неизвестного вида, либо значением, которое вообще не содержится ни в каком виде. Как эти величины, о которых мы не можем составить никакого представления,—эти тени теней—должны складываться или умножаться, этого нельзя понять с ясностью, требующейся в математике» [3]).

В 1815 г. Гаусс вновь вернулся к основной теореме алгебры, причем дал на этот раз в большей части алгебраическое доказательство. Из самого изложения Гаусса ясно, что свои результаты он получил, как и Эйлер, предполагая существование корней уравнения, а затем сумел элиминировать это предположение. Останавливаясь на принципиальной стороне вопроса, Гаусс утверждает, что способ

[1]) Здесь X—многочлен степени $2m$ с вещественными коэффициентами.

[2]) C. F. Gauss, цит. соч., стр. 12.

[3]) Цит соч., стр. 12—13.

рассуждения, в котором заранее предполагается существование корней, содержит порочный круг: «Это предположение (о возможности разложения многочлена на линейные множители.—*И. Б.*) по крайней мере в том месте, где речь идет об общем доказательстве этой разложимости, есть не что иное, как Petitio principii»[1]).

В своем доказательстве Гаусс ставил вопрос об основной теореме алгебры совершенно иначе, чем это делали математики XVIII века. Он исходил из заранее определенной области K комплексных чисел $a+b\sqrt{-1}$ и доказывал, что у каждого уравнения с вещественными коэффициентами существует в области K корень или, что то же самое, доказывал разложимость любого многочлена на вещественные множители 1-й и 2-й степени. Последнее доказывалось, разумеется, без предположения о существовании корней. Такую постановку вопроса Герман Вейль в своей книге «Алгебраическая теория чисел» назвал точкой зрения математического анализа, все операции которого разворачиваются над полем комплексных чисел.

Анализируя позицию Эйлера, Гаусс говорит и о другой возможности. Если были бы определены другие числовые области F, F', F'',..., то нужно было бы ставить вопрос о существовании корня уравнения в этих областях. Однако в то время, когда было написано первое доказательство Гаусса основной теоремы, т. е. в 1799 г., он не представлял себе никаких других видов величин, кроме действительных и комплексных чисел.

Во второй половине XIX века получила развитие как раз эта вторая точка зрения. Решающее значение тут имела данная в 1882 г. Кронекером конструкция поля разложения для любого многочлена.

Пусть $f(x)$—многочлен с коэффициентами из некоторого поля k, над которым уравнение $f(x)=0$ неприводимо. Тогда, воспользовавшись методом Кронекера[2]), можно построить, исходя из самого многочлена $f(x)$ и не предполагая заранее, что поле k содержится в более широком поле K,

[1]) Цит. соч., стр. 31—56.

[2]) В § 6 этой работы мы будем подробнее говорить о том, как сам Кронекер проводил эту конструкцию.

поле разложения, т. е. то минимальное поле, в котором $f(x)$ распадается в произведение линейных множителей:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Тогда основная теорема алгебры будет состоять в доказательстве того, что для любого многочлена с вещественными или комплексными коэффициентами K является подполем поля комплексных чисел (или, если угодно, изоморфно некоторому его подполю). Этот второй подход Вейль назвал точкой зрения алгебры.

Мы видим, что ход мыслей Эйлера близок к этой второй точке зрения. Правда, ни Эйлер, ни Лагранж не знали конструкции Кронекера. Наличие поля разложения у каждого многочлена они принимали как нечто само собой разумеющееся. Но они интуитивно чувствовали, что нахождение поля разложения для любого многочлена и доказательство того, что все корни содержатся в форме $a+b\sqrt{-1}$, суть два различных вопроса.

Гаусса уже не могло удовлетворить такое ничем не обоснованное предположение о существовании поля разложения для каждого многочлена. Разница в позициях Гаусса и Эйлера в этом вопросе является одним из ярких примеров различия в стиле математического мышления XVIII и XIX веков. Работы Гаусса и здесь, как и во многих других областях математики (теория чисел, внутренняя геометрия поверхностей и др.), явились важнейшим переломным этапом; мы увидим, что Гаусс при доказательстве основной теоремы алгебры дал не только принципиально новую постановку вопроса, но и фактически впервые построил поле разложения многочлена.

Однако Гаусс был неправ, когда утверждал, что в доказательствах, опирающихся на предположение о существовании корней, содержится порочный круг. Мы теперь знаем, что доказательство Эйлера может быть проведено вполне строго.

Мне хотелось бы в заключение особенно подчеркнуть, что здесь, как и во многих других случаях (напомним, например, взгляд Эйлера на расходящиеся ряды, прямые методы вариационного исчисления), точка зрения Эйлера идейно близка к современной, хотя и проведена без достаточной строгости.

Перейдем теперь к изложению мемуара Эйлера.

§ 3. Доказательство Эйлера

После подробного объяснения постановки вопроса Эйлер переходит к рассмотрению примера—он находит действительные множители уравнения

$$x^4+2x^3+4x^2+2x+1=0.$$

Затем он приступает к общему исследованию, выделяя три общие теоремы, основывающиеся на свойстве непрерывности многочленов.

Теорема 1. Всякое уравнение нечетной степени имеет по крайней мере один вещественный корень; если оно имеет несколько вещественных корней, то число их нечетно.

Теорема 2. Всякое уравнение четной степени либо вовсе не имеет вещественных корней, либо имеет четное число их.

Теорема 3. Всякое уравнение четной степени, свободный член которого отрицателен, имеет по крайней мере два вещественных корня, из которых один положителен, а другой отрицателен.

Доказательство всех трех теорем Эйлер получает из рассмотрения графиков кривых

$$y=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+N$$

при $m=2n+1$ и $m=2n$.

Разумеется, с точки зрения критериев строгости, принятых в математическом анализе со времен Вейерштрасса, такое рассмотрение вовсе не является доказательством. Однако оно казалось вполне хорошим не только всем математикам XVIII века, но и Гауссу. Только немногие ученые, вроде Больцано, оспаривали в первой половине XIX века его законность. Но и теперь ведь некоторые представители математической логики оспаривают принципы анализа Больцано—Вейерштрасса.

Теоремами 1—3, а по существу 1 и 3, ограничивается та группа фактов из математического анализа, которой пользуется Эйлер.

Теоремы 4—7 являются основными. В них Эйлер доказывает разложимость на действительные множители 1-й и 2-й степени многочленов с действительными коэффициентами степени $m = 2^r$.

В теореме 4 он доказывает, что всякое уравнение 4-й степени

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

можно всегда разложить в произведение двух вещественных множителей 2-й степени. Эйлер полагает, что уравнение преобразовано к виду

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

и ищет его множители, записывая их по методу Декарта с неопределенными коэффициентами:

$$(x^2 + ux + \lambda)(x^2 - ux + \mu) = 0.$$

Из сравнения с коэффициентами исходного уравнения Эйлер получает для u уравнение 6-й степени с отрицательным свободным членом

$$u^6 + 2Bu^4 + (B^2 - 4D)u^2 - C^2 = 0.$$

Следовательно, u будет иметь по крайней мере два вещественных значения. Но

$$2\lambda = u^2 + B - \frac{C}{u},$$

$$2\mu = u^2 + B + \frac{C}{u},$$

поэтому λ и μ также вещественные. Теорема доказана.

Так как всякое уравнение нечетной степени имеет по крайней мере один вещественный корень, то в качестве следствия из теоремы 4 Эйлер получает, что всякое уравнение 5-й степени может быть разложено на три множителя: один линейный и два — 2-й степени. Все доказательство теоремы 4 получено непосредственными выкладками. Для того чтобы перейти к рассмотрению уравнений высших степеней, Эйлер дает еще одно доказательство теоремы 4, пользуясь «только рассуждениями», т. е. получает все результаты из общих соображений, без выкладок.

Пусть

$$x^4+Bx^2+Cx+D=0 \tag{1}$$

— заданное уравнение и α, β, γ, δ — его корни. Тогда

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0.$$

Пусть уравнение (1) имеет множитель

$$x^2-ux+\mu.$$

Тогда u будет суммой каких-либо двух из четырех корней уравнения (1). Значит, u может принимать $C_4^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=6$ различных значений. Следовательно, u будет удовлетворять уравнению 6-й степени с вещественными коэффициентами. Пусть

$$u_1=\alpha+\beta,\quad u_2=\alpha+\gamma,\quad u_3=\alpha+\delta,$$
$$u_4=\gamma+\delta,\quad u_5=\beta+\delta,\quad u_6=\beta+\gamma.$$

Тогда, очевидно, $u_4=-u_1$, $u_5=-u_2$, $u_6=-u_3$. Если $u_1=p$, $u_2=q$, $u_3=r$, то уравнение, которому удовлетворяет u, будет иметь вид

$$(u-p^2)(u-q^2)(u-r^2)=0.$$

Его свободный член равен $-p^2q^2r^2$. Чтобы показать, что он отрицателен, достаточно установить, что pqr — вещественное число.

Эйлер утверждает, что это всегда так, потому что

$$pqr=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)$$

выражается рационально через коэффициенты B, C, D уравнения (1). Он ссылается при этом на теорему о симметрических функциях. Для данного случая, как он замечает, $pqr=-C$. В конце он добавляет: «Легко видеть также, что и для высших уравнений должно иметь место то же обстоятельство».

На самом деле это место нуждается в более тщательном обосновании: поскольку произведение

$$\pi=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)$$

не является симметрической функцией переменных α, β, γ, δ, поэтому к π нельзя непосредственно применить основную теорему о симметрических функциях. Однако нетрудно показать, что благодаря соотношению между корнями $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ функция π не будет меняться ни при каких подстановках корней. Действительно, непосредственно видно, что π симметрична относительно β, γ, δ. При замене α на β первая скобка остается неизменной, а две другие переходят друг в друга с обратным знаком:

$$\alpha+\gamma \to \beta+\gamma = -(\alpha+\beta),$$
$$\alpha+\delta \to \beta+\delta = -(\alpha+\gamma),$$

т. е. π не будет меняться. Аналогично, π останется без изменения при замене α на γ и α на δ.

Заметим, что уравнение 4-й степени сводится Эйлером к уравнению 6-й степени, содержащему только четные степени неизвестной, т. е. фактически к уравнению нечетной степени, равной 3:

$$(t-p^2)\,(t-q^2)\,(t-r^2)=0$$

и к одному квадратному

$$u^2=t.$$

Второе доказательство Эйлера чрезвычайно интересно. Оно показывает, что Эйлер хорошо знал многие основные факты о природе алгебраических уравнений, которые 20 лет спустя были изложены Лагранжем в «Размышлениях об алгебраическом решении уравнений». Они теперь обычно связываются с именем Лагранжа. К их числу относятся следующие предложения:

1) Рациональная функция от корней уравнения (в данном случае u), которая принимает при всевозможных перестановках корней ν различных значений, удовлетворяет алгебраическому уравнению степени ν, коэффициенты которого рационально выражаются через коэффициенты исходного уравнения.

2) Рациональная функция от корней уравнения, не изменяющаяся ни при каких перестановках корней, рационально выражается через коэффициенты исходного уравнения.

Эти основные положения Эйлер использует и дальше при исследовании уравнений степени $2m=2^n$. В теоремах 5 и 6 он доказывает, что уравнения степени $2m=8$ и $2m=16$ раскладываются соответственно в произведения двух множителей 4-й и 8-й степени с вещественными коэффициентами. При этом он следует той схеме, которую наметил во втором доказательстве теоремы 4. Правда, в этих доказательствах уже имеются пробелы. Мы рассмотрим сейчас общий случай, на котором будут видны все встретившиеся Эйлеру трудности.

Теорема 7. Всякое уравнение, степень которого есть 2^n (n — целое число >1), разлагается на два множителя степени 2^{n-1}.

Исходное уравнение Эйлер записывает в виде

$$x^{2^n}+Bx^{2^n-2}+Cx^{2^n-3}+Dx^{2^n-4}+\ldots=0. \tag{2}$$

Число его коэффициентов есть 2^n-1. Эйлер предполагает, что уравнение (2) раскладывается в произведение двух множителей:

$$\left.\begin{array}{l} x^{2^{n-1}}-ux^{2^{n-1}-1}+\lambda x^{2^{n-1}-2}+\mu x^{2^{n-1}-3}+\ldots, \\ x^{2^{n-1}}+ux^{2^{n-1}-1}+\lambda_1 x^{2^{n-1}-2}+\mu_1 x^{2^{n-1}-3}+\ldots, \end{array}\right\} \tag{3}$$

где $u, \lambda, \mu, \ldots, \lambda_1, \mu_1, \ldots$ — неопределенные коэффициенты, число которых 2^n-1. Таким образом, число неизвестных будет равно числу определяющих соотношений.

Поскольку u является суммой 2^{n-1} корней из всей совокупности 2^n корней, то число различных значений, которые может принимать u, равно

$$N=C_{2^n}^{2^{n-1}}=\frac{2^n(2n-1)(2^n-2)\ldots(2^{n-1}+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots2^{n-1}}=$$

$$=2\,\frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}\,\frac{2^n-2}{2^{n-1}-2}\,\frac{2^n-3}{2^{n-1}-3}\,\frac{2^n-4}{2^{n-1}-4}\cdots\frac{2^{n-1}+1}{1}=$$

$$=2\,\frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}\,\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}-1}\,\frac{2^n-3}{2^{n-1}-3}\,\frac{2^{n-2}-1}{2^{n-3}-1}\cdots\frac{2^{n-1}+1}{1}=2k,$$

где k — нечетное число.

Итак, u будет удовлетворять уравнению степени $2k$ с вещественными коэффициентами. Это уравнение будет обязательно иметь вещественные корни, если его свободный член отрицателен. Поскольку сумма корней исходного уравнения равна нулю, то, как замечает Эйлер, уравнение относительно u будет вместе с каждым корнем p иметь также корень $-p$, т. е. оно будет иметь вид

$$F(u) = (u^2 - p^2)\ (u^2 - q^2)\ (u^2 - r^2) \ldots = 0. \tag{4}$$

Таким образом, и в общем случае для сведения уравнения степени 2^n к уравнению степени 2^{n-1} Эйлер приходит к необходимости решения вспомогательного уравнения степени $2k$ с вещественными коэффициентами, которое содержит только четные степени неизвестного, т. е. и здесь дело сводится к решению уравнения нечетной степени k

$$(t - p^2)\ (t - q^2)\ (t - r^2) \ldots = 0$$

и одного квадратного уравнения

$$u = t^2.$$

Для установления того, что уравнение (4) имеет вещественный корень, Эйлер рассматривает его свободный член

$$-p^2q^2r^2 \ldots$$

и утверждает, что $-p^2q^2r^2 \ldots < 0$.

Как показал Лагранж, рассуждением, аналогичным вышеприведенному, можно вполне строго доказать это утверждение Эйлера, а тогда на основании теоремы 3 существуют два вещественных значения для u.

Остается показать, что и другие неопределенные коэффициенты $\lambda, \mu, \ldots, \lambda_1, \mu_1, \ldots$ также можно выбрать вещественными. Относительно них Эйлер утверждает, что они могут быть выражены рационально через u и коэффициенты $B, C, D, \ldots$ исходного уравнения, если использовать соотношения между этими коэффициентами u и неопределенными величинами $\lambda, \mu, \ldots, \lambda_1, \mu_1, \ldots$ Трудно сказать с определенностью, каковы были соображения, приведшие Эйлера к этому предложению. Для исследования этого вопроса Лагранж привлек развитую им теорию подобных функций. Знал ли Эйлер основную теорему этой теории? Мы не имеем пока данных, чтобы ответить на этот вопрос утвердительно. Но весьма вероятно, что он, по крайней мере эмпирически, установил, что подобные функции выражаются друг через друга рационально.

В мемуаре, посвященном дополнению доказательств Эйлера, Лагранж показал, что утверждение Эйлера относительно остальных неопределенных коэффициентов λ, μ, ..., λ_1, μ_1, вообще говоря, верно. Однако имеются случаи, когда эти коэффициенты не выражаются рационально через u и коэффициенты исходного уравнения.

Действительно, если u есть сумма каких-либо m из $2m$ корней исходного уравнения, то λ есть сумма попарных произведений тех же корней, μ — сумма произведений, взятых по три, и т. д.:

$$u = x_1 + x_2 + \ldots + x_m,$$
$$\lambda = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{m-1}x_m,$$
$$-\mu = x_1x_2x_3 + \ldots + x_{m-2}x_{m-1}x_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ясно, что u, λ, μ, ... остаются неизменными при $m!$ перестановках между корнями

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,$$

а также при $m!$ перестановках между

$$x_{m+1},\ \ x_{m+2},\ \ldots,\ x_{2m}.$$

При $(2m)!$ перестановках всех корней исходного уравнения функции u, λ, μ, ... примут, вообще говоря, одинаковое число значений, равное

$$\frac{(2m!)}{(n!)^2} = C_{2m}^m = C_{2^n}^{2^{n-1}} = 2k.$$

Иначе говоря, u, λ, μ, ... остаются инвариантными при подстановках одной и той же подгруппы симметрической группы S_{2m}. Аналогично можно показать, что $-u$, λ, μ_1, ... также остаются неизменными при одной и той же подгруппе подстановок.

Если, кроме того, все $2k$ значений, которые способны принимать эти функции, будут различны между собой, то по терминологии Лагранжа функции u, λ, μ, ... называются *подобными*, равно как и функции $-u$, λ_1, μ_1, ...

Говоря современным языком, подобные функции остаются инвариантными при подстановках одной и той же подгруппы H и только при них.

Лагранж доказал о подобных функциях следующую основную теорему: подобные функции выражаются друг через друга (и через коэффициенты исходного уравнения) рационально.

Исключением является случай, когда среди $2k$ значений u имеются равные. Тогда уравнение $F(u)=0$ имеет кратные корни. Этот случай требует специального исследования, которое и провел Лагранж.

Вот как выглядит полное доказательство теоремы 7 по Лагранжу.

Пусть дано уравнение

$$x^{2m}-Ax^{2m-1}+Bx^{2m-2}-Cx^{2m-3}+\ldots=0, \tag{5}$$

где $2m=2^n$, A, B, C вещественны, и пусть оно разлагается в произведение двух множителей:

$$(x^m-Mx^{m-1}+Nx^{m-2}-Px^{m-3}+\ldots)\times \\ \times(x^m-M'x^{m-1}+N'x^{m-2}-P'x^{m-3}+\ldots)=0. \tag{6}$$

Лагранж полагает

$$M+M'=\alpha,\quad N+N'=\beta,\quad P+P'=\gamma,\ \ldots,$$
$$M-M'=\mu,\quad N-N'=\nu,\quad P-P'=\rho,\ \ldots$$

Тогда

$$M=\frac{\alpha+\mu}{2},\qquad M'=\frac{\alpha-\mu}{2},$$
$$N=\frac{\beta+\nu}{2},\qquad N'=\frac{\beta-\nu}{2},$$
$$P=\frac{\gamma+\rho}{2},\qquad P'=\frac{\gamma-\rho}{2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

И пусть

$$u=a\mu+b\nu+c\rho+\ldots,$$

где a, b, c, ... — неопределенные коэффициенты. Лагранж заменяет всюду μ через

$$\frac{u - b\nu - c\rho - \ldots}{a}$$

и, сравнивая произведение (6) с уравнением (5), получает $2m$ уравнений относительно $2m$ неизвестных $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, u, \nu, \rho$. Путем исключения $2m-1$ неизвестных получаем уравнение относительно u.

Пусть корнями уравнения (5) будут $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$, корнями

$$x^m - Mx^{m-1} + Nx^{m-2} + Px^{m-3} + \ldots = 0 \qquad (7)$$

являются $x_1, x_2, \ldots, x_m$; тогда

$$M = x_1 + x_2 + \ldots + x_m, \quad M' = x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{2m},$$
$$N = x_1x_2 + \ldots + x_{m-1}x_m, \; N' = x_{m+1}x_{m+2} + \ldots + x_{2m-1}x_{2m},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha = x_1 + x_2 + \ldots + x_m + x_{m+1} + \ldots + x_{2m} = A,$$
$$\beta = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{m-1}x_m + x_{m+1}x_{m+2} + \ldots + x_{2m-1}x_{2m},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mu = x_1 + x_2 + \ldots + x_m - x_{m+1} - x_{m+2} - \ldots - x_{2m},$$
$$\nu = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{m-1}x_m - x_{m+1}x_{m+2} - \ldots - x_{2m-1}x_{2m},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u = a\mu + b\nu + c\rho + \ldots,$$

т. е. u при фиксированных $a, b, c, \ldots$ является известной функцией от корней исходного уравнения.

Отсюда можно определить степень и вид уравнения, которому удовлетворяет u: так как уравнение (5) имеет $2m$ корней, то всего возможных перестановок корней будет $(2m)!$ Однако $\mu, \nu, \rho, \ldots$ не изменятся, если делать перестановки m первых корней: $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а также m последних: $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{2m}$. Таким образом, различных значений u будет

$$\frac{(2m)!}{(m!)^2} = C_{2m}^m = C_{2^n}^{2^{n-1}},$$

а это число имеет вид $2k$, где k нечетно.

Если сделать подстановку корней, переводящую x_i в x_{i+m}, где индексы $i+m$ рассматриваются по $\mathrm{mod}\, 2m$, а $i=1, 2, \ldots, 2m$, то $\mu, \nu, \rho, \ldots$, а значит и u, переменят знаки на обратные. Следовательно, уравнение относительно u вместе с каждым корнем u_1 будет иметь и корень вида $-u_1$. Поэтому это уравнение будет содержать только четные степени u. Полагая $u^2=t$, Лагранж получает уравнение относительно t нечетной степени k. Для доказательства того, что $u=\pm\sqrt{t}$ вещественно, надо показать, что уравнение относительно t имеет положительный корень, т. е. что свободный член этого уравнения отрицателен. Способом, аналогичным тому, который мы приводили при доказательстве теоремы 4, Лагранж показывает, что это действительно так.

Таким образом, t всегда имеет положительное значение, значит, $u=\pm\sqrt{t}$ можно выбрать вещественным.

Если уравнение относительно t не имеет кратных корней, то ясно, что и все значения u будут различны между собой. В этом случае подобные функции $\alpha, \beta, \ldots$ рационально выразятся через u, т. е. также будут вещественными.

Если уравнение относительно t имеет кратные корни, например n_1 1-кратных, n_2 — корней кратности l_2, n_3 — корней кратности $l_3, \ldots, n_s$ корней кратности l_s, то уравнение относительно t распадается на множители:

1 множитель степени n_1,

l_2 множителей степени n_2,

l_3 множителей степени n_3,

. . . .

l_s множителей степени n_s.

Степень k уравнения, которому удовлетворяет t, представится в виде

$$k=n_1+n_2l_2+n_3l_3+\ldots+n_sl_s.$$

Один из членов этой суммы обязательно будет нечетным числом. Если n_1 нечетное, то в качестве t выбираем однократный вещественный корень первого множителя.

Если n_2l_2 нечетно, то нечетны и n_2 и l_2 и в качестве t берем вещественный корень множителя степени n_2. Это будет корень нечетной кратности l_2. Легко видеть, что тогда и уравнение относительно u будет иметь вещественный корень той же кратности l_2 (и даже два таких корня). Тогда, согласно общей теореме Лагранжа о подобных функциях, α, β, ... выразятся через u с помощью уравнения нечетной степени l_2. Следовательно, и для них можно будет найти вещественные значения.

Остается разобрать случай $t=0$. Уравнение относительно u в этом случае может иметь вещественный корень четной кратности, и предыдущее рассуждение не проходит. Если при этом не все μ, ν, ρ, ... равны нулю, то можно так изменить неопределенные коэффициенты a, b, c, ..., чтобы $t \neq 0$. Если же $\mu=\nu=\rho=\ldots=0$, то это означает, что $M=M'$, $N=N'$, $P=P'$, т. е. исходное уравнение (5) само является квадратом множителя (7); таким образом, и в этом случае степень уравнения 2^n понижается до 2^{n-1}. Это рассуждение Лагранжа полностью доказывает теорему 7.

Эйлер отмечает, что основная теорема алгебры легко следует из теоремы 7. Действительно, если дано уравнение четной степени $2^{n-1}<2m<2^n$, то домножаем его на 2^n-2m линейных множителей вида $x-\alpha$, например на x^{2^n-2m}. Так как полученное уравнение степени 2^n распадается в произведение вещественных множителей 1-й и 2-й степени, то, как нетрудно видеть, таким же образом представится и исходное уравнение.

Это же предложение Лагранж доказывает иначе: он показывает, пользуясь идеей Эйлера, что всякое уравнение степени 2^nk, где k нечетное, имеет вещественный множитель степени 2^n. Таким образом, всякое уравнение четной степени можно представить в виде произведения конечного числа вещественных множителей, степени которых суть степени двойки.

Хотя Эйлер закончил доказательство основной теоремы в предложении 7 «Исследования о воображаемых корнях уравнений», в предложениях 8—10 он дополнительно рассматривает уравнения степеней $m=6$, $4n+2$, $8n+4$. Он показывает тем же способом, который применил в теоремах 4—7, что эти уравнения имеют соответственно действительные множители степеней 2, 2 и 4. Он замечает, что аналогичные теоремы можно доказать для всех уравнений степеней 2^n+2 и 2^n+4.

Подводя итог этому отделу мемуара, Эйлер пишет: «Комбинируя эти два метода доказательства, можно без колебания принять эту общую теорему о том, что всякое алгебраическое уравнение любой степени всегда разлагается на действительные множители — простые или второй степени» [1]).

Из этого основного предложения непосредственно следует, что корни любого алгебраического уравнения будут либо действительными, либо комплексными числами, что Эйлер и показывает:

«Теорема 11. Если алгебраическое уравнение произвольной степени имеет воображаемые корни, то каждый из них будет содержаться в такой общей формуле $M+N\sqrt{-1}$, где буквы M и N означают действительные количества» [2]).

Доказательство. Пусть дано уравнение степени m

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots=0.$$

Разложим его на действительные множители, которые будут либо простыми вида $x-p$, либо второго порядка $x^2-2px+q$. Все корни исходного уравнения найдутся путем приравнивания нулю этих множителей.

Каждый простой множитель при этом даст действительный корень:

$$x-p=0;\ x=p.$$

Каждый множитель второго порядка будет иметь два корня:

$$x^2-2px+q=0,$$
$$x_1=p+\sqrt{p^2-q},$$
$$x_2=p-\sqrt{p^2-q}.$$

---

[1]) Leonhardi Euleri, Opera omnia, серия 1, т. VI, стр. 112.

[2]) Там же, стр. 112.

Эти корни действительные, если $p^2 > q$. Если $p^2 < q$, то пусть $q = p^2 + r^2$. Тогда $\sqrt{p^2 - q} = \sqrt{-r^2} = r\sqrt{-1}$, т. е. $x_1 = p + r\sqrt{-1}$, $x_2 = p - r\sqrt{-1}$.

Итак, воображаемые корни будут иметь вид $M + N\sqrt{-1}$.

В этом доказательстве Эйлера нетрудно усмотреть так называемую теорему Вейерштрасса — Фробениуса.

Действительно, в теореме Вейерштрасса — Фробениуса доказывается, что любая числовая система конечного ранга над полем вещественных чисел, в которой законы операций те же, что и для рациональных чисел, совпадает либо с полем действительных, либо с полем комплексных чисел. В доказательстве Эйлера требование конечности ранга заменяется тем, что рассматриваемые воображаемые числа должны быть корнями алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами, что, как известно, эквивалентные требования. Эйлер считает само собой разумеющимся, что законы операций над воображаемыми количествами те же, что и над рациональными числами, — он не знал числовых систем с иными законами операций, поэтому и не делал никаких оговорок. В работе, как мы видели, доказывается, что такие воображаемые количества являются действительными или комплексными числами.

§ 4. Алгебраическая замкнутость области комплексных чисел

До сих пор Эйлер рассматривал только уравнения с вещественными коэффициентами. Начиная с теоремы 12, Эйлер исследует последовательно все алгебраические операции над числами $M + N\sqrt{-1}$ и показывает, что в результате получатся снова числа того же вида. Говоря современным языком, он доказывает алгебраическую замкнутость поля комплексных чисел.

«Теорема 12. Всякая функция, которая образована путем сложения, вычитания, умножения и деления любого количества мнимых выражений вида $M + N\sqrt{-1}$, будет всегда содержаться в этом же виде $M + N\sqrt{-1}$, где M и N означают вещественные числа»[1]).

[1]) Там же, стр. 114.

Мы не будем приводить доказательство Эйлера, поскольку оно ничем не отличается от современного. Отметив в качестве следствия, что любая целая (положительная или отрицательная) степень выражения $M+N\sqrt{-1}$ имеет тот же вид, Эйлер переходит к рассмотрению дальнейших алгебраических операций.

«Теорема 13. Корень любой степени из количества действительного или воображаемого вида $M+N\sqrt{-1}$ будет иметь значения либо действительные, либо мнимые вида $M+N\sqrt{-1}$».

Для доказательства этой теоремы Эйлер переходит к тригонометрической форме комплексного числа и пользуется формулой

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+\sqrt{-1}\sin n\varphi.$$

Соответствующее предложение было впервые выведено Муавром в 1730 г. В 1748 г. Эйлер опубликовал во «Введении в анализ бесконечно малых» чисто аналитический вывод этой формулы, которой он придал современный вид.

Эйлер отмечает, что корень n-й степени из вещественного количества или количества вида $M+N\sqrt{-1}$ всегда будет иметь n значений.

«Теорема 14. Какова бы ни была степень алгебраического уравнения, все воображаемые корни, которые оно может иметь, всегда заключены в такой общей форме $M+N\sqrt{-1}$, причем M и N — действительные количества»[1].

Здесь Эйлер дает новое доказательство основной теоремы, заключающееся в том, что все корни уравнения можно выразить через его коэффициенты с помощью некоторого числа радикалов, а каждый радикал имеет, по доказанному, конечное число значений вида $M+N\sqrt{-1}$. В схолии к этой теореме Эйлер пишет: «Итак, вот новое доказательство общей теоремы, которую я поставил себе целью здесь доказать, и против которого нельзя ничего возразить, кроме того, что мы не знаем, как выражены

[1]) Leonhardi Euleri, Opera omnia, серия 1, т. VI, стр. 119.

корни уравнения степени выше 4-й. Но это возражение не будет иметь никакой силы, если только согласятся со мной, что выражения для корней не содержат никаких других операций, кроме извлечения корней, не считая четырех обычных операций, а ведь никто не будет утверждать, что туда будут примешаны трансцендентные операции» [1]).

Итак, в 1750 г. Эйлер еще не сомневался в том, что все алгебраические уравнения разрешимы в радикалах. По его мнению, все операции алгебры исчерпываются четырьмя рациональными и извлечением корней, т. е. алгебраическая замкнутость области комплексных чисел уже доказана теоремами 12—13. Естественно, что после этого Эйлер получает в качестве следствия, что в результате решения любого алгебраического уравнения мы получим вновь комплексное число.

На этом, собственно, алгебраическая часть работы Эйлера кончается. Далее идут 11 проблем, в которых Эйлер показывает, что результат трансцендентных операций над выражениями $M+N\sqrt{-1}$ является выражением того же вида. Приведем некоторые из этих проблем.

Проблема 2. Найти воображаемое значение действительной величины, возведенной в воображаемую степень.

Проблема 3. Найти воображаемое значение воображаемой величины, возведенной в воображаемую степень.

Проблема 4. Найти гиперболический логарифм воображаемого числа.

Проблема 6. Найти синус, косинус и тангенс воображаемого угла или дуги и т. д.

Эйлер как бы хочет показать в этих проблемах, что область комплексных чисел замкнута по отношению к трансцендентным операциям.

§ 5. Алгебраические доказательства основной теоремы после Эйлера. Второе доказательство Гаусса

Мы видели, что идея доказательства основной теоремы алгебры у Эйлера состоит в следующем: предполагается существование корня у многочлена нечетной степени

[1]) Там же, стр. 120.

с вещественными коэффициентами, а уравнения четной степени сводятся к цепочке уравнений, каждое из которых содержит в своей степени двойку с меньшим показателем, чем предыдущее. При этом используются аппарат симметрических функций и предложения, принадлежащие, по существу, к теории решения уравнений в радикалах. Все последующие так называемые алгебраические доказательства основной теоремы следовали тому же ходу идей, однако способ редукции к уравнению нечетной степени был после Эйлера значительно упрощен.

Прежде чем перейти к изложению дальнейших исследований в этом направлении, выясним смысл алгебраических доказательств основной теоремы с современной точки зрения.

Пусть дано уравнение $f(x)=0$ с коэффициентами из поля действительных чисел D. Пусть K — поле Галуа уравнения $f(x)=0$. Предположим, что K имеет над D степень $n=2^r k$, где k нечетно. Тогда группа Галуа G этого уравнения имеет по теореме Силова подгруппу H порядка 2^r. Пусть $\varkappa$ — поле, состоящее из элементов, инвариантных при подстановках из H, так что

$$D \subset \varkappa \subset K.$$

Ясно, что степень K над $\varkappa$ есть 2^r, а степень $\varkappa$ над D равна нечетному числу k. Поле $\varkappa$ получается путем присоединения к D корня θ неприводимого над D многочлена $f_1(x)$ степени k. Но так как k нечетно, то $f_1(x)$ может быть только первой степени, т. е. $\varkappa = D$.

Остается рассмотреть K над $\varkappa = D$. Степень его есть 2^r. Таким образом, если $K = D(\eta)$, то η есть корень уравнения $f_2(x)=0$ степени 2^r с действительными коэффициентами. Мы видели, что Эйлер рассматривал уравнения именно такой степени.

Но, как известно, группы, порядок которых есть степень простого числа p^r, разрешимы, причем все факторгруппы в композиционном ряду имеют простые порядки p.

В нашем случае все факторгруппы имеют порядки 2, следовательно, между D и K будут существовать $r-1$

промежуточных нормальных полей

$$D \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r = K, \qquad (*)$$

причем каждое из них будет квадратичным по отношению к предыдущему. Чтобы получить поле K_1, нужно решить над D квадратное уравнение. Если это уравнение имеет действительные корни, то $K_1 = D$; если комплексные, то K_1 совпадает с полем комплексных чисел.

Пусть K_i — первое поле, совпадающее с полем комплексных чисел (может, конечно, случиться, что все поля K_i будут действительными). Поскольку квадратный корень из комплексного числа будет вновь комплексным числом, то все последующие квадратные уравнения будут иметь комплексные корни и поля $K_{i+1}, \ldots, K_r$ будут совпадать с полем комплексных чисел (либо все они будут действительными, т. е. совпадут с D).

Если исходить не из поля K_1, а из $K_r = K$, то схема (*) показывает, что для нахождения корня уравнения $f_2(x) = 0$ степени 2^r надо решить над D одно уравнение степени 2^{r-1} — его корни породят поле K_{r-1}, а над этим полем — одно квадратное уравнение. Нахождение корней уравнения степени 2^{r-1} в свою очередь сведется к решению уравнения степени 2^{r-2} над D и одного квадратного и т. д., либо (что ближе к доказательству Эйлера) нужно сначала решить одно квадратное уравнение с вещественными коэффициентами, а затем уравнение степени 2^{r-1}.

Таким образом, «алгебраические» доказательства основной теоремы на самом деле опираются на свойства групп и полей. Поэтому неудивительно, что при доказательствах такого рода использовались и симметрические функции, и подобные функции Лагранжа, а впоследствии, как мы увидим, в доказательстве Гаусса появились методы, относящиеся, по существу, к конструкции алгебраических расширений.

Рассмотрим, как постепенно выкристаллизовывалась мысль о построении цепочки квадратных уравнений, с помощью которой можно свести решение любого уравнения четной степени к уравнению нечетной степени.

Начнем с наиболее раннего доказательства, принадлежащего Фонсене.

Заметив недочеты в рассуждениях Эйлера, Д. де Фонсене предложил следующее доказательство основной теоремы [1]): пусть уравнение $F(x)=0$ имеет степень $m=2^r k$, где k нечетное. Фонсене ищет вещественный множитель второй степени полинома $F(x)$:

$$x^2-ux+M.$$

Так как u есть сумма каких-либо двух корней исходного уравнения, то оно удовлетворяет уравнению степени

$$C_m^2=\frac{m(m-1)}{2}=2^{r-1}k(2^r k-1)=2^{r-1}k_1,$$

где k_1 нечетно. Коэффициенты этого уравнения вещественны. В этом втором уравнении Фонсене вновь ищет вещественный множитель второй степени

$$x^2-u_1x+M_1,$$

причем u_1 будет уже удовлетворять уравнению степени $2^{r-2}k_2$, где k_2 нечетно, и т. д. Через $r-1$ шагов дойдем до уравнения степени $2k_{r-1}$ относительно u_{r-2}, у которого аналогично выделяется множитель второй степени:

$$u_{r-2}^2-u_{r-1}u_{r-2}+M_{r-1},$$

где u_{r-1} будет корнем уравнения нечетной степени, т. е. в качестве u_{r-1} можно выбрать вещественное число. Относительно M_{r-1} Фонсене утверждает, что оно, как известно, выражается через u_{r-1} и коэффициенты данного уравнения без извлечения корней. Тогда уравнение

$$u_{r-2}^2-u_{r-1}u_{r-2}+M_{r-1}=0$$

будет иметь корень вида $p+q\sqrt{-1}$; аналогично, и все

---

[1]) Miscell. phil. math. soc. Taurin, т. I, 1759, стр. 113.

уравнения

$$u_{r-3}^2 - u_{r-2}u_{r-3} + M_{r-2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^2 - ux + M = 0,$$

а значит, и $F(x) = 0$, будут иметь корни вида $A + B\sqrt{-1}$.

Гаусс замечает по поводу утверждения Фонсене о выразимости M_{r-1} через u_{r-1} и коэффициенты данного уравнения при помощи рациональных операций, что оно никогда неверно, в то время как соответственное утверждение Эйлера неверно лишь для отдельных случаев [1]).

Хотя доказательство Фонсене некорректно, но в нем содержалась важная мысль: находить корень уравнения степени $m = 2^r k$ при помощи цепочки из r квадратных уравнений и одного уравнения нечетной степени. Вся трудность состояла в определении коэффициентов этих уравнений так, чтобы коэффициенты уравнения нечетной степени и последнего квадратного были вещественны, а коэффициенты всех остальных квадратных уравнений рационально выражались через корни предыдущих.

Решение этой проблемы было предложено в 1795 г. Лапласом и в 1815 г. Гауссом. При этом принципиальные позиции обоих ученых, а поэтому и пути решения, предложенные ими, были различны.

Воспроизведем, вкратце, доказательство Лапласа [2]).

Пусть $a, b, c, \ldots$ — различные корни уравнения, степень которого $m = 2^r k$, где k нечетное. Лаплас образует уравнение, корнями которого являются все возможные комбинации вида

$$a + b + sab,$$

где s — произвольный коэффициент. Нетрудно подсчитать, что степень этого уравнения будет

$$\frac{1}{2}m(m-1) = 2^{r-1}k(2^r k - 1) = 2^{r-1}k_1,$$

где k_1 нечетно, т. е. двойка будет входить в степень

[1]) Более подробно см. об этом в §§ 10—11 мемуара Гаусса «Demonstratio nova theorematis...».

[2]) Oeuvres complètes de Laplace, т. 14, Paris, 1912, стр. 63—65.

построенного уравнения с меньшим показателем, чем в степень исходного[1]).

Если $r=1$, то построенное уравнение будет нечетной степени и, следовательно, будет иметь вещественный корень, каково бы ни было s. Значит, будет существовать бесконечно много вещественных значений s, при которых, например, корень $a+b+sab$ будет вещественным. Пусть

$$a+b+s_1ab=c_1,$$
$$a+b+s_2ab=c_2,$$

где c_1 и c_2 вещественные. Тогда $a+b$ и ab будут также вещественными, и исходное уравнение будет иметь вещественный множитель второй степени

$$x^2-(a+b)\varkappa+ab.$$

Если $r\geqslant 2$, то аналогичным рассуждением Лаплас показывает, что исходное уравнение имеет действительный множитель 4-й степени, который, как это можно проверить непосредственными вычислениями, разлагается в произведение двух действительных множителей 2-й степени.

Таким образом, доказательство Лапласа опирается на предположение о существовании корней уравнения.

В 1815 г. Гаусс вновь обратился к доказательству основной теоремы алгебры[2]). В § 1 своей работы Гаусс так писал о мотивах, заставивших его вернуться к этой теме: «Хотя доказательство теоремы о разложении целой алгебраической функции на множители, которое я дал в мемуаре, опубликованном 16 лет тому назад, не оставляет желать лучшего в отношении строгости и простоты, надо надеяться, что математики не будут считать нежелательным, что я вновь возвращаюсь к этому чрезвычайно важному вопросу и предпринимаю построение второго не менее стро-

---

[1]) Коэффициенты построенного уравнения являются симметрическими функциями от корней исходного, а потому рационально выражаются через его коэффициенты.

[2]) Demonstratio nova altera... C. F. Gauss, Werke, т. III, стр. 31—56.

гого доказательства, исходя из совершенно иных принципов. А именно, это первое доказательство зависело частично от геометрических рассмотрений, тогда как то, которое я здесь начинаю объяснять, покоится на чисто аналитических принципах»[1]).

Здесь надо заметить, что под чисто аналитическим доказательством Гаусс понимал такое, которое мы бы теперь назвали алгебраическим, а под геометрическим — аналитические исследования, проводимые с помощью геометрических рассмотрений (с помощью топологии).

Из мемуара видно, что при нахождении своего второго доказательства Гаусс исходил из существования корней. Хотя при окончательном изложении доказательства он переделал его так, чтобы нигде не использовать этого предположения, но по ходу дела Гаусс всюду показывает, как упростились бы рассуждения, если бы исходный многочлен разлагался в произведение линейных множителей.

Изложим содержание мемуара Гаусса.

§ 1 является вводным.

В § 2 Гаусс разбирает вопрос о наибольшем общем делителе двух многочленов $Y(x)$ и $Z(x)$. Он вводит для многочленов алгоритм Евклида и с его помощью показывает, что наибольший общий делитель $d(x)$ представим в виде

$$d(x)=Y\cdot\varphi(x)+Z\cdot\psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — многочлены, коэффициенты которых рационально выражаются через коэффициенты $Y(x)$ и $Z(x)$. Он показывает также, что $Y(x)$ и $Z(x)$ взаимно-просты тогда и только тогда, когда $d(x)$ есть не равная нулю константа, в качестве которой можно всегда взять 1.

В §§ 3—4 содержится новое доказательство теоремы о симметрических функциях. Гаусс рассматривает произведение m линейных множителей

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots=x^m-\lambda' x^{m-1}+\lambda'' x^{m-2}-\ldots,$$

[1]) Demonstratio nova altera... C. F. Gauss, Werke, т. III, стр. 31.

где a, b, c — неопределенные величины, а

$$\lambda' = a + b + c + \ldots,$$
$$\lambda'' = ab + ac + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

и доказывает, что всякая целая рациональная симметрическая функция от $a, b, c, \ldots$ является целой рациональной от $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$

Видимо, предложенные до него доказательства теоремы не удовлетворяли Гаусса потому, что все они опирались на существование поля разложения у любого многочлена.

В § 5 Гаусс дает новую формулировку теоремы о симметрических функциях, которая была ему нужна для дальнейшего: «Если дана целая симметрическая функция ρ от неопределенных величин $a, b, c, \ldots$, то можно указать целую функцию от такого же числа неопределенных величин $l', l'', l''', \ldots$ такого рода, что она переходит в ρ при подстановке $l' = \lambda'$, $l'' = \lambda''$, $l''' = \lambda'''$, ... Кроме того, легко показать, что это может быть сделано единственным образом».

Гаусс доказывает сформулированную им теорему единственности, которая имеет фундаментальное значение для всего дальнейшего изложения. Эта теорема, как нетрудно видеть, означает, что элементарные симметрические функции $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$ алгебраически независимы. Действительно, если бы имело место соотношение $\rho = \sum b_n \lambda'^{m_1} \lambda''^{m_2} = 0$ без того, чтобы все $b_n = 0$, то это означало бы, что существуют две функции от $l', l'', l''', \ldots$

$$r_1 = \sum b_n l'^{m_1} l''^{m_2} \ldots \text{ и } r_2 = 0,$$

которые переходят в одну и ту же функцию ρ. Гаусс показывает, что это невозможно.

Если теперь дано некоторое соотношение между $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$:

$$\Phi(\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots) = 0, \qquad (*)$$

то в силу алгебраической независимости элементарных симметрических функций оно может быть только тождественным. Поэтому вместо $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$ можно подставить m любых других неопределенных величин $l', l'', l''', \ldots$, не нарушая при этом правильности исходного соотношения (*). Наоборот, если дано

$$\Psi(l', l'', l''', \ldots) = 0,$$

где $l', l'', l''', \ldots$ – m независимых неопределенных величин, то можно путем подстановки $l' = \lambda'$, $l'' = \lambda''$, $l''' = \lambda'''$, ... получить всегда истинное соотношение

$$\Psi(\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots) = 0.$$

Этот важный способ доказательства теорем алгебры был впервые открыт Гауссом. Кениг в своей книге «Введение в общую теорию алгебраических величин» называет его принципом Гаусса[1]). Это название было принято в школе Кронекера.

В рассматриваемом мемуаре Гаусс применяет этот принцип в следующих ситуациях: пусть дан многочлен, разлагающийся на линейные множители, и пусть, пользуясь этим разложением установлено некоторое соотношение между его коэффициентами

$$\Phi(\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots, \lambda^{(m)}) = 0.$$

Тогда, подставляя вместо $\lambda^{(i)}$ неопределенные величины $l^{(i)}$, получают тождественное соотношение

$$\Phi(l', l'', \ldots, l^{(m)}) = 0,$$

в которое можно уже подставлять коэффициенты любого другого конкретного многочлена $y = x^m - a_1x^{m-1} + \ldots \pm a_m$ степени m:

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0.$$

Таким образом, удается показать, что все соотношения, установленные для коэффициентов разложимых многочленов, верны для коэффициентов **всех** многочленов.

С помощью этого принципа Гаусс вводит в § 6 детерминант функции, который обычно теперь называют

[1]) J. König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen, Лейпциг, 1903, стр. 58.

дискриминантом многочлена (мы будем в дальнейшем употреблять последний термин).

Пусть

$$v(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = \ldots$$
$$\ldots = x^m - \lambda' x^{m-1} + \lambda'' x^{m-2} - \ldots, \qquad (1)$$
$$f(x) = x^m - l' x^{m-1} + l'' x^{m-2} - \ldots, \qquad (2)$$

где l', l'', ... — неопределенные величины. Гаусс рассматривает произведение $m(m-1)$ множителей:

$$\pi = (a-b)(a-c)(a-d)\ldots \times$$
$$\times (b-a)(b-c)(b-d)\ldots \times$$
$$\times (c-a)(c-b)(c-d)\ldots \times$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

которое как симметрическая функция от $a, b, c, d, \ldots$ является рациональной от $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$

Тогда дискриминантом $D(f)$ функции $f(x)$ называется функция p, в которую переходит π при подстановке

$$\lambda' = l', \lambda'' = l'', \lambda''' = l''', \ldots$$

Дискриминантом функции Y с определенными числовыми коэффициентами

$$Y = x^m - a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} - \ldots \qquad (3)$$

будет определенное число P, которое получится из p при подстановке

$$l' = a_1, \ l'' = a_2, \ \ldots$$

Гаусс замечает, что если Y раскладывается на линейные множители

$$Y = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots, \qquad (4)$$

то

$$P = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m} (\alpha_i - \alpha_j),$$

т. е. определение дискриминанта совпадает с обычным.

После этого Гаусс доказывает лемму: многочлен $Y(x)$ и его производная $Y'(x)$ могут иметь общий множитель тогда и только тогда, когда дискриминант $P = D(Y)$ равен нулю.

Гаусс показывает, как легко выводится эта лемма, если предположить, что имеет место разложение (4).

В § 7 Гаусс напоминает, что лемма предыдущего параграфа была доказана при помощи незаконного предположения о возможности разложения (8), которое в этом месте, как он считает, равносильно порочному кругу.

В § 8 Гаусс дает новое доказательство того, что из $P = 0$ следует наличие общего множителя у Y и Y'. Приведем для пояснения принципа Гаусса это доказательство.

Пусть

$$\rho = \frac{\pi(x-b)(x-c)(x-d)\ldots}{(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2\ldots} + \frac{\pi(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)^2(b-c)^2(b-d)^2\ldots} + \ldots$$

Так как π делится на каждый из знаменателей, то ρ является целой функцией от x, a, b, c, ... Обозначим $\frac{dv}{dx} = v'$. Очевидно, при $x = a$

$$\rho v' = \pi,$$

следовательно, $\pi - \rho v'$ делится на $x - a$, а также на $x - b$, $x - c$, ..., т. е. на v. Полагаем

$$\sigma = \frac{\pi - \rho v'}{v};$$

σ будет целой функцией от x, a, b, c, ... и симметрической от a, b, c, ...

Следовательно, можно найти две целые функции r, s от x и неопределенных величин l', l'', l''', ..., такие, что они при подстановках $l' = \lambda'$, $l'' = \lambda''$, $l''' = \lambda'''$, ... переходят соответственно в ρ и σ. Обозначим теперь через f' функцию

$$mx^{m-1} - (m-1)l'x^{m-2} + (m-2)l''x^{m-3} - \\ - (m-3)l'''x^{m-4} + \ldots,$$

так что f' при той же подстановке переходит в v'; тогда и $p - sy + rf'$ при этой же подстановке перейдет в

$$\pi - \sigma v - \rho v',$$

т. е. в 0. Следовательно, и

$$p - sf - rf' \equiv 0.$$

Полагаем теперь, что при подстановке $l' = a_1$, $l'' = a_2$, $l''' = a_3, \ldots$ получаем $r = R$ и $s = S$; тогда тождественно

$$P = SY + RY'.$$

Так как P — постоянное число, а S и R — целые функции x, то отсюда следует, что Y и Y' могут иметь общий делитель только в том случае, если $P = 0$.

В § 9 Гаусс доказывает вторую часть леммы § 6, а именно если $D(Y) = 0$, то Y и Y' имеют общий множитель.

В § 10 Гаусс выводит некоторые следствия:

1) если $D(Y) = 0$, то Y имеет множитель, который можно найти, применяя алгоритм Евклида к многочленам Y и Y';

2) если Y степени $m = 2^r k$ раскладывается на множители, то среди множителей будет по крайней мере один, степень которого $2^\nu k_1$, где $\nu \leqslant r$.

В § 11 вводятся некоторые вспомогательные понятия.

В § 12 строится функция ζ, являющаяся произведением $\frac{1}{2} m(m-1)$ множителей вида

$$u - (a+b)x + ab.$$

Так как ζ является целой симметрической от $a, b, c, \ldots$, то она будет целой рациональной от коэффициентов λ', λ'', $\lambda''', \ldots$ Путем подстановок $\lambda^{(i)} = l^{(i)}$ и $l^{(i)} = a_i$ получаем соответственно функции

$$z = z(u, x, l', l'', l''', \ldots),$$
$$z = F(u, x, a_1, \ldots, a_m).$$

Поскольку $a_1, \ldots, a_m$ — данные вещественные числа, последнюю функцию мы будем обозначать просто $F(u, x)$. Если $Y(x)$ раскладывается в произведение линейных множителей, то

$$F(u, x) = \Pi\{u - (\alpha_i + \alpha_j)x + \alpha_i\alpha_j\}, \tag{5}$$

т. е. вспомогательный многочлен, построенный Гауссом, по существу, совпадает с тем, который рассматривал Лаплас.

В конце параграфа Гаусс формулирует теорему: если $P = D(Y) \neq 0$, то и $D(F)$ не равен нулю тождественно.

В § 13 Гаусс показывает, как просто можно доказать эту теорему, если предполагать разложение (4). Действительно, в этом случае имеет место (5) и $D(F)$ будет равен произведению разностей величин вида $(\alpha_i + \alpha_j)x - \alpha_i\alpha_j$. $D(F)$ может быть тождественным нулем только, если $Y(x) = 0$ имеет кратные корни, но тогда и $D(Y)$ равнялся бы нулю.

В §§ 14—15 приводится другое доказательство того, что $D(F)$ не равен тождественно нулю, причем оно уже не опирается на предположение о разложимости $Y(x)$ на линейные множители. При этом опять используется принцип Гаусса.

На этом предварительные рассмотрения заканчиваются. Все необходимые предположения доказаны вполне строго, и Гаусс приступает к основной теме.

§ 6. Тождество Гаусса и его применение для доказательства основной теоремы алгебры

Дальнейшее доказательство Гаусса проходит без всяких ссылок на поле разложения. Оно опирается на следующую лемму:

Если $\Psi(u, x)$ есть произведение конечного числа линейных множителей от u, x:

$$\Psi(u, x) = \prod_i (\lambda_i + \mu_i u + \nu_i x),$$

и w — неопределенная величина, то $\Psi\left(u + w\frac{\partial\Psi}{\partial x}, x - w\frac{\partial\Psi}{\partial u}\right)$ алгебраически делится на $\Psi(u, x)$.

Доказательство леммы получается путем непосредственной проверки. Мы не будем его здесь приводить.

В качестве следствия из леммы Гаусс получает в § 17 свое основное тождество. Он применяет лемму к многочлену

$$\zeta = \zeta(u, x, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots).$$

Тогда

$$\zeta\left(u+w\frac{\partial\zeta}{\partial x},\ x-w\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)=$$
$$=\zeta(u,x,\lambda',\lambda'',\ \ldots)\,\theta(u,x,w,\lambda',\lambda'',\ \ldots). \quad (1)$$

Частное от деления: функция θ является целой рациональной относительно всех своих аргументов.

Подставляя $l', l'', l''', \ldots$ вместо $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$, а затем $a_1, a_2, \ldots, a_m$ вместо $l', l'', l''', \ldots$, получаем два других тождества:

$$\zeta\left(u+w\frac{\partial z}{\partial x},\ x-w\frac{\partial z}{\partial u},\ l', l'', l''',\ \ldots\right)=$$
$$=z\cdot\theta(u,x,w,l',l'',l''',\ \ldots),$$
$$\zeta\left(u+w\frac{\partial z}{\partial x},\ x-w\frac{\partial z}{\partial u},\ a_1,a_2,\ \ldots,\ a_m\right)=$$
$$=Z\cdot\theta(u,x,w,a_1,a_2,\ \ldots,\ a_m). \quad (1')$$

Последнее тождество, если обозначить $Z=F(u,x)$, можно переписать в виде

$$F\left(u+w\frac{\partial F}{\partial x},\ x-w\frac{\partial F}{\partial u}\right)=$$
$$=F(u,x)\,\theta(u,x,w,a_1,\ \ldots,\ a_m). \quad (2)$$

Это и есть знаменитое тождество Гаусса, которое он использует в §§ 19—20 для доказательства основной теоремы алгебры. Закрепим некоторые определенные значения $x=x_0$ и $u=u_0$ и обозначим

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ u=u_0}}=X',\ \ \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_0\\ u=u_0}}=U';$$

тогда

$$F(u_0+wX',\ x_0-wU')=F(u_0,x_0)\,\theta(u_0,x_0,w)\,^{1)}. \quad (3)$$

Если $U'\neq 0$, то можно сделать подстановку

$$w=\frac{x_0-x}{U'}\,. \quad (4)$$

---

[1]) Мы будем в дальнейшем вместо $\theta\ (u,\ x,\ w,\ a_1,\ldots,\ a_m)$, писать $\theta\ (u,\ x,\ w)$, поскольку $a_1,\ldots a_m$ вещественные, а θ зависит от них рационально.

Тогда тождество (3) перейдет в

$$F\left(u_0+\frac{x_0-x}{U'}X',x\right)=F(u_0,\ x_0)\cdot\theta\left(u_0,x_0,\frac{x_0-x}{U'}\right). \quad (5)$$

Последнее тождество показывает, что при $u=u_0+\frac{x_0-x}{U'}X'$ функция $Z=F(u,x)$ делится на $F(u_0,x_0)$. Из (5) непосредственно получается доказательство основной теоремы.

Так как дискриминант $D(F)$ не равен тождественно нулю, то он обращается в нуль лишь при конечном числе значений x и, следовательно, существует бесконечно много значений x, в частности, вещественных, при которых $D(F)\neq 0$. Пусть $x=x_0$ — одно из таких вещественных значений. Тогда $F(u,x_0)$ имеет вещественные коэффициенты и, кроме того, $F(u,x_0)$ и $\frac{\partial F}{\partial u}(u,x_0)$ не могут иметь общих множителей.

Гаусс предполагает, что $F(u,x_0)$ имеет вещественный или комплексный корень u_0. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u_0,x_0)\neq 0$$

и к $F(u,x)$ можно применить тождество (5). Из него видно, что при $u=u_0+\frac{X'}{U'}x_0-\frac{X'}{U'}x$ многочлен $F(u,x)$ при любом x равен произведению $F(u_0,x_0)\,\theta\left(u_0,x_0,\frac{x_0-x}{U'}\right)$, т. е. обращается в нуль. Следовательно, $F(u,x)$ делится на $u-\left(u_0+\frac{X'}{U'}x_0\right)+\frac{X'}{U'}x$. После этого Гаусс полагает $u=x^2$, тогда $F(x^2,x)$ делится на $x^2+\frac{X'}{U'}x-\left(u_0+\frac{X'}{U'}x_0\right)$, т. е. два корня $F(x^2,x)$ можно найти, решая квадратное уравнение

$$x^2+\frac{X'}{U'}x-\left(u_0+\frac{X'}{U'}x_0\right)=0, \quad (6)$$

коэффициенты которого являются многочленами от u_0.

Гаусс замечает, что $F(x^2,x)=Y^{m-1}(x)$, поэтому, зная корень u_0 уравнения $F(u,x_0)=0$ степени $N=2^{r-1}k_1$, можно найти два корня исходного уравнения $Y(x)=0$.

Таким же образом можно показать, что корень уравнения $F(u, x_0)=0$ может быть найден путем решения квадратного уравнения с коэффициентами, зависящими от корня $F_1(u, x_0)=0$ степени $N_1=2^{r-2}k_2$ и т. д., до тех пор, пока не дойдем в конечное число шагов до уравнения нечетной степени. Основная теорема доказана.

Это доказательство Гаусса, которое, как это может показаться с первого взгляда, базируется на чисто формальном тождестве, привлекло внимание Кронекера и его школы. Кронекер в своей знаменитой работе «Основания арифметической теории алгебраических величин»[1]) посвящает специальный параграф доказательству Гаусса и говорит о его связи с теорией алгебраических величин, т. е., с нашей точки зрения, с теорией алгебраических полей.

Попробуем понять, в чем состоит эта связь. Для этого необходимо восстановить ход идей Гаусса.

Нетрудно видеть, что коэффициенты уравнения (6) представляют собой выражения $\alpha_i+\alpha_j$ и $\alpha_i\alpha_j$ через примитивный элемент $\overline{\eta}_{ij}=u_0$ поля, порожденного корнями уравнения $F(u, x_0)=0$. Будем исходить из поля разложения для многочлена $Y(x)$. Тогда

$$F(u, x)=\prod_{\substack{i, j=1\\ i\neq j}}^{m}\{u-x(\alpha_i+\alpha_j)+\alpha_i\alpha_j\}.$$

Выберем в качестве x такое вещественное число x_0, чтобы все

$$\eta_{ij}=x(\alpha_i+\alpha_j)-\alpha_i\alpha_j$$

были различны между собой. Ясно, что тогда η_{ij} будет принимать при всевозможных перестановках корней $\frac{1}{2}m(m-1)$ различных значений. $\eta_{ij}=x_0(\alpha_i+\alpha_j)-\alpha_i\alpha_j$ будет примитивным элементом поля $\varkappa$, являющимся полем разложения для многочлена $F(u, x_0)$:

$$\varkappa=D(\overline{\eta}_{ij}),$$

[1]) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen (1881—1882), Werke, т. II, Лейпциг, 1897, стр. 237—388.

где D — поле действительных чисел. Легко показать, что $\alpha_i+\alpha_j$ и $\alpha_i\alpha_j$ содержатся в $D(\overline{\eta}_{ij})$. Гауссу нужно было доказать, что корень уравнения $Y(x)=0$ можно получить, решая над $\varkappa$ квадратное уравнение

$$x^2-(\alpha_i+\alpha_j)\,x+\alpha_i\alpha_j=0.$$

При этом нужно было эффективно выразить $\alpha_i+\alpha_j$ и $\alpha_i\alpha_j$ через примитивный элемент $\overline{\eta}_{ij}$. Гаусс мог сделать это, воспользовавшись интерполяционной формулой Лагранжа, служащей для выражения элементов поля через примитивный: если H — подгруппа подстановок корней, не меняющих элемента α, а β — элемент, не меняющийся при подстановках из H, то β рационально выражается через α.

Пусть $G=H+\sigma_2 H+\ldots+\sigma_s H$, где G — группа Галуа поля $\varkappa$. Образуем

$$\Phi(t)=(t-\alpha)(t-\sigma_2\alpha)\ldots(t-\sigma_s\alpha).$$

Пусть

$$\Psi(t)=\Phi(t)\left\{\frac{\beta}{t-\alpha}+\frac{\sigma_2\beta}{t-\sigma_2\alpha}+\ldots+\frac{\sigma_s\beta}{t-\sigma_s\alpha}\right\}.$$

Подставляя $t=\alpha$, получим:

$$\beta=\frac{\Psi(\alpha)}{\Phi'(\alpha)}.$$

В качестве $\Phi(t)$ возьмем $F(u,x)$, который будем рассматривать как многочлен относительно u, коэффициенты которого зависят от x. Тогда

$$\Psi(u)=F(u,x)\sum_{i,j}\frac{\alpha_i+\alpha_j}{u-x(\alpha_i+\alpha_j)+\alpha_i\alpha_j}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\Psi(u)=-\frac{\partial F}{\partial u}(u,x).$$

Возьмем теперь в качестве x выбранное выше x_0, а в качестве u такое u_0, чтобы

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u_0,x_0)\neq 0.$$

Тогда

$$\alpha_i+\alpha_j=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}(u_0, x_0)=-\frac{X'}{U'},$$

где X' и U' — многочлены от x_0 и u_0, принадлежащие $\varkappa=D(\bar{\eta}_{ij})$. Произведение $\alpha_i\alpha_j$ можно найти, например, из условия

$$u_0-\bar{\eta}_{ij}=0$$

или

$$u_0-(\alpha_i+\alpha_j)x_0+\alpha_i\alpha_j=0.$$

Отсюда

$$\alpha_i\alpha_j=-u_0+(\alpha_i+\alpha_j)x_0=-\left(u_0+\frac{X'}{U'}x_0\right).$$

Таким образом, исходя из существования корней, Гаусс мог без труда найти коэффициенты того квадратного уравнения, которому удовлетворяет корень уравнения $Y(x)=0$ над полем $\varkappa$. После этого Гауссу нужно было придти к тому же результату, не прибегая к рассмотрению поля разложения. Для этого он мог идти следующим путем:

$$F(u, x)=\Pi\{u-(\alpha_i+\alpha_j)x+\alpha_i\alpha_j\}=$$
$$=[u-x(\alpha_i+\alpha_j)+\alpha_i\alpha_j]\,\Pi'\{u-x(\alpha_k+\alpha_l)+\alpha_k\alpha_l\},$$

где Π' распространено на все k и l, кроме $k=i$, $l=j$. Так как Гаусс знал выражения для $\alpha_i+\alpha_j$ и $\alpha_i\alpha_j$, то последнее тождество он мог переписать так:

$$F(u, x)=\left\{u+\frac{X'}{U'}x-\left(u_0+x_0\frac{X'}{U'}\right)\right\}\Pi'\{u-x(\alpha_k+\alpha_l)+\alpha_k\alpha_l\}.$$

Поскольку коэффициенты первой скобки рационально зависят от $u_0=\bar{\eta}_{ij}$, то и коэффициенты Π' будут рациональными функциями от тех же величин, т. е. будем иметь

$$F(u, x)=\left\{u+\frac{X'}{U'}x-\left(u_0+\frac{X'}{U'}x_0\right)\right\}\Psi(u, x;\, u_0,\, x_0).$$

Если теперь $u+\frac{X'}{U'}x-\left(u_0+\frac{X'}{U'}x_0\right)=0$, то при $u=u_0+\frac{X'}{U'}x_0-\frac{X'}{U'}x$

$$F\left(u_0+x_0\frac{X'}{U'}-\frac{X'}{U'}x, x\right)=0$$

для любого x.

Обозначим $\frac{x_0-x}{U'}=t$; тогда

$$x=x_0-tU', \ u=u_0+tX'$$

и

$$F(u_0+tX', \ x_0-tU')=0$$

для любого корня u_0 уравнения

$$F(u, x_0)=0.$$

Следовательно, $F(u_0+tX', x_0-tU')$ алгебраически делится на $F(u, x_0)$:

$$F(u+tX', x_0-tU')=F(u, x_0)\cdot\theta(u, x_0, t).$$

Последнее равенство имеет место для всех x_0; отсюда и исходное тождество Гаусса

$$F(u+tX', x-tU')=F(u, x)\cdot\theta(u, x, t),$$

которое верно для всякой функции $\varphi(u, x)$, являющейся произведением линейных множителей от u и x: $\lambda u+\mu x+\nu$. Возвращаясь от этого тождества шаг за шагом назад, Гаусс и получает в своем мемуаре уравнение (6), не оперируя с корнями исходного уравнения.

При этом мысль Гаусса состояла в том, чтобы оперировать не с корнями уравнений, а с многочленами, рассматривая вопросы их делимости, иными словами, — сравнения по некоторому многочлену.

По существу, при помощи своего тождества Гаусс строит такое поле $\varkappa$, в котором вспомогательный многочлен $F(u, x)$ имеет линейный множитель, а заданный многочлен $Y(x)$ имеет множитель 2-й степени. Как и во многих других работах Гаусса, в рассматриваемом мемуаре изложение таково, что методы конструкции поля $\varkappa$ остаются завуалированными. Недаром прошло более 60 лет, прежде чем Кронекер сумел понять и развить эти методы. Чтобы лучше представить себе идеи Гаусса и усмотреть их связь с последующей теорией алгебраических расширений, вернемся к тождеству

$$F\left(u_0 + x_0\frac{X'}{U'} - \frac{X'}{U'}\,x,\ x\right) = F(u_0, x_0)\cdot\theta(x, u_0, x_0), \qquad (*)$$

где u_0, x_0 — некоторые фиксированные значения, для которых $U' \neq 0$. Обозначим, как прежде, $u_0 + x_0\frac{X'}{U'} - \frac{X'}{U'}\,x = \eta_{ij}$ и запишем равенство (*) в виде сравнения

$$F(\eta_{ij}, x) \equiv 0\,(\operatorname{mod} F(u_0, x_0)).$$

Последнее сравнение показывает, что $F(u, x)$ делится на $u - \eta_{ij}$ по модулю $F(u_0, x_0)$:

$$F(u, x) \equiv (u - \eta_{ij})\cdot F_1(u, x, \eta_{ij}) \quad (\operatorname{mod} F(u_0, x_0)).$$

Принимая во внимание, что

$$F(x^2, x) = Y^{m-1}(x),$$

будем иметь

$$Y^{m-1}(x) \equiv (x^2 - \eta_{ij})\,F_1(x^2, x, \eta_{ij}) \quad [\operatorname{mod} F(u_0, x_0)]. \quad (**)$$

Это сравнение можно записать в виде равенства

$$Y^{m-1}(x) = \left(x^2 + \frac{X'}{U'}\,x - u_0 - x_0\frac{X'}{U'}\right) + \overline{F}_1(x, \eta_{ij}) +$$
$$+ F(u_0, x_0)\cdot G(x, u_0, x_0),$$

где G — целая рациональная функция своих аргументов.

Если теперь u_0 — корень уравнения $F(u, x_0) = 0$, то последнее равенство переходит в

$$Y^{m-1}(x) = \left(x^2 + \frac{X'}{U'}\,x - u_0 - \frac{X'}{U'}\,x_0\right)F_1(x, \eta_{ij}),$$

т. е. получаем равенство, в точности соответствующее сравнению (**).

Таким образом, можно осуществлять нахождение коэффициентов квадратного множителя, не прибегая к корням уравнения, а действуя только со сравнениями. Этот параллелизм между сравнениями и равенствами и был положен в основу известной теории Кронекера.

Насколько сильное влияние на Кронекера оказали идеи Гаусса, видно не столько по его «Основаниям арифметической теории алгебраических величин», где специально разбирается доказательство Гаусса, сколько по мемуару «Фундаментальная теорема общей арифметики» [1]), где впервые дается конструкция поля разложения.

Кронекер так формулирует основную задачу: «Определение простого модуля (Primmodulsystem), в котором заданная целая функция одной переменной распадается в произведение линейных множителей» [2]). Иными словами, если дан многочлен

$$F(x) = x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \ldots \pm A_n,$$

то Кронекер ставит задачу построить, не прибегая к вычислению корней $F(x) = 0$, такое алгебраическое расширение $\varkappa$ над полем коэффициентов $R(A_1, \ldots, A_n)$, в котором $F(x)$ представлялся бы произведением линейных множителей. Или еще: он ищет такой многочлен $G(x)$, чтобы

$$F(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) \pmod{G}.$$

Для решения проблемы Кронекер рассматривает другой многочлен

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = \\ = x^n - \mathfrak{F}_1 x^{n-1} + \mathfrak{F}_2 x^{n-2} - \ldots \pm \mathfrak{F}_n$$

---

[1]) Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik L. K r o n e k e r, Werke, т. III, стр. 211—212.

[2]) Там же, стр. 212.

и строит функцию G степени $n!$:

$$G(z, u_1, \ldots, u_n, \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n) = \prod_i (z - u_1 x_{i_1} - u_2 x_{i_2} - \ldots - u_n x_{i_n}),$$

где $u_1, \ldots, u_n$ — неопределенные коэффициенты. Обозначим

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n = \Theta:$$

Θ при всевозможных перестановках $x_1, \ldots, x_n$ будет принимать $n!$ значений. Через Θ, как это было уже в то время хорошо известно, можно выразить все величины $x_1, \ldots, x_n$:

$$x_k = \varphi_k(\Theta, \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Эти равенства можно заменить сравнениями

$$x_k \equiv \varphi_k(z, \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n) \ [\mathrm{mod}\,(z - \Theta)].$$

Совершенно так же получим, что x_k сравнимо с $\varphi_k(z; \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$ по модулям $(z - \Theta_2)$, $(z - \Theta_3), \ldots, (z - \Theta_{n!})$, следовательно, и по их произведению. Значит,

$$P(x) \equiv \prod_k (x - \varphi_k(z, \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)) \qquad [\mathrm{mod}\, G(z; \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)].$$

После этого Кронекер применяет принцип Гаусса: он заменяет $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ на $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и получает

$$F(x) \equiv \prod_k (x - \varphi_k(z; A_1, \ldots, A_n)) \qquad [\mathrm{mod}\, G(z; A_1, \ldots, A_n)].$$

Записывая полученное сравнение в виде равенства

$$F(x) = \Pi(x - \varphi_k(z) + G(z) \cdot H(z, x),$$

мы видим, что оно имеет такую же структуру, что и тождество Гаусса. В теории Кронекера оно играет ту же роль и получено тем же способом, что и в работе Гаусса.

Таким образом, мы видим, что в рассматриваемом мемуаре Гаусса был сделан первый принципиально новый шаг по сравнению с Эйлером.

§ 7. Заключение

Обычно считают, что основная теорема алгебры лежит за пределами алгебры, что ее место скорее в теории аналитических функций, где она превращается в одно из элементарных предложений.

Между тем, мы видели, что этой теоремой занимались такие математики, как Даламбер, Эйлер, Лагранж, Лаплас, а Гаусс дал ей четыре различных доказательства.

В чем же был интерес основной теоремы алгебры для этих ученых? И почему Эйлеру, Лагранжу, Лапласу и Гауссу хотелось дать алгебраическое доказательство этой теоремы?

Мы можем теперь частично ответить на эти вопросы. Проведенный здесь анализ исследований Эйлера, Лагранжа и Гаусса показывает, как мне кажется, что «алгебраические» доказательства основной теоремы были теснейшим образом связаны с центральной проблемой алгебры XVIII—начала XIX века—с общей теорией уравнений, а через нее с теорией групп и полей. Вот почему, например, эти доказательства с самого начала связаны с теорией симметрических функций.

Именно при доказательстве основной теоремы Эйлер сформулировал важнейшее предложение о том, что рациональная функция корней уравнения $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, принимающая при всех перестановках корней k различных значений, удовлетворяет уравнению степени k, коэффициенты которого рационально выражаются через коэффициенты данного уравнения. Он же усмотрел, что вся трудность сводится к исследованию уравнений, степени которых суть 2^n, и показал, как можно провести редукцию, сводящую определение корня уравнения степени 2^n к определению корня уравнения степени 2^{n-1}. Для строгого обоснования последнего предложения Лагранж привлек учение о подобных функциях, составляющее важную часть теории Галуа.

Наконец, Гаусс, для того чтобы провести доказательство, не опирающееся на существование корней, фактически построил поле, в котором данный многочлен имеет множитель 2-й степени. Метод Гаусса определения такого поля для любого заданного многочлена, как мы видели, был впоследствии положен Кронекером в основу его конструкции поля разложения.

Итак, «алгебраические» доказательства основной теоремы ценны именно тем, что для их проведения были развиты новые глубокие методы самой алгебры и были испробованы силы уже созданных методов и приемов. Эти доказательства, которые мы здесь, следуя традиции, называли алгебраическими в кавычках, на самом деле являются алгебраическими по своему существу. Хотя они и опираются на одно топологическое предложение, эти доказательства целиком принадлежат алгебре и сыграли немалую роль в ее истории.

РАБОТЫ Л. ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ [1])

А. Н. Хованский

1. Цепные дроби до Эйлера

Среди богатейшего научного наследия Эйлера немалое место занимают его работы, посвященные цепным дробям и их обобщениям. Работ Эйлера, относящихся к этим вопросам, не менее 20. Однако в связи с незаслуженным ослаблением интереса к цепным дробям в текущем столетии многие из этих работ почти полностью забыты. Целью этой статьи является дать краткий обзор заслуг Эйлера в этом важном разделе математики, который лишь в настоящее время начинает занимать подобающее ему место.

Возможно, что цепные дроби применялись еще древнегреческими математиками. Например, алгоритм Евклида тесно связан с цепными дробями: не лишено вероятности предположение, что архимедовы приближения для $\sqrt{3}$ были им получены с помощью метода, близкого к разложению $\sqrt{3}$ в цепную дробь. Из средневековых математиков близко подошел к цепным дробям Омар Хайям. Впервые же цепные дроби как таковые появляются в «Алгебре» итальянского математика Р. Бомбелли, вышедшей в 1572 г.[2]). Бомбелли пришел к цепным дробям, изучая извлечение квадратного корня из чисел. Он полагал $\sqrt{a^2+r}=a+x$

---

[1]) Доклад, прочитанный 29 июня 1956 г. на секции истории математики III Всесоюзного математического съезда в Москве.

[2]) R. Bombelli, L'Algebra, Bologna, 1572.

и находил отсюда $r=2ax+x^2$, что в свою очередь дает $x=\frac{r}{2a+x}$. Подставляя в правую часть этого равенства вместо x выражение $\frac{r}{2a+x}$ и продолжая процесс неограниченно, Бомбелли по сути дела пришел к разложению, в позднейшем обозначении имеющему вид

$$\sqrt{a^2+r}=a+\cfrac{r}{2a+\cfrac{r}{2a+\dots}}.$$

В частности, таким образом, Бомбелли дал разложение $\sqrt{13}$ в цепную дробь[1]).

Следующее по времени применение цепной дроби, причем опять-таки к извлечению квадратных корней, принадлежит итальянскому математику П. А. Катальди (ум. в 1626 г.)[2]). В 1613 г. он ввел при записи цепной дроби повторное применение дробной черты, т. е. уже настоящее обозначение цепной дроби, только вместо $+$ он употреблял перлюэт (&), т. е. сокращенное обозначение латинского союза et (и). Как и Бомбелли, Катальди пользовался исключительно цепными дробями с положительными членами звеньев. При этом Катальди заметил, что значение цепной дроби всегда заключено между соседними подходящими дробями. Например, найдя разложение $\sqrt{18}$ в цепную дробь и записав его в виде

$$\sqrt{18}=4\,\&\,\frac{2}{8}\,\&\,\frac{2}{8}\,\&\,\ldots,$$

он нашел приближения

$$\sqrt{18}\approx 4+\cfrac{2}{8+\cfrac{1}{4}} \quad \text{и} \quad \sqrt{18}\approx 4+\cfrac{2}{8+\cfrac{8}{33}},$$

1) См. Г. Г. Цейтен, История математики в XVI и XVII веках, ОНТИ, 1938, стр. 163.

2) P. A. Cataldi, Trattato del modo brevissimo di trovar li radice quadrati dei numeri, 1613.

между которыми заключен $\sqrt{18}$. Но Катальди еще не знал способа последовательного вычисления подходящих дробей.

Бомбелли и Катальди пришли к цепным дробям, исходя из извлечения квадратного корня из чисел. Другим путем к цепным дробям пришел немецкий математик Д. Швентер (1585—1636)[1]). Он пользовался ими для приближенного представления обыкновенных дробей с большими числителями и знаменателями. В частности, Швентер разложил $\frac{177}{233}$ в цепную дробь с помощью следующей таблицы:

233		1	0
177	1	0	1
56	3	1	1
9	6	3	4
2	4	19	25
1	2	79	104
0	0	177	233

Первый столбец этой таблицы содержит знаменатель данной дроби, ее числитель и ряд остатков, получающихся при последовательном делении чисел этого столбца друг на друга. Второй столбец содержит частные, получающиеся при этом делении. Третий столбец содержит числители, четвертый—знаменатели последовательных подходящих дробей. Каждое число третьего и четвертого столбцов Швентер получал, умножая непосредственно стоящее над ним число на стоящее влево от последнего и прибавляя к произведению число, стоящее на две строки выше отыскиваемого (например, $79=19\cdot4+3$). Таким образом, Швентер фактически пользовался уже рекуррент-

[1]) D. Schwenter, Geomëtria practica nova et aucta, Nürnberg, 1625—1626; он же, Deliciae physico-mathematicae oder mathematische und philosophische Erquickstunden, Nürnberg, 1636.

ными соотношениями для последовательного вычисления числителей и знаменателей подходящих дробей. Но он рассматривал при этом только правильные цепные дроби, т. е. такие, частные числители которых все равны единице, а все частные знаменатели являются натуральными числами. Из вышеприведенной таблицы видно, что Швентер выбирал за нулевую подходящую дробь $\frac{0}{1}$, если у приближаемой обыкновенной дроби числитель меньше знаменателя.

В середине XVII века английский математик Дж. Валлис (1616—1703) разложил число $\frac{4}{\pi}$ (которое он обозначал через $\square$) в бесконечное произведение. У. Брункер (1620—1684) в письме к Валлису записал это произведение в виде

$$\square=\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8}\cdot\frac{9\cdot 9}{8\cdot 10}\cdots$$

и разложил его в цепную дробь

$$\square=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\ldots}}}.$$

Это разложение было дано без доказательства и без указаний на свойства цепных дробей. Оно является первым по времени разложением трансцендентного числа в цепную дробь[1]).

Валлис поместил цепную дробь Брункера в двух своих работах[2]). В первой из этих работ впервые было установлено соотношение между числителями и знаменателями трех соседних подходящих дробей любой цепной дроби.

Следующий шаг в развитии теории цепных дробей был сделан Х. Гюйгенсом (1629—1695)[3]). Он хотел построить

[1]) Г. Г. Цейтен, цит. соч., стр. 63—64 и 315.

[2]) J. Wallis, Arithmetica infinitorum sive nova methodus inquirendi curvilineorum quadraturam aliaque difficiliora matheseos problemata, Oxford, 1655; он же, Tractatus de algebra, 1685.

[3]) Ch. Huygens, Descriptio automati planetarii. Opuscula posthuma, Lugduni Batavorum, 1703.

планетарий, приводящийся в движение при помощи зубчатых колес. Число зубцов различных колес должно было соответствовать временам обращения планет вокруг Солнца, причем отношения этих времен выражались дробями с большими числителями и знаменателями. Но так как нельзя было изготовить колеса более чем с миллионом равных зубцов, то Гюйгенс пришел к задаче о приближенной замене дроби с большими числителем и знаменателем дробью с меньшими членами. Как и Швентер, Гюйгенс решил эту задачу посредством разложения обыкновенной дроби в цепную дробь и поэтому ограничился рассмотрением правильных цепных дробей. При этом он отправлялся от первого предложения седьмой книги «Начал» Евклида: «Если отложены два неравные числа и все время при последовательном отнятии меньшего от большего остаток не измеряет предшествующего ему <отнимаемого>, пока не останется единица, то первоначальные числа будут первыми между собой». Отсюда Гюйгенс заключил, что числитель и знаменатель одной и той же подходящей дроби не могут иметь общие множители (конечно, если цепная дробь правильная). Гюйгенс обратил также внимание на то, что нельзя найти обыкновенную дробь с меньшими числителем и знаменателем, чем подходящая, которая была бы ближе этой подходящей к значению цепной дроби. Наконец, Гюйгенс отметил, что подходящие дроби попеременно то больше, то меньше значения цепной дроби. На это обстоятельство указал уже, со слов Брункера, Валлис, а еще ранее Катальди.

2. Первые работы Эйлера по теории цепных дробей

Из сказанного вытекает, что в XVII веке цепными дробями занимались от случая к случаю, причем не было работ, где бы теория цепных дробей излагалась систематически.

В первой же своей работе о цепных дробях[1]), опубликованной в 1744 г., Эйлер изложил полную их теорию, насколько это было возможно сделать в эту эпоху. Эйлер

[1]) L. Euler, De fractionibus continuis.—Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae, т. IX за 1737 г. (1744), стр. 98—137.

рассматривал цепную дробь общего вида

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\dots}}},$$

которую позже стали записывать в виде

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\dots}},$$

и изучил соотношения типа

$$P_n=b_nP_{n-1}+a_nP_{n-2},$$
$$Q_n=b_nQ_{n-1}+a_nQ_{n-2},$$

связывающие числители и знаменатели трех соседних подходящих дробей цепной дроби (как было указано, эти соотношения впервые установил Валлис). Чтобы эти равенства имели место и при $n=1$, Эйлер ввел обозначения $P_{-1}=1$, $Q_{-1}=0$. В этой же работе впервые было дано разложение

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14\dots}}}},$$

где e — основание натуральных логарифмов. Наконец, здесь впервые Эйлер ввел термин «непрерывная дробь» (fractio continua).

В середине XVIII века, по-видимому, в Германии появляется термин «цепная дробь» (Kettenbruch). Этот термин и в настоящее время постоянно применяется в математической литературе, издающейся на немецком и скандинавском языках. Буквальным переводом его является польский термин ułamek łańcuchowy. В русской литературе XIX века был распространен термин «непрерывная дробь», являющийся буквальным переводом эйлеровского термина. В настоящее время ряд авторов

(А. Я. Хинчин, В. П. Терских, А. К. Сушкевич и др.) пользуется термином «цепная дробь». Этот термин удобнее, так как термин «непрерывный» теперь широко применяется в математике в смысле, не связанном с понятием непрерывной дроби. Кроме того, в настоящее время рассматривается разложение в цепные дроби различных функций, не обязательно всюду непрерывных. Отсюда возможно наличие тяжелых оборотов типа «данная непрерывная дробь не является непрерывной функцией» и т. п. Насколько автору известно, вопрос о выборе между терминами «цепная дробь» и «непрерывная дробь» не ставился в нашей литературе. Этим объясняется сделанное нами сейчас замечание.

Эйлер не занимался вопросом об удобном обозначении цепных дробей, хотя, как мы видели, этот вопрос пытался разрешить уже Катальди. Это делает работы Эйлера, посвященные цепным дробям, длинными и нелегко обозримыми. В XIX веке для цепной дроби

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n+\ddots}}}$$

предлагались различные обозначения. И. Г. Мюллер[1]) писал

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}\dot{+}\frac{a_2}{b_2}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{a_n}{b_n}\dot{+}\ldots;$$

этим обозначением пользовался также в своей «Арифметике» К. Фербер[2]). А. Прингсгейм[3]) ввел обозначение

$$b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\ldots+\frac{a_n|}{|b_n}+\ldots;$$

[1]) J. H. I. Müller, Lehrbuch der Mathematik, erster Teil die gesammte Arithmetik enthaltend, Halle, 1838.

[2]) К. Фербер, Арифметика, М., 1914.

[3]) A. Prinsheim, Ueber die Convergenz unendlicher Kettenbrüche.—Sitzungsberichte der math. phys. ikalische Klasse der Kgl. Bayreschen Akademie der Wissenschaften zu München, 28, 1898, стр. 295—324.

оно распространено и в настоящее время. Позднее Роджерс[1]) стал обозначать цепную дробь символом

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}+\dots+\frac{a_n}{b_n}+\dots.$$

Из этих обозначений наиболее простым является последнее, так как оно не требует введения дополнительных знаков. Обычно подходящие дроби пишут отдельно от цепной дроби. Автор настоящей статьи предложил писать подходящие дроби под соответствующим звеном цепной дроби, что сильно облегчает вычисления:

$$\begin{array}{cccccc} & b_0 & +\dfrac{a_1}{b_1} & +\dfrac{a_2}{b_2}+\dots & +\dfrac{a_n}{b_n}+\dots, & \\ \dfrac{1}{0} & \dfrac{b_0}{1} & \dfrac{b_0b_1+a_1}{b_1} & \dfrac{P_2}{Q_2}\dots & \dfrac{P_n}{Q_n}\dots & \end{array}$$

Этим обозначением мы будем пользоваться и в этой статье.

Запишем с помощью такого обозначения дробь Брункера:

$$\begin{array}{cccccc} \dfrac{\pi}{4}= & \dfrac{1}{1}+ & \dfrac{1}{2}+ & \dfrac{9}{2}+ & \dfrac{25}{2}+\dots+ & \dfrac{(2n-1)^2}{2}+\dots, \\ \dfrac{0}{1} & \dfrac{1}{1} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{13}{15} & \dfrac{76}{105}\dots & \end{array}$$

Сравним ее подходящие дроби с частными суммами ряда Лейбница:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\dots,$$

$$1,\ 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{13}{15},\ \frac{13}{15}-\frac{1}{7}=\frac{76}{105},\ \dots$$

Мы видим, что подходящие дроби цепной дроби Брункера совпадают с частными суммами Лейбница. Нетрудно показать, что это имеет место для всех подходящих дробей этой дроби. Цепную дробь, подходящие дроби которой совпадают с частными суммами ряда, Ф.-Л. Зейдель (1821—1896) назвал равноценной по отношению к этому

[1]) L. J. Rogers, On the representation of certain asymptotic series as convergent continued fractions.—Proc. London math. soc. (2), 4 (1907), стр. 72—89.

ряду [1]). Ясно, что равноценная цепная дробь не дает новых приближений для числа или функции, разложенных в данный ряд. Поэтому непосредственный интерес равноценных цепных дробей невелик.

Рассмотрим вышеприведенную цепную дробь Эйлера, записав ее в виде

$$e = 1 + \frac{2}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \ldots + \frac{1}{4n-2} + \ldots$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{19}{7} \quad \frac{193}{71} \ldots$$

Ее подходящие дроби не совпадают с частными суммами разложения числа e в ряд

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Эта цепная дробь Эйлера является частным случаем дроби, опубликованной в одной работе Эйлера уже после его смерти [2]):

$$e^x = 1 + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{10} + \ldots + \frac{x^2}{2(2n-1)} + \ldots$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{2+x}{2-x} \quad \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} \quad \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3} \ldots$$

Разложение подходящих дробей этой дроби в степенной ряд совпадает до некоторого члена с разложением функции e^x в степенной ряд, но при этом не обрывается, как у равноценной дроби, а продолжается до бесконечности. Зейдель в уже названной выше работе назвал цепную дробь, связанную таким образом со степенным рядом, соответствующей ему. Такие дроби имеют огромное значение, так как они не только дают новые приближе-

---

[1]) Seidel, Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetze eines Kettenbruches und der Art des Fortgangs seiner Näherungsbrüche, München, 1855; см. «Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse», 1855, 7: 3, стр. 58.

[2]) L. Euler, Commentatio in fractionem continuam qua illustris La Grange potestates binomiales expressit.—Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, 6, 1813—1814, стр. 3—11.

ния для данной функции, но, как мы увидим, нередко сходятся в гораздо более широкой области, чем соответствующие им степенные ряды.

Таким образом, уже в первой работе Эйлера впервые в истории математики появляются соответствующие цепные дроби. К сожалению, сам Эйлер не делал различия между равноценными и соответствующими дробями. Поэтому все его результаты следует в этом отношении проверять.

Вторая работа Эйлера по цепным дробям [1]), опубликованная в 1750 г., т. е. через 6 лет после первой, фактически является ее продолжением. В ней дано преобразование ряда в равноценную цепную дробь:

$$\frac{a}{p}-\frac{b}{q}+\frac{c}{r}-\frac{d}{s}+\ldots=\frac{a}{p}+\frac{bp^2}{aq-bp}+\frac{cq^2}{br-cq}+\ldots$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{a}{p}\quad\frac{a^2q-abp}{apq}\quad\frac{a^2bqr-ab^2pr+abcpq}{abpqr}\quad\ldots$$

В ней же впервые поставлен вопрос о применении цепных дробей для решения дифференциальных уравнений Кроме того, в ней дано следующее соотношение:

$$\int_0^1\frac{x^{k-1}\,dx}{(1-x^m)^{\mu/\nu}}=\frac{1}{k}+\frac{\mu k^2}{\nu m+(\nu-\mu)\,k}+\frac{\nu(\mu+\nu)(m+k)^2}{(3\nu-\mu)\,m+(\nu-m)\,k}+$$
$$+\frac{2\nu(\mu+2\nu)(2m+k)^2}{(5\nu-2\mu)\,m+(\nu-\mu)\,k}+\ldots+\frac{n\nu(\mu+n\nu)(nm+k)^2}{[(2n+1)\,\nu-n\mu]\,m+(\nu-\mu)\,k}+\ldots$$

При $k=1$, $\mu=\nu$, $m=2$ из этого разложения получаем цепную дробь Брункера:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}+\frac{1^2}{2}+\frac{2\cdot3^2}{2\cdot2}+\frac{2\cdot3\cdot5^2}{3\cdot2}+\ldots+\frac{n(n+1)(2n+1)^2}{(n+1)\cdot2}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{1}+\frac{1^2}{2}+\frac{3^2}{2}+\frac{5^2}{2}+\ldots+\frac{(2n+1)^2}{2}+\ldots$$

Таким образом, в частном случае разложение (1) приводит к равноценной дроби. Остается открытым вопрос,

[1]) L. Euler, De fractionibus continuis observatione.—Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, т. XI за 1739 г. (1750), стр. 32—81.

при всех ли значениях параметров k, μ, ν, m это разложение является равноценной дробью.

Часть вопросов, рассмотренных Эйлером в этих двух работах, вошла в гл. 18 первой части его «Введения в анализ бесконечно малых»[1]). Именно, в эту главу вошло определение цепной дроби общего вида, а также обыкновенной цепной дроби (т. е. цепной дроби, все частные числители которой равны единице; этот термин введен позже Эйлера). Затем даны рекуррентные соотношения для последовательного получения числителей и знаменателей подходящих дробей (доказательство для любого значения индекса отсутствует). Далее рассмотрено преобразование числовых рядов в равноценные цепные дроби. В частности, в равноценные цепные дроби преобразованы ряд для $\ln 2$ (он получается из разложения (1) при $k=1$, $\mu=\nu$, $m=1$) и ряд для $\frac{\pi}{4}$ (цепная дробь Брункера). Затем также путем непосредственного преобразования ряда в равноценную цепную дробь получается тождество

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}-\frac{1}{m+3n}+\ldots+\frac{(-1)^k}{m+kn}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{m+}\,\frac{m^2}{n+}\,\frac{(m+n)^2}{n}+\frac{(m+2n)^2}{n}+\ldots+\frac{(m+kn)^2}{n}+\ldots$$

Эйлер не указывает, что эта цепная дробь является частным случаем разложения (1) при замене k на m, m на n и при $\mu=\nu$, т. е. что в эту цепную дробь раскладывается интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx.$$

Далее, Эйлер преобразует в равноценные цепные дроби ряд для

$$\frac{\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

[1]) L. Euler, Introductio in analysin infinitorum I, Lausanne, 1748; русский перевод, М.—Л., ОНТИ, 1936.

полученный им в § 178 «Введения в анализ бесконечно малых», ряд для числа e, ряд для $\cos 1$ и несколько степенных рядов с буквенными коэффициентами. Затем Эйлер подробно рассматривает разложение

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}+\ldots$$

и его обобщения, дающие разложение корней некоторых квадратных уравнений. Он дает также разложение корня квадратного уравнения в виде

$$x=a+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\ldots.$$

Затем излагается разложение обыкновенной и десятичной дробей в цепную дробь с помощью алгоритма Евклида. В частности, исходя из приближенного равенства

$$e=2{,}718281828459,$$

Эйлер получает разложение

$$\frac{e-1}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\frac{1}{18}+\frac{1}{22}+\ldots,$$

не доказывая, что все члены звеньев этой цепной дроби образуются по тому же закону, что и записанные.

В заключение Эйлер дает несколько приближений для π, являющихся подходящими дробями разложения π в цепную дробь (исходя из приближенного значения π), и тем же способом дает приближения, употребляющиеся при составлении календаря.

Таким образом, во «Введении в анализ бесконечно малых» Эйлер пользуется преимущественно равноценными дробями, так как ему уже известен общий метод преобразования числового или даже степенного ряда в равноценную цепную дробь. Соответствующие цепные дроби он приводит только для частных случаев, разлагая приближенное значение их суммы в цепную дробь при помощи алгоритма Евклида.

3. Разложение Эйлером в цепные дроби функций и решение с помощью цепных дробей дифференциальных уравнений

Уже во второй своей работе, посвященной цепным дробям, Эйлер поставил вопрос о применении цепных дробей для решения дифференциальных уравнений. При этом он занимался задачей о нахождении дифференциального уравнения для функции, разложенной в данную цепную дробь [1]). Но в первых своих работах по цепным дробям Эйлер еще не владел методом, позволяющим приближенно решать дифференциальные уравнения с помощью цепных дробей.

Такой метод был найден Лагранжем [2]). 18 июля 1776 г. Лагранж прочел в Берлинской Академии наук доклад по этому вопросу. В нем он указывал, что при решении дифференциальных уравнений «метод цепных дробей имеет все преимущества метода рядов», причем «с помощью этого метода можно быть уверенным в нахождении рационального и конечного значения искомой величины (интеграла дифференциального уравнения. — *А.Х.*), когда такое существует, так как в этом случае процесс кончается сам собой, а когда процесс продолжается бесконечно, то получается несомненное доказательство того, что искомую величину нельзя выразить в рациональном и конечном виде». «Этот метод, продолжает Лагранж, — служит для решения многих дифференциальных уравнений, которые ускользают от других методов интегрального исчисления».

Метод Лагранжа состоит в следующем.

Пусть дано дифференциальное уравнение, связывающее y с x. Пусть $y \approx \xi_1$ при малых $|x|$. Положим $y = \frac{\xi_1}{1 + y_1}$ и подставим это соотношение в исходное урав-

---

[1]) Ср., например, L. Euler, Summatio fractionis continuae, cujus indices, progressionem arithmeticam constituunt dum numeratores omnes sunt unitates, ubi simul resolutio aequationis Riccatianae per huiusmodi fractiones ducetur. В книге: L. Euler, Opuscula Analytica, Petropoli, 1785, F. II, стр. 217—239.

[2]) J. L. Lagrange, Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral.—Nouvelles de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin (1776); Oeuvres, т. IV, стр. 301—332.

нение. Получим тем самым дифференциальное уравнение, связывающее y_1 с x. Пусть $y_1 \approx \xi_2$ при малых $|x|$. Положим $y_1 = \frac{\xi_2}{1+y_2}$ и продолжим этот процесс.

В итоге мы придем к разложению решения исходного уравнения в цепную дробь

$$y = \frac{\xi_1}{1} + \frac{\xi_2}{1} + \ldots + \frac{\xi_n}{1} + \ldots.$$

ξ_ν удобнее искать в виде $a_\nu x^{\alpha\nu}$, где $\alpha_\nu \geqslant 0$. Такой метод особенно удобен в тех случаях, когда при помощи него удается найти общий вид звена цепной дроби.

С помощью этого метода Лагранж получил, например, следующие разложения:

$$(1+x)^\nu = 1 + \frac{\nu x}{1} + \frac{(1-\nu)x}{2} + \frac{(1+\nu)x}{3} + \frac{(2-\nu)x}{2} + \frac{(2+\nu)x}{5} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(n-\nu)x}{2} + \frac{(n+\nu)x}{2n+1} + \ldots, \quad (2)$$

$$\ln x = \frac{x-1}{1} + \frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{3} + \frac{2(x-1)}{2} + \ldots + \frac{n(x-1)}{2} +$$
$$+ \frac{n(x-1)}{2n+1} + \ldots, \quad (3)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x}{5} - \ldots - \frac{x}{2} + \frac{x}{2n+1} - \ldots, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{7} - \ldots - \frac{x^2}{2n+1} - \ldots. \quad (5)$$

Разложение (5) было получено еще до Лагранжа Ламбертом [1]). Все эти разложения являются соответственными, а не равноценными дробями.

Лагранж, разумеется, не занимался определением областей сходимости этих разложений. Этот вопрос был выяснен лишь в конце XIX и в начале XX века. Здесь можно указать следующее.

Разложения (2) и (3) сходятся на плоскости комплексного переменного x, разрезанной по вещественной оси от $x = -\infty$ до $x = -1$.

---

[1]) J. H. Lambert, Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung, т. II, ч. 1 (Verwandlung der Brüche), 1770.

Разложение (4) сходится на всей плоскости комплексного переменного x.

Разложение (5) сходится на всей плоскости комплексного переменного x, за исключением тех точек, в которых $\operatorname{tg} x$ имеет полюсы.

В статье, напечатанной в т. 6 Мемуаров Петербургской Академии за 1813—1814 гг., Эйлер занялся сжатием разложения (2), т. е. нашел цепную дробь, подходящие дроби которой совпадают с подходящими дробями четного порядка дроби (2). Дробь, полученная Эйлером, имеет вид

$$(1+x)^\nu = 1 + \frac{2\nu x}{2+(1-\nu)x -} \frac{(1-\nu^2)x^2}{3(2+x) -} \frac{(4-\nu^2)x^2}{5(2+x) - \ldots}$$
$$\ldots - \frac{(n^2-\nu^2)x^2}{(2n+1)(2+x) - \ldots}.$$

Преобразовав ее, Эйлер пришел к разложению

$$\frac{(1+x)^\nu-(1-x)^\nu}{(1+x)^\nu+(1-x)^\nu} = \frac{\nu x}{1 +} \frac{(\nu^2-1)x^2}{3 +} \frac{(\nu^2-4)x^2}{5} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(\nu^2-n^2)x^2}{2n+1} + \ldots,$$

которое сходится на всей плоскости комплексного переменного x, за исключением отрезков вещественной оси, удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x \leqslant -1;\ 1 \leqslant x < \infty$.

Заменив в этой дроби x на $i \operatorname{tg}\varphi$, Эйлер получил разложение

$$\operatorname{tg}\nu\varphi = \frac{\nu \operatorname{tg}\varphi}{1} - \frac{(\nu^2-1)\operatorname{tg}^2\varphi}{3} - \frac{(\nu^2-2^2)\operatorname{tg}^2\varphi}{5} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{(\nu^2-n^2)\operatorname{tg}^2\varphi}{2n+1} - \ldots,$$

которое можно использовать для приближенного выражения $\operatorname{tg}\nu\varphi$ через $\operatorname{tg}\varphi$.

В той же работе Эйлер занялся сжатием разложения (3) и получил цепную дробь

$$\ln x = \frac{2(x-1)}{x+1} - \frac{(x-1)^2}{3(x+1) -} \frac{4(x-1)^2}{5(x+1) -} \frac{9(x-1)^2}{7(x+1) - \ldots}$$
$$\ldots - \frac{n^2(x-1)^2}{(2n+1)(x+1) - \ldots},$$

подходящие дроби которой совпадают с подходящими дробями четного порядка дроби (3).

Наконец, сжав цепную дробь (4), Эйлер получил упомянутое выше разложение

$$e^x = 1 + \frac{2x}{2-x+} \frac{x^2}{6+} \frac{x^2}{10+} \dots + \frac{x^2}{2(2n-1)+} \dots .$$

Все в той же статье Эйлер также рассмотрел разложение

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+} \frac{x^2}{3+} \frac{4x^2}{5+} \dots + \frac{n^2x^2}{2n+1+} \dots,$$

опубликованное ранее в упомянутой работе Ламберта.

Таким образом, Эйлер разложил в быстро сходящиеся цепные дроби почти все элементарные функции. Однако до настоящего времени неизвестен общий вид разложения в соответственную цепную дробь многих широко распространенных функций, в том числе $\sin x$ и $\cos x$. Важно отметить, что при переходе от степенного ряда к соответствующей цепной дроби иногда может случиться, что всюду расходящийся (кроме нулевой точки) степенной ряд преобразуется в цепную дробь, имеющую широкую область сходимости. Например, Эйлер получил [1]) цепную дробь

$$y = \frac{1}{1+} \frac{ax}{1+} \frac{x}{1+} \frac{(a+1)x}{1+} \dots + \frac{nx}{1+} \frac{(a+n)x}{1+} \dots, \tag{6}$$

в которую раскладывается решение уравнения

$$x^2y' + (1+ax)\,y = 1; \quad y(0) = 1.$$

Ряд

$$1 - ax + a(a+1)x^2 - a(a+1)(a+2)x^3 + \dots$$
$$\dots + (-1)^n a(a+1)\dots(a+n-1)x^n + \dots,$$

в который раскладывается решение этого уравнения, всюду расходится, кроме точки $x=0$. На расходимость его указывает и сам Эйлер. Между тем, цепная дробь (6) сходится на всей плоскости комплексного переменного x, кроме отрицательной части вещественной оси.

[1]) L. Euler, De transformatione seriei divergentis $1-mx+$ $+m(m+n)x^2-m(m+n)(m+2n)x^3+m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4-\dots$ in fractionem continuam.—Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae pro annum 1784, стр. 36—45.

4. Преобразование Эйлером в цепные дроби бесконечных произведений

Несколько особое место в творчестве Эйлера, посвященном цепным дробям, занимает одна работа, напечатанная в 1783 г. [1]). В ней Эйлер занимался следующей задачей:

Даны числа $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Найти числа $x_1, x_2, x_3, \ldots$, удовлетворяющие уравнениям

$$x_1x_2 = A_1;\ x_2x_3 = A_2;\ \ldots;\ x_nx_{n+1} = A_{n+1};\ \ldots$$

Ясно, что достаточно найти только x_1, так как, если x_1 известно, то все остальные неизвестные найдутся легко.

Для решения этой задачи Эйлер рассмотрел последовательность $x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \ldots, x_1x_2 \ldots x_n, \ldots$, придав ей вид

$$x_1, A_1, A_2x_1, A_1A_3, A_2A_4x_1, A_1A_3A_5, \ldots, A_1A_3 \ldots A_{2n-1},\\ A_2A_4 \ldots A_{2n}x_1, \ldots$$

Отсюда Эйлер получил, что

$$x_1 = \frac{A_1A_3A_5 \ldots}{A_2A_4A_6 \ldots}.$$

В частности, полагая, что числа $A_1, A_2, A_3, \ldots$ являются членами арифметической прогрессии или же обыкновенными дробями, числители и знаменатели которых образуют арифметическую прогрессию, Эйлер нашел x_1 в конечном виде как отношение двух определенных интегралов. Эти интегралы он, в свою очередь, выражал через гамма-функцию. Преобразуя их, он пришел к разностному уравнению

$$x_{n+1}^2x_{n+2}^2 = p^2 + 2npq + n^2q^2,$$

если

$$x_1x_2 = p;\ x_2x_3 = p + q;\ \ldots;\ x_{n+1}x_{n+2} = p + nq.$$

Решая это уравнение с помощью цепных дробей, Эйлер

---

[1]) L. Euler, De seriebus, in quibus producta ex binis terminis contiguis datam constituit progressionem. В книге: L. Euler, Opuscula Analytica, Petropoli, 1783, I, стр. 1—47.

получил ряд разложений в цепные дроби, например

$$\left[\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2n}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}\right]^2\cdot\frac{1}{n\pi}=$$
$$=1+\frac{2}{8n-1}+\frac{1\cdot3}{8n}+\frac{3\cdot5}{8n}+\ldots+\frac{4m^2-1}{8n}+\ldots;$$
$$\left[\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\right]^2\cdot\frac{2n^2\pi}{2n-1}=$$
$$=1+\frac{2}{8n-5}+\frac{1\cdot3}{8n-4}+\frac{3\cdot5}{8n-4}+\frac{4m^2-1}{8n-4}+\ldots.$$

Эти исследования Эйлер продолжил в другой работе[1]), где он решал систему $x_1x_2=p^2$; $x_2x_3=(p+q)^2$; $\ldots$; $x_nx_{n+1}=[p+(n-1)q]^2$.

5. Обобщение Эйлером цепных дробей

Эйлеру принадлежит еще работа 1770 г., в которой дано очень важное обобщение цепных дробей[2]). В этой работе решается задача: между числами, относящимися как $1:x$, вставить несколько средних пропорциональных.

Для случая $x=2$ и двух средних пропорциональных задача решается с помощью таблицы, которой можно придать вид

$$\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}15&19&73&281&1081\\14&15&58&223&858\\13&12&46&177&681\end{matrix}$$

$$\sqrt[3]{4}\approx1{,}67\quad 1{,}583\quad 1{,}5870\quad 1{,}58757\quad 1{,}58738$$
$$\sqrt[3]{2}\approx1{,}33\quad 1{,}250\quad 1{,}2609\quad 1{,}25989\quad 1{,}259912$$

Приближения для $\sqrt[3]{4}$ получаются делением чисел верхней строки на стоящие под ними числа нижней строки. Приближения для $\sqrt[3]{2}$ получаются делением чисел нижней строки на стоящие под ними числа нижней строки.

---

[1]) L. Euler, De fractionibus continius Wallisii.—Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg, 1812, 5, стр. 24, 44.

[2]) L. Euler, De inventione quotcunque mediarum proportionalium citra radicum extractionem.—Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, 1770, 14 : 1, стр. 188—214.

Запись Эйлера, конечно, сложнее, но сводится к тому же процессу. Нетрудно видеть, что эта работа кладет начало применению матриц для приближенного решения алгебраических уравнений. К сожалению, эта работа Эйлера почти полностью забыта, если не считать двух заметок В. Лорей[1]) и М. Крафта[2]), а также одной статьи М. Мюллера[3]) в немецких математических журналах 30—40-х годов текущего столетия.

Если между числами, относящимися как $1:x$, требуется вставить n средних пропорциональных, то задача сведется к многократному умножению матрицы n-го порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x & \ldots & x \\ 1 & 1 & x & \ldots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \text{ на матрицу } n\text{-го порядка} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При этом, как и выше, мы получим приближенные значения для $\sqrt[n]{x}, \sqrt[n]{x^2}, \ldots, \sqrt[n]{x^{n-1}}$. Обобщая этот метод, можно получить способ решения алгебраического уравнения любой степени, но вопрос о сходимости таких приближений остается открытым.

Связь с методом цепных дробей состоит здесь в том, что при пользовании цепными дробями вычисляется

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \\ Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}. \end{array}$$

В данной работе Эйлера в случае одного среднего пропорционального вычисляется

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}, \quad \text{где} \quad P_n = \alpha_n P_{n-1} + \beta_n Q_{n-1}, \quad Q_n = \gamma_n P_{n-1} + \delta_n Q_{n-1};$$

[1]) W. Lorey, Ueber ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung.—Monatsheft für Mathematik und Physik, Leipzig und Wien, 1939, 48, стр. 190—197.

[2]) M. Krafft, Ueber ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung.—Там же, 1941, 49, стр. 312—315.

[3]) M. Müller, Ueber ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung.—Mathem. Zeits., 1948, 51 : 4, стр. 474—496.

в случае двух средних пропорциональных вычисляются

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{R_n} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{Q_n}{R_n},$$

где

$$\begin{aligned} P_n &= \alpha_n P_{n-1} + \beta_n Q_{n-1} + \gamma_n R_{n-1}, \\ Q_n &= \delta_n P_{n-1} + \varepsilon_n Q_{n-1} + \zeta_n R_{n-1}, \\ R_n &= \eta_n P_{n-1} + \theta_n Q_{n-1} + \iota_n R_{n-1} \end{aligned}$$

и т. д.

6. Другие работы по цепным дробям в России XVIII и начала XIX века

Систематическое изучение Эйлером цепных дробей пробудило к ним интерес со стороны как русских математиков, так и зарубежных ученых, работавших в России. Перечислим кратко эти работы.

Ученик Эйлера Михаил Софронов (1729—1760) написал работу, в которой он разложил в цепные дроби квадратные корни из натуральных чисел, и занимался улучшением сходимости таких цепных дробей. В этой же работе М. Софронов пытался установить зависимость между мнимыми числами и расходящимися цепными дробями[1]).

Академик В. Висковатов предложил простой и удобный метод преобразования степенного ряда (или даже отношения двух степенных рядов) в соответствующую цепную дробь[2]). Этот метод состоит в получении тождества

$$\frac{\alpha_{10}+\alpha_{11}x+\alpha_{12}x^2+\ldots}{\alpha_{00}+\alpha_{01}x+\alpha_{02}x^2+\ldots}=\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{00}}+\frac{\alpha_{20}x}{\alpha_{10}}+\frac{\alpha_{30}x}{\alpha_{20}}+\ldots,$$

где $\alpha_{m,n}=\alpha_{m-1,0}\,\alpha_{m-2,n+1}-\alpha_{m-2,0}\,\alpha_{m-1,n+1}$.

---

[1]) В. И. Смирнов и Е. С. Кулябко, Михаил Софронов, русский математик середины XVIII века, Изд. АН СССР, 1954, стр. 32—47.

[2]) B. Viscovatov, De la méthode générale pour réduir toutes sortes de quantités en fractions continues.—Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, 1803—1806. 1, стр. 226—247.

Вычисления при этом удобно располагать по схеме:

$$\begin{array}{llll}
\alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \dots, \\
\alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots, \\
\alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots, \\
\alpha_{30} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \dots, \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Например,

$$\begin{array}{rrr}
1 & -4 & 6 \\
1 & -1 & \\
-3 & 6 & \\
-3 & & \\
-18 & &
\end{array}
\qquad \frac{1-x}{1-4x+6x^2}=\frac{1}{1-}\,\frac{3x}{1-}\,\frac{-3x}{3-}\,\frac{-18x}{3}=$$

$$=\frac{1}{1-}\,\frac{3x}{1+}\,\frac{x}{1-}\,\frac{2x}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{1}\quad\frac{1}{1-3x}\quad\frac{1+x}{1-2x}\quad\frac{1-x}{1-4x+6x^2}.$$

Таким образом, при малых $|x|$ дроби $\frac{1}{1-3x}$ и $\frac{1+x}{1-2x}$ являются приближенными значениями дроби $\frac{1-x}{1-4x+6x^2}$.

Преобразованию рядов в цепные дроби посвящены также работы К. Ф. Кауслера[1]) и Ф. Т. Шуберта[2]). В частности, в третьей из названных в сноске работ Кауслер занимался приближенным вычислением интеграла $\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^m}$ $(x>1)$ путем разложения подынтегрального выражения в расходящийся ряд, интегрирования этого ряда и затем преобразования его в цепную дробь. При этом Кауслер особо подчеркивал пользу цепных дробей в тех

[1]) C. F. Kausler, Die Lehre von den continuirlichen Brüchen, Stutgart, 1803; он же, Expositio methodi series quascunque datas in fractiones continuas convertendi.—Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, 1803—1806, 1, стр. 156—174; он же, De insigni usu fractionum continuarum in calculo integrali.—Там же, стр. 181—194.

[2]) F. T. Schubert, De transformatione seriei in fractionem continuam.—Там же, 1815—1816, 7, стр. 139—158.

случаях, когда приближенное вычисление функции при помощи степенного ряда невозможно.

Следует упомянуть также о более ранней работе Д. Бернулли[1]), где решается задача: найти цепную дробь, имеющую данные подходящие дроби. Д. Бернулли доказал, что если $K_0, K_1, \dots, K_n$ — данные числа, то цепная дробь, подходящие дроби которой соответственно равны $\frac{K_0}{1}, \frac{K_1}{1}, \dots, \frac{K_n}{1}, \dots$, есть

$$K_0 + \frac{K_1-K_0}{1} + \frac{K_1-K_2}{K_2-K_0} + \frac{(K_1-K_0)(K_2-K_1)}{K_3-K_1} + \dots$$

$$\dots + \frac{(K_{n-2}-K_{n-3})(K_{n-1}-K_n)}{K_n-K_{n-2}} + \dots$$

Таким образом, в России XVIII века в области цепных дробей работал не только Эйлер, но и ряд других выдающихся ученых. Без преувеличения можно сказать, что в XVIII веке большинство работ, посвященных цепным дробям, было опубликовано в России. В XIX веке работы П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, И. В. Слешинского и других математиков внесли значительный вклад в теорию цепных дробей. В настоящее время среди советских математиков пробуждается интерес к цепным дробям (достаточно указать имена А. Я. Хинчина и В. П. Терских[2])). Но до сих пор работы Эйлера по цепным дробям и их обобщениям остаются мало изученными. Можно надеяться, что в скором времени они будут переведены на русский язык и станут доступными широкому кругу советских математиков и инженеров.

---

[1]) D. Bernoulli, Disquisitiones ulteriores de indole fractionum continuarum.—Novi commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae, 1775, стр. 20.

[2]) Например, А. Я. Хинчин, Цепные дроби, М.—Л., 1949;

[3]) В. П. Терских, Метод цепных дробей в применении к исследованию колебаний механических систем, т. I—II, Судпромгиз, 1955.

ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ Л. ЭЙЛЕРА ПО ИНТЕГРИРОВАНИЮ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Н. И. Симонов

Результаты Л. Эйлера в развитии методов интегрирования линейных уравнений с частными производными первого и второго порядка получили известное освещение в ряде общих историко-математических обзоров [1]), а также в некоторых специальных работах [2]). Однако до последнего времени оставалось фактически неизвестным содержание ряда работ Л. Эйлера об интегрировании линейных уравнений с частными производными высшего порядка и линейных систем уравнений с частными производными. В настоящей статье рассмотрены соответствующие результаты Эйлера, содержащиеся в его специальных работах, опубликованных посмертно, и в его мемуарах о распространении звука.

Сначала мы осветим исследования Эйлера о линейных уравнениях с частными производными высшего порядка. Предварительно напомним, что в третьем томе «Интегрального исчисления»[3]), а также и в ряде других работ Эйлера

---

[1]) См., например, M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte d. Mathematik, Bd. IV, Leipzig, 1908, стр. 871—1074.

[2]) Ф. И. Франкль, Об исследованиях Л. Эйлера в области теории уравнений в частных производных.—Историко-математические исследования, вып. VII, М., 1954, стр. 596—624;

Н. И. Симонов, О научном наследии Л. Эйлера в области дифференциальных уравнений.—Там же, стр. 454—512.

[3]) L. Euleri, Institutionum calculi integralis, B. 3, ed. tertia, Petrop., 1827, sectio secunda.

задача интегрирования уравнений второго порядка заключалась в нахождении решений, зависящих от двух произвольных функций, число аргументов которых на единицу меньше числа независимых переменных. Именно такие решения Эйлер называет «полными интегралами».

В ряде случаев Эйлер указывает, что нахождение полных интегралов необходимо для решения задачи с начальными условиями. К постановке этой задачи для уравнений второго порядка (гиперболического типа) Эйлера приводило само физическое содержание проблем колебаний струн, мембран, стержней и изучение распространения звука. Построение нужного решения задач с начальными условиями Эйлер почти всегда осуществлял путем соответствующего выбора произвольных функций, входящих в выражение полного интеграла. В своих позднейших теоретических работах о линейных уравнениях с частными производными Эйлер ограничивается построениями для рассматриваемых классов уравнений полных интегралов, не ставя никаких дополнительных условий.

Сначала мы охарактеризуем содержание работы «Исследование о некоторых замечательных интеграциях в анализе функций двух переменных...»[1]), опубликованной лишь в 1806 г.

Для определения класса линейных уравнений с частными производными любого порядка, который является предметом данного исследования, Эйлер применяет единообразные дифференциальные операторы. Сначала вводятся в рассмотрение следующие дифференциальные формы:

$$P \equiv x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}, \tag{1}$$

$$Q \equiv x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \tag{1_1}$$

---

[1]) Recherches sur quelques integrations remarquables dans l'analyse des fonctions à deux variables connues sous le nom de differences partielles.—L. E u l e r i, Opera omnia, Ser. 1, v. 23, Lipsiae et Berolini, 1938, стр. 349—378.

$$R \equiv x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3x^2 y \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3xy^2 \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} + y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \tag{1_2}$$

$$. \ ,$$

$$Z \equiv x^\lambda \frac{\partial^\lambda z}{\partial x^\lambda} + \frac{\lambda}{1} x^{\lambda-1} y \frac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-1} \partial y} + \ldots + y^\lambda \frac{\partial^\lambda z}{\partial y^\lambda}, \tag{$1_{\lambda-1}$}$$

где z — некоторая функция x и y. Каждая последующая из этих форм возникает из предыдущей с помощью единообразной дифференциальной операции. Это выражается следующими формулами:

$$Q = x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} - 1 \cdot P, \tag{2}$$

$$R = x \frac{\partial Q}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial y} - 2 \cdot Q, \tag{2_1}$$

$$S = x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} - 3 \cdot R \tag{2_2}$$

и т. д.

Для доказательства Эйлер считает возможным ограничиться вычислением Q, R, S; обоснование методом индукции общего случая не представляет никаких затруднений.

В качестве первой задачи ставится нахождение полных интегралов уравнений

$$P = 0, \tag{3}$$

$$Q = 0, \tag{3_1}$$

$$R = 0 \tag{3_2}$$

и т. д.

Для решения прежде всего напоминаются результаты, полученные Эйлером ранее[1]), а именно находятся полные интегралы следующих простейших линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad v = \mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right), \tag{4}$$

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = nv, \ v = y^n \mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right) \ \text{ или } \ v = x^n \mathfrak{B}\left(\frac{x}{y}\right), \tag{4_1}$$

[1]) L. Euleri, Institutionum calculi integralis, v. III, ed. 3, Petrop., 1827, стр. 95 и след.

где $\mathfrak{A}$ (или $\mathfrak{B}$) означает «произвольную»[1]) функцию своего аргумента.

Затем решается «третья предварительная проблема»: найти полный интеграл уравнения

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}+y^{\lambda}\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right)=nv, \tag{4_2}$$

или

$$xp+yq+y^{\lambda}\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right)=nv. \tag{4_3}$$

Исключение q с помощью соотношения $dv=p\,dx+q\,dy$ приводит к уравнению

$$y\,dv-nv\,dy=p\,(y\,dx-x\,dy)-y^{\lambda}\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right)dy.$$

Используя интегрирующий множитель $\frac{1}{y^{n+1}}$ и обозначая $\frac{x}{y}=t$, $\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right)=T$, Эйлер элементарными интегрированиями получает в результате

$$v=y^{n}\mathfrak{B}\,(t)-\frac{y^{\lambda}}{\lambda-n}T\,(t); \tag{5}$$

специально исследуется и случай $\lambda=n$, когда полный интеграл представляется так:

$$v=y^{n}\mathfrak{C}\left(\frac{x}{y}\right)-y^{n}\ln y\,\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right). \tag{5_1}$$

Теперь решается основная задача. Для нахождения полного интеграла уравнения $Q=0$ последнее записывается согласно (2) в виде

$$x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}=P;$$

но для этого уравнения согласно (4_1) следует: $P=y\,\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right)$.

Поэтому уравнение (3_1), имеет вид

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=y\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right).$$

[1]) О понятии произвольной функции у Эйлера см. цит. выше работы Ф. Франкля (стр. 599—604) и автора (стр. 563—565).

Это позволяет непосредственно использовать формулу (5) и получить искомое решение

$$z = \mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right) + y\mathfrak{B}\left(\frac{x}{y}\right). \tag{5'}$$

Не проводя обоснования с помощью полной математической индукции, Эйлер после детальных вычислений для уравнений первых пяти порядков формулирует окончательный результат для общего случая: полный интеграл уравнения $(1_{\lambda-1})$ выражается формулой

$$z = \mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right) + y\mathfrak{B}\left(\frac{x}{y}\right) + y^2\mathfrak{C}\left(\frac{x}{y}\right) + \ldots + y^{\lambda-1}\mathfrak{N}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Заметим, что рассмотренное уравнение порядка λ может быть символически записано так:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\lambda} z = 0.$$

Отметим также, что этот результат Эйлера может быть использован в теории уравнений математической физики (уравнение $Q = 0$ является параболическим).

Во второй части работы результат несколько обобщается: требуется найти полный интеграл уравнения

$$Az + BP + CQ + \ldots = 0, \tag{6}$$

где A, B, C, ... суть произвольные постоянные коэффициенты, а величины P, Q, ... по-прежнему определены формулами (2), (2_1) и т. д.

Сначала рассматривается частный случай, т. е. уравнение

$$Az + BP = 0, \text{ или } Az + B\left(x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \tag{6'}$$

Далее используется предыдущий результат. Полагая $v = az$, где a — постоянное и z — неизвестная функция, Эйлер вместо (4_1) имеет уравнение

$$a\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) - anz = 0; \tag{$4_1'$}$$

его полный интеграл согласно (4) будет

$$z = y^n\,\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Сравнивая ($4_1{}'$) с (6), Эйлер сразу же получает:

$$A = -an, \ B = a, \text{ откуда } n = -\frac{A}{B};$$

итак, интеграл уравнения (6′) представляется в виде

$$z = y^{-\frac{A}{B}}\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right). \tag{7}$$

Пока получен лишь прежний результат. Однако положение изменяется уже при решении следующей задачи: найти полный интеграл уравнения

$$Az + BP + CQ = 0, \tag{8}$$

где P и Q — имеют прежнее значение.

Решение изящно достигается с помощью интеграла $v = \mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right)y^n$ уравнения (4_1) простыми алгебраическими операциями. Полагая в (4_1)

$$v = az + bP, \tag{9}$$

получают уравнение

$$a\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) - naz + b\left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}\right) - nbP = 0 \tag{10}$$

и его полный интеграл

$$az + bP = y^n\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right). \tag{10′}$$

Затем в (10) вместо $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ подставляется P (см. (1)) и вместо $x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}$ — сумма $P + Q$ (см. (2)); это приводит к уравнению

$$aP + bQ + bP - anz - nbP = 0,$$

или

$$-anz + (a + b - nb)P + bQ = 0. \tag{11}$$

Сопоставление с заданным уравнением приводит к равенствам

$$b = C, \quad a + b - nb = B, \quad -an = A.$$

Из этих соотношений следует, что n должно удовлетворять уравнению

$$A+nB+n(n-1)C=0. \tag{12}$$

Обозначая через α и β корни этого уравнения и учитывая две возможные системы значений величин n, a, b:

$$\begin{aligned} &n=\alpha, && n=\beta, \\ &a=B+(\alpha-1)C, && a=B+(\beta-1)C, \\ &b=C, && b=C, \end{aligned}$$

Эйлер получает на основании (10′) следующие два интеграла:

$$[B+(\alpha-1)C]z+CP=y^{\alpha}\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$[B+(\beta-1)C]z+CP=y^{\beta}\mathfrak{B}\left(\frac{x}{y}\right);$$

исключение из этих двух равенств P приводит к искомому полному интегралу уравнения (8):

$$z=y^{\alpha}\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right)+y^{\beta}\mathfrak{B}\left(\frac{x}{y}\right) \tag{13}$$

(получаемое путем вычитания соотношение

$$(\alpha-\beta)Cz=y^{\alpha}\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right)-y^{\beta}\mathfrak{B}\left(\frac{x}{y}\right)$$

всегда может быть записано в виде (13) при переобозначении произвольных функций).

При $A=0$, $B=0$, $C=1$ получается найденный выше результат для уравнения $Q=0$ (см. (5′)). Так же детально этот метод применяется затем к уравнению

$$Az+BzP+CQ+DR=0.$$

Вместо (9) делается замена: $v=az+bP+cQ$; постоянные a, b, c совершенно аналогично определяются через заданные коэффициенты A, B, C, D. Уравнение, определяющее n, имеет вид

$$A+nB+n(n-1)C+n(n-1)(n-2)D=0. \tag{12$_1$}$$

Его корням α, β, γ соответствуют интегралы

$$az+bP+cQ=y^{\alpha}\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$a'z+b'P+c'Q=y^{\beta}\mathfrak{B}\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$a''z+b''P+c''Q=y^{\gamma}\mathfrak{C}\left(\frac{x}{y}\right),$$

где постоянные a, b, c, ... a'', b'', c'', ... определяются через коэффициенты A, B, C, D и соответствующее значение n. Исключение P и Q приводит к результату, который может быть записан аналогично (13):

$$z=y^{\alpha}\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right)+y^{\beta}\mathfrak{B}\left(\frac{x}{y}\right)+y^{\gamma}\mathfrak{C}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Обобщение на случай уравнения (6) (при любом конечном числе членов) очевидно.

Не проводя, как и выше, обоснования методом индукции, Эйлер выписывает уравнение для n и окончательный результат:

$$A+nB+n(n-1)C+n(n-1)(n-2)D+\ldots=0, \tag{14}$$

$$z=y^{\alpha}\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right)+y^{\beta}\mathfrak{B}\left(\frac{x}{y}\right)+\ldots \tag{14'}$$

Здесь же отмечается, что в силу произвола функций $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, и т. д. вместо y^{α}, y^{β} и т. д. можно взять множителями x^{α}, x^{β} и т. д.

Не остаются без внимания случаи комплексных и кратных корней. Предположив, что корни уравнения (12) суть $\alpha=\mu+\nu i$, $\beta=\mu-\nu i\,(i=\sqrt{-1})$, Эйлер получает вещественное решение, полагая $\mathfrak{A}=\overline{\mathfrak{A}}+\overline{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{B}=\overline{\mathfrak{A}}-\overline{\mathfrak{B}}$ и применяя известные «формулы Эйлера». Случай кратных корней исследуется так: при $\alpha=\beta$ полагают $\beta=\alpha+\omega$, где ω — «бесконечно малое». Поэтому $y^{\beta}=y^{\alpha}\cdot y^{\omega}\approx y^{\alpha}(1+\omega\ln y)$. Таким корням соответствует сумма интегралов

$$y^{\alpha}\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right)+y^{\alpha}\mathfrak{B}\left(\frac{x}{y}\right)+\omega y^{\alpha}\ln y\cdot\mathfrak{B}\left(\frac{x}{y}\right),$$

которая может быть записана в виде:

$$y^{\alpha}\mathfrak{A}\left(\frac{x}{y}\right)+y^{\alpha}\ln y\mathfrak{B}\left(\frac{x}{y}\right).$$

В заключение Эйлер отмечает «прекрасную гармонию между двумя видами анализа»: в анализе функций одного независимого переменного, т. е. для дифференциального уравнения

$$Az+Bx\frac{dz}{dx}+Cx^2\frac{d^2z}{dx^2}+\ldots=0,$$

в качестве полного интеграла имеют

$$z=\mathfrak{A}x^{\alpha}+\mathfrak{B}x^{\beta}+\ldots,$$

где α, β, ... суть корни (характеристического) уравнения

$$A+nB+n(n-1)C+\ldots=0; \tag{15}$$

этому полностью соответствует найденный выше результат, определяющий выражение полного интеграла равенством (14′), где показатели являются корнями алгебраического уравнения (14), полностью совпадающего с характеристическим уравнением (15). Результат Эйлера трудно получить в более простой форме, даже пользуясь средствами современной теории.

Теперь рассмотрим основное содержание работы, опубликованной в 1811 г.[1]). Эйлер стремится здесь развить метод характеристик для уравнений с частными производными второго порядка по двум независимым переменным. Он опять следует своей схеме приведения уравнения к такой форме, в которой сохраняются смешанная производная и лишь одна из частных производных первого порядка. Принципиально новых результатов по сравнению с содержащимися в «Интегральном исчислении» получить ему не удается. Отметим кратко результаты работы 1811 г. Сначала исследуется уравнение (16) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=v^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, где v — за-

[1]) L. Euler, De transformatione functionum duas variabiles involventium dum earum loco aliae binae variabiles introducuntur.— Mém. de l'acad. des sc. de St. Petersb., 3, 1809/10 (1811), стр. 43—56, а также L. Euleri, Opera omnia, v. 23, стр. 393—406 (представлена в 1779 г.).

данная функция x и y. Ссылаясь на свои формулы общего преобразования независимых переменных и выражая дифференциалы новых переменных t и u формулами

$$dt = P\,dx + Q\,dy, \tag{16$_1$}$$

$$du = R\,dx + S\,dy, \tag{16$_2$}$$

Эйлер требует в преобразованном уравнении обращения в нуль коэффициентов при $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$. Это приводит к уравнениям

$$P = Qv, \tag{16$'$}$$

$$R = -vS \left(\text{или } \frac{\partial t}{\partial x} = v\frac{\partial t}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial x} = -v\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{16$''$}$$

В результате возникает уравнение

$$4\,QSv^2\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u} + \left(v^2\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial (Qv)}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial t} + \left(v^2\frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial (Sv)}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial u} = 0. \tag{17}$$

Далее рассматривается основной вопрос о тех достаточных условиях, которым должна удовлетворять v, чтобы уравнение было интегрируемым (т. е. чтобы было возможно построение полного интеграла). Прежде всего, в силу уравнений (16′) и (16″), имеют место соотношения:

$$dt = Q\,(v\,dx + dy),\ du = S\,(dy - v\,dx). \tag{18}$$

Вследствие интегрируемости левых частей сразу же заключается, что «функция v должна быть такой, при которой будут интегрируемыми правые части этих формул».

Дальнейшее исследование ведется в предположении, что v имеет вид

$$v = \frac{Y\,(y)}{X\,(x)},$$

где Y и X — некоторые известные функции указанных аргументов. В этом случае

$$dt = \frac{Q\,(Y\,dx + X\,dy)}{X}, \tag{18$'$}$$

$$du = \frac{S\,(X\,dy - Y\,dx)}{X}. \tag{18$''$}$$

При $Q=S=\frac{1}{Y}$ интегрируемость этих форм очевидна:

$$dt=\frac{dx}{X}+\frac{dy}{Y}, \quad du=\frac{dy}{Y}-\frac{dx}{X}.$$

Элементарные вычисления показывают, что уравнение (17) получает вид

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}+(X'-Y')\frac{\partial z}{\partial t}-(X'+Y')\frac{\partial z}{\partial u}=0. \qquad (19)$$

Следуя прежней схеме, указанной выше, Эйлер требует обращения в нуль коэффициента при $\frac{\partial z}{\partial t}$. Но из равенства $X'-Y'=0$ следует, что $X=bx$, $Y=by$ (при $X=\text{const}$ и $Y=\text{const}$ уравнение исследовано ранее). Следовательно, $v=\frac{y}{x}$ и требуется интегрировать уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Напомним, что в третьем томе «Интегрального исчисления» Эйлер рассмотрел это уравнение довольно громоздким образом (с помощью решения соответствующего уравнения Риккати). Метод характеристик приводит к цели весьма просто. Из (18′) следует $dt=\frac{1}{by}\left(\frac{y}{x}dx+dy\right)$, т. е. $t=\frac{1}{b}\ln xy$; из (18″) — аналогично — $u=\frac{1}{b}\ln\frac{y}{x}$. Уравнение (17) в данном случае запишется так:

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}-b\frac{\partial z}{\partial u}=0;$$

подстановка $\frac{\partial z}{\partial u}=s$ понижает порядок и приводит к уравнению

$$2\frac{\partial s}{\partial t}-bs=0,$$

которое можно интегрировать как обыкновенное дифференциальное уравнение. Для s легко получается значение

$$s=e^{\frac{1}{2}bt}\,\Gamma'(u),$$

где $\Gamma'(u)$ — производная произвольной функции $\Gamma=\Gamma(u)$. Отсюда

$$z=e^{ct}\Gamma(u)+\Delta(t),$$

где $c=\frac{1}{2}b$, $\Delta(t)$—новая произвольная функция; учитывая найденные значения t и u, имеем окончательно:

$$z=\sqrt{xy}\,\Phi\left(\frac{y}{x}\right)+\Theta(xy),$$

где Φ и Θ — произвольные функции указанных аргументов, т. е. результат, полученный другим методом в «Интегральном исчислении».

Далее рассматривается более общее уравнение:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-f\,xy\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+gy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \tag{20}$$

где f и g — постоянные. Общее преобразование делается сначала при произвольных f и g. При сохранении прежних значений P, Q, R, S (см. (16_1) и (16_2)) коэффициенты при $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ оказываются равными соответственно:

$$P^2x^2-fPQ\,xy+gQ^2y^2 \tag{20'}$$

и

$$R^2x^2-fRSxy+gS^2y^2. \tag{20''}$$

Дальнейшее исследование ведется в предположении, что

$$\left.\begin{aligned} f&=a+b,\\ g&=ab, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где a и b — некоторые вещественные числа. Другими словами, f и g рассматриваются как коэффициенты квадратного уравнения $\alpha^2-\alpha f+g=0$ с вещественными корнями и, следовательно, предполагается, что $f^2-4g>0$. Но это означает, что Эйлер рассматривает уравнение (20) при таких значениях f и g, которые определяют гиперболичность этого уравнения. В силу (21) легко видеть, что коэффициенты (20′) и (20″) обращаются в нуль, если взять $Px = aQy$ и $Rx = bSy$. Отсюда

$$dt = Q\,\frac{ay\,dx + x\,dy}{x},$$

$$du = S\,\frac{by\,dx + x\,dy}{x}.$$

Правые части вновь оказываются интегрируемыми при $Q = S = \frac{1}{y}$; из последних уравнений легко определяются t и u: $t = \ln x^a y$, $u = \ln x^b y$. Канонический вид уравнения (20) будет таким:

$$(a-b)^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u} + a\,(b+1)\,\frac{\partial z}{\partial t} + b\,(a+1)\,\frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

Это уравнение решается при дополнительном предположении $b = -1$ (или $a = -1$). В первом из этих случаев полный интеграл, получаемый подобно предыдущему случаю, имеет вид

$$z = e^{\frac{t}{a+1}}\,\Gamma(u) + \Delta(t),$$

или после возвращения к прежним координатам и элементарных упрощений

$$z = x\Gamma\left(\frac{y}{x}\right) + \Delta(x^a y),$$

где Γ и Δ суть произвольные функции. При $b = -1$ и $a = -1$, т. е. для уравнения параболического типа

$$x^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

только что полученное выражение

$$z = x\Gamma\left(\frac{y}{x}\right) + \Delta\left(\frac{y}{x}\right)$$

полностью совпадает с частным результатом, найденным в работе, опубликованной в 1806 г. (см. формулу (5′)).

Остановимся далее вкратце на работе, опубликованной лишь в 1830 г. [1]). Содержание этой работы весьма близко к результатам работы, опубликованной в 1806 г. и рассмотренной выше [2]). Действительно, определив выражения Q, R, S, ... формулами

$$Q=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y},$$
$$R=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y},$$
$$S=\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y},$$
$$E=\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}$$

и т. д., Эйлер рассматривает уравнение

$$Az+BP+CQ+DR+ES=0, \qquad (21')$$

которое аналогично уравнению (6). Так как и метод полностью совпадает с методом, развитым в работе, опубликованной в 1806 г., то мы приведем лишь окончательный результат:

Полный интеграл уравнения (21′) определяется выражением

$$z=e^{\alpha y}\,\mathfrak{A}(x-y)+e^{\beta y}\,\mathfrak{B}(x-y)+e^{\gamma y}\,\mathfrak{C}(x-y)+e^{\delta y}\,\mathfrak{D}(x-y),$$

где α, β, γ, δ суть корни «алгебраического уравнения»

$$n^4E+n^3D+n^2C+nB+A=0,$$

а $\mathfrak{A}$, ..., $\mathfrak{D}$ суть произвольные функции аргумента $x-y$. Подобно предыдущему рассмотрены случай комплексных и случай кратных корней; в частности, корням $\alpha=\beta=\gamma$ соответствует выражение $e^{\alpha y}\,\mathfrak{A}(x-y)+e^{\alpha y}y\,\mathfrak{B}(x-y)+$ $+e^{\alpha y}y^2\,\mathfrak{C}(x-y)$. В заключение результат формулируется для общего случая: «Для уравнения любого порядка, — го-

---

[1]) L. Euler, Integration d'une espèce remarquable d'equation differentielle dans l'analyse des fonctions à deux variables.—Mém. de l'acad. des sc. de St. Pétersb., 11, 1830, стр. 131—137 или L. Euleri, Opera omnia, ser. I, v. 23, стр. 443—449.

[2]) См. сноску [1]) на стр. 328.

ворит Эйлер,— все дело сводится, таким образом, к решению алгебраического уравнения $A+nB+n^2C+n^3D+\ldots=0$».

Обоснование методом индукции построений для общего случая не представляет затруднений.

Наконец, мы должны рассмотреть небольшую работу Эйлера, опубликованную в 1813 г.[1]). Она представляет интерес вследствие особой общности постановки задачи нахождения полного интеграла. Известные результаты Фурье в теории линейных уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами[2]) в известном смысле близки к этой работе Эйлера.

Сначала Эйлер выясняет вид самого общего линейного уравнения с частными производными произвольного порядка с любым числом независимых переменных: кроме самой неизвестной функции V, должны входить n членов первого порядка, содержащих $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, ..., если число независимых переменных равно n; кроме этого, должно входить $\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$ членов второго порядка $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}$, ...; членов третьего порядка, продолжает Эйлер, будет, очевидно, $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ и т. д. Следовательно, уравнение в общей форме может быть записано так:

$$\begin{aligned} 0 = AV &+ B\frac{\partial V}{\partial z} + C\frac{\partial V}{\partial y} + \ldots \\ &+ E\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + F\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + G\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y} + \ldots \\ &+ L\frac{\partial^3 V}{\partial z^3} + M\frac{\partial^3 V}{\partial y^3} + \ldots \\ &+ \ldots \end{aligned} \tag{22}$$

[1]) L. Euler, Integratio generalis aequationum differentialium linearium cuinscunque gradus et quotcunque variabiles involventium.—Mém. de l'acad. des sc. de St. Pétersb., 4, 1811 (1813), стр. 43—51 или L. Euleri, Opera omnia, ser. I, v. 23, стр. 407—413 (представлена в 1779 г.).

[2]) См. А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, 2-е изд., Л., 1932, стр. 99—103.

Прежде всего усматривается, что уравнению можно удовлетворить, положив

$$V = e^{\alpha z+\beta y+\gamma x+\dots} \tag{23}$$

Дифференцирование и подстановка в уравнение приводят к алгебраическому уравнению, которое Эйлер называет «замещающим» (vicariam):

$$\begin{aligned} 0 = A + B\alpha + C\beta + D\gamma + \dots \\ + E\alpha^2 + F\beta^2 + G\gamma^2 + H\alpha\beta + \dots \\ + L\alpha^3 + M\beta^3 + N\gamma^3 + \dots \\ + \dots \end{aligned} \tag{24}$$

Далее указывается, что одно из количеств, например α, можно определить через остальные количества β, $\gamma \dots$, которые могут быть взяты произвольными. При этом относительно α возникает уравнение той же степени, каков порядок исходного уравнения. Вслед за этим Эйлер заключает, что если учесть всевозможные значения α и взять сумму выражений (23), умноженных на произвольные постоянные множители, то получится наиболее общее решение, т. е. полный интеграл. Обоснование этого важного утверждения Эйлер стремится дать для случая уравнения первого порядка с тремя независимыми переменными. Разумеется, ему приходится при этом рассматривать лишь такие «произвольные» функции в выражении полного интеграла, которые разложимы в степенные ряды.

Приведем его рассуждения более подробно. Для данного уравнения с постоянными коэффициентами

$$kV + ap + bq + cr = 0, \quad p = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad q = \frac{\partial V}{\partial y}, \ r = \frac{\partial V}{\partial x} \tag{25}$$

имеем $p = -\frac{k}{a}V - \frac{b}{a}q - \frac{c}{a}r$. В результате подстановки этого значения в выражение

$$dV = p\,dz + q\,dy + r\,dx \tag{26}$$

получаем:

$$dV + \frac{kV}{a}dz = q\left(dy - \frac{b}{a}dz\right) + r\left(dx - \frac{c}{a}dz\right). \tag{27}$$

Левая часть допускает очевидный интегрирующий множитель $e^{\frac{kz}{a}}$. Это позволяет записать (27) в виде

$$d(e^{\frac{kz}{a}}V) = e^{\frac{kz}{a}}(q\,ds + r\,dt), \tag{28}$$

где $s = y - \frac{b}{a}z$, $t = x - \frac{c}{a}z$.

Учитывая, что

$$q = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial s} \quad \text{и} \quad r = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial t},$$

Эйлер заключает, что правая часть равенства (28) должна представлять дифференциал некоторой функции двух переменных s и t. Следовательно,

$$e^{\frac{kz}{a}} \cdot V = \Gamma(s,\ t) \quad \text{или} \quad V = e^{-\frac{kz}{a}} \cdot \Gamma(s,\ t). \tag{29}$$

Так как функцию Γ можно считать произвольной, то найден полный интеграл (отметим обозначения Эйлера:

$$V = e^{-\frac{kz}{a}} \Gamma : \overline{\left(y - \frac{bz}{a}\right), \left(x - \frac{cz}{a}\right)}\Big).$$

Теперь задача состоит в том, чтобы получить этот интеграл общим методом, указанным выше для произвольного линейного уравнения с частными производными, т. е. из формы

$$V = e^{\alpha z + \beta y + \gamma x},$$

при соответствующих α, β, γ. «Замещающее уравнение» $k + a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ определяет значение α: $\alpha = -\frac{k}{a} - \frac{b}{a}\beta - \frac{c}{a}\gamma$. Поэтому

$$V = e^{-\frac{kz}{a} + \beta\left(y - \frac{b}{a}z\right) + \gamma\left(x - \frac{c}{a}z\right)} = e^{-\frac{k}{a}z} \cdot e^{\beta s} \cdot e^{\gamma t}, \tag{30}$$

где s и t, как и выше, определены равенствами $s = y - \frac{b}{a}z$, $t = x - \frac{c}{a}z$.

Эйлер отмечает, что β и γ должны рассматриваться как принимающие произвольные значения в том смысле, что под $e^{\beta s}$ следует понимать сумму всех значений этого количества, которые возникают при всевозможных значениях β, причем слагаемые этой суммы можно умножать на постоянные множители. Характерно вводимое для этой суммы обозначение: «бесконечную совокупность всех таких значений $e^{\beta s}$ мы обозначаем $\int e^{\beta s}$».

Аналогичный смысл имеет и выражение $\int e^{\gamma t}$. Однако это еще не объясняет, каким образом из (30) можно получить выражение (29). Для решения этого вопроса Эйлер стремится сначала показать, что определенное только что выражение $\int e^{\beta s}$ эквивалентно «произвольной функции $\Gamma(s)$». Рассуждение Эйлера очень кратко: он замечает, что при $s=\ln p$ (p не совпадает с p из (25) и обозначает здесь новое переменное) $e^{\beta s}=p^{\beta}$ и, следовательно, $\int e^{\beta s}=\int p^{\beta}$. Вслед за этим он говорит, что всякая функция p может быть разложена в ряд по степеням p, вследствие чего форма $\int p^{\beta}$, содержащая все степени p, может представить всякую функцию $\Gamma(s)$. Относительно «произвольной» функции $\Delta(t)$ заключение аналогично: «подобным же образом я полагаю $t=\ln q$, очевидно, что $\int e^{\gamma t}$ эквивалентно такой функции $\Delta(t)$». Считая далее функцию $\Gamma(s, t)$ также представимой в виде степенного ряда и учитывая, что выражение $\int e^{\beta s}\int e^{\gamma t}$ представляет бесконечную сумму произведений всевозможных степеней s и t, Эйлер и заключает окончательно, что построенное ранее решение (29) действительно получается из формы (30).

Отметим два заключительных замечания Эйлера. Первое из них относится к случаю, когда корни «замещающего уравнения» не являются линейными формами входящих параметров. Этот случай рассматривается на примере уравнения $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$, которому соответствует «замещающее уравнение» $\alpha^2=\beta\gamma$, откуда $\alpha=\sqrt{\beta\gamma}$. Форма $V=e^{z\sqrt{\beta\gamma}+\beta y+\gamma x}$ при $z=\ln p$, $y=\ln q$, $x=\ln r$ имеет вид

$V = p^{\sqrt{\beta\gamma}} q^{\beta} r^{\gamma}$. Поэтому, если β и γ принимают только целые значения, то

$$V = \mathfrak{A}pqr + \mathfrak{B}p^{\sqrt{2}}q^2r + \mathfrak{C}p^{\sqrt{3}}q^3r + \ldots ,$$

но это выражение (не являясь степенным рядом относительно p с целочисленными показателями) «не может представлять произвольной функции p, q, r».

Второе замечание относится к вопросу о понижении порядка дифференциального уравнения. Отметив предварительно возможность обратного построения дифференциального уравнения вида (22) по заданному «замещающему уравнению» (24), Эйлер указывает следующую схему: пусть левая часть алгебраического уравнения (22) представляется в виде произведения $P_{\mu}(\alpha)\cdot P_{\nu}(\alpha)$ ($\mu+\nu$ — порядок исходного уравнения), P — полный интеграл уравнения порядка μ, которое соответствует уравнению $P_{\mu}(\alpha)=0$, и Q — полный интеграл уравнения, соответствующего уравнению $P_{\nu}(\alpha)=0$. В таком случае, заключает Эйлер, полный интеграл исходного уравнения представляет сумму $AP+BQ$, где A и B — произвольные постоянные. В некоторых случаях (например, в случае кратных корней уравнения (24)) этот вывод может оказаться неверным, однако несомненно, что схема Эйлера может быть, как правило, использована для понижения порядка исходного дифференциального уравнения.

Теперь рассмотрим эйлеровские исследования некоторых линейных систем уравнений с частными производными. Ни в одном историко-математическом обзоре нам не удалось встретить даже упоминания об этих исследованиях.

С вопросами интегрирования линейных систем уравнений с частными производными второго порядка Эйлер встретился в своих исследованиях с распространением звука. Эти исследования интересны не только в плане изучения развития теории уравнений математической физики и ее приложений, но и для истории анализа в узком смысле. Здесь можно с особой отчетливостью проследить развитие Эйлером понятия функциональной зависимости, обусловленное самим физическим содержанием проблемы.

Весьма интересно, что в этих работах Эйлер был вынужден воспользоваться функциями разрывными в современном смысле: при изучении распространения звука в плоскости он вводит в рассмотрение функции, отличные от нуля лишь в одной точке. По-видимому, здесь впервые в развитии математического анализа возникает прообраз дельта-функции, разумеется, еще весьма отдаленный. Характерно, что в специальных работах по дифференциальным уравнениям Эйлер ограничивается непрерывными (в современном смысле) или более регулярными функциями. Как было показано выше, в позднейших работах Эйлера по дифференциальным уравнениям фактически рассматриваются аналитические функции.

Основные работы Эйлера о распространении звука были опубликованы в Мемуарах Берлинской академии лишь в 1766 г.[1]), хотя они были представлены в эту академию в 1759 г. вскоре после опубликования (в том же 1759 г.) фундаментального сочинения Ж. Лагранжа, посвященного тому же вопросу[2]).

Недостаточность результатов Лагранжа заключается, по мысли Эйлера, в том, что в его исследованиях рассматривалось движение лишь конечного числа частичек воздуха. Эйлер, намереваясь рассмотреть вопрос для непрерывной среды, говорит о необходимости изучения движения бесконечного числа этих частичек.

Уже во вступительных замечаниях Эйлер объясняет, почему при изучении распространения звука приходится вводить «разрывные функции», которые ранее были необходимы при исследовании колебаний струн. Если привлечь современную терминологию, то аргументацию Эйлера можно выразить так: звуковая волна (в трехмерном пространстве) имеет передний и задний фронт. Действительно, Эйлер говорит: «Если воздух внезапно возмущен в каком-либо месте, то частицы воздуха, достаточно удаленные, сначала ничего не будут испытывать; однако это будет лишь в про-

---

[1]) De la propagation du son, par E u l e r.—Mém. de l'acad. de sc. de Berlin, 15, 1759 (1766). стр. 185—202; стр. 210—240 (Supplément...); стр. 241—264 (Continuation...).

[2]) J. L a g r a n g e, Recherches sur la nature et la propagation du son.—Misc. Taurin., t. I, 1759; см. Oeuvres de Lagrange, t. I, Paris, 1876, стр. 39—150; 151—318; 319—334.

должение определенного времени, после которого они придут в движение, а затем они вновь вернутся в состояние полного равновесия». Именно это обстоятельство и вызывает, с необходимостью, применение нерегулярных функций. Далее приводим текст почти дословно. Пусть частица удалена от импульса (т. е. точки начального возмущения) на расстояние x; по прошествии времени t она испытывает возмущение, продолжающееся время, равное θ. Если положить скорость частицы равной v, то v будет зависеть от x и t. Поэтому $v=0$ при $t<T$ (абсцисса x предполагается фиксированной); затем если $T<t<T+\theta$, то v будет иметь «конечное значение» и при $t>T+\theta$ снова будет равно нулю.

Заключение Эйлера таково: «Совершенно очевидно, что скорость не может быть представлена никакой регулярной функцией времени t». Эйлер считает необходимым дополнительно пояснить, что функция, принимающая действительные значения при $T<t<T+\theta$ и мнимые при $t<T$ или $t>T+\theta$, не может выражать скорости v, которая обязана при этих значениях t равняться нулю (тождественно).

В несколько более поздних работах о звучащей струне Эйлер вновь подчеркивает «невозможность» представления с помощью регулярной функции такой величины (ординаты начальной фигуры струны), которая отлична от тождественного нуля на части того интервала, где она задана. Именно это ошибочное утверждение являлось основным аргументом Эйлера в его споре с Д. Бернулли, считавшим, что решение в виде тригонометрического ряда представляет общее решение проблемы колебаний струны.

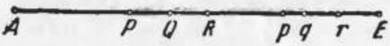
Переходим к анализу основных результатов Эйлера. Сначала рассматривается наиболее простой одномерный случай, которому посвящен первый из указанных трех мемуаров. При «анализе распространения звука на прямой линии» Эйлер рассматривает «квазибесконечно тонкую» прямолинейную трубку постоянного сечения e^2, закрытую на своих концах.

Вывод уравнения основан на предположении, что упругость воздуха, заключенного в элементарном объеме $\Delta x \cdot e^2$ трубки, пропорциональна уменьшению Δx. Поэтому рассуждения Эйлера аналогичны тем, которыми он пользовался в работе 1747 г. при изучении колебаний материальных частиц, скрепленных между собой упругими нитями [1]).

Вывод уравнения поясняется воспроизводимым здесь чертежом 1. Используются следующие обозначения: h — упругость воздуха в состоянии равновесия, a — длина трубки, так что $a \cdot e^2$ — ее объем.

$$AP = x, \ AQ = x + \omega, \ AR = x + 2\omega.$$

Точки p, q, r обозначают те положения, которые занимают частицы P, Q, R по истечении времени t. Величина смещения частицы P с абсциссой x в положение p в момент t обозначается через y и сразу же отмечается, что



Черт. 1.

y — функция двух аргументов x и t. Обозначив Qq через y' и Rz через y'' и учитывая соотношения $pq = \omega + y' - y$, $qr = \omega + y'' - y'$, Эйлер легко находит, что все частички воздуха, заключенные в состоянии равновесия в элементе PR трубки, будут заключены в момент t в элементе трубки, имеющем объем $(2\omega + y'' - y')\, e^2$. Поэтому изменение элементарного объема равно $(y'' - y')\, e^2$. Разность $y' - y$ приближенно заменяется выражением $\frac{\partial y}{\partial x} dx$. Указанное выше предположение и второй закон Ньютона поэтому позволяют Эйлеру заключить, что искомая функция $y = y(x, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

где a^2 — известное постоянное.

Для найденного уравнения, совпадающего с уравнением поперечных колебаний струны, Эйлер, опираясь на свои предыдущие исследования, решает смешанную задачу.

---

[1]) L. Euler, De propagatione pulsuum per medium elasticum. — Novi comm. acad. sc. Petrop., t. 1, 1747/48 (1750), стр. 67—105.

Краевые условия $y(0, t) = y(a, t) = 0$ соответствуют закрытым концам трубки, начальные условия поясняются черт. 2.

Произвольная кривая AZE выражает начальное состояние воздуха в трубке (т. е. $xZ = \theta(x)$ выражает смещение точки x по направлению к E), и кривая xVE выражает начальные скорости частичек воздуха в направлении xE (т. е. xV выражает скорость $v = v(x)$ точки x в начальный момент). Решение смешанной задачи выписывается на основании предыдущих результатов в виде

Черт. 2.

$$y = \frac{1}{2}\left[\theta\left(x + t\sqrt{2gh}\right) + \theta\left(x - t\sqrt{2gh}\right)\right] + \\ + \frac{1}{2\sqrt{2gh}}\left[\Sigma\left(x + t\sqrt{2gh}\right) - \Sigma\left(x - t\sqrt{2gh}\right)\right],$$

где $\Sigma(x) = \int v\,dx$.

В своем заключении Эйлер еще раз подчеркивает, что «в анализе функций двух переменных абсолютно необходимо ввести разрывные функции». Кроме того, здесь же содержится замечание, что если рассматриваются немалые колебания, то нельзя пренебречь величиной $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$, и вопрос сводится к интегрированию уравнения

$$\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 2gh\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Справедливость этого замечания очевидна.

Теперь мы должны рассмотреть второй мемуар (опубликованный в том же 15-м томе Мемуаров Берлинской академии), в котором Эйлер изучает распространение звука в плоскости [1]).

Аналитическая задача заключается в интегрировании линейной системы дифференциальных уравнений с част-

---

[1]) См. сноску [1]) на стр. 346; стр. 210—240.

ными производными, где неизвестными являются компоненты отклонения частицы воздуха $x=x(X, Y, t)$, $y=y(X, Y, t)$ от состояния равновесия. Эта система имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 x}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial X\,\partial Y},\\ \frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial X\,\partial Y},\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

g и h имеют прежнее значение[1]).

Отметив, что этот случай представляет значительно большие трудности по сравнению с одномерным, Эйлер прежде всего указывает возможность построения решения системы вида $x=B\Phi(\alpha X+\beta Y+\gamma t)$, $y=C\Phi(\alpha X+\beta Y+\gamma t)$. Здесь Φ — произвольная функция, α, β, B, C — произвольные постоянные, а постоянное γ определяется через α и β из условия удовлетворения уравнению. Основной интерес представляет дальнейший эйлеровский результат. Однако, прежд чем перейти к его рассмотрению, поставим вопрос: к какому типу по современной классификации относится эйлеровская система (31)?

Придерживаясь определений известной работы И. Г. Петровского[2]), выпишем характеристическую матрицу системы (31), умножив предварительно уравнения системы на $2gh$:

$$\begin{bmatrix}2gh\alpha_1^2-\lambda^2, & 2gh\alpha_1\alpha_2\\ 2gh\alpha_1\alpha_2, & 2gh\alpha_2^2-\lambda^2\end{bmatrix}$$

(см. стр. 4 только что цитированной работы И. Г. Петровского). Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4-2gh(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\lambda^2=0;$$

все его корни действительные и два из них совпадают. Наличие кратного корня означает, что система (31) не является гиперболической в определении И. Г. Петровского.

---

[1]) Эта система была Эйлером указана, в частности, в письме к Лагранжу от 27 октября 1759 г. См. L. E u l e r i, Opera postuma, v. I, Petrop., 1862, стр. 560.

[2]) И. Г. П е т р о в с к и й, О задаче Коши в области неаналитических функций.—Бюллетень МГУ, секция А, т. I, вып. 7, М., 1938.

Более того, система (31) не принадлежит и к частным видам систем гиперболических в обобщенном смысле, рассмотренным в той же работе. Действительно, составив со тветствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
\frac{dv_1}{dt} &= v_3, \\
\frac{dv_2}{dt} &= v_4, \\
\frac{dv_3}{dt} &= -\alpha_1^2 v_1 - \alpha_1\alpha_2 v_2, \\
\frac{dv_4}{dt} &= -\alpha_1\alpha_2 v_1 - \alpha_2^2 v_2,
\end{aligned}$$

нетрудно убедиться в том, что ее матрица имеет элементарный делитель λ второй степени. Вместе с этим для дальнейшего следует отметить, что для системы (31) выполнено известное необходимое и достаточное условие корректности постановки задачи с начальными условиями. В самом деле, соответствующая матрица (см. выражение матрицы (43), указанное на стр. 23 той же работы И. Г. Петровского) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \lambda^2+\alpha^2, & \alpha\beta \\ \alpha\beta, & \lambda^2+\beta^2 \end{bmatrix}.$$

Ограниченность при всех значениях α и β действительных частей всех корней ее детерминанта очевидна.

Результаты Эйлера о системе (31) представляют особый интерес, так как они позволяют в качестве следствия получить решение для этой системы задачи с начальными условиями, хотя в самом тексте эта задача в общей форме не ставится. Сначала с помощью подстановки

$$v = \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial y}{\partial Y} \tag{32}$$

система записывается в виде

$$\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial X}, \tag{32_1}$$

$$\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial Y}. \tag{32_2}$$

Отсюда следуют равенства

$$\frac{1}{2gh}\,\frac{\partial^3 x}{\partial t^2\,\partial X}=\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}\,,$$
$$\frac{1}{2gh}\,\frac{\partial^3 y}{\partial t^2\,\partial Y}=\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}\,,$$

но из определения v следует

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^3 x}{\partial X\,\partial t^2}+\frac{\partial^3 y}{\partial Y\,\partial t^2}\,.$$

Это означает, что v должно удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2gh}\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}\,. \tag{33}$$

Эйлер справедливо заключает: «Итак, наша проблема свелась к определению одной функции v, что является более простой задачей».

Не ограничиваясь этим, Эйлер показывает, что нахождение функций x и y с помощью исключения v также можно свести к отдельным уравнениям второго порядка (также нормально-гиперболического типа). Это делается следующим образом. Дифференцирование равенств (32_1) и (32_2) по y и x, соответственно, и подстановки $p=\frac{\partial x}{\partial Y}$, $q=\frac{\partial y}{\partial X}$ приводят (в предположении справедливости тождества $\frac{\partial^2 v}{\partial X\,\partial Y}=\frac{\partial^2 v}{\partial Y\,\partial X}$) к соотношению $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$. Двойное интегрирование по t поэтому определяет равенство $p=q+Mt+N$, где M и N являются произвольными функциями X и Y. Это равенство $\frac{\partial x}{\partial Y}=\frac{\partial y}{\partial X}+Mt+N$ вместе с уравнениями исходной системы позволяют исключить смешанные производные, что приводит к следующим окончательным уравнениям:

$$\frac{1}{2gh}\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 x}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial Y^2}-t\,\frac{\partial M}{\partial Y}-\frac{\partial N}{\partial Y}\,, \tag{34}$$
$$\frac{1}{2gh}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial X^2}+t\,\frac{\partial M}{\partial X}+\frac{\partial N}{\partial X}\,, \tag{35}$$

где M и N можно считать произвольными функциями пространственных координат; выбирая эти функции какого-либо определенного частного вида, получают при интегрировании последних уравнений частные решения исходной системы.

Используем изложенные результаты Эйлера для решения задачи с начальными условиями. Пусть для системы (31) начальные данные определены равенствами:

$$x\Big|_{t=0}=\varphi(X, Y), \quad \frac{\partial x}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(X, Y), \tag{36}$$

$$y\Big|_{t=0}=\varphi_1(X, Y), \quad \frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi_1(X, Y), \tag{37}$$

где φ, ψ, φ_1, ψ_1 — достаточно гладкие функции (см. ниже). Легко видеть, что заданные начальные условия определяют соответствующие начальные условия для функции v. Действительно, в силу (32) имеем:

$$v\Big|_{t=0}=\left[\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial y}{\partial Y}\right]_{t=0}=\frac{\partial \varphi}{\partial X}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial Y}\equiv f(X, Y), \tag{38}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=\left[\frac{\partial^2 x}{\partial X\,\partial t}+\frac{\partial^2 y}{\partial Y\,\partial t}\right]_{t=0}=\frac{\partial \psi}{\partial X}+\frac{\partial \psi_1}{\partial Y}\equiv f_1(X, Y). \tag{39}$$

Отсюда следует, что если $f(X, Y)$ имеет непрерывные производные до третьего, а $f_1(X, Y)$ — до второго порядка, то функция v как решение волнового уравнения однозначно определена начальными условиями (38), (39) при $t \geqslant 0$[1]). Нетрудно заметить, что функции M и N, входящие в правые части формул (34) и (35), определяются также через начальные функции φ, ψ, φ_1 и ψ_1. Действительно, первое интегрирование тождества

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)$$

(см. (32_1)) влечет тождество

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)+M(X, Y), \quad t \geqslant 0.$$

[1]) И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, М.—Л., 1950, стр. 101 и след.

Поэтому

$$M(X, Y) = \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)\right]_{t=0} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial X}. \quad (40)$$

Подобно этому при $t = 0$ получаем из результата вторичной интеграции

$$\frac{\partial x}{\partial Y} - \frac{\partial y}{\partial X} = M(X, Y)\,t + N(X, Y)$$

для функции N:

$$N(x, y) = \left.\frac{\partial x}{\partial Y}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial y}{\partial X}\right|_{t=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial X}. \quad (41)$$

Это означает, что решение поставленной «задачи Коши» для системы (31) и начальных условий (36), (37) сведено к решению той же задачи для уравнений (34) и (35), где функции M и N определены равенствами (40) и (41). Если φ и φ_1 дифференцируемы до четвертого, а ψ и ψ_1 — до третьего порядка, то правые части уравнений (34) и (35) будут иметь достаточную регулярность для применения известных методов решения последней задачи.

Возвращаемся к тексту работы Эйлера и рассмотрим его решение задачи с начальными условиями частного вида.

В заключительной части Эйлер рассматривает распространение звука в неограниченном двухмерном пространстве, задавая начальное состояние среды в возможно более простом виде. Задача ставится так: при $t = 0$ функции x и y должны удовлетворять равенствам

$$x = \Gamma, \quad y = \Delta, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \Lambda\sqrt{2gh}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \Xi\sqrt{2gh}.$$

Недостаток общности подстановки задачи заключается в том, что произвольные функции Γ и Λ предполагаются зависящими только от X, а функции Δ и Ξ — только от Y. С помощью решения, найденного первым из указанных методов:

$$y = \Phi(X + t\sqrt{2gh}) + \Psi(X - t\sqrt{2gh}),$$
$$y = \Sigma(Y + t\sqrt{2gh}) + \Theta(Y - t\sqrt{2gh}),$$

Эйлер на основании своих предшествующих результатов о проблеме колебаний струны сразу же находит искомое решение:

$$x=\frac{1}{2}\Gamma(X+kt)+\frac{1}{2}\Lambda(X+kt)+$$
$$+\frac{1}{2}\Gamma(X-kt)-\frac{1}{2}\Lambda(X-kt), \quad (42)$$
$$y=\frac{1}{2}\Delta(Y+kt)+\frac{1}{2}\Xi(Y+kt)+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta(Y-kt)-\frac{1}{2}\Xi(Y-kt), \quad (42')$$

где $k=\sqrt{2gh}$.

Наибольший интерес представляет следующий частный случай. Предположим, говорит Эйлер, что функции $\Gamma(u)$, $\Lambda(u)$, $\Delta(u)$ и $\Xi(u)$ будут всегда равны нулю, исключая тот единственный случай, когда $u=0$ и в котором их значения будут бесконечно малыми α, β, γ, δ. При этом нет никакого сомнения, что «бесконечно малые» α, β, γ, δ следует понимать в том смысле, что они являются определенными числами, достаточно малыми по абсолютной величине сравнительно с единицей. Ниже в аналогичном контексте Эйлер, желая уточнить вопрос, говорит, что значения этих функций в нулевой точке должны быть «квазибесконечно малыми». В рассматриваемом случае из формул (42), (42′) Эйлер сразу же получает следствие

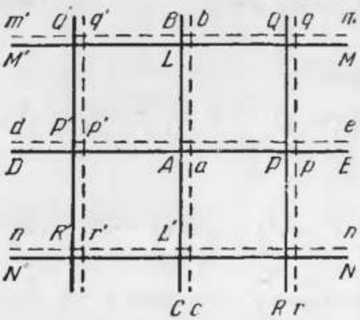
$$x\Big|_{\substack{t=0\\X=0}}=\alpha,\ y\Big|_{\substack{t=0\\Y=0}}=\gamma$$

(подобно этому

$$x'_t\Big|_{\substack{t=0\\X=0}}=\beta,\ y'_t\Big|_{\substack{t=0\\Y=0}}=\delta).$$

Справедливость этого заключения очевидна в силу предположений, сделанных о начальных функциях. Этот простейший случай начальных условий позволяет Эйлеру установить, что начальное возмущение распространяется в направлениях, параллельных координатным осям со скоростью $\sqrt{2gh}$. Рассуждения поясняются воспроизводимым чертежом (черт. 3). Выбранные начальные условия, указывает Эйлер, соответствуют тому, что линия BC воздуха была (в начальный момент) сдвинута в положение bc

и линия DE — в положение de (расстояние между линиями BC и bc равно по условию α и расстояние между DE и de равно β). Далее заключается, что «после некоторого времени t, которое берется так, что $AP = AP' = t\sqrt{2gh}$ и $AL = AL' = t\sqrt{2gh}$, вся линия QPR сместится в (положение прямой) qr на интервал $\frac{1}{2}\Gamma(0) - \frac{1}{2}\Lambda(0) = \frac{\alpha-\beta}{2}$». Действительно, из формулы (42), в частности, следует [1]):



Черт. 3.

$$x(X, t)_P = \frac{1}{2}\Gamma(2t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Lambda(2t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Gamma(0) - \frac{1}{2}\Lambda(0) = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

(так как в силу определения Γ и Λ первые два слагаемых правой части равны нулю). Таким образом, частички воздуха, расположенные на прямой QR, только по истечении $t\sqrt{2gh}$ (секунд) окажутся в состоянии возмущения, получив отклонение от состояния равновесия, равное $\frac{\alpha-\beta}{2}$. Подобным же образом из формул (42), (42′) следует, что прямая $Q'P'R'$ получит по истечении того же времени отклонение, равное $\frac{1}{2}\Gamma(0) + \frac{1}{2}\Lambda(0) = \frac{\alpha+\beta}{2}$, прямая MLM' — отклонение $\frac{\gamma-\delta}{2}$ и прямая $NL'N'$ — отклонение $\frac{\gamma+\delta}{2}$. В силу свойств выбранных начальных функций

[1]) Через $x(X, t)_P$ мы обозначили значение x при $X = AP$ и $t = \frac{AP}{\sqrt{2gh}}$.

все остальные частицы воздуха в плоскости XY будут в состоянии равновесия.

Этот результат Эйлер резюмирует так: «Следовательно, начальное возмущение перемещается вдоль линий BC и ED по параллельным линиям без взаимных нарушений со скоростью $\sqrt{2gh}$ в секунду».

Таким образом, Эйлер выяснил существенные стороны физического процесса с помощью функций разрывных по современному определению, исследуя найденное им для частного случая решение задачи с начальными условиями.

Однако выбор начального состояния имел здесь искусственный характер. Вследствие этого Эйлер не ограничился изложенным результатом и рассмотрел случай, когда начальное возмущение отлично от нулевого в очень малой окрестности некоторой точки A. Основной результат Эйлера в этом случае сосредоточенного источника заключается в выводе соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения с помощью разделения переменных. Этот результат отмечен в цитированной выше статье Ф. И. Франкля лишь в итоговой формулировке. Поэтому мы считаем нужным остановиться на основных моментах эйлеровского вывода. Выбор подстановок определяется физическими соображениями: в этом случае (т. е. случае сосредоточенного источника. — *Н. С.*), говорит Эйлер, очевидно, что возмущение распространяется концентрическими кругами. Обозначив через v некоторую неизвестную функцию t и Z (полагая $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$, Эйлер показывает, что подстановки $x=vX$, $y=vY$ приводят уравнения (31) к виду

$$\frac{X}{2gh}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=3\frac{\partial v}{\partial X}+X\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}+Y\frac{\partial^2 v}{\partial X\,\partial Y},$$

$$\frac{Y}{2gh}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=3\frac{\partial v}{\partial Y}+Y\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}+X\frac{\partial^2 v}{\partial X\,\partial Y}.$$

Далее, следуя своему обычному приему, Эйлер вводит обозначения для частных производных:

$$dv=M\,dt+N\,dZ\quad\left(\text{т. е. }\frac{\partial v}{\partial t}=M,\ \frac{\partial v}{\partial Z}=N\right);$$

выражение для полного дифференциала Z очевидно:

$$dZ = \frac{X\,dX + Y\,dY}{Z}.$$

Поэтому $\frac{\partial v}{\partial X} = N\frac{\partial Z}{\partial X} = N\frac{X}{Z}$ и $\frac{\partial v}{\partial Y} = \frac{NY}{Z}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial t}$. Дальнейшее дифференцирование приводит к соотношениям:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} = \frac{X}{Z}\frac{\partial N}{\partial X} + \frac{NY^2}{Z^3}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} = \frac{Y}{Z}\frac{\partial N}{\partial Y} + \frac{NX^2}{Z^3},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X\,\partial Y} = \frac{X}{Z}\frac{\partial N}{\partial Y} - \frac{NXY}{Z^3}.$$

Положив далее

$$dN = P\,dt + P\,dZ = Q\,dt + Q\frac{X\,dX + Y\,dY}{Z},$$

Эйлер преобразует найденные выражения вторых производных функции v: так как $\frac{\partial N}{\partial X} = \frac{QX}{Z}$ и $\frac{\partial N}{\partial Y} = \frac{QY}{Z}$, то

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} = \frac{QX^2}{Z^2} + \frac{NY^2}{Z^3}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} = \frac{QY^2}{Z^2} + \frac{NX^2}{Z^3},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X\,\partial Y} = \frac{QXY}{Z^2} - \frac{NXY}{Z^3}.$$

Подстановка этих значений в преобразованные уравнения системы приводит к равенствам

$$\frac{X}{2gh}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{3NX}{Z} + \frac{Q(X^3 + XY^2)}{Z^2} = \frac{3NX}{Z} + QX$$

и

$$\frac{Y}{2gh}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{3NY}{Z} + QY,$$

которые, таким образом, сводятся к одному уравнению:

$$\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{3N}{Z} + Q.$$

Но $N = \frac{\partial v}{\partial Z}$, $Q = \frac{\partial N}{\partial Z} = \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2}$, поэтому $v = v(t,\ Z)$ должно действительно удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{3}{Z}\frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2}.$$

Заключительная замена $v=\frac{z}{Z}$ приводит к окончательному уравнению:

$$\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=-\frac{z}{Z^2}+\frac{1}{Z}\frac{\partial z}{\partial Z}+\frac{\partial^2 z}{\partial Z^2}. \qquad (43_0)$$

Так как это уравнение, заключает Эйлер, допускает интеграл вида $z=\Phi(Z\pm t\sqrt{2gh})$, то колебания и в этом случае распространяются с той же скоростью, как и в предыдущем случае.

Вместе с этим Эйлер видит незавершенность своего исследования: так как получено лишь частное решение, то не доказано, что не может быть колебаний, распространяющихся с какой-либо иной скоростью. Вполне обосновано последующее итоговое замечание Эйлера: «Это является стимулом для совершенствования той части анализа, которая изучает такие уравнения».

Исследование системы дифференциальных уравнений, соответствующей распространению звука в трехмерной среде, Эйлер проводит аналогично. Поэтому на соответствующих эйлеровских результатах остановимся более кратко.

Сначала заметим, что и в этом случае система не является гиперболической по современным определениям. Если частичка воздуха в состоянии равновесия определяется тремя координатами X, Y, Z и спустя некоторое время t она оказывается в точке $X+x$, $Y+y$, $Z+z$, то, говорит Эйлер, x, y, z являются такими функциями X, Y, Z и t, природа которых выражена следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2 x}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial X\,\partial Y}+\frac{\partial^2 z}{\partial X\,\partial Z},\\
\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2 x}{\partial X\,\partial Y}+\frac{\partial^2 y}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial Y\,\partial Z},\\
\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2 x}{\partial X\,\partial Z}+\frac{\partial^2 y}{\partial Y\,\partial Z}+\frac{\partial^2 z}{\partial Z^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Нетрудно убедиться, что характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}
\alpha^2-\lambda^2, & \alpha\beta, & \alpha\gamma\\
\alpha\beta, & \beta^2-\lambda^2, & \beta\gamma\\
\alpha\gamma, & \beta\gamma, & \gamma^2-\lambda^2
\end{vmatrix}=0$$

приводится к виду

$$\lambda^4 [\lambda^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)] = 0,$$

и следовательно, имеется четырехкратный корень. Поэтому подобно системе для случая двух измерений исходная система (43) не принадлежит к классу нормально-гиперболических систем. Использование прежнего приема позволяет Эйлеру тем не менее свести вопрос и в этом случае к интегрированию уравнения нормально-гиперболического типа. Действительно, полагая $v = \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial y}{\partial Y} + \frac{\partial z}{\partial Z}$, Эйлер получает возможность записать систему (43) в виде

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 2gh\,\frac{\partial v}{\partial X},\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 2gh\,\frac{\partial v}{\partial Y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 2gh\,\frac{\partial v}{\partial Z},$$

$$\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2}.$$

Сразу же выписывается одно из частных решений, зависящее от одной произвольной функции:

$$x = \beta\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$
$$y = \gamma\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$
$$z = \delta\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

где постоянные β, γ, δ произвольны и $\alpha = \sqrt{2gh} \times (\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$.

Основное внимание далее уделяется изучению сосредоточенного источника. Используя подстановки $x = Xs$, $y = Ys$, $z = Zs$, где s — новая неизвестная функция, зависящая лишь от t и от $V = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, Эйлер изучает распространение сферических волн. Возникающее относительно s уравнение

$$\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{4}{V}\frac{\partial s}{\partial V} + \frac{\partial^2 s}{\partial V^2}$$

отличается лишь коэффициентом при $\frac{\partial s}{\partial V}$ от уравнения относительно v, указанного выше (см. стр. 358). Дальнейшая замена $u = V \cdot s$ приводит к искомому дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{2u}{V^2} + \frac{2}{V}\frac{\partial u}{\partial V} + \frac{\partial^2 u}{\partial V^2}. \tag{44}$$

Получив это уравнение и отметив его отличие от соответствующего уравнения (43_0), Эйлер делает весьма определенное замечание о различии самых физических процессов: «так как это уравнение отлично от того, которое мы получили для случая двух измерений, то распространение звука будет различным».

Детальное выяснение существа этого различия, а именно отсутствия заднего фронта волны в случае двухмерной среды, Эйлеру провести не удалось, однако приведенное общее заключение вновь и вновь показывает стремление Эйлера всюду использовать анализ для выяснения физического содержания задачи. В связи с этими результатами Эйлер вынужден исследовать более общее уравнение

$$\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{n}{V}\frac{\partial s}{\partial V} + \frac{\partial^2 s}{\partial V^2}$$

(напомним, что значение $n = 3$ соответствует распространению звука в двухмерной среде и $n = 4$ — в трехмерной). Подстановка $s = P(V)\sin(\alpha t + \mathfrak{A})$, где α и $\mathfrak{A}$ — постоянные, приводит к уравнению Риккати:

$$\frac{d^2 P}{dV^2} + \frac{n}{V}\frac{dP}{dV} + m^2 P = 0.$$

Последнее для $n = 4$ допускает интегрирование в конечном виде. Подробно на этом исследовании Эйлера мы не останавливаемся, так как оно достаточно детально освещено в цитированной выше статье Франкля[1]).

Мы должны дополнительно лишь отметить, что Эйлер затрагивает здесь и вопрос об удовлетворении начальных условий частного вида. Получив для уравнения (44) решение в форме

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\Phi'(V + t\sqrt{2gh}) +$$
$$+ \frac{B}{V^2}\Phi(V - t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\Phi'(V - t\sqrt{2gh}),$$

---

[1]) См. сноску [2]) на стр. 327; стр. 610.

Эйлер, учитывая положительность V, выражающего радиус сферического слоя частичек воздуха, находящихся в состоянии возмущения, отмечает, что необходимо взять решение лишь в виде последних двух членов только что указанной формулы. Таким образом, в начальном состоянии, когда $t=0$, имеем:

$$u=\frac{A}{V^2}\Phi(V)-\frac{A}{V}\Phi'(V),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{A\sqrt{2gh}}{V^2}\Phi'(V)+\frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi''(V).$$

Рассматривая фактически точечный источник, Эйлер говорит далее: «так как предполагается, что сначала все возмущение сосредоточено в малом пространстве около центра A, то природа этих функций $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$, $\Phi''(z)$ должна быть таковой, что они тождественно равны нулю, если z превышает некоторое малое количество».

В заключение Эйлер рассматривает действие трех сосредоточенных источников и убеждается подобно предыдущему, что возмущение в рассматриваемой точке Z пространства является результатом того, что «начальное возмущение около точек c, c', c'' переходит по отдельности (sèparement) в точку Z, и притом каждое таким образом, как если бы другие источники не действовали». Рассуждение существенно основано на предположении, что функции $\Phi(V-t\sqrt{2gh})$, $\Sigma(V'-t\sqrt{2gh})$, $\Omega(V''-t\sqrt{2gh})$ и т. д., выражающие начальное возмущение в окрестности точек c, c', c'', равны тождественно нулю, как только количества $V-t\sqrt{2gh}$, $V'-t\sqrt{2gh}$, $V''-t\sqrt{2gh}$ превосходят заданные малые количества D, D', D'' (V, V', V'' — расстояния рассматриваемой точки Z от источников c, c', c'').

В заключение заметим, что в исследованиях по теоретической картографии Эйлер нашел решение такой аналитической задачи, которая эквивалентна интегрированию линейной системы первого порядка эллиптического типа с переменными коэффициентами частного вида. Однако вопрос об известных условиях Даламбера — Эйлера и только что указанном эйлеровском результате является самостоятельной темой.

РЕШЕНИЕ Л. ЭЙЛЕРОМ РАЗНОСТНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МЕТОДОМ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Е. А. Кушнир

В историко-математической литературе развитие теории уравнений в конечных разностях освещено весьма неполно.

В частности, ни в советской, ни в зарубежной литературе до сих пор не рассмотрено сколько-нибудь систематически содержание ряда результатов Л. Эйлера в развитии методов решения как линейных, так и нелинейных разностных уравнений.

В настоящей заметке выясняется содержание лишь одного малоизвестного метода Эйлера, основанного на построении решений разностных уравнений в виде определенных интегралов, зависящих от параметра. Этот результат содержится в эйлеровской работе «Методы нахождения интегральных формул...»[1]). Особый интерес этой работы объясняется не только самим методом параметрических интегралов, но и выяснением в ней связи между задачами решения линейных разностных уравнений и суммированием непрерывных дробей.

---

[1]) L. Euleri, Methodus inveniendif ormulas integrales, quae certis casibus datam inter se teneant ratianem, ubi simul methodus traditur fractiones continuas summandi, Opuscula mathem., t. II, Petrop., 1785, 178—216. Представлено в Петербургскую академию в 1775 г.

Основной результат опирается на решение предварительной задачи: найти функцию

$$v = v(x),$$

удовлетворяющую соотношению

$$\int_0^c x^n\,dv = \frac{\alpha n + a}{\beta n + b} \int_0^c x^{n-1}\,dv \tag{1}$$

при некотором значении постоянного $c \neq 0$.

В этом равенстве α, β, a, b, n — заданные постоянные. Выбор значения верхнего предела интегрирования будет выяснен несколько ниже (у самого Эйлера обозначения пределов интегрирования отсутствуют).

Итак, требуется найти функцию

$$v = v(x),$$

для которой справедливо равенство

$$(\alpha n + a) \int_0^c x^{n-1}\,dv = (\beta n + b) \int_0^c x^n\,dv, \tag{1'}$$

значение n неявно предполагается положительным. Для решения этой задачи вводится новая неизвестная функция

$$V = V(x),$$

обращающаяся в нуль при $x = 0$ и при $x = c$, причем для удобства вычислений она берется в виде

$$V(x) = x^n Q(x),$$

где функция $Q(x)$, подлежащая определению, должна удовлетворять условию

$$Q(c) = 0. \tag{2}$$

Идея заключается в том, чтобы функции $v(x)$ и $Q(x)$ найти из соотношения

$$(\alpha n + a) \int_0^x x^{n-1}\,dv = (\beta n + b) \int_0^x x^n\,dv + x^n Q(x). \tag{3}$$

В том случае, если $Q(x)$ удовлетворяет предыдущему условию (2), соотношение (3) при $x=c$ сразу же дает требуемое соотношение (1'). Соотношение (3) позволяет получить дифференциальное уравнение относительно Q.

Действительно, дифференцирование равенства (3) приводит к равенству

$$(\alpha n + a)\,dv = (\beta n + b)\,x\,dv + nQ\,dx + x\,dQ. \qquad (4)$$

Так как (4) должно выполняться при любом $n > 0$, то Эйлер вправе приравнять коэффициенты при n в первой и нулевой степени.

Таким образом, возникают два равенства:

$$(\alpha - \beta x)\,dv = Q\,dx, \qquad (4')$$

$$(a - bx)\,dv = x\,dQ. \qquad (4'')$$

Определяя из этих равенств dv и приравнивая получаемые выражения, Эйлер и находит искомое дифференциальное уравнение для $Q(x)$:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dx}{x}\,\frac{a - bx}{\alpha - \beta x}. \qquad (5)$$

Интегрируя, Эйлер получает:

$$Q(x) = C \cdot x^{\frac{a}{\alpha}}\,(\alpha - \beta x)^{\frac{b\alpha - a\beta}{\alpha\beta}}. \qquad (6)$$

Отсюда следует, что при выполнении неравенств

$$\frac{a}{\alpha} > 0, \quad \frac{b\alpha - a\beta}{a\beta} > 0$$

$Q(x)$ из (6) удовлетворяет нужным дополнительным условиям:

$$Q(0) = 0, \quad Q(c) = 0$$

при $c = \frac{\alpha}{\beta}$.

Для определения дифференциала функции $v(x)$ теперь достаточно подставить $Q(x)$ из (6) в равенство (4_1):

$$dv = C \cdot x^{\frac{a}{\alpha}} (\alpha - \beta x)^{\frac{b\alpha - a\beta}{\alpha\beta} - 1}.$$

Вместе с этим поставленный вопрос полностью решен. Заметим, что соотношение (1) представляет, очевидно, рекуррентную формулу вычисления интеграла

$$\int_0^c x^n \, dv$$

для найденной функции

$$v = v(x)$$

при соответствующем численном значении c.

Найденный результат позволяет Эйлеру указать метод решения уравнения в конечных разностях:

$$T(n+1) = \frac{an+a}{\beta n+b} \cdot \frac{\alpha' n + a'}{\beta' n + b'} T(n). \tag{7}$$

Полагая

$$T(n) = R(n) S(n), \tag{8}$$

Эйлер сразу же сводит вопрос к решению предыдущей задачи.

Действительно, для удовлетворения уравнению (7) достаточно, чтобы $R(n)$ и $S(n)$ удовлетворяли уравнениям

$$R(n+1) = \frac{\alpha n + a}{\beta n + b} R(n); \; S(n+1) = \frac{\alpha' n + a'}{\beta' n + b'} S(n). \tag{9}$$

Удовлетворить же этим соотношениям, очевидно, возможно, приняв за $R(n)$ и $S(n)$ либо интеграл вида

$$\int_{c_1}^{c} x^{n-1} \, dv,$$

либо величину, ему обратную, т. е.

$$\frac{1}{\int\limits_{c_1}^{c} x^{n-1}\, dv}.$$

Нетрудно видеть, что в обоих случаях задача решения уравнений (9) сводится к предыдущей, т. е. к определению соответствующих функций $v(x)$ и пределов интеграции. Таким образом, решение уравнения (7) Эйлер нашел в виде произведения соответствующих определенных интегралов, зависящих от параметра n. Далее решается линейное разностное уравнение второго порядка:

$$(\alpha n + a)\, T(n) = (\beta n + b)\, T(n+1) + (\gamma n + c)\, T(n+2). \quad (10)$$

Решение ищется в виде

$$T(n) = \int\limits_{0}^{c_1} x^{n-1}\, dv; \qquad (10')$$

необходимость изменения обозначения верхнего предела интеграции очевидна. Для нахождения функции

$$v = v(x)$$

применяется предыдущий прием. Дифференцирование равенства

$$(\alpha n + a) \int\limits_{0}^{c_1} x^{n-1}\, dv = (\beta x + b) \int\limits_{0}^{c_1} x^{n}\, dv + (\gamma n + c) \int\limits_{0}^{c_1} x^{n+1}\, dv$$

приводит после приравнивания коэффициентов при n в первой и нулевой степени к соотношениям:

$$\alpha\, dv = \beta x\, dv + v x^2\, dv + Q\, dx, \quad (11)$$

$$a\, dv = bx\, dv + cx^2\, dv + x\, dQ. \quad (12)$$

Приравнивая выражения dv, найденные из (11) и (12), Эйлер получает для $Q(x)$ также дифференциальное уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{a - bx - cx^2}{\alpha - \beta x - \gamma x^2}\frac{dx}{x}. \tag{13}$$

Необходимое дополнительное условие

$$Q(0) = 0$$

определяет для (13) постановку задачи с начальным условием. Верхний предел c в (10′) должен быть найден как корень уравнения

$$Q(x) = 0,$$

где $Q(x)$ — найденное решение только что указанной задачи с начальным условием (разумеется, этот корень должен быть отличным от значения $x = 0$).

Итак, решение уравнения (10) получено в виде

$$T(n) = \int_0^{c_1} \frac{x^{n-1}Q(x)\,dx}{\alpha - \beta x - \gamma x^2},$$

где c_1 и $Q(x)$ определены только что указанным образом.

Остается рассмотреть указанное Эйлером применение этого результата к задаче суммирования непрерывных дробей.

Предварительно вводятся следующие обозначения:

$$T'(n) = T(n+1),\ T''(n) = T'(n+1) = T(n+2)$$

и т. д. Предполагая далее, что $T(n)$ удовлетворяет рассмотренному выше уравнению

$$(\alpha n + a)\,T(n) = (\beta n + b)\,T'(n) + (\gamma n + c)\,T''(n), \tag{10′}$$

Эйлер с помощью последовательной замены n на $n+1$, $n+2$, ... получает возможность представить выражение $(\alpha n + a)\frac{T}{T'}$ в виде непрерывной дроби. Действительно, из (10′) непосредственно следует

$$(\alpha n + a)\frac{T}{T'} = \beta n + b + \frac{(\gamma n + c)(\alpha n + \alpha + a)}{(\alpha n + \alpha + a)\frac{T'}{T''}}. \tag{14}$$

При замене в (10′) n на $n+1$ точно таким же образом возникает равенство

$$(\alpha n+\alpha+a)\frac{T'}{T''}=(\beta n+\beta+b)+\frac{(\gamma n+\gamma+c)(\alpha n+2\alpha+a)}{(\alpha n+2\alpha+a)\frac{T''}{T'''}}$$

и т. д.

Подстановка последовательно значений $\frac{T'}{T''}, \frac{T''}{T'''}, \ldots$ в равенство (14) приводит поэтому к равенству

$$(\alpha n+a)\frac{T}{T'}=\beta n+b+\cfrac{(\gamma n+c)(\alpha n+\alpha+a)}{\beta n+\beta+b+\cfrac{(\gamma n+\gamma+c)(\alpha n+2\alpha+a)}{\beta n+2\beta+b+\ldots}}. \quad (15)$$

В частном случае при $n=1$ Эйлер сразу же получает такой результат: значение непрерывной дроби

$$\beta+b+\cfrac{(\gamma+c)(\alpha a+a)}{2\beta+b+\cfrac{(2\gamma+c)(3\alpha+a)}{3\beta+b+\cfrac{(3\gamma+c)(4\alpha+a)}{4\beta+b+\ldots}}}$$

равно произведению

$$(\alpha+a)\frac{A}{B},$$

где

$$A=\int_0^{c_1}\frac{Q(x)\,dx}{\alpha-\beta x-\gamma x^2}, \quad B=\int_0^{c_1}\frac{xQ(x)\,dx}{\alpha-\beta x-\gamma x^2}$$

и $Q(x)$ определяется предыдущим дифференциальным уравнением.

Укажем один из численных примеров Эйлера: найти сумму S непрерывной дроби

$$b+\cfrac{1\cdot 1}{b+\cfrac{2\cdot 2}{b+\cfrac{3\cdot 3}{b+\ldots}}}$$

Применение предыдущего общего результата показывает, что

$$S = (\alpha + a)\frac{A}{B},$$

где

$$A = \int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{b-1}{2}}}{(1+x)^{\frac{b+2}{2}}}\,dx, \quad B = \int_0^1 \frac{x\,(1-x)^{\frac{b-1}{2}}}{(1+x)^{\frac{b+1}{2}}}\,dx.$$

В заключение отметим, что изложенные результаты Эйлер использует в своих дальнейших работах о представлении значений непрерывных дробей с помощью решения соответствующего уравнения Риккати.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В РАБОТАХ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Б. А. Розенфельд

Геометрические работы Леонарда Эйлера занимают в его математическом творчестве гораздо меньшее место, чем его работы по анализу и теории чисел. Поэтому в обзорах творчества Эйлера о его геометрических работах сообщается обычно в конце, скороговоркой, со ссылкой на то, что при многогранности Эйлера он, само собой разумеется, обращал свой интерес и к геометрии. Так поступает, например, автор одного из лучших обзоров математического творчества Эйлера Феликс Мюллер[1]). С другой стороны, и геометры в своих исследованиях по истории геометрии ограничиваются, большей частью, несколькими фразами об Эйлере. Так, например, Мишель Шаль в своем историко-геометрическом трактате посвящает Эйлеру всего восемь строк, в которых говорится только, что Эйлер «изложил общие начала аналитической теории алгебраических кривых с тою общностью и ясностью, которыми отличаются сочинения этого великого геометра», и, «распространяя подобные же понятия на геометрию трех измерений, он в первый раз исследовал уравнение с 3 переменными, заключающее в себе поверхность второго порядка»[2]).

---

[1]) F. Müller, Über bahnbrechende Arbeiten Leonhard Eulers aus der reinen Mathematik. В книге: Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers, Лейпциг—Берлин, 1907, стр. 61—116. См. стр. 102.

[2]) M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles

В действительности геометрические работы Эйлера заслуживают весьма подробного изучения с точки зрения их влияния на дальнейшее развитие геометрии. В самом деле, одной из крупнейших заслуг Эйлера было создание учения о функциях, и понятие *функциональной зависимости* пронизывает почти все работы Эйлера, в применении же к геометрии идея функциональной зависимости представляет собой идею *геометрического преобразования*. В XIX веке именно идея геометрического преобразования становится ведущей в геометрии, и можно показать, что работы математиков XIX века по геометрическим преобразованиям имеют своими истоками идеи Эйлера.

В настоящей работе мы рассмотрим, каким образом Эйлер применял идею функциональной зависимости к различным видам геометрических преобразований.

1. Геометрические преобразования до Эйлера

В классической древности из геометрических преобразований применялись прежде всего *наложение* фигур, отраженное в VII аксиоме Евклида: «и совмещающиеся друг с другом равны между собой»[1]), и *вращение*, с помощью которого Евклид определяет сферу, конус и цилиндр[2]). Впрочем, в соответствии с известным положением Аристотеля: «математические предметы чужды движению»[3]), Евклид по возможности избегал и этих элементарных видов геометрических преобразований.

У позднейших геометров эллинистической эпохи встречаются геометрические преобразования «плоских геометрических мест»—прямых и окружностей. В своем «Математическом собрании» Папп, ссылаясь на не дошедший до нас

---

qui se rapportent à la géométrie moderne, Брюссель, 1837. Русский перевод: М. Шаль, Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов, ч. I и II, М., 1883. См. стр. 176—177 русского перевода.

[1]) Евклид, Начала, перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского, книги I—VI, М.—Л., 1948, стр. 15.

[2]) Евклид, Начала, перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского, книги XI—XV, М.—Л., 1950, стр. 10.

[3]) Аристотель, Метафизика, перевод А. В. Кубицкого, М., 1934, стр. 33.

трактат Аполлония «О плоских геометрических местах», говорит: «Если две прямые проведены из одной точки или из двух по одной прямой или параллельно друг другу или же составляют между собой данный угол и имеют между собой данное отношение или содержат данный прямоугольник и если конец одной из этих прямых описывает плоское геометрическое место, конец другой прямой также описывает плоское геометрическое место того же или другого рода, расположенное подобным образом по отношению к прямой или расположенное противоположным образом» [1]).

В случае, когда две «прямые» (т. е. два прямолинейных отрезка) проведены из одной точки по одной прямой, мы получаем *гомотетию*, если постоянно отношение этих «прямых», и инверсию, если постоянно их произведение (они «содержат данный прямоугольник»); общее начало «прямых» есть, соответственно, центр подобия и полюс инверсии. В случае, когда прямые параллельны, мы получаем преобразование, состоящее из гомотетии или инверсии и *переноса*, в случае, когда прямые проведены из одной точки под постоянным углом, мы получаем преобразование, состоящее из гомотетии или инверсии и *поворота*, в общем случае мы получаем преобразование, состоящее из гомотетии или инверсии и произвольного *движения*, т. е. в первом случае произвольное *преобразование подобия*. При гомотетии, так же как при движениях, прямые переходят в прямые, а окружности в окружности; при инверсии прямые, проходящие через полюс инверсии, переходят в себя; прямые, не проходящие через полюс, переходят в окружности; проходящие через полюс окружности, проходящие через полюс, переходят в прямые, не проходящие через полюс; окружности, не проходящие через полюс, переходят в окружности, также не проходящие через полюс.

В другом месте «Математического собрания», ссылаясь на не дошедший до нас трактат Аполлония «О касаниях», Папп строит центр подобия двух окружностей (центр гомотетии, переводящей одну из окружностей в другую,

---

[1]) Pappus Alexandrinus, Collectionis quae supersunt. Ed. Hultsch, т. II, Берлин, 1877, стр. 663—665.

являющийся точкой пересечения общих касательных этих окружностей) [1]).

Аполлоний же в своих «Конических сечениях», показав, что эллипс, гипербола и парабола являются сечениями одного и того же кругового конуса плоскостями, составляющими различные углы с его осью, тем самым показал, что эллипс, гипербола и парабола получаются друг из друга центральным проектированием из вершины конуса. До Аполлония конические сечения рассматривались как сечения конуса плоскостью, перпендикулярной к одной из его прямолинейных образующих. Поэтому до Аполлония эллипс назывался «сечением остроугольного конуса», гипербола — «сечением тупоугольного конуса», а парабола — «сечением прямоугольного конуса» (термины «эллипс», «гипербола» и «парабола» были введены Аполлонием, но еще Архимед применял доаполлониевскую терминологию). Преобразования, определяемые с помощью проектирований, в частности, переводят окружность в эллипс, гиперболу или параболу, т. е., по терминологии древних, переводят «плоское геометрическое место» в «пространственное геометрическое место».

Следует также отметить, что древние астрономы Гиппарх и Птолемей пользовались *стереографической проекцией* небесной сферы на плоскость (при которой окружности небесной сферы изображаются окружностями или прямыми на плоскости).

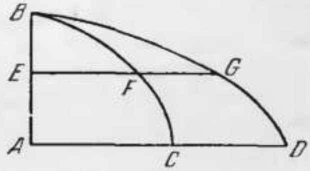
Развитие теории перспективы в эпоху Возрождения привело к первым теоремам проективной геометрии Жерара Дезарга (1593—1662) и Блеза Паскаля (1623—1662) и применению *сжатия*, переводящего окружность в эллипс, в работах Симона Стевина (1548—1620) и Григория Сент-Винцента (1584—1667).

Сжатие систематически применялось французским математиком Пьером Николà (1663—1708) в его «Геометрических исследованиях конхоид и циссоид». *Конхоидами* и *циссоидами* Николà называет кривые, полученные из произвольных кривых тем же путем, которым известные еще в древности конхоида Никомеда и циссоида Диокла

[1]) Pappus, там же, стр. 853.

получаются из окружности. Николà дает следующее определение «однородных фигур» (figurae homogeneae): «Однородными фигурами называются такие фигуры, которые имеют одну и ту же ось и пропорциональные ординаты. Таким образом, если фигуры ABC, ABD таковы, что они имеют одну и ту же ось AB и для любых ординат ACD EFG всегда имеет место пропорция AC, AD : : EF, EG или переставленная пропорция AC, EF : : AD, EG, фигуры ABC, ABD называются однородными»[1] (черт. 1).

Термин «однородные фигуры», применяемый Николà, несомненно, восходит к термину «однородные величины» Евклида, участвующему в его III определении V книги: «Отношение есть некоторая зависимость двух однородных величин по количеству»[2]): для Евклида и других древних ученых понятие «однородных величин» было равнозначно понятию величин, находящихся в определенном отношении, а для фигур с пропорциональными ординатами отношение соответственных ординат естественно считать отношением этих фигур.



Чер 1.

Николà показывает, что площади «однородных фигур» относятся так же, как их ординаты[3]), что ординаты центров тяжести «однородных фигур» находятся в том же отношении и что конхоиды и циссоиды «однородных фигур» также являются «однородными фигурами», находящимися в том же отношении. В частности, так как эллипс является «однородной фигурой» с окружностью, Николá показывает, что конхоиды и циссоиды эллипса являются «однородными фигурами» соответственно с конхоидой Никомеда и циссоидой Диокла.

---

[1]) P. Nicolas, De conchoidibus et cissoidibus exercitationes geometricae, Тулуза, 1697, стр. 141.

[2]) Евклид, Начала, книги I—VI, стр. 142.

[3]) «Если постоянно AC, AD:: EF, EG, то в силу метода неделимых фигура ABC относится к фигуре ABD как AC к BD» (под методом неделимых здесь имеется в виду принцип Кавальери). P. Nicolas, цит. соч., стр. 142. Дальнейшее из Николà, там же, стр. 142—146.

Более общие преобразования кривых на плоскости применялись Исааком Ньютоном (1643—1727). Один из основоположников математического анализа и аналитической механики, Ньютон был глубоким геометром, большим любителем синтетической геометрии и одним из творцов аналитической и алгебраической геометрии. В единственном произведении, специально посвященном геометрии, «Перечисление линий третьего порядка» [1]), где Ньютон дает классификацию алгебраических линий третьего порядка, он помещает V раздел «Образование кривых с помощью теней», в котором говорит: «Если на бесконечную плоскость отбрасывать от светящейся точки тени фигур, то тенями конических сечений будут всегда тоже конические сечения; тени кривых второго рода (т. е. кривых третьего порядка) будут всегда кривыми второго рода, тени кривых третьего рода (т. е. кривых четвертого порядка) будут всегда кривыми третьего рода и так до бесконечности.

И совершенно так же, как круг при отбрасывании тени производит все конические сечения, точно так пять расходящихся парабол производят и доставляют все другие кривые второго рода» [2]).

«Отбрасывание тени»—по современной терминологии центральное проектирование, и результат Ньютона состоит в том, что все кривые третьего порядка подразделяются на пять классов, кривые каждого из которых переводятся друг в друга проективным преобразованием; «расходящиеся параболы»—кривые, определяемые уравнениями

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Эти кривые различаются в зависимости от характера корней кубического четырехчлена ax^3+bx^2+cx+d.

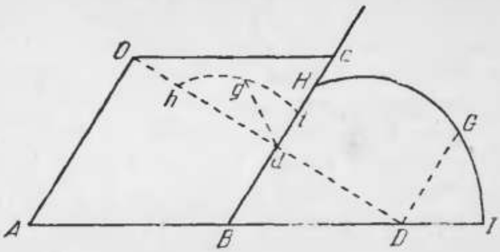
Проективные преобразования применяются Ньютоном и как преобразования плоскости в себя в V разделе I книги

---

[1]) I. Newton, Enumeratio linearum tertii ordinis, Лондон, 1704. Русский перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского в книге: И. Ньютон, Математические работы, М.—Л., 1934, стр. 194—209.

[2]) И. Ньютон, цит. соч., стр. 206.

его знаменитых «Математических начал натуральной философии», посвященном определению орбит движущихся тел, имеющих вид конических сечений, в случае, когда не задан ни один фокус этих конических сечений. Здесь Ньютон помещает XXII лемму: «Преобразовать фигуру в другую фигуру того же рода» («Figuras in alias ejusdem generis siguras mutare)»[1]). В этой лемме Ньютон определяет сле-



Черт. 2.

дующее преобразование кривой HGI в кривую hgi (черт. 2): произвольная точка G кривой HGI сначала проектируется параллельно прямой AO в точку D прямой AB, затем точка D проектируется из точки O в точку d прямой BL, из точки d проводится прямая dg под некоторым постоянным углом α к прямой BL и на этой прямой откладывается отрезок dg, определяемый пропорцией $dg : Od = DG : OD$. Если мы отнесем кривую HGI к косоугольным координатам с осями AB, AO, точка G этой кривой определяется абсциссой $X = AD$ и ординатой $Y = DG$. Если мы отнесем кривую hgi к косоугольным координатам с осью абсцисс BL, началом в точке a пересечения оси BL с прямой Oa, параллельной оси AB, и координатным углом α, то точка g этой кривой определяется абсциссой $x = ad$ и ординатой $y = dg$. Если, далее, мы обозначим $AB = a$, $OA = b$, то $Od : OD = a : X$, и нашу пропорцию можно переписать

[1]) I. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica. Лондон, 1686, стр. 85. Русский перевод А. Н. Крылова: И. Ньютон, Математические начала натуральной философии. Собрание сочинений акад. А. Н. Крылова, т. VII, М.—Л., 1936, стр. 131.

в виде $y : a = Y : X$. С другой стороны, из подобия треугольников Oad и OAD находим, что $ad : Oa = AD : OA$, т. е. $x : a = X : b$, откуда видно, что преобразование Ньютона может быть записано в виде

$$X = \frac{ab}{x}, \quad Y = \frac{by}{x}.$$

Определенное таким образом преобразование также является частным случаем *проективного преобразования.* Ньютон показывает, что если точка G описывает прямую, коническое сечение и вообще алгебраическую кривую n-го порядка, точка g описывает также соответственно прямую, коническое сечение и алгебраическую кривую n-го порядка, а также, что это преобразование переводит две прямые, пересекающиеся на оси AO, в параллельные прямые, и замечает, что «эта лемма служит для решения трудных геометрических задач, преобразуя заданные фигуры в простейшие... После того, как для преобразованной фигуры задача будет решена, стоит только преобразовать ее обратно в первоначальную, чтобы получить требуемое рашение для этой последней» [1]).

Как мы видим, Ньютон называет фигуры, получаемые друг из друга определенным им преобразованием, термином «фигуры такого же рода (figurae ejusdem generis), весьма сходным с термином Николà. Термин Ньютона совпадает с термином латинского текста Паппа, где говорится о плоских геометрических местах такого же рода (loci plani ejusdem generis), однако у Паппа этот термин применялся только к прямым и окружностям.

Общий вид проективных преобразований на плоскости был найден современником Эйлера Эдвардом Варингом (1734—1794), выразившим эти преобразования формулами [2])

$$x = \frac{pz + qv + r}{Az + bv + C}, \quad y = \frac{Pz + Qv + R}{Az + Bv + C}.$$

Общая теория проективных преобразований была построена в XIX веке Жаном Виктором Понселе (1788—1867).

---

[1]) И. Ньютон, Математические начала, стр. 133.

[2]) E. Waring, Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus, Кембридж, 1762, стр. 82.

Построение конического сечения по пяти точкам и по четырем точкам и одной касательной Ньютон основывает на XXI лемме, в которой доказывается, что если два пучка прямых, соответственные прямые которых пересекаются в точках одной прямой, повернуть на один и тот же угол вокруг их центров, то получатся два пучка, соответственные прямые которых пересекаются в точках одного конического сечения [1]). Эта лемма является частным случаем теоремы Якоба Штейнера (1796—1863) о том, что линия второго порядка является геометрическим местом точек пересечения соответственных прямых двух пучков, между которыми установлено проективное соответствие—одной из важнейших теорем проективной геометрии. В то же время эта лемма определяет преобразование плоскости, при котором прямая переходит в линию второго порядка, являющееся частным случаем *бирационального преобразования второго порядка*, т. е. таким преобразованием, которое вместе со своим обратным преобразованием выражается рациональной функцией второго порядка; частными случаями таких преобразований являются *инверсия* и другие *круговые преобразования*, переводящие прямые в окружности; проективные преобразования являются бирациональными преобразованиями первого порядка. То же бирациональное преобразование второго порядка Ньютон рассматривает и в «Перечислении линий третьего порядка», где он с его помощью переводит не только прямую в линию второго порядка, но и линию второго порядка в линию третьего или четвертого порядка [2]).

Более общий механический способ получения бирационального преобразования второго порядка рассматривали ученики Ньютона Колин Маклорен (1698—1746) в книге «Органическая геометрия, или описание кривых линий»[3]) и Вильям Брейкенбридж в книге «Геометрический опыт описания кривых линий»[4]). Общую теорию бирацио-

---

[1]) И. Ньютон, Математические начала, стр. 124.

[2]) Там же, стр. 206—207.

[3]) C. Mac Laurin, Geometria organica sive Descriptio linearum curvorum, London. 1720.

[4]) W. Braikenbridge, Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvorum, Лондон, 1733.

нальных преобразований любого порядка построил в XIX веке Луиджи Кремона (1830—1903), вследствие чего бирациональные преобразования часто называют *кремоновыми*.

В геометрической главе «Всеобщей арифметики», озаглавленной «Как приводятся к уравнениям геометрические вопросы», Ньютон применяет и *преобразование подобия*, при котором «нужно увеличить или уменьшить в данном отношении все линии» [1]).

Таким образом, к началу XVIII века математики пользовались целым рядом геометрических преобразований— сжатием, преобразованием подобия, проективным преобразованием и бирациональным преобразованием второго порядка. Преобразования, промежуточные между первыми двумя видами и вторыми двумя видами этих преобразований,—*аффинные преобразования*—применял Алексис-Клод Клеро (1713—1765). Этот разносторонний математик и механик, создатель математической геодезии и теории фигур равновесия вращающейся жидкости, введший в теорию дифференциальных уравнений понятия общего и особого решения, был также выдающимся геометром. В своих «Началах геометрии» [2]) Клеро предложил оригинальный вывод V постулата Евклида из постулата о существовании прямоугольника. Наиболее важными геометрическими работами Клеро являются: книга «Исследования о кривых двоякой кривизны» [3]), написанная им в 16-летнем возрасте, и мемуар «О кривых, которые образуются пересечением какой-либо кривой поверхности плоскостью, известной по положению» [4]), написанный в 18-летнем возрасте. О книге Клеро мы будем говорить в § 2. В своем мемуаре Клеро

---

[1]) I. Newton, Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica liber, Лондон, 1707. Русский перевод А. П. Юшкевича: И. Ньютон, Всеобщая арифметика, или книга об арифметических синтезе и анализе, М., 1948, стр. 335.

[2]) A. C. Clairaut, Elémens de Géométrie, Париж, 1741.

[3]) A. C. Clairaut, Recherches sur les courbes à double courbure, Париж, 1731.

[4]) A. C. Clairaut, Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque par un plan donné de position.— Hist. Mém. Acad. Sci. Paris 1731, Париж, 1733, стр. 483—493.

определяет «кривые такого же вида» (courbes de même espèce): «Здесь в качестве кривых такого же вида рассматривают две кривые, отличающиеся только тем, что их координаты не образуют одного и того же угла, или тем, что абсциссы и ординаты одной из них всегда являются одинаковыми частями соответственно абсцисс и ординат другой из них, подобно тому, как один эллипс по отношению к другому эллипсу, если их оси не находятся между собой в одном и том же отношении»[1]). Клеро записывает рассматриваемое им преобразование кривых в виде

$$x=\frac{c}{d}u\,,\quad y=\frac{b}{e}s.$$

Далее Клеро применяет для упрощения уравнения кривой третьего порядка частный случай аффинного преобразования—*сдвиг*, т. е. преобразвание, при котором абсцисса x заменяется на $x+py$, а ордината y не изменяется, о котором он говорит, что это преобразование «не меняет вида кривой»[2]).

Термин Клеро «кривые такого же вида» рядом с термином Ньютона «фигуры такого же рода»—термин аристотелевской логики, согласно которой определение состоит из ближайшего родового понятия и видового отличия. Применение здесь этой терминологии подчеркивает, что если преобразование Ньютона не изменяет рода кривой, преобразование Клеро не изменяет и вида кривой, т. е. семейства кривых, переводимые в себя преобразованиями Клеро,—более узкие семейства кривых, чем семейства, переводимые в себя преобразованиями Ньютона. В частности, например, эллипсы, гиперболы и параболы—три различных вида кривых, входящих в один род конических сечений.

Следует отметить, однако, что глубокие идеи Ньютона и Клеро о родах и видах кривых не получили дальнейшего развития в их математическом творчестве.

---

[1]) A. C. Clairaut, Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque par un plan donné de position.— Hist. Mém. Acad. Sci. Paris 1731, Париж, 1733, стр. 486.

[2]) A. C. Clairaut, там же, стр. 489.

2. Преобразование координат у Эйлера

Основным геометрическим произведением Эйлера является второй том его «Введения в анализ бесконечных»[1]). Первый том «Введения в анализ» содержит учение о функциях, их разложениях в ряды и произведения и т. п. Второй том представляет собой изложение аналитической геометрии, знание которой наряду со знанием теории функций Эйлер считал необходимым при изучении дифференциального и интегрального исчислений. Эта книга является образцом, которому следовали все курсы аналитической геометрии XIX века.

Тот факт, что основное геометрическое произведение Эйлера посвящено аналитической геометрии, разумеется, не случаен, как не случайно то, что из четырех томов журнальных статей Эйлера, посвященных геометрии, лишь один том посвящен элементарной геометрии [2]), а остальные три тома содержат работы по дифференциальной геометрии [3]). Более того, значительная часть результатов Эйлера, посвященных элементарной геометрии, получена им не элементарно-геометрическими, но аналитическими методами, с помощью алгебры и тригонометрии. Ясно, что геометрические работы великого аналиста и не могли носить иного характера.

О своем предпочтении аналитических методов элементарно геометрическим методам Эйлер писал в предисловии к «Механике, или науке о движении, изложенной аналитическим способом». Упоминая одного из своих предшественников, Эйлер говорит о его книге: «Кроме того, что особенно мешает читателю,—все это он провел по обычаю древних при помощи синтетически геометрических доказательств и не применил анализа, благодаря которому

---

[1]) L. Euler, Introductio in analysin infinitorum, т. II, Лозанна, 1748. Последнее издание: Opera omnia, серия I, т. 9, ed. A. Speiser, Женева, 1945.

[2]) L. Euler, Commentationes geometricae, т. I, Opera omnia, серия I, т. 26, ed. A. Speiser, Лозанна, 1953.

[3]) L. Euler, Commentationes geometricae, т. II, III, IV, Opera omnia, серия I, т. 27, 28, 29, ed. A. Speiser, Лозанна, 1954, 1955, 1956.

только и можно достигнуть полного понимания этих вещей. Приблизительно таким же образом написана работа Ньютона «Математические принципы философии», благодаря которой наука о движении получила наибольшее развитие... Хотя читатель и убеждается в истине выставленных предложений, но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно, если не прибегнет сам к анализу и те же предложения не разрешит аналитическим путем»[1]).

Основная часть второго тома «Введения в анализ» посвящена аналитической геометрии на плоскости, необходимой для геометрической интерпретации функций одного переменного. В I главе Эйлер определяет прямоугольные и косоугольные координаты и кривые линии и, в частности, непрерывные кривые. Определение непрерывной кривой у Эйлера существенно отличается от общепринятого в настоящее время. Эйлер говорит, что «Линия считается непрерывной кривой, если ее природа выражается с помощью одной определенной функции x»[2]). Напомним, в первом томе «Введения в анализ» Эйлер определял функцию следующим образом: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств[3]). Таким образом, непрерывной кривой Эйлер называет кривую, заданную единым аналитическим выражением. Тем не менее, кривые, рассматриваемые Эйлером, непрерывны в нашем смысле слова, так как функции, рассматриваемые им, большей частью

[1]) L. Euler, Mechanica sive motus scientia analytice exposita, т. 1, СПб, 1736, стр. 15. Opera omnia, серия II, т. 1, ed. P. Stäckel, Лейпциг—Берлин, 1912, стр. 8. Русский перевод в книге: Л. Эйлер, Основы динамики точки, М.—Л., 1938, стр. 33.

[2]) L. Euler, Introductio in analysin infinitorum, Opera omnia, серия I, т. II, 1945, стр. 11.

[3]) L. Euler, Introductio in analysin infinitorum, т. I, Лозанна, 1748. Последнее издание: Opera omnia, серия I, т. 8, ed. A. Krazer et F. Rudio, Лейпциг—Берлин, 1922. Русский перевод Е. Л. Пацановского под редакцией С. Я. Лурье: Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечных малых, т. I, М.—Л., 1936, стр. 30.

алгебраические, а из трансцендентных функций Эйлер рассматривает только аналитические функции.

Во II главе Эйлер рассматривает преобразование прямоугольных и косоугольных координат. Преобразование прямоугольных координат Эйлер записывает в виде

$$x = p\sin\theta + q\cos\theta + f,$$

$$y = p\cos\theta - q\sin\theta + g.$$

При $\theta = 0$ и при $f = g = 0$ эти формулы дают перенос начала прямоугольных координат и поворот осей этих координат на угол θ, которые рассматриваются Эйлером отдельно. В XVII главе Эйлер определяет и полярные координаты, связанные с прямоугольными координатами соотношениями

$$x = z\cos\varphi, \quad y = z\sin\varphi,$$

и находит уравнения различных кривых в этих координатах.

Запись преобразований координат с помощью синусов и косинусов угла поворота координатной системы стала возможной только благодаря применению предложенного Эйлером в первом томе его «Введения в анализ» взгляда на синус и косинус как на безразмерные величины—функции угла. До Эйлера под синусом и косинусом понимались линии синуса и косинуса и, например, синус прямого угла считался равным не числу 1, а «полному синусу»— отрезку, равному радиусу круга. До Эйлера преобразования декартовых координат записывались в гораздо менее удобной форме. Например, у Франциска Схоутена (1615—1661) в его примечаниях к латинскому переводу «Геометрии» Декарта новые координаты, в которые преобразуются координаты x и y, записываются в виде [1]):

$$\frac{ab + bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \frac{a^2 + ax - by}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

[1]) F. Schooten, In Geometriam Renati Des Cartes Commentarii. В книге: R. Des Cartes, Geometria, ed. F. Schooten. Русский перевод в книге: Г. Вилейтнер, Хрестоматия по истории математики, перевод П. С. Юшкевича и А. П. Юшкевича, 2-е изд., М—Л., 1935, стр. 143.

В III—IV главах Эйлер определяет общие свойства алгебраических линий и их подразделение на порядки.

В V главе изучаются общие свойства линий второго порядка, а в VI главе с помощью преобразования координат уравнения линий второго порядка приводятся к каноническому виду. Здесь показывается, что уравнения невырожденных линий второго порядка приводятся к виду

$$Ap^2+Bq^2=a^2,\quad Ap^2-Bq^2=a^2,\quad Ap^2=ar,$$

т. е. эти линии являются известными еще древним *эллипсом*, *гиперболой* и *параболой*. В VII и VIII главах рассматриваются бесконечные ветви и асимптоты линий второго порядка.

В IX—X главах изучаются линии третьего порядка и с помощью преобразования координат производится их классификация. В XI главе рассматриваются линии четвертого порядка.

Дальнейшие главы второго тома посвящены исследованию формы кривой по ее уравнению (XII глава), касанию кривых (XIII глава), кривизне кривых (XIV глава), симметрии кривых (XV глава), определению кривых по их свойствам (XVI—XVII главы), подобию и аффинным преобразованиям кривых (XVIII глава), пересечению кривых (XIX глава), составлению уравнений кривых (XX глава), трансцендентным кривым (XXI глава) и геометрическому решению тригонометрических уравнений (XXII глава).

В добавлении ко второму тому излагаются основы аналитической геометрии в пространстве, необходимые для геометрической интерпретации функций двух переменных. На первой странице этого добавления Эйлер в качестве своего непосредственного предшественника указывает «остроумнейшего геометра (Acutissimus Geometra) Клеро» [1]. Основоположники аналитической геометрии Декарт и Ферма, как известно, развивали только аналитическую геометрию на плоскости. Об обобщении аналитической геометрии на пространство Декарт говорит: «Я здесь повсюду говорил лишь о тех кривых, которые можно описать

[1]) L. Euler, Introductio in analysin infinitorum, Opera omnia, серия I, т. II, 1945, стр. 327.

на плоской поверхности. Однако сказанное о них можно перенести на все кривые, какие только можно представить образованными правильным движением точек какого-нибудь тела в пространстве трех измерений. Именно этого можно достигнуть, проведя из каждой точки рассматриваемой кривой по два перпендикуляра к двум пересекающимся под прямым углом плоскостям—один к одной, другой к другой. В самом деле, концы этих перпендикуляров описывают две другие кривые—по одной в каждой из этих плоскостей. Все точки последних кривых можно определить и отнести к точкам прямой, общей этим двум плоскостям, по вышеизложенному способу, а благодаря этому будут вполне определены и точки кривой, имеющей три измерения» [1]).

Отдельные попытки обобщения координатного метода на пространство предпринимались в 1679 г. Филиппом де ла Иром (1640—1718) и Антуаном Параном (1666—1716), впервые составившими уравнения сферы и параболоида вращения. Систематическое применение координат в пространстве было впервые произведено только Клеро в его упоминавшейся нами книге «Исследования о кривых двоякой кривизны», где он реализовал идею Декарта о сведении изучения пространственной кривой к изучению ортогональных проекций этой кривой на две перпендикулярные плоскости. Клеро называл пространственные кривые «кривыми двоякой кривизны», так как их ортогональные проекции на любые две перпендикулярные плоскости являются кривыми линиями. Замечательная книга Клеро положила основу трем геометрическим дисциплинам: аналитической геометрии в пространстве, дифференциальной геометрии и начертательной геометрии. Первая и вторая из этих дисциплин были далее продвинуты прежде всего Эйлером, а вторая и третья—Гаспаром Монжем (1746—1818); метод Монжа в начертательной геометрии и основан

[1]) R. Des Cartes, Discours de la méthode plus la Dioptrique, les Méteores et la Géométrie, Лейден, 1637. Русский перевод А. П. Юшкевича в книге: Р. Декарт, Рассуждение о методе с приложениями: Диоптрика, Метеоры, Геометрия, М., 1953, стр. 366.

на проектировании пространственных фигур на две взаимно-перпендикулярные плоскости.

В I главе добавления Эйлер определяет прямоугольные декартовы координаты в пространстве и поверхности или, по его терминологии, «поверхности тел». Во II и III главе Эйлер рассматривает плоские сечения поверхностей и, в частности, цилиндра, конуса и сферы.

В IV главе Эйлер рассматривает преобразование прямоугольных координат в пространстве, которое он записывает в виде

$$x = p(\cos\zeta\cos\theta - \sin\zeta\cos\eta\sin\theta) + \\ + q(\cos\zeta\sin\theta + \sin\zeta\cos\eta\cos\theta) - r\sin\zeta\sin\eta + f,$$

$$y = -p(\sin\zeta\cos\theta + \cos\zeta\cos\eta\sin\theta) - \\ - q(\sin\zeta\sin\theta - \cos\zeta\cos\eta\cos\theta) - r\cos\zeta\sin\eta + g,$$

$$z = -p\sin\eta\sin\theta + q\sin\eta\cos\theta + z\cos\eta + h.$$

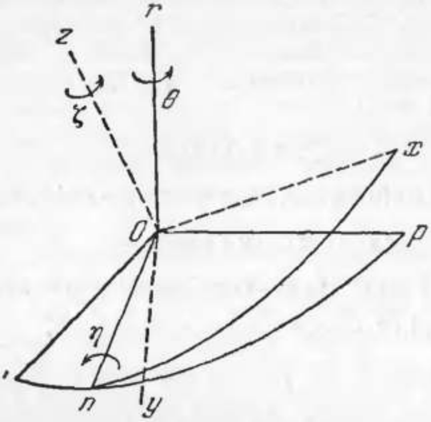
При $\zeta = \eta = \theta = 0$ и $f = g = h = 0$ эти формулы дают, соответственно, перенос начала координат и поворот осей этих координат. Углы ζ, η, θ, определяющие поворот осей, в настоящее время называются *углами Эйлера*: угол θ — «угол прецессии» — является углом вращения вокруг координатной оси Or (черт. 3), при котором ось Op переходит в прямую On — «линию узлов» — линию пересечения координатных плоскостей pOq и xOy; угол η — «угол нутации» — является углом вращения вокруг прямой On, при котором координатная ось Or переходит в ось Oz; угол ζ — «угол собственного вращения» вокруг прямой Oz, при котором прямая On переходит в ось Ox.

В V главе изучаются общие свойства поверхностей второго порядка и с помощью преобразования координат уравнения поверхностей второго порядка приводятся к каноническому виду. Здесь показывается, что уравнения невырожденных поверхностей второго порядка приводятся к виду

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = a^2, \quad Ap^2 + Bq^2 - Cr^2 = a^2,$$

$$Ap^2 - Bq^2 - Cr^2 = a^2, \quad Ap^2 + Bq^2 = ar, \quad Ap^2 - Bq^2 = ar.$$

Первую из этих поверхностей (эллипсоид) Эйлер называет «эллиптоидом», вторую (однополостной гиперболоид)— «эллиптико-гиперболической поверхностью», третью (двуполостной гиперболоид)—«гиперболико-гиперболической поверхностью», четвертую (эллиптический параболоид)—



Черт. 3.

«эллиптико-параболической поверхностью» и пятую (гиперболический параболоид)—«гиперболико-параболической поверхностью».

Исследование Эйлера является первым в истории математики изучением всех видов невырожденных поверхностей второго порядка общего вида. Древнегреческие математики рассматривали только эллипсоид вращения («сфероид»), двуполостной гиперболоид вращения («тупоугольный коноид») и параболоид вращения («прямоугольный коноид»); прилагательные «тупоугольный» и «прямоугольный» у коноидов представляют собой следы доаполлониевских названий гиперболы и параболы—«сечение тупоугольного конуса» и «сечение прямоугольного конуса». Однополостной гиперболоид вращения рассмотрел впервые Джон Валлис (1616—1763) под названием «гиперболический цилиндроид». Двуполостной гиперболоид и эллиптический параболоид общего вида впервые рассмотрел Пьер

Ферма (1601—1665), называвший их «косыми коноидами». Современные названия невырожденных поверхностей второго порядка появились только в начале XIX века в книге Монжа «Приложение алгебры к геометрии» [1]). Названия Монжа носят явные следы названий Эйлера.

3. Симметрии и движения на плоскости

XV глава второго тома «Введения в анализ» Эйлера называется «О кривых, обладающих одним или несколькими диаметрами» [2]). Андреас Шпейзер в предисловии к последнему изданию этого тома по поводу этой главы говорит: «Нам хочется рекомендовать читателю прочесть целиком эту поистине гениальную главу, являющуюся достоянием Эйлера во всех ее частях» [3]).

Под «диаметром кривой», точнее, под «ортогональным диаметром кривой», Эйлер понимает прямую, секущую пополам все ортогональные ей хорды, т. е. *ось симметрии*. Основной задачей главы является выяснение условий, при которых кривая обладает одной или несколькими осями симметрии. Однако по существу Эйлер ставит здесь более общую задачу—выяснение условий, при которых линия «подобна и равна», т. е. конгруэнтна самой себе. Тот факт, что линии, рассматриваемые Эйлером, алгебраические, позволяет ему говорить не о конгруэнтности линий в целом, а о наличии у линии двух «подобных и равных частей».

Говоря о различных случаях взаимного расположения двух «подобных и равных частей» линии, Эйлер по существу дает классификацию движений плоскости. Эйлер указывает все виды этих движений—перенос (черт. 4, *а*), поворот вокруг точки (черт. 4, *б*), отражение от прямой (черт. 4, *в*) и скользящее отражение (черт. 4, *г*), т. е. отражение от прямой, сопровождаемое переносом вдоль этой прямой.

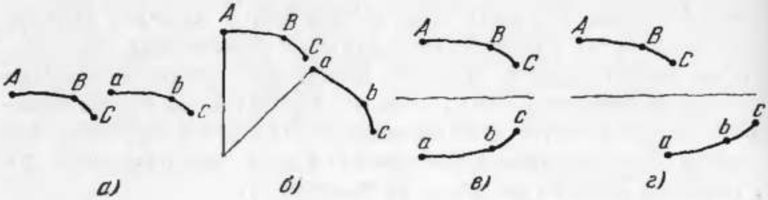
---

[1]) G. Monge, Application de l'algèbre à la géométrie, Париж, 1805.

[2]) De curvis una plurisque diametris praeditis. L. Euler, Introductio in analysin insinitorum, Opera omnia, серия I, т. II, 1945, стр. 187—199.

[3]) Там же, стр. XXVII.

Эйлер показывает, что алгебраическая линия не может переводиться в себя переносом, так как в этом случае эта линия переводилась бы в себя и всеми переносами в том же направлении на кратные расстояния. Но линия, обладающая таким свойством, пересекается с прямыми, имеющими это направление, в бесконечном множестве точек, что невозможно для алгебраических линий. Так

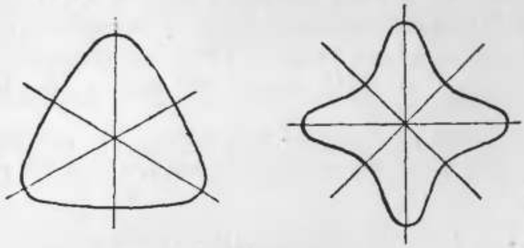


Черт. 4.

как повторение скользящего отражения два раза является переносом, отсюда же следует, что алгебраическая линия не может переводиться в себя и скользящим отражением.

Далее Эйлер показывает, что, за исключением окружности, переводящейся в себя поворотом вокруг ее центра на любой угол, алгебраическая линия может переводиться в себя только поворотом на угол, соизмеримый с прямым углом. В самом деле, если линия переводится в себя поворотом на некоторый угол, она переводится в себя и всеми поворотами вокруг той же точки на кратные углы. Но если данный угол несоизмерим с прямым углом, линия переводится в себя поворотами на бесконечное множество углов, что невозможно для алгебраических линий, отличных от окружности. Поэтому если алгебраическая линия, отличная от окружности, переводится в себя поворотом на некоторый угол, она переводится в себя поворотом на угол, являющийся аликвотной частью полного угла, т. е. на угол $\frac{2\pi}{m}$, где m—целое число.

Эйлер показывает, что если алгебраическая линия переходит в себя при отражениях от двух прямых («имеет два диаметра»), она переходит в себя и при движении, состоящем из двух отражений, т. е. если эти прямые параллельны, при переносе на удвоенное расстояние между этими прямыми, а если эти прямые пересекаются, при повороте вокруг точки пересечения этих прямых на угол, равный удвоенному углу между этими прямыми. Поэтому, если алгебраическая линия имеет две оси симметрии, они обязательно пересекаются и притом под углом, соизмеримым



Черт. 5.

с прямым углом. Если этот угол отличен от прямого угла и кратен углу $\frac{\pi}{m}$, где m—целое число, линия обладает m осями симметрии, пересекающимися в одной точке и составляющими между собой углы $\frac{\pi}{m}$. Отсюда следует, что если алгебраическая линия обладает m осями симметрии, все они пересекаются в одной точке и составляют между собой углы $\frac{\pi}{m}$ (черт. 5).

Эйлер находит условие того, что алгебраическая линия обладает m осями симметрии: это условие состоит в том, что левая часть уравнения этой линии является многочленом от величины x^2+y^2, переходящей в себя при повороте на любой угол, и от вещественной и мнимой частей выражения $(x+iy)^m$, переходящего в себя только при повороте на угол $\frac{2\pi}{m}$ и кратные ему углы, так как поворот на угол $\frac{2\pi}{m}$ равносилен умножению выражения $x+iy$ на величину $\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}$, при котором выражение $(x+iy)^m$ умножается на $\left(\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}\right)^m=1$. В явном виде, однако, Эйлер не пользуется здесь комплексными числами. Последнее рассуждение по существу основано на *формуле Муавра*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi,$$

идея которой была предложена в начале XVII века работавшим в Лондоне французским гугенотом-эмигрантом Абраамом де Муавром (1667—1754), а современный вид придан Эйлером в VIII главе первого тома «Введения в анализ»[1]).

Эйлер выводит формулы для поворота вокруг произвольной точки с координатами (a, A) в конце XVIII главы в виде

$$t = (x - a)\cos\alpha - (y - A)\sin\alpha,$$
$$u = (x - a)\sin\alpha + (y - A)\cos\alpha.$$

Эти формулы, при $\alpha = 0$ переходящие в формулы переноса, по существу совпадают с выведенными во II главе формулами преобразования координат.

4. Движения в пространстве

Движениями в пространстве Эйлер занимается в связи с разработкой механики твердого тела. В работе «Общие формулы для перемещения жестких тел»[2]), включенной после его смерти во второе издание его книги «Теория движения твердых или жестких тел»[3]), Эйлер записывает движение в пространстве в виде

$$x = Fp + F'q + F''r + f,$$
$$y = Gp + G'q + G''r + g,$$
$$z = Hp + H'q + H''r + h$$

[1]) Л. Эйлер, Введение в анализ, т. I, М.—Л., 1936, стр. 128.

[2]) L. Euler, Formulae generalis pro translatione corporum rigidorum.—Novi Commentarii Acad. Sci. Petropol. за 1775 г., СПб, 1776, стр. 189—207.

[3]) L. Euler, Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, 2-е изд., Грейфсвальд, 1790, стр. 449—460.

и находит, что коэффициенты F, G, H и т. д. связаны соотношениями:

$$F^2+G^2+H^2=1, \qquad FF'+GG'+HH'=0,$$
$$F'^2+G'^2+H'^2=1, \quad F'F''+G'G''+H'H''=0,$$
$$F''^2+G''^2+H''^2=1, \qquad FF''+GG''+HH''=0.$$

Далее Эйлер выражает коэффициенты $F, G, H, \ldots$ через шесть углов широты и долготы ζ, η, ζ', η', ζ'', η'':

$$F=\sin\zeta, \quad G=\cos\zeta\ \sin\eta, \quad H=\cos\zeta\ \cos\eta,$$
$$F'=\sin\zeta', \quad G'=\cos\zeta'\sin\eta', \quad H'=\cos\zeta'\cos\eta',$$
$$F''=\sin\zeta'', \quad G''=\cos\zeta''\sin\eta'', \quad H''=\cos\zeta''\cos\eta''.$$

При этом с помощью условий $FF'+GG'+HH'=0$ и т. д. углы ζ, ζ', ζ'' выражаются через углы η, η', η'' по формулам:

$$\operatorname{tg}\zeta=\frac{-\Delta}{\cos(\eta'-\eta'')}, \quad \operatorname{tg}\zeta'=\frac{-\Delta}{\cos(\eta''-\eta)}, \quad \operatorname{tg}\zeta''=\frac{-\Delta}{\cos(\eta-\eta')},$$

где

$$-\Delta=\cos(\eta-\eta')\cos(\eta'-\eta'')\cos(\eta''-\eta).$$

Другое выражение движения в пространстве через три коэффициента переноса и три «эйлеровых» угла, примененное Эйлером во втором томе «Введения в анализ» для преобразования координат, также часто применялось впоследствии в механике.

В добавлении к той же работе Эйлер дает доказательство теоремы: «Каким бы образом сфера ни вращалась вокруг своего центра, всегда можно указать диаметр, направление которого в конечном положении совпадает с его начальным положением»[1]). Эта теорема, по существу равносильная известной теореме Жана Лерона Даламбера (1717—1783), доказывается здесь Эйлером синтетически с помощью изящного построения на сфере.

С помощью этой теоремы Мишель Шаль (1793—1880), который, кстати сказать, ссылается не на Даламбера,

[1]) L. Euler, Formulae generales..., стр. 202, Theoria motus corporum solidorum..., 2-е изд., стр. 457.

а только на Эйлера, доказал, что всякое движение первого рода в пространстве, не являющееся переносом и поворотом, является винтовым движением, т. е. поворотом вокруг прямой, сопровождаемым переносом вдоль этой прямой. Этим Шаль решил основную часть задачи о классификации движений в пространстве, которая для плоскости по существу была решена в XV главе «Введения в анализ» Эйлера.

Еще один способ параметризации движений, предложенный Эйлером, имеет своим источником работы Эйлера по теории чисел. В письме Гольдбаху от 4 мая 1748 г. [1]) и в работе «Доказательство теоремы Ферма о представлении всех чисел, как целых, так и дробных, в виде суммы не более чем четырех квадратов» [2]) Эйлер ставит задачу выразить в виде суммы четырех квадратов целое число, являющееся произведением двух целых чисел, которые сами являются суммами четырех квадратов, т. е. задачу определения целых A, B, C, D, связанных с целыми a, b, c, d и p, q, r, s соотношением

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)\,(p^2+q^2+r^2+s^2)=A^2+B^2+C^2+D^2.$$

Эйлер находит, что эти связи должны иметь вид [3])

$$\begin{aligned} A&=ap+bq+cr+ds,\\ B&=aq-bp-cs+dr,\\ C&=ar+bs-cp-dq,\\ D&=as-br+cq-dp. \end{aligned}$$

Рассматриваемые Эйлером четверки чисел можно рассматривать как координаты *кватернионов*, теория которых была разработана в XIX веке Вильямом Роуаном Гамиль-

---

[1]) Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII-ème siécle, ed. par. P. Fuss, т. I, СПб, 1843, письмо CXV, стр. 450—453.

[2]) L. Euler, Demonstratio theorematis Fermationi omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumque quadratorum.—Novi Commentarii Acad. Sci. Petropol., т. 5 за 1754/55 г., СПб, 1760, стр. 13—58; Commentationes arithmeticae, т. I; Opera omnia, серия I, т. 2, ed. F. Rudio, Лейпциг—Берлин, 1915, стр. 338—372.

[3]) Correspondance mathématique, т. I, стр. 452; L. Euler, Demonstratio theorematis Fermatiani..., стр. 53; Commentationes arithmeticae, т. I, стр. 369.

тоном (1805—1865). Формулы Эйлера представляют собой формулы, по которым кватерниону $\alpha(a, b, c, d)$ и $\beta(p, q, r, s)$ ставится в соответствие кватернион $\bar{\alpha}\beta(A, B, C, D)$, являющийся *произведением* кватерниона $\bar{\alpha}(a, -b, -c, -d)$ на кватернион β. Сумма квадратов координат кватерниона α называется в настоящее время квадратом *модуля* кватерниона α; этот квадрат модуля, обозначаемый $|\alpha|^2$, равен произведению $\bar{\alpha}\alpha = \alpha\bar{\alpha}$. Поэтому установленный Эйлером факт может быть записан в кватернионной форме в виде

$$|\bar{\alpha}\beta|^2 = |\alpha|^2\,|\beta|^2.$$

Эта теорема непосредственно вытекает из свойств кватернионов

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}, \quad \bar{\bar{\alpha}} = \alpha,$$

так как

$$|\bar{\alpha}\beta|^2 = \overline{\bar{\alpha}\beta}\,\bar{\alpha}\beta = \bar{\beta}\alpha\bar{\alpha}\beta = \alpha\bar{\alpha}\bar{\beta}\beta = |\alpha|^2\,|\beta|^2.$$

В работе «Алгебраическая задача о совершенно замечательных свойствах» [1]) эти формулы рассматриваются уже не для целых, а для произвольных вещественных чисел. Здесь же ставится задача об определении «квадрата»

$$\begin{matrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I, \end{matrix}$$

состоящего из чисел, удовлетворяющих соотношениям:

$$\begin{aligned}
A^2+D^2+G^2&=1, & AB+DE+GH&=0,\\
B^2+E^2+H^2&=1, & AC+DF+GI&=0,\\
C^2+F^2+I^2&=1, & BC+EF+HI&=0,\\
A^2+B^2+C^2&=1, & AD+BE+CF&=0,\\
D^2+E^2+F^2&=1, & AG+BH+CI&=0,\\
G^2+H^2+I^2&=1, & DG+EH+FI&=0,
\end{aligned}$$

[1]) L. Euler, Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile.—Novi Commentarii, Acad. Sci. Petropol., т. 15 за 1770 г., СПб, 1771, стр. 75—106.

т. е. задача об определении *ортогональной матрицы третьего порядка.*

Эйлер дает два решения: одно с помощью углов Эйлера

$$A=\cos\zeta,\quad B=\sin\zeta\cos\eta,\quad C=\sin\zeta\sin\eta,\quad D=\sin\zeta\cos\theta,$$
$$E=\sin\eta\sin\theta-\cos\zeta\cos\eta\cos\theta,$$
$$F=-\cos\eta\sin\theta-\cos\zeta\sin\eta\cos\theta,\quad G=\sin\zeta\sin\theta,$$
$$H=-\sin\eta\cos\theta-\cos\zeta\cos\eta\sin\theta,$$
$$I=\cos\eta\cos\theta-\cos\zeta\sin\eta\sin\theta$$

и другое — с помощью параметров p, q, r, s в виде

$$A=\frac{p^2+q^2-r^2-s^2}{p^2+q^2+r^2+s^2},\quad B=\frac{2qr+2ps}{p^2+q^2+r^2+s^2},\quad C=\frac{2qs+2pr}{p^2+q^2+r^2+s^2},$$
$$D=\frac{2qr-2ps}{p^2+q^2+r^2+s^2},\quad E=\frac{p^2-q^2+r^2-s^2}{p^2+q^2+r^2+s^2},\quad F=\frac{2pq+2rs}{p^2+q^2+r^2+s^2},$$
$$G=\frac{2qs-2pr}{p^2+q^2+r^2+s^2},\quad H=\frac{2rs-2pq}{p^2+q^2+r^2+s^2},\quad I=\frac{p^2-q^2-r^2+s^2}{p^2+q^2+r^2+s^2}.$$

Последние формулы могут быть получены с помощью открытых Эйлером свойств кватернионов следующим образом: рассмотрим кватернионы $\xi(0, x, y, z)$ и $\pi(p, q, r, s)$ и найдем с помощью рассматриваемой Эйлером операции кватернион

$$\Xi=-\bar{\pi}(\bar{\xi}\pi).$$

В силу известной Эйлеру теоремы о модуле произведения кватернионов

$$|\Xi|=|\bar{\pi}|\,|\bar{\xi}\pi|=|\bar{\pi}|\,|\bar{\xi}|\,|\pi|=|\pi|^2\,|\xi|.$$

С другой стороны, нетрудно проверить, что первая координата кватерниона Ξ равна нулю, т. е. его можно записать в виде $\Xi(0, X, Y, Z)$. Поэтому переход от координат кватерниона ξ к координатам кватерниона Ξ представляет собой линейное преобразование, состоящее из ортогонального преобразования и умножения на $|\pi|^2=p^2+q^2+r^2+s^2$. Поэтому преобразование

$$\Xi=-\frac{\bar{\pi}(\bar{\xi}\pi)}{|\pi|^2}$$

является ортогональным преобразованием. Это преобразование и есть то преобразование, элементы матрицы которого найдены Эйлером. Таким образом, по существу здесь Эйлер нашел представление группы вращений пространства (группы ортогональных матриц третьего порядка) с помощью кватернионов, которое может быть более просто записано с помощью кватерниона единичного модуля π в виде

$$\Xi = \bar{\pi}\xi\pi.$$

Если представить кватернионы α (a, b, c, d) комплексными матрицами второго порядка $\begin{pmatrix} a+di & b+ci \\ -b+ci & a-di \end{pmatrix}$, мы получим из представления, найденного Эйлером, так называемое *спинорное представление* группы вращений.

В той же работе Эйлер находит способ получения с помощью кватернионов и ортогональной матрицы четвертого порядка; соответственное линейное преобразование может быть более просто записано с помощью кватернионов единичного модуля π и ρ в виде

$$\Xi = \rho\xi\pi.$$

Это представление также равносильно спинорному представлению группы ортогональных матриц четвертого порядка.

5. Подобие и аффинные преобразования

XVIII глава второго тома «Введения в анализ» Эйлера называется «О подобии и родстве кривых линий» [1]). В начале этой главы Эйлер рассматривает уравнения линий, зависящие от одного или нескольких параметров, и останавливается на алгебраических уравнениях, зависящих от одного параметра a таким образом, что сумма степеней координат x, y и параметра a одна и та же во всех слагаемых уравнения. В этом случае, как показывает Эйлер, при

[1]) De similitudinis et affinitate linearum curvarum. L. Euler, Introductio in analysin, Opera omnia, серия I, т. II, 1945, стр. 240—250.

изменении параметра a линия переходит в *подобную* линию. Поэтому, в частности, все окружности $y^2=2ax-x^2$ или параболы $y^2=ax$ подобны между собой.

Эйлер показывает, что переход от линии, соответствующей одному значению параметра, к линии, соответствующей другому значению этого параметра, выражается формулами:

$$x=\frac{X}{n}, \quad y=\frac{Y}{n}.$$

Далее Эйлер говорит: «В подобных кривых соответственные абсциссы и аппликаты увеличиваются или уменьшаются в одном и том же отношении; если же абсциссы будут следовать одному отношению, а аппликаты—другому, кривые более не будут подобными. Однако, поскольку эти кривые сохраняют все же некоторое родство (affinitas), мы будем называть эти кривые аффинными (affines). Таким образом, аффинность содержит в себе подобие в качестве вида: аффинные кривые, конечно, становятся подобными, когда оба отношения, которым следуют абсциссы и аппликаты, оказываются равными» [1]).

Определенное им *аффинное преобразование* Эйлер выражает формулами:

$$x=\frac{X}{m}, \quad y=\frac{Y}{n}.$$

Эйлер показывает, что окружность переводится аффинным преобразованием в эллипс, а также что аффинные преобразования переводят эллипсы в эллипсы, гиперболы—в гиперболы, а параболы—в параболы.

Термин «родство», которым мы переводим эйлеровский термин «affinitas», не точен: слово «affinitas» означает не прямое родство, а родство по жене, «свойство́». Ясно, что этот термин навеян терминами Ньютона и Клеро «фигуры такого же рода» и «кривые такого же вида». Терминологию Ньютона и Клеро Эйлер не может употреблять, так как, с одной стороны, он не рассматривает проективных преобразований, а, с другой стороны, рассматривает частный случай аффинного соответствия—подобие, которое он

---

[1]) De similitudinis et affinitate linearum curvarum. L. E u l e r, Introductio in analysin, Opera omnia, серия I, т. II. 1945, стр. 243.

называет видом первого, а в свою очередь видом подобия являются «подобие и равенство» (конгруэнтность). Следует заметить, что употребление слов «род» и «вид» у Эйлера не вполне последовательно: VI глава второго тома «Введение в анализ» называется «О подразделении линий второго порядка по родам» [1]), а речь идет о подразделении их на эллипс, гиперболу и параболу, которые здесь же называются видами[2]). IX глава того же тома, где решается та же задача для линий третьего порядка, называется уже «О подразделении линий третьего порядка по видам» [3]). Вводя термин «affinitas», Эйлер подчеркивал, что между «аффинными кривыми» родство значительно меньше, чем между подобными и тем более между «подобными и равными» (т. е. конгруэнтными) линиями.

В заключение главы Эйлер выводит формулы для поворота вокруг произвольной точки и определяет преобразование подобия и аффинное преобразование общего вида, состоящее из преобразования подобия и аффинного преобразования, определенного выше, и поворота вокруг произвольной точки.

Аффинным преобразованиям посвящена также работа Эйлера «О некоторых свойствах конических сечений, которыми обладает бесконечно много других кривых линий» [4]). Эйлер рассматривает алгебраические кривые, обладающие произвольными «диаметрами», т. е. прямыми, секущими пополам все хорды, параллельные между собой и составляющие с этими прямыми произвольный угол. Указанные прямые являются осями косой симметрии, т. е. рассматриваемые Эйлером прямые переходят в себя при косом отражении от диаметра, являющемся аффинным преобразованием общего вида. В отличие от случая ортогональных диаметров алгебраические линии могут обла-

---

[1]) De linearum secundi ordinis subdivisione in genera.— Там же, стр. 72—91.

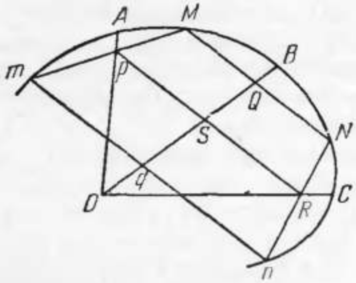
[2]) Там же, стр. 74.

[3]) De linearum tertii ordinis subdivisione in species.— Там же, стр. 122—133.

[4]) L. Euler, Sur quelques propriétés des sections coniques qui conviennent à une infinité d'autres lignes courbes.— Hist. Mém. Acad. Sci. Berlin, т. 1 за 1745 г., Берлин, 1746, стр. 76—98; Commentationes geometricae, т. 2, стр. 51—73.

дать параллельными неортогональными диаметрами, что видно на примере диаметров параболы. Эйлер показывает, что если алгебраическая линия переходит в себя при косых отражениях от двух прямых, она переходит в себя и при аффинном преобразовании, состоящем из этих косых отражений.

Эйлер подробно рассматривает случай, когда при двух диаметрах линии косое отражение от одного из этих диаметров не переводит второго диаметра в себя—в этом случае это отражение переводит второй диаметр в третий диаметр (черт. 6). В этой работе Эйлер пользуется теми свойствами аффинных преобразований, что эти преобразования переводят прямые линии в прямые, параллельные прямые—в параллельные, а середины отрезков—в середины соответственных отрезков. Эта работа была написана до «Введения в анализ», XV глава второго тома которого посвящена аналогичной задаче об ортогональных диаметрах. Очевидно, что Эйлер перешел к задаче об ортогональных диаметрах, приведшей к полному решению вопроса о структуре движений, от задачи о произвольных диаметрах, которая не приводилась к решению вопроса о структуре аффинных преобразований.

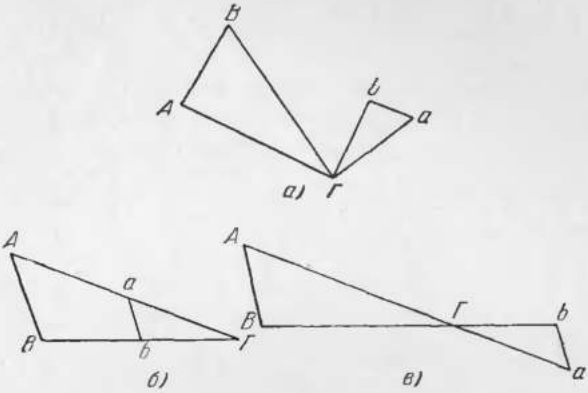


Черт. 6.

Преобразованию подобия также посвящена специальная работа Эйлера «О центре подобия»[1]). Эйлер доказывает теорему: «Если две подобные фигуры начерчены на одной плоскости и какая-нибудь сторона большей из них есть AB, а соответственная сторона меньшей из них есть ab (черт. 7, a), всегда существует на этой плоскости такая точка Г, что если отнести ее к обеим фигурам, фигуры ГAB

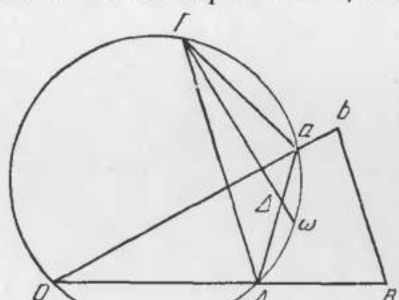
[1]) L. Euler, De centro similitudinis.—Nova Acta Acad. Sci. Petropol., т. 9 за 1791 г., СПб, 1795, стр. 154—165; Commentationes geometricae, т. I, стр. 276—285.

и Γab подобны между собой». Эйлер называет точку Γ *центром подобия* данных подобных фигур. Эйлер показывает, что если прямые AB и ab параллельны, точка Γ



Черт. 7.

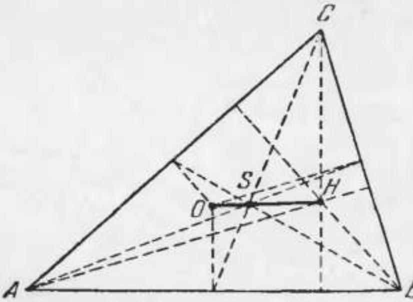
есть точка пересечения прямых Aa и Bb (черт. 7, *б* и 7, *в*). Если же прямые AB и ab не параллельны, точка Γ строится



Черт. 8

следующим образом: находится точка O пересечения прямых AB и ab (черт. 8), строится окружность OAa, на отрезке Aa строится точка Δ, такая, что $\frac{A\Delta}{a\Delta}=\frac{AB}{ab}$, а на дуге Aa

строится точка ω, являющаяся ее серединой, а искомая точка Г есть вторая точка пересечения прямой Δω с окружностью OAa: в самом деле, по нашему построению прямая Δω есть биссектриса угла $A\Gamma a$, откуда следует пропорция $\Gamma A : \Gamma a = AB : ab$. Так как, кроме того, углы $OA\Gamma$ и $Oa\Gamma$ равны как опирающиеся на одну и ту же дугу, треугольники ΓAB и Γab подобны. Теорема Эйлера о существовании центра подобия в случае параллельности соответственных сторон, т. е. в случае *гомотетичного расположения*



Черт. 9.

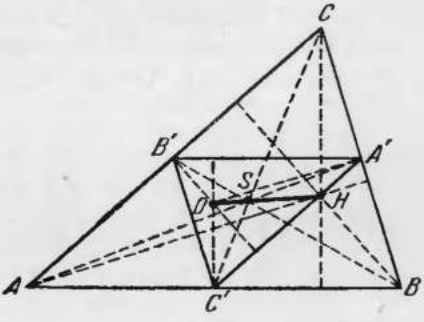
фигур, является основной теоремой теории гомотетии, а в общем случае выясняет структуру произвольного преобразования подобия.

В этой же работе понятие центра подобия было распространено и на подобные тела в пространстве, чем положено основание теории подобных преобразований в пространстве.

С теорией гомотетии тесно связана еще одна работа Эйлера: «Легкое решение некоторых труднейших геометрических задач» [1]), в которой доказывается, что точка H пересечения высот треугольника, точка S пересечения его медиан (центр тяжести) и точка O пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, восставленных

[1]) L. Euler, Solutio facilis problematis quorundam geometricorum difficillimorum.—Novi Commentarii Ac. Sci. Petropol., т. 11 за 1765 г., СПб, 1767, стр. 103—123; Commentationes geometricae, т. I, стр. 139—157.

в их серединах (центр описанной окружности) (черт. 9), лежат на одной прямой, причем точка S лежит между точками O и H и $OS : SH = 1 : 2$. Прямая OSH в настоящее время известна под названием *прямой Эйлера*. Эйлер доказывает эту теорему чисто аналитическим путем: устанавливает систему прямоугольных координат с началом в точке A и осью абсцисс AB, находит координаты точек O, S, H, вычисляет расстояния OS, SH, OH и убеждается, что $OH = OS + SH$ и $SH = 2OS$. Но наиболее просто



Черт. 10.

эта теорема доказывается синтетически с помощью теоремы Эйлера о центре подобия: если мы обозначим середины сторон BC, CA, AB соответственно через A', B', C' (черт. 10), то треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны и их центром подобия является точка S. При гомотетии с центром S, переводящей треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$, точка H переходит в точку O, являющуюся точкой пересечения высот треугольника $A'B'C'$, вследствие чего прямая HO проходит через точку S; так как при этой гомотетии все расстояния уменьшаются в два раза, отрезок SO в два раза меньше отрезка SH.

Теоремы Эйлера о структуре произвольных преобразований подобия подготовили почву для решения вопроса о выяснении структуры произвольных аффинных преобразований, что и было произведено Августом Фердинандом Мёбиусом (1790—1868) в его «Барицентрическом исчислении».

6. Конформные преобразования у Эйлера

Идея конформного преобразования возникла у Эйлера из чисто аналитической задачи о «взаимных траекториях», т. е. задачи о нахождении семейства линий, пересекающих линии данного семейства под постоянным углом. Этой задачей Эйлер занимался еще в 1727 г., когда им были написаны первые работы по этому вопросу «Решение задачи о взаимных траекториях» [1]) и «Метод определения алгебраических взаимных траекторий» [2]). Одна из работ на эту тему, называемая «Рассуждения об ортогональных траекториях» [3]), посвящена нахождению семейства линий, пересекающих линии данного семейства под прямым углом. Эйлер находит, что семейства линий, пересекающие друг друга под прямым углом, можно получить с помощью *функций комплексного переменного*, записываемых им в виде

$$x+y\sqrt{-1}=\mathrm{funct}\,(T+V\sqrt{-1}),$$
$$x-y\sqrt{-1}=\mathrm{funct}\,(T-V\sqrt{-1}).$$

Под функцией комплексного переменного, обозначаемой Эйлером знаком funct, он, как обычно, понимает аналитическую функцию комплексного переменного, получающуюся из вещественной аналитической функции заменой вещественного аргумента комплексным, т. е. функцию комплексного переменного, представляемую бесконечным степенным рядом с вещественными коэффициентами. Накладываемое Эйлером условие—комплексно сопряженным значениям аргументов соответствуют комплексно сопряженные значения функции—обеспечивает то,

---

[1]) L. Euler, Problematis trajectoriarum reciprocam solutio.— Commentarii Acad. Sci. Petropol., т. 2 за 1727 г., СПб, 1729, стр. 90—111; Commentationes geometricae, т. II, стр. 6—23.

[2]) L. Euler, Methodus inveniendi trajectorias reciprocas algebraicis.—Acta Eruditorum, Лейпциг, 1727, стр. 408; Commentationes geometricae, т. II, стр. 1—5.

[3]) L. Euler, Considerationes de trajectoriis orthogonalibus.— Novi Commentarii Acad. Sci. Petropol., т. 14, ч. 1 за 1769 г., СПб, 1770, стр. 104—128; Commentationes geometricae, т. III, стр. 99—119.

что рассматриваемые им функции принимают при вещественных значениях аргумента вещественные значения. Эта точка зрения на функции комплексного переменного вытекает из общей точки зрения Эйлера на комплексное число как на наиболее общий вид математических величин, частным случаем которого является вещественное число. Несмотря на эту точку зрения, которая казалось бы исключала идею об изображении комплексных чисел парами вещественных чисел и геометрической интерпретации комплексных чисел точками плоскости, без чего было невозможно ликвидировать ту мистическую дымку, которой комплексные числа были окутаны еще у ближайших предшественников Эйлера, именно в этой работе Эйлера мы встречаем идею геометрической интерпретации комплексных чисел в совершенно явном виде, поскольку здесь каждой точке плоскости с координатами x, y ставится в соответствие комплексное число $x+iy$.

Идею геометрической интерпретации комплексных чисел можно проследить уже в работе Эйлера 1755 г. «Продолжение исследований по теории движения жидкостей»[1]), в которой зависимость координат u, v скорости жидкости в точке с координатами x, y выражается формулой

$$u+\frac{v}{\sqrt{-1}}=\frac{1}{2}\varphi:(x+y\sqrt{-1})+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\psi:(x+y\sqrt{-1}),$$

где φ и ψ—функции комплексного переменного указанного вида.

В неявном виде идея геометрической интерпретации комплексных чисел встречалась нам уже в XV главе второго тома «Введения в анализ», где поворот на плоскости на $\frac{1}{m}$ полного угла, переводящий линию в себя, по существу связывался с умножением комплексного числа $x+iy$ на комплексное число $\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}$.

[1]) L. Euler, Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides.—Hist. Mém. Acad. Sci. Berlin, т. 11 за 1755 г., Берлин, 1757, стр. 316—361; Commentationes mechanicae, т. 1; Opera omnia, серия II, т. 12, ed. C. A. Truesdell, Лозанна, 1954, стр. 92—132.

Эйлер приходит к идее геометрической интерпретации комплексных чисел в результате длительной эволюции. В 1735 г. в письме к Кюну Эйлер еще пишет, что если «отрицательные количества являются действительными и всегда можно указать то, что они обозначают», то мнимое количество—это «такого рода количество, которое не может быть выявлено» [1]). В работах 1748 и 1755 гг. Эйлер подошел к геометрической интерпретации комплексных чисел, по-видимому, из формальных соображений, но к 1769 г., когда была написана работа «Рассуждения об ортогональных траекториях», идея геометрической интерпретации комплексных чисел была Эйлеру совершенно ясна [2]).

Однако идея геометрической интерпретации комплексных чисел, высказанная Эйлером в этой работе, не была в то время воспринята математиками. Эта интерпретация была снова открыта в 1799 г. Гаспаром Весселем (1745—1818) и окончательно вошла в математику только после работ Карла Фридриха Гаусса (1777—1855) и Огюстена Коши (1789—1857), вследствие чего математики XIX века обычно называли плоскость комплексного переменного «плоскостью Гаусса» или «плоскостью Коши».

Наиболее важным в работе Эйлера «Рассуждения об ортогональных траекториях» является то, что здесь Эйлер не только высказал идею плоскости комплексного переменного, но и показал, что преобразования этой плоскости, определяемые рассматриваемыми им функциями, являются *конформными отображениями* и ортогональные семейства линий могут быть получены этими преобразованиями из ортогональных семейств прямых $T=\text{const}$ и $V=\text{const}$.

Эйлер специально останавливается на случае, когда функция (funct) является многочленом и семейства линий, в которые переводятся ортогональные семейства

---

[1]) Архив АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 19, л. 119. См. В. Н. Молодший, Основы учения о числе в XVIII веке, М., 1953, стр. 140.

[2]) О приоритете Эйлера в открытии плоскости комплексного переменного см. А. И. Маркушевич, Очерки по истории теории аналитических функций, М.—Л., 1951, стр. 31—34. А. И. Маркушевич рассматривал только работы Эйлера 1755 и 1777 гг.

прямых, являются семействами алгебраических линий. В частности, Эйлер рассматривает тот случай, когда многочлен является квадратным; сюда относится случай семейств конфокальных эллипсов и гипербол.

Эйлер специально останавливается также на случае функции

$$x+y\sqrt{-1}=\frac{f+g(t+u\sqrt{-1})}{h+k(t+u\sqrt{-1})},$$

т. е. на случае *дробно-линейного преобразования*. Эйлер показывает, что это преобразование переводит окружности (или прямые) в окружности (или прямые), т. е. эти преобразования являются *круговыми преобразованиями* плоскости. Общая теория этих преобразований была также разработана в XIX веке Мёбиусом. Так как Эйлер рассматривает только случай вещественных коэффициентов, при этих преобразованиях переводится в себя ось абсцисс; в этом случае на оси абсцисс происходит *проективное преобразование*. Частным случаем этого преобразования является *инверсия*; произвольное круговое преобразование состоит из инверсии и преобразования подобия.

Открытые Эйлером конформные преобразования применяются им в *картографии*. В работах Эйлера «О представлении сферической поверхности на плоскости» [1]) и «О географической проекции сферической поверхности»[2]) Эйлер ставит вопрос о наиболее общем конформном отображении сферы на плоскость, или, как выражается сам Эйлер, таком отображении, при котором «малые области земли представляются подобными фигурами на плоскости». Для решения этой задачи Эйлер сначала производит стереографическую проекцию сферы на плоскости, при которой точке сферы с широтой v и долготой t ставится в соответствие точка плоскости, определяемая

---

[1]) L. Euler, De repraesentatione superficiei sphaericae super plano.—Acta Acad. Sci. Petropol., т. 1 за 1777 г., ч. 1, СПб, 1778, стр. 107—132; Commentationes geometricae, т. III, стр. 248—275.

[2]) L. Euler, De projectione geographica superficiei sphaericae.—Acta Acad. Sci. Petropol., т. 1 за 1777 г., ч. 1, стр. 133—141; Commentationes geometricae, т. III, стр. 276—287.

комплексным числом

$$z = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v (\cos t + i \sin t),$$

а затем в плоскости комплексного переменного z производится произвольное конформное преобразование. Эйлер показывает также, что для того, чтобы меридианы и параллели при этом отображении изображались окружностями, конформное преобразование должно быть дробно-линейным. Частный случай конформного отображения на

Черт. 11.

плоскость Эйлер рассматривает в работе «О географической проекции де Лиля, применяемой в генеральной карте Российской империи» [1]), в которой изучается коническая проекция, предложенная старшим современником Эйлера Жозефом-Никола де Лилем (1688—1747).

С дробно-линейными преобразованиями плоскости комплексного переменного и проективными преобразованиями прямой тесно связано *двойное отношение* четырех точек, остающееся инвариантным при этих преобразованиях. Для теории двойного отношения существенную роль сыграло доказанное Эйлером в его работе «Различные геометрические доказательства» [2]) соотношение между взаимными расстояниями 4 точек A, B, R, S прямой (черт. 11), имеющее вид

$$AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot BR.$$

Как заметил Шаль в примечании IX к своему «Историческому обзору происхождения и развития геометрических

[1]) L. Euler, De projectione geographica Delisliana in mappa generale Imperii Russici usitata.—Acta Acad. Sci. Petropol., т. 1 за 1777 г., ч. 1, СПб, 1778, стр. 143—153; Commentationes geometricae, т. III, стр. 288—297.

[2]) L. Euler, Variae demonstrationes geometricae.—Novi commentarii Acad. Sci. Petropol., т. 1 за 1747/48 г., СПб, 1750, стр. 49—66; Commentationes geometricae, т. I, стр. 15—32.

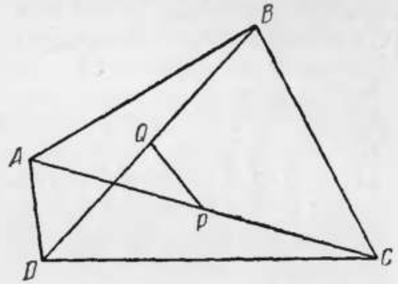
методов» [1]), соотношение Эйлера можно переписать в виде

$$\frac{AB}{AS}:\frac{RB}{RS}+\frac{AR}{AS}:\frac{BR}{BS}=1,$$

выражающем связь между двойным отношением пар точек A, B и R, S и двойным отношением пар точек A, R и B, S.

Цитируемая здесь работа Эйлера содержит ряд интересных геометрических предложений, из которых отметим теорему о том, что сумма квадратов сторон произвольного четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей и учетверенного квадрата отрезка, соединяющего середины диагоналей (черт. 12):

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=$$
$$=AC^2+BD^2+4PQ^2.$$



Черт. 12.

Частным случаем этой теоремы при совпадении точек P и Q является известная теорема о параллелограмме.

7. Теорема Эйлера о многогранниках

Существенную роль в возникновении топологии—учения об инвариантах наиболее широких взаимно-однозначных и взаимно-непрерывных преобразований—*топологических преобразований*—сыграла известная *теорема Эйлера о многогранниках*. Эту теорему Эйлер опубликовал в «Началах учения о телах» [2]) и доказал в работе «Доказательство некоторых замечательных свойств, которыми обладают тела, ограниченные плоскими гранями» [3]). Эйлер

[1]) М. Шаль, цит. соч., ч. II, стр. 44—52.

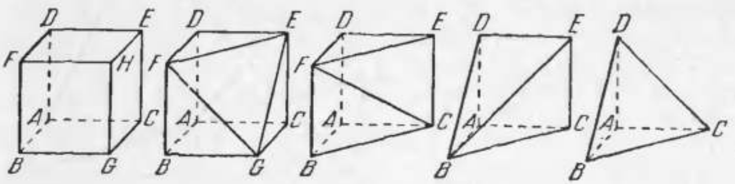
[2]) L. Euler, Elementa doctrinae solidorum.—Novi commentarii Acad. Sci. Petropol., т. 4 за 1752/53 г., СПб, 1758, стр. 109—140; Commentationes geometricae, т. I, стр. 71—93.

[3]) L. Euler, Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hederis planis inclusa sunt praedita.—Novi commen-

формулирует эту теорему следующим образом: «У всякого тела, ограниченного плоскими гранями, сумма числа телесных углов и числа граней превышает на два число ребер», т. е. если S—число телесных углов, H—число граней и A—число ребер, то

$$S+H=A+2.$$

В первой работе Эйлер проверяет это соотношение для пирамид, призм, правильных многогранников и некоторых других видов многогранников, а во второй работе



Черт. 13.

Эйлер дает доказательство этой теоремы. Многогранники, рассматриваемые Эйлером, предполагаются выпуклыми. Доказательство Эйлера состоит в том, что он удаляет грани многогранника, примыкающие к одной из его вершин и заменяет их гранями, вершинами которых являются остальные вершины удаленных граней. Полученный многогранник представляет собой выпуклую оболочку оставшихся вершин многогранника. При указанном процессе удаляется одна вершина и равное число граней и ребер, а добавляются грани и ребра, число первых из которых на 1 больше числа вторых, вследствие чего при указанном процессе число $S+H-A$ не изменяется. Повторяя этот процесс $S-4$ раз, мы дойдем до тетраэдра, для которого соотношение Эйлера проверено. На черт. 13 изображен процесс Эйлера преобразования куба в тетраэдр.

Как выяснилось впоследствии, теорема Эйлера о многогранниках была открыта в XVII веке Декартом, кото-

tarii Acad. Sci. Petropol., т. 4 за 1752/53 г., СПб, 1758, стр. 140—160; Commentationes geometricae, т. I, стр. 94—108.

рый писал, что в многограннике (также предполагавшемся выпуклым) «число плоских углов есть $2\varphi+2\alpha-4$», где φ—число граней, а α—число телесных углов (каждому ребру соответствуют два плоских угла) [1]), однако эта теорема не была опубликована Декартом при жизни, и работа Декарта о многогранниках стала известна только после опубликования неизданных трудов Декарта в XIX веке.

Теорема Эйлера о многогранниках верна не только для выпуклых многогранников, но и для всех многогранников, топологически эквивалентных выпуклым многогранникам (или сфере),—так называемых многогранников нулевого рода. Условия, при которых верна теорема Эйлера, были выяснены в 1812 г. швейцарским математиком Симоном Люилье (1750—1840) в его «Мемуаре о полиэдрометрии, содержащем прямое доказательство теоремы Эйлера о многогранниках и выявление различных исключений, допускаемых этой теоремой» [2]). Доказав, что теорема Эйлера справедлива только для многогранников нулевого рода, Люилье показывает, что для многогранников с p сквозными отверстиями («многогранников p-го рода») имеет место более общее соотношение

$$S+H-A=2-2p.$$

Число $S+H-A$, впервые рассматривавшееся Эйлером, в настоящее время называют *эйлеровой характеристикой* многогранника. Эйлерова характеристика одна и та же для топологически эквивалентных многогранников, т. е. эта характеристика является простейшим топологическим инвариантом многогранников. Поэтому преобразования многогранников, применяемые Эйлером, являются топологическими преобразованиями многогранников.

---

[1]) R. Cartesius, Mathematica. De solidorum elementis. Excerpta ex manuscripti Cartesii. В книге: Oeuvres inédites de Descartes. ed. Foucher de Careil, т. II, Париж, 1860, стр. 218.

[2]) S. Lhuilier, Mémoire sur la polyédrométrie; contenant une demonstration directe du théorème d'Euler sur les polyèdres et une examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti.—Annales Math. pures et appl., т. 3, 1812—1813, стр. 169—191.

В тех же работах Эйлер доказывает, что необходимым условием существования многогранника (предполагаемого выпуклым) с S вершинами, A ребрами и H гранями, помимо условия $S+H=A+2$, являются неравенства $3S\leqslant 2A$ и $3H\leqslant 2A$. Как показал в начале XX века Эрнст Штейниц, эти условия являются и достаточными для существования выпуклых многогранников. Здесь же Эйлер доказал, что не существует многогранника (также предполагаемого выпуклым), у которого каждая грань имела бы более пяти сторон или в каждой вершине сходилось бы более пяти граней.

Во второй из двух указанных работ о многогранниках Эйлер находит также формулы для объема тетраэдра по его ребрам и по трем ребрам, примыкающим к одной вершине и углам между ними, являющиеся пространственными аналогами формулы Герона, выражающей площадь треугольника через его стороны, и известной формулы, выражающей площадь треугольника через две его стороны и угол между ними. Если в тетраэдре $ABCD$ ребра $AB=a$, $AC=b$, $BC=c$, $AD=d$, $BD=e$, $CD=f$, то первая формула Эйлера может быть записана в виде [1])

$$V=\frac{1}{12}\sqrt{a^2f^2P+b^2e^2Q+c^2d^2R-a^2b^2c^2-a^2d^2e^2-b^2d^2f^2-c^2e^2f^2},$$

где

$$P=b^2+c^2+d^2+e^2-a^2-f^2,$$
$$Q=a^2+c^2+d^2+f^2-b^2-c^2,$$
$$R=a^2+b^2+e^2+f^2-c^2-d^2,$$

а если примыкающие к вершине A углы $BAC=p$, $BAD=q$, $CAD=r$, то вторая формула Эйлера может быть записана в виде [2])

$$V=\frac{1}{6}abd\sqrt{1-\cos^2 p-\cos^2 q-\cos^2 r-12\cos p\cos q\cos r},$$

$$V=\frac{1}{2}abd\sqrt{\sin\frac{p+q+r}{2}\sin\frac{p+q-r}{2}\sin\frac{p+r-q}{2}\sin\frac{q+r-p}{2}}\,.$$

---

[1]) L. Euler, Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, стр. 158—159; Commentationes geometricae, т. I, стр. 107.
[2]) L. Euler, там же, стр. 108 и 160.

8. Сферическая геометрия

Работы Эйлера, относящиеся к сфере, можно подразделить на две категории: работы, в которых рассматриваются свойства сферы, являющиеся обобщениями свойств окружности, и работы, в которых рассматриваются свойства сферы, являющиеся обобщениями свойств плоскости.

Примером работ первого типа является работа Эйлера «Легкое решение задачи о разыскании сферы, касающейся данных четырех сфер, расположенных как угодно» [1]).

Это—известная задача Ферма, являющаяся обобщением аналогичной задачи о кругах на плоскости, впервые решавшейся Аполлонием в его не дошедшем до нас трактате «О касаниях», восстановленном Франсуа Виетом под названием «Французский Аполлоний» [2]). Задачей Аполлония занимались многие математики, в частности Ньютон [3]). Указанная работа Эйлера является обобщением его же работы о задаче Аполлония «Легкое решение задачи о разыскании круга, касающегося трех данных кругов» [4]). Задача Ферма впервые решалась Ферма в работе «О сферических касаниях» [5]). И в работе о задаче Аполлония, и в работе о задаче Ферма Эйлер дает аналитическое решение с помощью тригонометрии.

Примером работ второго типа является работа Эйлера «Построение одной задачи Паппа Александрийского» [6]),

---

[1]) L. Euler, Solutio facilis problematis quo qaeritur sphaera quae datos quatuor sphaeros utcunque dispositas contingat.—Mémoires Acad. Sci. St. Pétersb., т. II за 1807/08 г., СПб, 1810, стр. 17—28; Commentationes geométricae, т. I, стр. 334—343.

[2]) Apollonius Gallus sive excuscitata Apollonii Perqaei De tactionibus geometria, ed. F. Vieta, Париж, 1600.

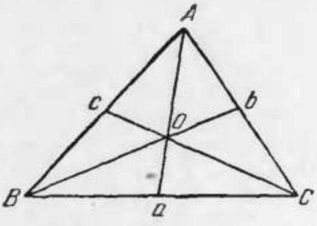
[3]) И. Ньютон, Математические начала, стр. 113, Всеобщая арифметика, стр. 198—199.

[4]) L. Euler, Solutio facilis problematis quo quaeritur circulus qui datos tres circulos tangat.—Nova Acta Acad. Sci. Petropol., т. 6 за 1788 г., СПб, 1790, стр. 95—101; Commentationes geometricae, т. I, стр. 270—275.

[5]) P. de Fermat, De contactibus sphaericis.—Varia opera mathematica, Тулуза, 1679, стр. 74—88; Oeuvres, ed. P. Tannery, C. Henry, т. I, Париж, 1891, стр. 52—69.

[6]) L. Euler, Problematis Pappi Alexandrini constructio.—Acta Acad. Sci. Petropol., т. 4 за 1780 г., ч. 1, СПб, 1783, стр. 91—96; Commentationes geometricae, т. I, стр. 237—242.

в которой дается аналитическое решение задачи о построении вписанного в круг треугольника, стороны которого или их продолжения проходят через три заданные точки. Эта задача является обобщением одной из задач «Математического собрания» Паппа, в которой предполагается, что три данные точки лежат на одной прямой. Решив эту задачу для треугольника на плоскости, Эйлер решает ее для сферического треугольника на поверхности сферы.



Черт. 14.

Другим примером работ Эйлера второго типа является его работа «Нечто геометрическое и сферическое»[1]), в которой доказывается теорема плоской геометрии, состоящая в том, что если в треугольнике ABC задана точка O и прямые AO, BO и CO пересекают противоположные стороны соответственно в точках a, b и c (черт. 14), то имеет место соотношение

$$\frac{AO}{Oa}\cdot\frac{BO}{Ob}\cdot\frac{CO}{Oc}=\frac{AO}{Oa}+\frac{BO}{Ob}+\frac{CO}{Oc}+2.$$

Доказав эту теорему, Эйлер также доказывает аналогичную теорему для сферического треугольника на поверхности сферы.

Непосредственно к сферической геометрии примыкают работы Эйлера по сферической тригонометрии: «Основания сферической тригонометрии, выведенные из метода максимумов и минимумов»[2]) и «Всеобщая сферическая тригонометрия, выведенная из первых оснований наиболее

[1]) L. Euler, Geometrica et sphaerica quodam.—Mémoires Acad. Sci. St. Pétersb., т. 5 за 1812 г., СПб, 1815, стр. 96—114; Commentationes geometricae, т. I, стр. 344—358.

[2]) L. Euler, Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et plus petits.—Hist. Mém. Acad. Sci. Berlin, т. 9 за 1753 г., Берлин, 1755, стр. 223—257; Commentationes geometricae, т. II, стр. 277—308.

коротко и ясно»[1]). Эйлер много занимался различными вопросами тригонометрии, в частности, как мы уже указывали, Эйлер создал учение о тригонометрических функциях как о числовых функциях углов и придал современный вид плоской и сферической тригонометрии. В указанных выше тригонометрических работах Эйлера содержатся все основные формулы сферической тригонометрии в их современном виде.

Важную роль в развитии сферической геометрии сыграли работы Эйлера «О мере телесных углов»[2]) и «Различные исследования о площади сферических треугольников»[3]). Эйлер находит различные выражения для площади сферического треугольника. В первой из этих работ Эйлер дает исключительно простое доказательство теоремы Альберта Жирара (1590—1634) о том, что площадь сферического треугольника равна произведению квадрата радиуса сферы на избыток суммы углов сферического треугольника над двумя прямыми углами, доказанной последним в его книге «Новое открытие в алгебре»[4]).

В своем доказательстве Эйлер рассматривает на сфере единичного радиуса треугольник ABC и равный ему треугольник abc с диаметрально противоположными вершинами (черт. 15). Углы треугольника ABC при вершинах A, B, C Эйлер обозначает соответственно α, β, γ. Тогда площади двуугольников $ABaC$, $BCbA$ и $CAcB$ соответственно равны 2α, 2β и 2γ. Так как каждый из этих двуугольников содержит данный треугольник ABC, площадь которого Эйлер обозначает через S оставшиеся части этих двууголь-

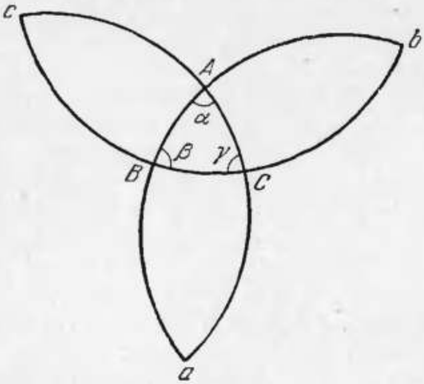
[1]) L. Euler, Trigonometria sphaerica universa ex primus principiis breviter et delucide derivata.—Acta Acad. Sci. Petropol., т. 3 за 1779 г., ч. 1, СПб, 1782, стр. 72—86; Commentationes geometricae, т. I, стр. 224—236.

[2]) L. Euler, De mensura angulorum solidorum.—Acta Acad. Sci. Petropol., т. 2 за 1778 г., ч. 2, СПб, 1781, стр. 31—54; Commentationes geometricae, т. I стр. 204—223.

[3]) L. Euler, Varia speculationes super area trianqulorum sphaericorum.—Nova Acta Acad. Sci. Petropol., т. 10 за 1792 г., СПб, 1797, стр. 47—62; Commentationes geometricae, т. IV, стр. 253—266.

[4]) A. Girard, Invention nouvelle en l'algèbre, Амстердам, 1629.

ников, являющиеся треугольниками aBC, bAC и cAB, соответственно равны $2\alpha - S$, $2\beta - S$, $2\gamma - S$. Площади треугольников abc, Abc, Bac и Cab соответственно равны площадям треугольников ABC, aBC, bAC и cAB. Так



Черт. 15.

как указанные восемь треугольников покрывают всю поверхность сферы, сумма их площадей равна площади поверхности сферы единичного радиуса, т. е. 4π. Таким образом,

$$2S + 2(\alpha+\beta+\gamma) - 3S + 2(\alpha+\beta+\gamma) - 3S =$$

$$= 4(\alpha+\beta+\gamma) - 4S = 4\pi,$$

откуда

$$S = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

В случае сферы радиуса R таким же образом доказывается, что

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Далее Эйлер находит ряд выражений площади сферического треугольника через его стороны (формулы даны для сферы единичного радиуса), простейшая из которых имеет вид [1])

$$\cos\frac{S}{2}=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Выше мы упоминали доказанную Эйлером теорему о том, что при всяком вращении сферы имеется диаметр, переходящий в себя, по существу равносильную теореме Даламбера. Следует отметить, что эта теорема сформулирована Эйлером как теорема сферической геометрии и что формулировка Эйлера справедлива не только для вращений первого рода, каковыми являются вращения твердых тел, но и для вращений второго рода.

Таким образом, эта теорема решает для сферической геометрии ту же задачу, которую решают для плоской геометрии исследования Эйлера о классификации движений плоскости в XV главе второго тома «Введения в анализ».

Исследования Эйлера по сферической геометрии широко продолжались его учениками—русскими академиками Андерсом-Иоганном Лекселем (1740—1784) и Николаем Ивановичем Фуссом (1775—1826). О первом из них Шаль в своем «Историческом обзоре» писал: «Мы не заметим, чтобы кто-нибудь пытался разрешить на сфере задачи, подобные задачам плоской геометрии, раньше Лекселя» [2]). Отзыв Шаля является, конечно, преувеличением, так как раньше Лекселя такими задачами занимался его учитель Эйлер, геометрические работы которого Шаль недооценивает, но Лексель, действительно, был одним из первых продолжателей Эйлера в этом направлении. Лексель доказал ряд теорем об окружностях на сфере, в частности показал, что геометрическим местом вершин сферических треугольников, имеющих общее основание и равную площадь, является малая окружность, проходящая через точки, диаметрально проти-

[1]) L. Euler, Varia speculationes super area triangulorum sphaericorum, стр. 47; Commentationes geometricae, т. IV, стр. 254.

[2]) М. Шаль, Цит. соч., ч. II, стр. 269.

воположные концам основания[1]). Фусс исследовал «сферический эллипс»—геометрическое место вершин сферических треугольников, имеющих общее основание и равную сумму боковых сторон, и показал, что эта линия высекается из сферы конусом второго порядка[2]). Следует также отметить работы по сферической геометрии продолжателя геометрических работ Эйлера Симона Люилье, которому принадлежит наиболее изящная формула, выражающая площадь сферического треугольника через его стороны: $\operatorname{tg}\frac{S}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}p\operatorname{tg}(p-a)\operatorname{tg}(p-b)\operatorname{tg}(p-c)}$, являющаяся непосредственным аналогом формулы Герона плоской геометрии[3]).
Здесь p—полупериметр треугольника ($a+b+c=2p$).

Сферическая геометрия Эйлера является первым примером *внутренней геометрии* кривой поверхности. Работы Эйлера по сферической геометрии и тригонометрии оказали несомненное влияние на Николая Ивановича Лобачевского (1792—1856), который основывал непротиворечивость открытой им неевклидовой геометрии на сравнении тригонометрических формул этой геометрии с формулами сферической тригонометрии в той форме, которую придал им Эйлер. Идея Эйлера решения на сфере задач, аналогичных задачам плоской геометрии, не могла не оказать непосредственное влияние на его современника, одного из предшественников Лобачевского—Иоганна-Генриха Ламберта (1728—1777). В своей «Теории параллельных линий» Ламберт рассматривал четырехугольник с тремя прямыми углами и высказывал три гипотезы относительно его четвертого угла: о том, что этот четвертый угол прямой, тупой и острый. Первая гипотеза приводила

---

1) A. J. L e x e l l, Solutio problematis geometrici ex doctrina sphericorum.—Acta Acad. Sci. Petropol., т. 5 за 1781 г., ч. 1, СПб., 1884, стр. 112—126.

2) N. F u s s, De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae.—Nova acta Acad. Sci. Petropol., т. 3 за 1785 г., СПб., 1888, стр. 90—99.

3) Формула Люилье впервые была опубликована в книге: A. M. L e g e n d r e, Eléments de geométrie, Париж, 1794.

к геометрии Евклида, а третья—к неевклидовой геометрии Лобачевского. Ламберт заметил, что вторая гипотеза выполняется на сфере, где площадь треугольника пропорциональна избытку его суммы углов над π, и показал, что при третьей гипотезе площадь треугольника пропорциональна недостатку его суммы углов до π. Сопоставляя эти результаты, Ламберт восклицает: «Мне кажется очень замечательным, что вторая гипотеза оправдывается, если вместо плоских треугольников возьмем сферические. Я из этого почти должен был бы сделать заключение, что третья гипотеза имеет место на какой-то мнимой сфере»[1]). И в самом деле, геометрия Лобачевского, на пороге открытия которой стоял Ламберт, может быть интерпретирована на сфере мнимого радиуса в так называемом псевдоевклидовом пространстве[2]).

9. Внутренняя геометрия поверхностей

Большинство дифференциально-геометрических работ Эйлера посвящено геометрии кривых на плоскости и в пространстве и поверхностей в пространстве. К ним относятся работы Эйлера по изучению радиусов кривизны плоских кривых. Наиболее важными являются работа «Легкий метод нахождения радиуса соприкасающегося круга, выведенный из принципа максимумов и минимумов»[3]), и работы по изучению кривизны поверхности, важнейшими из которых являются «Исследования о кривизне поверхностей»[4]), где выводится формула, известная

---

[1]) J. H. Lambert, Theorie der Parallellinien.—Magazin für reine und angewandte Mathematik, 1786, стр. 137—164, 325—358. См. стр. 356—357.

[2]) См. Б. А. Розенфельд, Интерпретации геометрии Лобачевского.—Историко-математические исследования, вып. IX, М., 1956, стр. 169—208: см. стр. 190—193.

[3]) L. Euler, Methodus facilis investigandi radium osculis ex principio maximarum et minimarum petita.—Nova acta Acad. Sci. Petropol., т. 7 за 1789 г., СПб., 1893, стр. 83—86; Commentationes geometricae, т. IV, стр. 156—160.

[4]) L. Euler, Recherches sur la courbure des surfaces.—Hist. Mém. Acad. Sci. Berlin, т. 16 за 1760 г., Берлин, 1767, стр. 119—147; Commentationes geometricae, т. III, стр. 1—22.

в настоящее время под названием формулы Эйлера. Формула выражает зависимость радиуса кривизны нормального сечения поверхности от экстремальных значений и этого радиуса и угла между плоскостью нормального сечения и плоскостью нормального сечения, соответствующего радиусу кривизны. Следует отметить также работу Эйлера «Легкий способ исследовать все свойства кривых линий, не расположенных в одной плоскости»[1]), в которой кладется основание изучению кривизны пространственной кривой и доказывается *первая формула Френе.*

Но ряд работ Эйлера посвящен и внутренней геометрии кривых поверхностей. Прежде всего он рассматривает внутреннюю геометрию эллипсоида вращения, мало отличающегося от сферы, в работе «Элементы тригонометрии сфероида, выведенные из метода максимумов и минимумов»[2]), которая применяется к тригонометрии реальной земной поверхности, имеющей приближенно форму сплющенного эллипсоида вращения.

К внутренней геометрии кривых поверхностей относятся работы Эйлера по изучению геодезических линий, первой из которых была работа «Кратчайшая линия на произвольной поверхности, соединяющая две призвольные точки»[3]), а последняя—«Тщательнейшее решение задачи о кратчайшей линии, проведенной на произвольной поверхности»[4]). Этой же задаче посвящено XCI предло-

---

[1]) L. E u l e r, Méthodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investignondi.—Acta Acad. Sci. Petropol., т. 6 за 1782 г., ч. 1, СПб., 1786, стр. 19—57; Commentationes geometricae, т. III, стр. 341—381.

[2]) L. E u l e r, Elémens de la trigonométrie sphéroidique tirés de la méthode des plus grands et plus petits.—Hist. Mém. Acad. Sci. Berlin, т. 9 за 1753 г., Берлин, 1755 г., стр. 258—293; Commentationes geometricae, т. II, стр. 309—339.

[3]) L. E u l e r, La linea brevissima in superficie quacunque duo quaclibet puncta jungente.—Commentarii Acad. Sci. Petropol., т. 3 за 1728 г., СПб., 1732, стр. 110—124; Commentationes analyticae ad calculum variationum pertinens. Opera omnia, серия 1, т, 25, ed. C. Carathéodory, Берн, 1952, стр. 1—12.

[4]) L. E u l e r, Accuratior evolutio problematis de linea brevissima in superficie quacunque ducenda.—Nova acta Acad. Sci. Petropol., т. 15 за 1799—1802 гг., СПб., 1806, стр. 44—45. Commentutiones analyticae, calc. var., стр. 269—279.

жение IV главы книги Эйлера «Механика»: «На данной произвольной поверхности определить линию, описываемую телом при отсутствии сил как в пустоте, так и в сопротивляющейся среде» [1]). Эйлер показывает, что эта линия является «кратчайшей», и дает изящный вывод основных геометрических свойств геодезических линий.

В упоминавшихся нами работах по картографии Эйлер систематически пользуется важнейшим понятием внутренней геометрии поверхности—линейным элементом. В работе «О представлении сферической поверхности на плоскости» Эйлер, сравнивая линейный элемент сферы с линейным элементом плоскости, доказывает невозможность изометрического отображения сферы на плоскость и ставит вопрос о трех видах отображения сферы на плоскость, наиболее важных для картографии: отображении, при котором меридианы и параллели изображаются ортогональной системой прямых, конформном отображении, сохраняющем углы между линиями, и эквиареальном отображении, сохраняющем площадь сферических областей. Остальные две картографические работы Эйлера посвящены исключительно конформному отображению сферы на плоскость.

Впервые линейный элемент появляется в работе Эйлера «О телах, поверхности которых могут быть развернуты на плоскость» [2]). Здесь Эйлер доказывает основную теорему о развертывающихся поверхностях, состоящую в том, что всякая поверхность, на которой в малом господствует геометрия евклидовой плоскости, т. е. которая может быть развернута на плоскость, является либо цилиндром, либо конусом, либо поверхностью, образованной касательными к пространственной кривой. В работе развертывающиеся поверхности характеризуются тем, что их линейные элементы совпадают с линейным элементом плоскости.

[1]) L. Euler, Mechanica, т. II, СПб., 1736, стр. 464; Opera omnia, серия II, т. 2, Лейпциг—Берлин, 1912, стр. 426.

[2]) L. Euler, De solidis quorum superficiem in planum explicare licet.—Novi commentarii. Acad. Sci. Petropol., т. 16 за 1771 г., СПб., 1772, стр. 3—34; Commentationes geometricae, т. III, стр. 161—186

В своих работах по внутренней геометрии поверхности Эйлер является непосредственным предшественником Карла Фридриха Гаусса (1777—1855), который в своих знаменитых «Исследованиях о кривых поверхностях» доказал основные теоремы внутренней геометрии поверхности. Исследования Гаусса в свою очередь послужили источником для глубоких идей римановой геометрии Бернгарда Римана (1826—1866), которая в своем дальнейшем развитии оказалась тесно связанной с теорией непрерывных групп преобразований Софуса Ли (1842—1899).

* * *

Наш краткий обзор показывает, что Эйлер исследует самые разнообразные виды геометрических преобразований:—движения и симметрии на плоскости, движения в пространстве, вращения сферы, преобразования, подобия, аффинные преобразования, конформные и, в частности, круговые преобразования плоскости. Одни из этих преобразований, движения и вращения, исследуются Эйлером подробно; относительно других—преобразований подобия и конформных преобразований, Эйлер доказывает некоторые основные теоремы, в теории третьих—аффинных и круговых преобразованиях, Эйлер делает первые шаги. Все работы Эйлера о геометрических преобразованиях объединяет общий подход—идея функциональной зависимости, особенно наглядно видная в его работах о конформном преобразовании. В то же время Эйлер своей теоремой о многогранниках и работами о внутренней геометрии поверхностей подготовляет почву для изучения других видов преобразований—топологических преобразований и непрерывных групп. Особенно сильно влияние геометрических идей Эйлера на таких крупных геометров XIX века, как Гаусс, Шаль и Мёбиус. Разработка сферической геометрии Эйлера оказала несомненное влияние на Ламберта и Лобачевского. Таково огромное значение работ Эйлера о геометрических преобразованиях.

ДРЕВНЕКИТАЙСКИЙ ТРАКТАТ «МАТЕМАТИКА В ДЕВЯТИ КНИГАХ»

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ «МАТЕМАТИКИ В ДЕВЯТИ КНИГАХ»

Выход в свет русского издания «Математики в девяти книгах» является весьма отрадным событием. Оно показывает, насколько советские ученые интересуются вопросами древнекитайской математики, и еще раз подтверждает на практике, какое большое внимание проявляют они по отношению к достижениям и развитию математических наук в Китае.

Публикуемый трактат является одним из замечательнейших математических памятников древнего Китая. Он был составлен не позже начала нашей эры. Об этом свидетельствует «История Поздней Хань»: «Ма Сюй (живший приблизительно в 90—140 гг. н. э.) в совершенстве владеет „Математикой в девяти книгах"». Известно, что после того, как «Математика» была прокомментирована Лю Хуэем в 263 г., ее редакция в последующих изданиях не менялась.

«Математика в девяти книгах» имела большое значение в развитии древней математики Китая. Во времена династии Тан она являлась одним из обязательных пособий при подготовке к экзаменам по математике.

Трактат написан на древнекитайском языке, поэтому он труден для чтения даже в самом Китае. Перевод его на русский язык является весьма нелегкой работой. Мы очень признательны тов. Э. И. Березкиной за ее стремление преодолеть немалые трудности при переводе трактата на русский язык; теперь впервые предоставляется возможность познакомиться с ним советским и, шире, европейским читателям. И это заслуживает всяческого одобрения.

Директор Математического института
Академии наук Китая
профессор *Хуа Ло-гэн*

О «МАТЕМАТИКЕ В ДЕВЯТИ КНИГАХ»

Э. И. Березкина

«Математика в девяти книгах» (Цзю чжан суань шу) является одним из замечательных памятников древнего Китая времен ранней Ханьской династии (206 г. до н. э.— 7 г. н. э.), когда в результате объединения страны в ней активизировалась политическая и культурная жизнь, а из наук особенно получили развитие астрономия и математика.

Этот трактат является своеобразной математической энциклопедией для землемеров, инженеров, астрономов, чиновников различных ведомств и т. д. Мы находим в нем разнообразный и богатый по содержанию математический материал: правила действий с дробями, алгоритм Евклида, пропорции и прогрессии, правила извлечения квадратного и кубического корней и обобщение первого на решение полного квадратного уравнения, вычисление различных площадей и объемов, теорему Пифагора и применение подобия прямоугольных треугольников, формулы для пифагоровых чисел, вопросы практической геометрии, решение систем линейных уравнений и др.

Уже при первом чтении трактата обращает на себя внимание неоднородность текста, одна часть которого отражает достаточно высокий уровень развития математики, а другая соответствует начальным ступеням развития науки. Будучи обработкой более ранних, не дошедших до нас математических текстов, «Математика в девяти книгах», подобно «Началам» Евклида, содержит значительную часть математических сведений, накопленных ко времени составления трактата. Этот трактат подобно «Началам», является, вероятно, для Китая того времени лучшей такой обработкой, которой отдавали предпочтение, благодаря чему она и сохранилась.

Исторические сведения о текстах, предшествовавших «Математике в девяти книгах», весьма скудны и иногда сомнительны. В летописях существует упоминание, что еще в XXVII веке до н. э. легендарный император Хуанди приказал Ли Шоу составить книгу по математике, которая называлась «Цзю шу Хуанди». Совершенно неизвестно, что это была за книга и существовала ли она вообще. Быть может, в этом упоминании лишь отражен факт безусловной давности математической культуры Китая. Следующее летописное свидетельство показывает, что в эпоху Чжоу в XII веке до н. э. Чжоу-гун по имени Дань написал «Цзю шу», по которой дети сановников учились математике. И эта книга до нас не дошла, но в позднейших летописях дается ее оглавление, почти совпадающее с оглавлением «Математики в девяти книгах». Названия заголовков следующие: фан чэн, су ми, ча фэнь, шао гуан, шан гун, цзюнь шу, ин бу цзу, пан яо, чжун ча, си цзе, дяо гу. При их сравнении с заглавиями книг «Математики в девяти книгах» видно, что первые восемь либо совпадают полностью, либо аналогичны по смыслу. Последний, девятый заголовок «Математики», по предположению многих ученых, объединил в себе материал последних четырех глав книги Чжоу-гуна. Отсюда, впрочем, не следует, что содержание обоих сочинений совпадало: в «Математике в девяти книгах» есть материал, свидетельствующий о высоком уровне развития математики, который был, несомненно, достигнут позднее эпохи Чжоу. Но мы уже отмечали, что в настоящем трактате встречается и такой материал, который явно должен быть отнесен к более раннему времени и, возможно, что он содержался в книге Чжоу-гуна.

При создании единого государства во времена Циньской династии (246—207 гг. до н. э.) по приказу императора Ши Хуанди с целью уничтожения всякой мысли, направленной против централизации страны, были сожжены многие конфуцианские книги, исторические хроники и классические труды. Быть может, это не касалось трудов по математике, но в последующее время реконструкция культурного наследия была распространена и на математические сочинения. Первым, кто во времена династии Хань собрал имевшиеся материалы в книгу, был Чжан Цан. О Чжан Цане известно немногое. Он был чиновником во времена династии Цинь, а при первом ханьском императоре состоял первым министром, считался выдающимся деятелем, особенно в финансовой сфере, занимался астрономией и астрологией. Умер Чжан Цань в 152 г. до н. э., прожив около ста лет. Вторичной обработке произведение подверг Гэн Чоу-чан, занимавший пост министра при императоре Сюань-ди (73—48 гг. до н. э.). Настоящий вид сочинение приобрело после его комментирования в 263 г. математиком Лю Хуэем. В дальнейшем «Математику в девяти книгах» стремились комментировать многие другие ученые: Чжань Луань (VI в.), Ли Чун-фэн (VII в.) и др. Во времена династии Тан (618—907 гг.) этот трактат стал одним из учебников при подготовке к государственным экзаменам на получение звания и получил поэтому широкое распространение. Во времена династии Сун и Юань (X—XIII вв.), когда математика в Китае достигла своего наибольшего расцвета, многие ученые отправлялись в своих исследованиях от вопросов, содержащихся в этом трактате.

Итак, более ранние математические тексты не дошли до нас, и «Математика в девяти книгах» является первым в ряду классических собственно математических сочинений Древнего Китая. Правда, есть еще одно более раннее сочинение «Чжоу-би суань цзин», но оно относится более к астрономии, чем к математике (чжоу-би—шест для измерения длины солнечной тени), хотя его содержание проливает некоторый свет на историю теоремы Пифагора в Древнем Китае.

Прежде чем рассмотреть содержание «Математики в девяти книгах», остановимся на форме и характере изложения материала.

Текст состоит из формулировок условий задач, которые сопровождаются ответами. После каждой задачи или группы аналогичных задач обычно следует правило их решения, чаще всего описывающее в общем виде формулу для вычисления искомой величины (например, формулы площадей в книге I, формулы объемов в книге V и т. д.), или общий алгоритм решения данного типа задач (например, правила к задачам 33—46 книги II, правило «избыток—недостаток» в начале книги VII, правило «фан-чэн» в книге VIII и др.). Общее правило может помещаться перед данной группой задач и тогда обычно, хотя и не всегда, после каждой такой задачи дается еще «числовое» правило, т. е. указание, в каком порядке и какие производить действия над заданными числами, чтобы получить искомую величину (см., например, правила к задачам первых половин книг II, III, IV). Но даже в таких частных правилах видно стремление возможно более общим образом описать решение задачи. В тексте нет объяснений, как получены правила, почему выбирается тот или иной ход решения, нет доказательств, пояснительных чертежей, определений. Все это осложняет выяснение картины математических знаний, которыми располагали древние китайцы. В этом отношении трактат не является исключением из общего числа восточных руководств по математике, которым свойственно догматическое изложение материала.

Сочинение состоит из девяти довольно самостоятельных книг (чжанов или цзюаней). Каждая книга представляла собой свиток и не была органически связана с другими; она должна была содержать в себе весь материал, посвященный какой-либо теме, и иметь до известной степени завершенный, законченный характер.

Рассмотрим содержание трактата по книгам.

Книга I «Измерение полей» содержит задачи на вычисление площадей полей различной геометрической формы: прямоугольных, треугольных, в виде трапеции, круга, сегмента, сектора и кольца. Площади прямолинейных фигур вычисляются по правилам, совпадающим с общеизвестными. Площади круга, сектора и кольца определяются при $\pi=3$. Площадь сегмента вычисляется приближенно.

Стороны полей задаются как целыми, так и дробными числами. Поэтому вслед за первыми задачами, устанавливающими по существу соотношения между единицами длины и площади, идут задачи на действия с дробями: их сокращение, сложение, вычитание, деление и умножение; только затем производится измерение полей. При сокращении дробей общий наибольший делитель числителя и знаменателя находится по алгоритму, совпадающему с евклидовым. Последний дан в «Началах», как известно, в геометрической форме. Китайский алгоритм в отличие от него дан в чисто арифметической формулировке. Деление дробей здесь производится путем приведения их к общему знаменателю.

Интересно обратить внимание на качественную сторону материала книги I. Прежде всего отметим, что измерение земельных участков мы находим также в египетских надписях на стенах храма в Эдфу, где помещены списки подаренных полей, а также в вавилонских клинописных таблицах, содержащих «планы полей». Таким образом, у всех древних народов вопросы, связанные с измерением участков, возникают на самых первоначальных ступенях развития науки. Для всех этих текстов характерно отсутствие формулы для площади параллелограмма. Видимо, для земельного участка такая форма была неестественной. Вряд ли в земледелии часто встречается также кольцеобразное поле. Однако в обыденной жизни круг и его части широко применялись и потому формулы для площадей этих фигур также включены под видом «полей» в первую книгу.

Текст книги I помогает выяснить ряд интересных вопросов, относящихся к формированию и развитию основных математических понятий: числа, площади. Более подробно об этом см. примечания к книге I.

В книге II «Соотношение между различными видами зерновых культур» помещены задачи, в которых определяется по трем заданным величинам четвертая пропорциональная, т. е. на так называемое тройное правило. Задачи, основанные на пропорциональной зависимости, т. е. задачи на простое и сложное тройное правило, на пропорциональное и обратно пропорциональное деление, занимают значительное место в трактате, они встречаются и в других книгах. Что касается книги II, то здесь следует сделать два замечания. Первое относится к сопоставлению общего и частных правил задач первой половины книги, из которого следует, что деление дробей производилось по обычному алгоритму. Это подтверждается также задачами 1—12 книги IV.

Другое замечание относится к задачам 32—46, где определяется стоимость покупаемого предмета. Они рассматриваются как задачи на деление: сначала решение сводится к делению на целое число, затем на дробное, а далее задача обобщается, так что она сводится, вообще говоря, к трем линейным уравнениям с четырьмя неизвестными. Однако решение ее единственное и находится также делением: подробнее об этом говорится в соответствующих примечаниях. Эти задачи были, вероятно, помещены в книгу II позже, так как они не отвечают теме ее заголовка и включены потому, что нахождение искомой величины x делением $x=\frac{A}{n}$ основано на пропорциональной зависимости: $\frac{x}{1}=\frac{A}{n}$. Действительно, в книге III «Деление по ступеням», которая начинается задачами на деление пропорционально и обратно пропорционально заданным числам, содержатся задачи на простое и сложное тройное правило. В сопровождающих правилах специально указывается случай умножения A на единицу.

Книга IV «Шао-гуан» знакомит нас с древнекитайским методом извлечения квадратных и кубических корней, который возник благодаря применению формулы разложения квадрата и куба бинома к счетной доске, где обычно производились вычисления. В методе содержится возможность обобщения на случай решения полного квадратного или кубического уравнения и, шире, начала так называемого метода Руффини—Горнера.

В начале книги IV находятся задачи, содержащие алгоритм деления на дробь, данные в своеобразной геометрической форме, относительно которых можно сделать различные суждения. См. примечание 1 и следующие к книге IV. Здесь же мы встречаемся с египетскими дробями—долями единицы (но не с египетскими приемами вычислений).

В книге V «Оценка работ» вычисляются объемы геометрических тел: параллелепипеда, полных и усеченных пирамиды и конуса, цилиндра, обелиска и некоторых призматических тел. Сферы здесь нет, хотя по последним задачам книги IV и VI можно видеть, что ее объем вычислять умели—еще одна наглядная демонстрация независимости книг друг от друга.

Вышеуказанные задачи предшествуют задачам на определение объемов различных гидротехнических сооружений вместе с расчетами рабочей силы, требующейся для выполнения строительства объекта, в зависимости от разного рода условий и т. п. Аналогичные задачи содержатся в вавилонских текстах, сравнение с которыми позволяет сделать нам в комментариях некторые историко-математические заключения относительно содержания книги V.

Книга VI «Пропорциональное распределение» в своей первой части по содержанию перекликается с книгой III: в ней также помещены задачи на пропорциональное деление и простое и сложное тройное правило. Но условия этих задач более сложные, чем в книге III, и требуют иногда довольно больших вычислений. Помимо этого, книга VI содержит еще ряд арифметических задач, например так называемые задачи на совместную работу, задачи на прогрессии и т. д. В последних мы обнаруживаем решение, по идее аналогичное решению одной вавилонской задачи подобного рода. В этой же книге мы встречаемся с примерами округления чисел, которое отчасти применялось еще в книге V.

Книга VII «Избыток—недостаток» и книга VIII «Правило „фан-чэн“» могут быть названы в противовес предыдущим алгебраическими. Это наиболее красивые книги трактата. Содержание их математически однородно. Например, книга VIII содержит задачи, которые сводятся к системам линейных уравнений, решенных с помощью правила «фан-чэн», по своей идее довольно близкого к правилу Крамера. Рассматриваются только совместные системы, корни только положительные, и системы решаются не более чем из пяти уравнений. Среди них есть неопределенная система пяти линейных уравнений с шестью неизвестными, причем приводится минимальное положительное целое решение.

В этой же книге мы встречаемся с другим замечательным открытием древних китайских математиков—отрицательными числами, которые получаются уже при приведении системы к каноническому виду, а также при преобразовании первоначальной матрицы к треугольной.

Если книга VIII является вершиной, которой достигла в своем развитии математика Китая к началу нашей эры, то книга VII позволяет взглянуть на сам процесс этого развития: она показывает «кухню» древнего китайского математика.

Книгу VII можно разделить на две части, первая из которых посвящена задачам, сводящимся к одному частному виду системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, когда коэффициент при y равен —1. Вторая часть состоит из разнообразных задач, решенных с помощью метода двух ложных положений. В обоих случаях даны правила, конструирующие искомые величины из таблиц, составленных из двух пар чисел, взятых или же полученных из условия задачи.

Разработка этих двух типов задач в виде некоторого табличного способа, иначе говоря, принцип объединения разных правил под одним заголовком, показывает характерную особенность и уровень математического мышления древнего китайского математика. Прежде чем остановиться на этом вопросе подробнее, сделаем замечание относительно характера изложения материала в книге VII, которое будет служить одной из иллюстраций особенностей стиля трактата.

Содержание метода двух ложных положений можно выяснить только по правилам к последним задачам книги VII, тогда как в первых таких задачах он лишь называется, но абсолютно не поясняется. Дело осложняется еще тем, что этот метод называется «избыток—недостаток», точно так же, как предыдущий метод, которым решаются вышеуказанные системы двух линейных уравнений; кроме того, ряд задач на правило двух ложных положений сводится к решению систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. В результате остается совершенно неясным из очень кратких правил, которыми сопровождаются эти задачи, как проведено решение. Все это создает дополнительные затруднения при чтении текста и не способствует выяснению существа математического содержания книги.

Из сказанного видно, что для китайской математики характерно ярко выраженное вычислительно-алгоритмическое направление. Каждый вопрос математик старался свести к правилу, состоящему из последовательного выполнения некоторого числа шагов.

Для производства вычислений в Древнем Китае пользовались счетной доской. Описания ее и правил действий над целыми числами в трактате нет, поскольку, вероятно, доска была широко известна и правила действий на ней объяснялись устно. Числа на доске изображались с помощью счетных палочек. Десятичная система счисления с мультипликативным принципом записи на ней, очевидно, превращалась в позиционную, а изображением нуля служил пропуск—пустое место. Дроби (т. е. собственно их числители и знаменатели) также выкладывались на доске. Техника счета, при которой из вновь полученных числителя и знаменателя необходимо было составить конечный результат (см. примечание 10 к книге I), привела к понятию дроби в качестве числа. Действия на доске объясняют характер алгоритма вычислений корней системы линейных уравнений: коэффициенты системы располагались на доске в виде таблицы, и было замечено, что с ними можно поступать регулярным образом во всех случаях. Естественно появление при этом отрицательных чисел, которые, возможно, как и мнимые, были введены сначала формально, в качестве промежуточных результатов, при преобразовании матрицы системы и обозначались палочками другого цвета [1]). Доске, по-видимому, обязан своим происхождением способ Руффини—Горнера, поскольку он возник в результате обобщения правила извлечения корней, разработанного на основе формулы бинома в применении к счетной доске.

[1]) Ср. А. П. Юшкевич, О достижениях китайских ученых в области математики.—Историко-математические исследования, вып. VIII, 1955.

Доска для вычислений являлась, таким образом, некоторой простейшей счетной машиной, которая требовала создания для нее программы, т. е. алгоритма. И китайский математик стремился решение для проблемы выразить в виде общего правила, четко определяющего ход конструирования искомой величины.

Остановимся еще на книге IX «Соотношение между катетами и гипотенузой в прямоугольном треугольнике». Она содержит геометрические задачи, решаемые на основании теоремы Пифагора и свойств подобных прямоугольных треугольников. Книга интересна тем, что здесь алгебра систематически применяется к решению геометрических задач.

Здесь же мы встречаемся с интересным случаем (см. задачи 14, 21 книги IX), из которого узнаем, что китайцам были известны формулы для пифагорейских чисел, т. е. решение уравнения $x^2+y^2=z^2$ в целых числах. Решение квадратного уравнения в книге производится не только обычным образом, но и численным методом, являющимся обобщением извлечения квадратного корня на случай нахождения корня полного квадратного уравнения. Эта идея затем была разработана китайскими математиками далее, а наиболее полное развитие получила в трудах ученого XIII века Цинь Цзю-шао. Последние задачи книги показывают, что в древнем Китае занимались измерением расстояний до недоступных предметов и их размеров.

Из обзора содержания трактата виден традиционный, практический принцип расположения материала по книгам: измерение полей, установление эквивалентности между различными видами зерновых культур, распределение доходов, оценка земляных работ и т. д. Происходит это потому, что древние математические тексты предназначались для чиновников различных ведомств, которые должны были уметь распределять и подсчитывать налоги, измерять земельные участки, вести расчеты при строительстве и т. п. Из обзора также видно, каким образом обрабатывался в дальнейшем этот материал, дополняясь по принципу единства математического метода задачами, не носящими практического характера.

Предлагаемый читателю древнекитайский классический труд интересен как с точки зрения изучения успехов китайских математиков, достигнутых к началу нашей эры, так и с точки зрения исследования материала гораздо более ранних времен. Последнее особенно интересно, потому что изучение математики древнего общества обычно производится по весьма немногочисленным текстам. В нашем распоряжении есть всего два случайных древнеегипетских папируса, серия многочисленных, но разрозненных клинописных вавилонских табличек, немногие древнеиндийские тексты. Подробное изучение древней китайской математики весьма дополнило бы общую картину состояния науки Древнего Востока. Заметим, что уже первое рассмотрение данного трактата ставит вопрос о связях Китая с Индией, Вавилоном и, быть может, другими странами; во всяком случае оно свидетельствует о важных параллелях в развитии математики этих стран.

История китайской математики в последнее время вызывает усиленный интерес историков науки. Она служит также для характеристики общей истории культуры великого народа. Для советских ученых история китайской математики особенно интересна в силу связей, которые существовали между математикой Китая и математикой народов Средней Азии. Однако в настоящее время история китайской математики изучена еще далеко недостаточно. Хотя сохранился ряд древних математических произведений, они практически для большинства исследователей не доступны, так как написаны на древнем языке. Что касается «Математики в девяти книгах», то главная трудность перевода состоит в том, что древней догматической манере изложения соответствовал чрезвычайно краткий и лишенный объяснений или доказательств текст, причем значения встречающихся древних терминов в настоящее время нередко не известны. Этим объясняется то, что до сих пор этот ценнейший в историко-математическом отношении трактат не был переведен ни на один из европейских языков. Настоящий перевод имеет целью сделать классическое китайское сочинение доступным широким кругам интересующихся историей Китая.

Перевод выполнен с текста, который находится в I и II томах собрания «Десять математических классиков» (Суань цзин ши шу), изданных в 1930 г. в Шанхае. Составление сборника относится ко времени Танской династии (618—907 гг.), когда им начали пользоваться при сдаче экзаменов на получение звания. Используемая для перевода книга является фотоофсетной копией с издания XVIII века, а последнее в свою очередь было выпущено на основании издания времен династии Сун (960—1279 гг.), экземпляр которого является самым ранним из сохранившихся и находится в хранилище Государственной Пекинской библиотеки.

Оригинал содержит построчные комментарии Лю Хуэя, напечатанные мелким шрифтом. Они носят самостоятельный характер и частично были использованы при переводе. Нумерация задач, осуществленная в переводе для удобства ссылок, в подлиннике отсутствует. В квадратных скобках стоят слова, добавленные при переводе для ясности или связности текста, а также номера моих примечаний, которые помещены вслед за переводом.

При переводе текста неоценимую помощь оказал доц. Чжоу Сун-юань. Доц. И. Г. Башмакова и доц. Чжоу Сун-юань являлись моими руководителями в этой работе, и я обязана им очень многими важными указаниями, использованными также при составлении примечаний и в настоящей статье. Проф. Ли Янь (Пекин) любезно помог мне разобрать ряд трудных мест трактата и беседы с ним позволили выяснить некоторые неясные вопросы. Проф. А. П. Юшкевич при редактировании текста также сделал многие ценные исправления и замечания в переводе, комментариях и статье. Наконец, я весьма обязана научному семинару проф. А. П. Юшкевича и проф. С. А. Яновской по истории математики при МГУ, где обсуждались мои доклады, а также ряду китайских товарищей, с большим вниманием относившихся к моей работе. Всем им я выражаю искреннюю и глубокую благодарность.

МАТЕМАТИКА В ДЕВЯТИ КНИГАХ

九章算術

Перевод Э. И. Березкиной

Книга I. Измерение полей [1]

1. Имеется поле шириною в 15 [2] бу [3], длиною в 16 бу. Спрашивается, каково поле?
   Ответ: 1 му.
2. Имеется другое поле шириною в 12 бу, длиною в 14 бу. Спрашивается, каково поле?
   Ответ: 168 бу [4].

Измерение поля

Правило: перемножь количества бу ширины и длины, получишь площадь [5] в бу.
Чтобы выделить му, раздели на 240 бу, это и будет количество му. 100 му есть 1 цин.

3. Имеется поле шириною в 1 ли, длиною в 1 ли. Спрашивается, каково поле?
   Ответ: 3 цина 75 му.
4. Имеется другое поле шириною в 2 ли, длиною в 3 ли. Спрашивается, каково поле?
   Ответ: 22 цина 50 му.

Измерение поля в ли

Правило: перемножь количества ли ширины и длины, получишь площадь в ли. Умножь на 375, это и будет количество му.

5. Имеется $\frac{12}{18}$ [6]. Спрашивается, сколько получится, если сократить?

Ответ: $\frac{2}{3}$.

6. Теперь имеется $\frac{49}{91}$. Спрашивается, сколько получится, если сократить?

Ответ: $\frac{7}{13}$.

Сокращение дробей

Правило: то, что можешь разделить пополам, раздели пополам; если нельзя разделить пополам, то установи [7] количества числителя и знаменателя, из большего вычти меньшее; продолжай взаимно уменьшать до тех пор, пока не получатся равные [числа]; на это равное число и сократи [8].

7. Имеется $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{5}$. Спрашивается, сколько получится, если их сложить?

Ответ: $\frac{11}{15}$.

8. Теперь имеется $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$. Спрашивается, сколько получится, если их сложить?

Ответ: $1\frac{50}{63}$.

9. Теперь имеется $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$. Спрашивается, сколько получится, если их сложить?

Ответ: $2\frac{43}{60}$.

Сложение дробей

Правило: числители поочередно умножь [9] на знаменатели, сложи — это делимое. Перемножь знаменатели — это делитель. Объедини делимое и делитель [10]. Если делитель больше делимого, то обозначь делитель. Если их знаменатели одинаковы, то прямо складывай.

10. Имеется $\frac{8}{9}$, вычти $\frac{1}{5}$. Спрашивается, каков остаток?

Ответ: $\frac{31}{45}$.

11. Теперь имеется $\frac{3}{4}$, вычти $\frac{1}{3}$. Спрашивается, каков остаток?

Ответ: $\frac{5}{12}$.

Вычитание дробей

Правило: числители поочередно умножь на знаменатели, из большого вычти меньшее, остаток есть делимое. Перемножь знаменатели, это делитель. Объедини делимое и делитель.

12. Имеется $\frac{5}{8}$, $\frac{16}{25}$. Спрашивается, которая из них больше и насколько больше?

Ответ: $\frac{16}{25}$ больше, больше на $\frac{3}{200}$.

13. Теперь имеется $\frac{8}{9}$, $\frac{6}{7}$. Спрашивается, которая из них больше и насколько больше?

Ответ: $\frac{8}{9}$ больше, больше на $\frac{2}{63}$.

14. Теперь имеется $\frac{8}{21}$, $\frac{17}{50}$. Спрашивается, которая из них больше и насколько больше?

Ответ: $\frac{8}{21}$ больше, больше на $\frac{43}{1050}$.

Сравнение дробей

Правило: числители поочередно умножь на знаменатели, из большего вычти меньшее, остаток будет делимым. Перемножь знаменатели — это делитель. Объедини делимое и делитель — это и будет то, насколько одна [дробь] больше другой.

15. Имеется $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. Спрашивается, сколько прибавить, сколько убавить у каждой [дроби], чтобы уравнять их?

Ответ: если от $\frac{3}{4}$ отнимешь 2 [двенадцатых] [11], от $\frac{2}{3}$ отнимешь 1 [двенадцатую], сложишь [2 и 1] и прибавишь к $\frac{1}{3}$, то каждая [дробь] будет равна $\frac{7}{12}$.

16. Теперь имеется $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. Спрашивается, сколько прибавить, сколько убавить у каждой [дроби], чтобы уравнять их?

Ответ: если от $\frac{2}{3}$ отнимешь 1 [тридцать шестую], а от $\frac{3}{4}$ отнимешь 4 [тридцать шестых], сложишь [1 и 4] и прибавишь к $\frac{1}{2}$, то каждая [дробь] будет равна $\frac{23}{36}$.

Уравнение дробей [12]

Правило: числители поочередно помножь на знаменатели, сопоставь и сложи, это уравненное делимое [13]. Перемножь знаменатели, это делитель [14]. Количество рядов [15] умножь на каждое еще не сложенное [количество], это рядовые делимые. Также количество рядов умножь на делитель [16]. Убавь рядовые делимые на уравненное делимое, остатки сократи [17], это будут разности. Сложи эти разности, прибавь к меньшему [18]. К уравненному делимому назови делитель [19], каждая [дробь] получает свое равное [значение].

17. Имеется 7 человек, делится [между ними] $8\frac{1}{3}$ цяня. Спрашивается, сколько получит [каждый] человек?

Ответ: человек получит $1\frac{4}{21}$ цяня.

18. Теперь имеется $3\frac{1}{3}$ человека [20], делится [между ними] $6\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{4}$ цяня. Спрашивается, сколько получит [каждый] человек?

Ответ: человек получит $2\frac{1}{8}$ цяня.

Деление дробей [21]

Правило: количество людей возьми в качестве делителя, количество цяней—в качестве делимого. Объедини делимое и делитель. Если имеются дроби, то приведи их к общему знаменателю. Если еще имеются дроби, то таким же образом приведи их к общему знаменателю [22].

19. Имеется поле шириною в $\frac{4}{7}$ бу, длиною в $\frac{3}{5}$ бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: $\frac{12}{35}$ бу.

20. Имеется другое поле шириною в $\frac{7}{9}$ бу, длиною в $\frac{9}{11}$ бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: $\frac{7}{11}$ бу.

21. Имеется другое поле шириною в $\frac{4}{5}$ бу, длиною в $\frac{5}{9}$ бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: $\frac{4}{6}$ бу.

Умножение дробей

Правило: знаменатели перемножь, это делитель. Числители перемножь, это делимое. Объедини делимое и делитель.

22. Имеется поле шириною в $3\frac{1}{3}$ бу, длиною в $5\frac{2}{5}$ бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 18 бу.

23. Имеется другое поле шириною в $7\frac{3}{4}$ бу, длиною в $15\frac{5}{9}$ бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: $120\frac{5}{9}$ бу.

24 Имеется другое поле шириною в $18\frac{5}{7}$ бу, длиною в $23\frac{6}{11}$ бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 1 му $200\frac{7}{11}$ бу.

Общее измерение полей

Правило: знаменатель каждой дроби умножь на ее целую часть, прибавь к этому числитель, перемножь, это делимое. Перемножь знаменатели, это делитель. Объедини делимое и делитель.

25. Имеется треугольное поле шириною в 12 бу, прямой длиною [23] в 21 бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 126 бу.

26. Имеется другое треугольное поле шириною в $5\frac{1}{2}$ бу, длиною [24] в $8\frac{2}{3}$ бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: $23\frac{5}{6}$ бу.

Правило: половину ширины умножь на прямую длину.

27. Имеется косое поле, один конец шириною в 30 бу, другой конец шириною в 42 бу, прямая длина в 64 бу [25]. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 9 му 144 бу.

28. Имеется другое косое поле, прямая ширина в 65 бу, одна боковая длина в 100 бу, другая боковая длина в 72 бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 23 му 70 бу.

Правило: сложи обе [стороны] поля, раздели пополам, умножь на прямую длину или на прямую ширину. И можно половину прямой длины или ширины умножить на сложенные [стороны] поля. Выдели му.

29. Имеется поле в виде совка, передняя ширина в 20 бу, задняя ширина в 5 бу, прямая длина в 30 бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 1 му 135 бу.

30. Имеется другое поле в виде совка, передняя ширина в 117 бу, задняя ширина в 50 бу, прямая длина в 135 бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 46 му 232 бу с половиной.

Правило: сложи переднюю и заднюю ширины, раздели пополам, умножь на прямую длину, выдели му.

31. Имеется круглое поле, обвод его в 30 бу, диаметр в 10 бу [26]. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 75 бу.

32. Имеется другое круглое поле, обвод его в 181 бу, диаметр в $60\frac{1}{3}$ бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 11 му $90\frac{1}{12}$ бу.

Правило: умножь половину обвода на половину диаметра, получишь площадь в бу.

Другое правило: умножь обвод на диаметр, раздели на 4 и возьми 1 раз.

Другое правило: умножь диаметр сам на себя, раздели на 4 и возьми 3 раза.

Другое правило: умножь обвод сам на себя, раздели на 12 и возьми 1 раз.

33. Имеется кривое поле [27], нижний обвод в 30 бу, диаметр в 16 бу [28]. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 120 бу.

34. Имеется другое кривое поле, нижний обвод в 99 бу, диаметр в 51 бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 5 му $62\frac{1}{4}$ бу.

Правило: диаметр умножь на обвод, раздели на 4 и возьми 1 раз.

35. Имеется поле в виде лука [29], тетива в 30 бу, стрела в 15 бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 1 му 97 бу с половиной.

36. Имеется другое поле в виде лука, тетива в $78\frac{1}{2}$ бу, стрела в $13\frac{7}{9}$ бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 2 му $155\frac{56}{81}$ бу.

Правило: умножь тетиву на стрелу, умножь еще стрелу на себя, сложи, раздели на 2 и возьми 1 раз [30].

37. Имеется поле в виде кольца, внутренний обвод в 92 бу, внешний обвод в 122 бу, диаметр [кольца] [31] в 5 бу. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 2 му 55 бу.

38. Имеется другое поле в виде кольца, внутренний обвод в $62\frac{3}{4}$ бу, внешний обвод в $113\frac{1}{2}$ бу, диаметр [кольца] $12\frac{2}{3}$ бу [32]. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 4 му $156\frac{1}{4}$ бу.

Правило: сложи внутренний и внешний обводы, возьми их половину, умножь на диаметр, получится площадь в бу. Более точно правило гласит: установи количество бу во внутреннем и внешнем обводах, каждый из числителей и знаменателей дробей займет место один под другим. Знаменатели поочередно умножь на числители. Перемножь знаменатели дробей. Целую часть [количества] бу переведи в числитель дроби [33]. Сложи и возьми половину. Также можно из внешнего обвода вычесть внутренний обвод, остаток разделить пополам и добавить внутренний обвод. [Целую часть количества] диаметра также переведи в числитель дроби. Умножь на обвод [34], это делимое. Знаменатели дробей перемножь, это делитель. Раздели на него, будет площадь в бу. Остаток площади в бу [35] сократи на равное число [36]. Делением [на 240 кв. бу] выдели му, это и будет количество му.

Книга II. Соотношение между различными видами зерновых культур [1]

Правило соотношения между различными видами зерновых культур

Просо — основная норма [2]	50
Грубо обработанное пшено	30
Очищенное пшено	27
Хорошо очищенное пшено	24
Пшено для князей	21
Мелкая крупа	13 с половиной [3]
Крупная крупа	54
Вареное грубо обработанное пшено	75
Вареное очищенное пшено	54
Вареное хорошо очищенное пшено	48
Вареное пшено для князей	42
Бобы, горох, кунжут, пшеница — каждое	45
Рис неочищенный	60
Приготовленные бобы	63
Каша	90
Вареные бобы	103 с половиной
Хмель	175

Имеется [4]

Правило: количество имеющегося [вида зерна] умножь на норму искомого, это делимое. Норма имеющегося [вида зерна] есть делитель. Объедини делимое и делитель.

1. Имеется 1 доу проса [5]. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить грубо обработанное пшено?

Ответ: грубо обработанного пшена станет 6 шэнов.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] грубо обработанного пшена, разделив на $\frac{5}{3}$ [6].

2. Имеется 2 доу 1 шэн проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить очищенное пшено?

Ответ: очищенного пшена станет 1 доу $1\frac{17}{50}$ шэна.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] очищенного пшена, разделив на $\frac{50}{27}$.

3. Имеется 4 доу 5 шэнов проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить хорошо очищенное пшено?

Ответ: Хорошо очищенного пшена станет 2 доу $1\frac{3}{5}$ шэна.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] хорошо очищенного пшена, разделив на $\frac{25}{12}$.

4. Имеется 7 доу 9 шэнов проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить пшено для князей?

Ответ: пшена для князей станет 3 доу $3\frac{9}{50}$ шэна.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] пшена для князей, разделив на $\frac{50}{21}$.

5. Имеется 1 доу проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить мелкую крупу?

Ответ: мелкой крупы станет $2\frac{7}{10}$ шэна.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] мелкой крупы, разделив на $\frac{100}{27}$.

6. Имеется 9 доу 8 шэнов проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить крупную крупу?

Ответ: крупной крупы станет 10 доу $5\frac{2}{25}$ шэна.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] крупной крупы, разделив на $\frac{25}{27}$.

7. Имеется 2 доу 3 шэна проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить вареное грубо обработанное пшено?

Ответ: вареного грубо обработанного пшена станет 3 доу 4 шэна с половиной.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] вареного грубо обработанного пшена, разделив на $\frac{2}{3}$.

8. Имеется 3 доу 6 шэнов проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить вареное очищенное пшено?

Ответ: вареного очищенного пшена станет 3 доу $8\frac{22}{25}$ шэна.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] вареного очищенного пшена, разделив на $\frac{25}{27}$.

9. Имеется 8 доу 6 шэнов проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить вареное еще более очищенное пшено?

Ответ: вареного хорошо очищенного пшена станет 8 доу $2\frac{14}{25}$ шэна.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] вареного хорошо очищенного пшена, разделив на $\frac{25}{24}$.

10. Имеется 9 доу 8 шэнов проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить вареное пшено для князей?

Ответ: вареного пшена для князей станет 8 доу $2\frac{8}{25}$ шэна.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] вареного пшена для князей, разделив на $\frac{25}{21}$.

11. Имеется 3 с малой половиной [3] шэна проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить бобы?

Ответ: бобов станет 2 доу $7\frac{3}{10}$ шэна.

12. Имеется 4 доу 1 шэн с большей половиной проса [3]. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить горох?

Ответ: гороха станет 3 доу 7 с половиной шэна.

13. Имеется 5 доу с большой половиной шэна проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить кунжут?

Ответ: кунжута станет 4 доу $5\frac{3}{5}$ шэна.

14. Имеется 10 доу $8\frac{2}{5}$ шэна проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить пшеницу?

Ответ: пшеницы станет 9 доу $7\frac{14}{25}$ шэна.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] бобов, гороха, кунжута, пшеницы, разделив на $\frac{10}{9}$.

15. Имеется 7 доу $5\frac{4}{7}$ шэна проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить неочищенный рис?

Ответ: неочищенного риса станет 9 доу $\frac{24}{35}$ шэна.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] неочищенного риса, разделив на $\frac{5}{6}$.

16. Имеется 7 доу и 8 шэнов проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить приготовленные бобы?

Ответ: приготовленных бобов станет 9 доу $8\frac{7}{25}$ шэна.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] приготовленных бобов, разделив на $\frac{50}{63}$.

17. Имеется 5 доу 5 шэнов проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить кашу?

Ответ: каши станет 9 доу 9 шэнов.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] каши, разделив на $\frac{5}{9}$.

18. Имеется 4 доу проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить вареные бобы?

Ответ: вареных бобов станет 8 доу $2\frac{4}{5}$ шэна.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] вареных бобов, разделив на $\frac{100}{207}$.

19. Имеется **2** доу проса. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить хмель?

Ответ: хмеля станет 7 доу.

Правило: взяв [количество] проса, ищи [количество] хмеля, разделив на $\frac{2}{7}$.

20. Имеется 15 доу $5\frac{2}{5}$ шэна грубо обработанного пшена. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить просо?

Ответ: проса станет 25 доу 9 шэнов.

Правило: взяв [количество] пшена грубой обработки, ищи [количество] проса, разделив на $\frac{3}{5}$.

21. Имеется 2 доу очищенного пшена. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить просо?

Ответ: проса станет 3 доу $7\frac{1}{27}$ шэна.

Правило: взяв [количество] очищенного пшена, ищи [количество] проса, разделив на $\frac{27}{50}$.

22. Имеется 3 доу с малой половиной шэна хорошо очищенного пшена. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить просо?

Ответ: проса станет 6 доу $3\frac{7}{36}$ шэна.

Правило: взяв [количество] хорошо очищенного пшена, ищи [количество] проса, разделив на $\frac{13}{25}$ [7].

23. Имеется 14 доу пшена для князей. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить просо?

Ответ: проса станет 33 доу 3 с малой половиной шэна.

Правило: взяв [количество] пшена для князей, ищи [количество] проса, разделив на $\frac{21}{50}$.

24. Имеется 12 доу $6\frac{14}{15}$ шэна неочищенного риса. Спра-

шивается, сколько получится, если хочешь получить просо?

Ответ: проса станет 10 доу $5\frac{7}{9}$ шэна.

Правило гласит: взяв [количество] неочищенного риса, ищи [количество] проса, разделив на $\frac{6}{5}$.

25. Имеется 19 доу $2\frac{1}{7}$ шэна грубо обработанного пшена. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить очищенное пшено?

Ответ: очищенного пшена станет 17 доу $2\frac{13}{14}$ шэна.

Правило: взяв [количество] грубо обработанного пшена, ищи [количество] очищенного пшена, разделив на $\frac{10}{9}$.

26. Имеется 6 доу $4\frac{3}{5}$ шэна грубо обработанного пшена. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить вареное грубо обработанное пшено?

Ответ: вареного грубо обработанного пшена станет 16 доу 1 шэн с половиной.

Правило: взяв [количество] грубо обработанного пшена, ищи [количество] вареного грубо обработанного пшена, разделив на $\frac{2}{5}$.

27. Имеется 7 доу $6\frac{4}{7}$ шэна вареного грубо обработанного пшена. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить кашу?

Ответ: каши станет 9 доу $1\frac{31}{35}$ шэна.

Правило: взяв [количество] вареного грубо обработанного пшена, ищи [количество] каши, разделив на $\frac{5}{6}$.

28. Имеется 1 доу бобов. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить вареные бобы?

Ответ: вареных бобов станет 2 доу 3 шэна.

Правило: взяв [количество] бобов, ищи [количество] вареных бобов, разделив на $\frac{10}{23}$.

29. Имеется 2 доу бобов. Спрашивается, сколько получится, если хочешь получить приготовленные бобы?

Ответ: приготовленных бобов станет 2 доу 8 шэнов.

Правило: взяв [количество] бобов, ищи [количество] приготовленных бобов, разделив на $\frac{5}{7}$.

30. Имеется 8 доу $6\frac{3}{7}$ шэна пшеницы. Спрашивается, сколько получится, если ты хочешь получить мелкую крупу?

Ответ: мелкой крупы станет 2 доу $5\frac{13}{14}$ шэна.

Правило: взяв [количество] пшеницы, ищи [количество] мелкой крупы, разделив на $\frac{10}{3}$.

31. Имеется 1 доу пшеницы. Спрашивается, сколько получится, если ты хочешь получить крупную крупу?

Ответ: крупной крупы станет 1 доу 2 шэна.

Правило: взяв [количество] пшеницы, ищи [количество] крупной крупы, разделив на $\frac{5}{6}$.

32. Затратили 160 цяней на покупку 18 черепиц [8]. Спрашивается, сколько [стоит] штука?

Ответ: одна штука [стоит] $8\frac{8}{9}$ цяня.

33. Затратили 13 500 цяней на покупку 2350 бамбуков. Спрашивается, сколько [стоит] штука?

Ответ: 1 штука [стоит] $5\frac{35}{47}$ цяня.

Расчет стоимости предмета [9]

Правило: норма купленного есть делитель, количество затраченных цяней есть делимое, объедини делимое и делитель, получишь [искомое].

34. Затратили 5785 цяней на покупку 1 ху 6 доу 7 шэнов с большой половиной лака. Спрашивается, сколько стоит 1 доу, если доу—основная норма?

Ответ: 1 доу [стоит] $345\frac{15}{503}$ цяня.

35. Затратили 720 цяней на покупку 1 пи 2 чжанов 1 чи шелковой ткани [10]. Спрашивается, сколько [стоит] 1 чжан, если чжан—основная норма?

Ответ: 1 чжан [стоит] $118\frac{2}{61}$ цяня.

36. Затратили 2370 цяней на покупку 9 пи 2 чжанов 7 чи полотна. Спрашивается, сколько [стоит] 1 пи, если пи—основная норма?

Ответ: 1 пи [стоит] $244\frac{124}{129}$ цяня.

37. Затратили 13 670 цяней на покупку 1 даня 2 цзюней 17 цзиней шелковых ниток [11]. Спрашивается, сколько [стоит] дань, если дань—основная норма?

Ответ: 1 дань [стоит] $8326\frac{178}{197}$ цяня.

Расчет стоимости предмета [12]

Правило: количество самых мелких единиц в единице, стоимость которой определяется, умножь на количество цяней, это делимое, количество самых мелких единиц во всем купленном количестве есть делитель, делимое и делитель объедини, получишь [искомое].

38. Затратили 576 цяней на покупку 78 бамбуков. Среди них есть большие и маленькие; спрашивается, сколько каждых?

Ответ: среди них 48 штук по 7 цяней, среди них 30 штук по 8 цяней [13].

39. Затратили 1120 цяней на покупку 1 даня 2 цзюней 18 цзиней шелковых ниток. Среди них есть дорогие и дешевые цзини; спрашивается, сколько каждых?

Ответ: среди них 2 цзюня 8 цзиней таких, что цзинь [стоит] 5 цяней,
среди них 1 дань 10 цзиней таких, что цзинь [стоит] 6 цяней.

40. Затратили 13 970 цяней на покупку 1 даня 2 цзюней 28 цзиней 3 ланов 5 чжу шелковых ниток. Среди них есть дорогие и дешевые дани; спрашивается, сколько каждых?

Ответ: среди них 1 цзюнь 9 ланов 12 чжу таких, что дань [стоит] 8051 цянь,
среди них 1 дань 1 цзюнь 27 цзиней 9 ланов 17 чжу таких, что дань [стоит] 8052 цяня.

41. Затратили 13 970 цяней на покупку 1 даня 2 цзюней 28 цзиней 3 ланов 5 чжу шелковых ниток. Среди них есть дорогие и дешевые цзюни; сколько каждых?

Ответ: среди них 7 цзиней 10 ланов 9 чжу таких, что цзюнь [стоит] 2012 цяней,
среди них 1 дань 2 цзюня 20 цзиней 8 ланов 20 чжу таких, что цзюнь [стоит] 2013 цяней.

42. Затрачено 13 970 цяней на покупку 1 даня 2 цзюней 28 цзиней 3 ланов 5 чжу шелковых ниток. Среди них есть дорогие и дешевые цзини; спрашивается, сколько каждых?

Ответ: среди них 1 дань 2 цзюня 7 цзиней 10 ланов 4 чжу таких, что цзинь [стоит] 67 цяней;
среди них 20 цзиней 9 ланов 1 чжу таких, что цзинь [стоит] 68 цяней.

43. Затрачено 13 970 цяней на покупку 1 даня 2 цзюней 28 цзиней 3 ланов 5 чжу шелковых ниток. Среди них есть дорогие и дешевые ланы; спрашивается, сколько каждых?

Ответ: среди них 1 дань 1 цзюнь 17 цзиней 14 ланов 1 чжу таких, что лан [стоит] 4 цяня,
среди них 1 цзюнь 10 цзиней 5 ланов 4 чжу таких, что лан [стоит] 5 цяней.

Расчет, когда имеются разного рода предметы [14]

Правило: каждый раз установи количество даней, цзюней, цзиней, ланов в купленном, это делитель. То, сколько самых мелких единиц содержится в единице, стоимость которой определяется, умножь на количество цяней, это делимое. Объедини делимое и делитель. Когда делитель больше делимого, из делителя вычти делимое. «Фа» [умножь] на дешевую [стоимость], «ши» [умножь] на дорогую [стоимость] [15].

44. Затрачено 13 970 цяней на покупку 1 даня 2 цзюней 28 цзиней 3 ланов 5 чжу шелковых ниток. Среди них есть дорогие и дешевые чжу; спрашивается, сколько каждых?

Ответ: среди них 1 цзюнь 20 цзиней 6 ланов 11 чжу таких, что [каждые] 5 чжу [стоят] 1 цянь, среди них 1 дань 1 цзюнь 7 цзиней 12 ланов 18 чжу таких, что [каждые] 6 чжу [стоят] 1 цянь.

45. Затрачено 620 цяней на покупку 2100 хоу пера [16]. Среди них есть дорогие и дешевые хоу; спрашивается, сколько каждых?

Ответ: среди них 1140 хоу таких, что [каждые] 3 хоу [стоят] 1 цянь,
среди них 960 хоу таких, что [каждые] 4 хоу [стоят] 1 цянь.

46. Затрачено 980 цяней на покупку 5820 остовов стрел [ши-гань]. Среди них есть дорогие и дешевые; спрашивается, сколько каждых?

Ответ: среди них 300 палочек таких, что [каждые] 5 [стоят] 1 цянь,
среди них 5520 палочек таких, что [каждые] 6 палочек [стоят] 1 цянь.

Расчет стоимости предмета каждого вида в отдельности на одну монету [17]

Правило: делитель есть количество цяней, делимое есть количество самых мелких единиц в купленном. Объедини делимое и делитель. Когда делитель больше делимого, из делителя вычти делимое. «Фа» [умножь] на меньшую [стоимость], «ши» [умножь] на бо́льшую [стоимость], [то есть] получившиеся меньшую [стоимость] и бо́льшую [стоимость] двух [родов] вещей умножь [соответственно] на «фа» и на «ши», это и будет количество [всех] вещей [18].

Книга III. Деление по ступеням [1]

Деление по ступеням

Правило: каждому установи соответствующую ступень, сложи—это делитель. То, что распределяется, умножь на каждую [ступень], еще не сложенную с другими, это делимые. Объедини делимое и делитель. Если делитель больше делимого, то назови делитель [2].

1. Имеется дайфу, бугэнь, цзаньняо, шанцзао, гунши [3]— всего 5 человек. На охоте поймали 5 оленей. Спрашивается, сколько каждый получит, если разделить между ними по рангу?

Ответ: дайфу получит $1\frac{2}{3}$ оленя, бугэнь получит $1\frac{1}{3}$ оленя, цзаньняо получит 1 оленя, шанцзао получит $\frac{2}{3}$ оленя, гунши получит $\frac{1}{3}$ оленя.

Правило: установи ранговые количества по порядку, каждый [ранг] есть ступень, сложи, это делитель [4]. 5 оленей умножь на каждую [ступень], еще не сложенную с другими, это делимые. Делимые и делитель объедини, получишь [искомые количества] оленей.

2. Буйвол, лошадь и овца потравили чужой посев. Хозяин посева в возмещение убытка потребовал 5 доу зерна. Хозяин овцы сказал: «Моя овца потравила половину того, что потравила лошадь». Хозяин лошади сказал: «Моя лошадь потравила половину того, что потравил буйвол». Спрашивается, сколько внесет каждый, если [убыток] вносится соответственно?

Ответ: хозяин буйвола должен внести 2 доу $8\frac{4}{7}$ шэна, хозяин лошади должен внести 1 доу $4\frac{2}{7}$ шэна, хозяин овцы должен внести $7\frac{1}{7}$ шэна.

Правило: установи для буйвола 4, для лошади 2, для овцы 1. Каждая часть есть соответствующая ступень; сложи, это делитель. 5 доу умножь на каждую [ступень], еще не сложенную с другими, это делимые. Объедини делимые и делитель, получишь [искомые количества] в доу.

3. Имеется 560 цяней у *А*, 350 цяней у *Б*, 180 цяней у *В*, — всего 3 человека [5]. При выходе за заставу все вместе заплатили сбор в 100 цяней. Спрашивается, сколько должен заплатить каждый, если расход распределить соответственно количеству цяней у каждого?

   Ответ: *А* заплатил $51\frac{41}{109}$ цяня, *Б* заплатил $32\frac{12}{109}$ цяня, *В* заплатил $16\frac{56}{109}$ цяня.

   Правило: для каждого установи количество цяней — это соответственные ступени, сложи, это делитель. 100 цяней умножь на каждую [ступень], еще не сложенную с другими, это делимые. Объедини делимые и делитель, получишь [искомые количества] в цянях.

4. Искусная ткачиха ткет в [каждый следующий] день в 2 раза больше, [чем в предыдущий]. За 5 дней наткала 5 чи. Спрашивается, сколько она вырабатывала ткани ежедневно?

   Ответ: За первый день наткала $1\frac{19}{31}$ цуня [6], за следующий день наткала $3\frac{7}{31}$ цуня, за третий день наткала $6\frac{14}{31}$ цуня, за четвертый день наткала 1 чи $2\frac{28}{31}$ цуня, за последний день наткала 2 чи $5\frac{25}{31}$ цуня.

   Правило: установи, что 1, 2, 4, 8, 16 есть соответствующие ступени, сложи, это делитель. 5 чи умножь на каждую [ступень], еще не сложенную с другими, это делимые. Объедини делимые и делитель, получишь [искомые количества] в чи.

5. Имеется: в северном уезде 8758 суаней [7], в западном уезде 7236 суаней, в южном уезде 8356 суаней. Все три уезда должны выставить для выполнения повинности

378 человек. Спрашивается, сколько [нужно выставить человек] каждому уезду, если выставлять соответственно количеству суаней каждого уезда?

Ответ: северный уезд должен выставить $135\frac{11637}{12175}$ человека, западный уезд должен выставить $112\frac{4004}{12175}$ человека, южный уезд должен выставить $129\frac{8709}{12175}$ человека.

Правило: для каждого уезда установи количество суаней, это соответствующие ступени, сложи, это делитель. Количество людей, которое нужно выделить для выполнения повинности, умножь на каждую [ступень], еще не сложенную с другими, это делимые. Объедини делимые и делитель, получишь [искомые количества] людей.

6. Выдают пособие зерном чинам дайфу, бугэнь, цзаньняо, шанцзао, гунши, всего 5 человек; [получили] 15 доу. Один дайфу пришел позже и также должен получить зерна 5 доу, [но] в амбаре зерна больше нет. Спрашивается, сколько [должен выделить] каждый, если у каждого чина взять соответствующую часть?

Ответ: дайфу выделит $1\frac{1}{4}$ доу, бугэнь выделит 1 доу, цзаньняо выделит $\frac{3}{4}$ доу, шанцзао выделит $\frac{2}{4}$ доу, гунши выделит $\frac{1}{4}$ доу.

Правило: установи для каждого пособие зерном в ху, в доу соответственно чину, это ступени по порядку. Сложи, прибавь также 5 доу опоздавшего дайфу, получится 20, это делитель. 5 доу умножь на каждую [ступень], еще не сложенную с другими, это делимые. Объедини делимые и делитель, получишь [искомые количества] в доу.

7. 5 ху выдаваемого зерна делится между 5 людьми. Спрашивается, сколько [получит] каждый, если нужно сделать так, чтобы 3 человека получили по 3 [части], а 2 человека по 2 [части]?

Ответ: каждый из 3 человек получит 1 ху 1 доу $5\frac{5}{13}$ шэна, каждый из 2 человек получит по 7 доу $6\frac{12}{13}$ шэна.

Правило: установи, что [каждый] человек из 3 людей получает по 3 части и что [каждый] человек из 2 людей получает по 2 части, это соответствующие ступени; сложи, это делитель. 5 ху умножь на каждую [ступень], еще не сложенную с остальными, это делимые, объедини делимые и делитель, получишь [искомые количества] в ху.

[Распределение], обратное ступеням

Правило: установи по порядку ступени и взаимно перемножь перевернутые ступени [8].

8. Имеется дайфу, бугэнь, цзаньняо, шанцзао, гунши — всего 5 человек [9]. Все вместе израсходовали 100 цяней, пусть высший чин расходует меньше, чем последующий низший. Спрашивается, сколько израсходует каждый?

Ответ: дайфу израсходовал $8\frac{104}{137}$ цяня, бугэнь израсходовал $10\frac{130}{137}$ цяня, цзаньняо израсходовал $14\frac{82}{137}$ цяня, шанцзао израсходовал $21\frac{120}{137}$ цяня, гунши израсходовал $43\frac{109}{137}$ цяня.

Правило: для каждого установи ранговые количества, это ступени. Возьми обратные им ступени, сложи, это делитель. 100 цяней умножь на каждую [ступень], еще не сложенную с другими, это делимые. Объедини делимые и делитель, получишь [искомые количества] в цянях [10].

9. Имеется 3 шэна проса у *А*, 3 шэна грубо обработанного пшена у *Б*, 3 шэна вареного грубо обработанного пшена у *В*. Спрашивается, сколько получит каждый, если все сложить и распределить снова [11]?

Ответ: *А* [получит] $2\frac{7}{10}$ шэна, *Б* [получит] $4\frac{5}{10}$ шэна, *В* [получит] $1\frac{8}{10}$ шэна.

Правило: ступени суть 50—норма проса, 30—норма грубо обработанного пшена, 75—норма вареного грубо обработанного пшена, сложи, это делитель. Умножь 9 шэн на каждую [ступень], еще не сложенную с другими, это делимые. Объедини делимые и делитель, получишь [искомые количества] в шэнах.

10. 1 цзинь шелка-сырца стоит 240 [цяней]. Спрашивается, сколько можно купить шелка-сырца на 1328 цяней?

Ответ: 5 цзиней 8 ланов $12\frac{4}{5}$ чжу.

Правило: стоимость 1 цзиня есть делитель, 1 цзинь умножь на имеющееся количество цяней, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое] количество шелка-сырца [12].

11. 1 цзинь шелка-сырца стоит 345 [цяней]. Спрашивается, сколько стоят 7 ланов 12 чжу?

Ответ: $161\frac{23}{32}$ цяня.

Правило: количество чжу в 1 цзине есть делитель. Стоимость 1 цзиня умножь на 7 ланов 12 чжу, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое] количество цяней.

12. 1 чжан шелковой ткани стоит 128 [цяней]. Спрашивается, сколько стоит 1 пи 9 чи 5 цуней?

Ответ: $633\frac{3}{5}$ цяня.

Правило: количество цуней в 1 чжане есть делитель. Умножь стоимость в цянях на имеющееся количество цуней шелковой ткани, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое] количество цяней.

13. 1 пи полотна стоит 125 [цяней]. Имеется полотна 2 чжана 7 чи. Спрашивается, сколько оно стоит?

Ответ: $84\frac{3}{8}$ цяня.

Правило: количество чи в 1 пи есть делитель. Имеющееся количество чи полотна умножь на стоимость в цянях, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое] количество в цянях.

14. 1 пи 1 чжан некрашеного шелка стоят 625 [цяней]. Спрашивается, сколько можно купить некрашеного шелка на 500 цяней?

Ответ: можно купить 1 пи некрашеного шелка.

Правило: стоимость есть делитель. Взяв количество чи в 1 пи, 1 чжане, умножь на имеющееся количество цяней, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое] количество некрашеного шелка.

15. Человеку дают 14 цзиней шелка-сырца, получают взамен 10 цзиней шелковой ткани. Теперь человеку дают 45 цзиней 8 ланов шелка-сырца, спрашивается, сколько получат взамен шелковой ткани?

Ответ: 32 цзиня 8 ланов.

Правило: количество ланов в 14 цзинях есть делитель. 10 цзиней умножь на имеющееся количество ланов шелка-сырца, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое] количество шелковой ткани.

16. Имеется 1 цзинь шелка-сырца, потеря составляет 7 ланов. Имеется 23 цзиня 5 ланов шелка-сырца, спрашивается, какова потеря?

Ответ: 163 лана 4 чжу с половиной.

Правило: 1 цзинь переведи в 16 ланов, это делитель. 7 ланов умножь на имеющееся количество шелка-сырца в ланах, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое] количество потери.

17. Из 30 цзиней шелка-сырца потеря при сушке составляет 3 цзиня 12 ланов. Имеется сухого шелка-сырца 12 цзиней. Спрашивается, сколько шелка-сырца было до сушки?

Ответ: 13 цзиней 11 ланов $10\frac{2}{7}$ чжу.

Правило: установи первоначальное количество шелка-сырца в ланах, исключи потерянное количество, остаток есть делитель. 30 цзиней умножь на количество ланов сухого шелка-сырца, это делимое.

Объедини делимое и делитель, получишь первоначальное количество шелка-сырца.

18. С поля в 1 му собрали урожай проса 6 с большой половиной шэна. Имеется поле в 1 цин 26 му 159 бу. Спрашивается, сколько соберут проса?

Ответ: 8 ху 4 доу $4\frac{5}{12}$ шэна.

Правило: 240 бу, содержащиеся в му, есть делитель. 6 с большой половиной шэна умножь на имеющуюся площадь поля в бу, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое] количество проса.

19. Если взять работника на 1 год, то стоимость составляет 2500 цяней. Заплатили 1200. Спрашивается, сколько дней должен работать [работник]?

Ответ: $169\frac{23}{25}$ дня.

Правило: стоимость в цянях есть делитель, взяв 354 дня за год [13], умножь на уплаченное количество цяней, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое] количество дней.

20. Человек пустил в рост 1000 цяней, за месяц наросло 30. Человек пустил в рост 750, через 9 дней возвратил их. Спрашивается, каково наращение?

Ответ: $6\frac{3}{4}$ цяня.

Правило: взяв 30 дней за месяц, умножь на 1000 цяней, это делитель; прирост 30 умножь на количество цяней, которые отдали в рост, и умножь на 9 дней, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое] количество в цянях [14].

Книга IV. Шао-гуан [1]

[П р а в и л о] «Ш а о - г у а н»

Правило: расположи целый бу, числители и знаменатели дробей [2]. Числители дробей и целый бу умножь один за другим на самый нижний знаменатель. У каждой [дроби] ее числитель раздели на ее знаменатель, установи это справа. Если надо сделать приведение к общему знаменателю, то умножь числители один за другим на знаменатели дробей [3]. После приведения к общему знаменателю сложи все, это делитель. Известное количество бу умножь на то, сколько долей содержится в целом бу, это делимое [4]. Объедини делимое и делитель, получишь длину в бу [5].

1. Имеется поле шириной в 1 с половиной бу. Известно, что поле в 1 му. Спрашивается, какова длина?

   Ответ: 160 бу.

   Правило следующее: имеющаяся половина есть $\frac{1}{2}$. Взяв 2 вместо 1, 1 вместо $\frac{1}{2}$, сложи их, получится 3, это делитель. Положи поле [равным] 240 бу, умножь на 2, что взяли вместо 1, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь длину в бу.

2. Имеется поле шириною в 1 с половиной и $\frac{1}{3}$ бу. Известно, что поле в 1 му. Спрашивается, какова длина?

   Ответ: $130\frac{10}{11}$ бу.

   Правило: следующее: имеется три дроби [6], взяв 6 вместо 1, 3 вместо половины, 2 вместо $\frac{1}{3}$, сложи их, получится 11, это делитель; положи поле [равным] 240 бу, умножь на 6, что взяли вместо 1, это делимое. Объедини делимое и делитель, получится длина в бу.

3. Имеется поле шириной в 1 с половиной, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ бу. Известно, что поле в 1 му. Спрашивается, какова длина?

   Ответ: $115\frac{1}{5}$ бу.

   Правило следующее: имеются четыре дроби, взяв 12 вместо 1, 6 вместо половины, 4 вместо $\frac{1}{3}$, 3 вместо $\frac{1}{4}$, сложи их, получится 25, это делитель. Положи поле [равным] 240 бу и умножь на 12, что взяли вместо 1, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь длину в бу.

4. Имеется поле шириною в 1 с половиной, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ бу. Известно, что поле в 1 му. Спрашивается, какова длина?

Ответ: $105\frac{15}{137}$ бу.

Правило следующее: имеется пять дробей, взяв 60 вместо 1, 30 вместо половины, 20 вместо $\frac{1}{3}$, 15 вместо $\frac{1}{4}$, 12 вместо $\frac{1}{5}$, сложи их, получишь 137, это делитель. Положи поле [равным] 240 бу и умножь на 60, что взяли вместо 1, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь длину в бу.

5. Имеется поле шириною в 1 с половиной, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{6}$ бу. Известно, что поле в 1 му. Спрашивается, какова длина?

Ответ: $97\frac{47}{49}$ бу.

Правило следующее: имеется шесть дробей: взяв 120 вместо 1, 60 вместо половины, 40 вместо $\frac{1}{3}$, 30 вместо $\frac{1}{4}$, 24 вместо $\frac{1}{5}$, 20 вместо $\frac{1}{6}$, сложи их, получишь 294, это делитель. Положи поле [равным] 240 бу и умножь на 120, что взяли вместо 1, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь длину в бу. 38

6. Имеется поле шириною в 1 с половиной, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{7}$ бу. Известно, что поле в 1 му. Спрашивается, какова длина?

Ответ: $92\frac{68}{121}$ бу.

Правило следующее: имеется семь дробей, взяв 420 вместо 1, 210 вместо половины, 140 вместо $\frac{1}{3}$, 105 вместо $\frac{1}{4}$, 84 вместо $\frac{1}{5}$, 70 вместо $\frac{1}{6}$, 60 вместо $\frac{1}{7}$, сложи их, получишь 1089, это делитель. Положи поле [равным] 240 бу, умножь на 420, что взяли вместо 1, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь длину в бу.

7. Имеется поле шириною 1 с половиной, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{8}$ бу. Известно, что поле в 1 му. Спрашивается, какова длина?

Ответ: $88\frac{233}{761}$ бу.

Правило следующее: имеется восемь дробей, взяв 840 за 1, 420 вместо половины, 280 вместо $\frac{1}{3}$, 210 вместо $\frac{1}{4}$, 168 вместо $\frac{1}{5}$, 140 вместо $\frac{1}{6}$, 120 вместо $\frac{1}{7}$, 105 вместо $\frac{1}{8}$, сложи их, получишь 2283, это делитель. Положи поле [равным] 240 бу, умножь на 840, что взяли вместо 1, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь длину в бу.

8. Имеется поле шириною в 1 с половиной, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{9}$ бу. Известно, что поле в 1 му. Спрашивается, какова длина?

Ответ: $84\frac{5964}{7129}$ бу.

Правило следующее: имеется девять дробей, взяв 2520 вместо 1, 1260 вместо половины, 840 вместо $\frac{1}{3}$, 630 вместо $\frac{1}{4}$, 504 вместо $\frac{1}{5}$, 420 вместо $\frac{1}{6}$, 360 вместо $\frac{1}{7}$, 315 вместо $\frac{1}{8}$, 280 вместо $\frac{1}{9}$, сложи их, получишь 7129, это делимое. Положи поле [равным] 240 бу, умножь на 2520, что взяли вместо 1, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь длину в бу.

9. Имеется поле шириною в 1 с половиной, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ и $\frac{1}{10}$ бу. Известно, что поле в 1 му. Спрашивается, какова длина?

Ответ: $81\frac{6939}{7381}$ бу.

Правило следующее: имеется десять дробей, взяв 2520 вместо 1, 1260 вместо половины, 840 вместо $\frac{1}{3}$, 630 вместо $\frac{1}{4}$, 504 вместо $\frac{1}{5}$, 420 вместо $\frac{1}{6}$, 360 вместо $\frac{1}{7}$, 315 вместо $\frac{1}{8}$, 280 вместо $\frac{1}{9}$, 252 вместо $\frac{1}{10}$, сложи их, получишь 7381, это делитель. Положи поле [равным] 240 бу, умножь на 2520, что взяли вместо 1, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь длину в бу.

10. Имеется поле шириною в 1 с половиной, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{11}$ бу. Известно, что поле в 1 му. Спрашивается, какова длина?

Ответ: $79\frac{39631}{83711}$ бу.

Правило следующее: имеется одиннадцать дробей, взяв 27 720 вместо 1, 13 860 вместо половины, 9240 вместо $\frac{1}{3}$, 6930 вместо $\frac{1}{4}$, 5544 вместо $\frac{1}{5}$, 4620 вместо $\frac{1}{6}$, 3960 вместо $\frac{1}{7}$, 3465 вместо $\frac{1}{8}$, 3080 вместо $\frac{1}{9}$, 2772 вместо $\frac{1}{10}$, 2520 вместо $\frac{1}{11}$, сложи их, получишь 83 711, это делитель. Положи поле [равным] 240 бу, умножь на 27 720, что взяли вместо 1, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь длину в бу.

11. Имеется поле шириною в 1 с половиной, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$ и $\frac{1}{12}$ бу. Известно, что поле в 1 му.

Спрашивается, какова длина?

Ответ: $77 \frac{29183}{86021}$ бу.

Правило следующее: имеется двенадцать дробей, взяв 83 160 вместо 1, 41 580 вместо половины, 27 720 вместо $\frac{1}{3}$, 20 790 вместо $\frac{1}{4}$, 16 632 вместо $\frac{1}{5}$, 13 860 вместо $\frac{1}{6}$, 11 880 вместо $\frac{1}{7}$, 10 395 вместо $\frac{1}{8}$, 9241 вместо $\frac{1}{9}$, 8316 вместо $\frac{1}{10}$, 7560 вместо $\frac{1}{11}$, 6930 вместо $\frac{1}{12}$, сложи их, получишь 258 063, это делитель. Положи поле [равным] 240 бу, умножь на 83 160, что взяли вместо 1, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь длину в бу.

12. Имеется площадь [квадрата] в 55 225 бу. Спрашивается, какова [сторона] квадрата?

Ответ: 235 бу.

13. Имеется другая площадь [квадрата] в 25 281 бу. Спрашивается, какова [сторона] квадрата?

Ответ: 159 бу.

14. Имеется другая площадь [квадрата] в 71 824 бу. Спрашивается, какова [сторона] квадрата?

Ответ: 268 бу.

15. Имеется другая площадь квадрата в $564752 \frac{1}{4}$ бу. Спрашивается, какова [сторона] квадрата?

Ответ: 751 с половиной бу.

16. Имеется другая площадь [квадрата] в 3 972 150 625 бу. Спрашивается, какова [сторона] квадрата?

Ответ: 63 025 бу.

Извлечение квадратного корня [7]

Правило: установи площадь [квадрата] в качестве делимого. Возьми одну счетную палочку и шагай через одну [колонку]. Обсуди «со-дэ». Первую [выбранную цифру корня] умножь на «цзе-суань», это делитель. Раздели [на него]. После деления удвой делитель, это фиксированный делитель. Возврати его [на одно деление], [получишь] урезанный [фиксированный] делитель. Внизу возврати установленную счетную палочку на шаг. [Продолжай], как и ранее. Одну выбранную [цифру] умножь на это. «Со-дэ» прибавь к [урезанному] фиксированному делителю. И дели. «Со-дэ» прибавь к фиксированному делителю, укороти возвратом, получишь [урезанный] фиксированный дополненный делитель. Далее, как раньше. Если извлечение корня не выполняется полностью, то можно продолжать как ранее [8]. Если делимое представлено в виде дроби, то число долей в числителе будет фиксированным делимым. Из него извлеки корень. Извлеки корень из знаменателя. Раздели результаты друг на друга. Если из знаменателя извлечь корень нельзя, то знаменатель умножь на фиксированный делитель и из этого извлеки корень. [Полученное] объедини со знаменателем [9].

17. Имеется площадь [круга] в $1518\frac{3}{4}$ бу. Спрашивается, каков обвод круга?

Ответ: 135 бу.

18. Имеется другая площадь [круга] в 300 бу. Спрашивается, каков обвод круга?

Ответ: 60 бу.

Извлечение [квадратного корня] [из площади] круга

Правило: умножь количество бу площади [круга] на 12, из этого извлеки квадратный корень, получится обвод.

19. Имеется объем [куба] в 1 860 867 чи. Спрашивается, какова [сторона] куба?

Ответ: 123 чи.

20. Имеется объем [куба] в $1953\frac{1}{8}$ чи. Спрашивается, какова [сторона] куба?

Ответ: 12 с половиной чи.

21. Имеется объем [куба] в $63\,401\frac{447}{512}$ чи. Спрашивается, какова [сторона] куба?

Ответ: $39\frac{7}{8}$ чи.

22. Имеется другой объем [куба] в $1\,937\,541\frac{17}{27}$ чи. Спрашивается, какова [сторона] куба?

Ответ: 124 с большой половиной чи.

Извлечение кубического корня [10]

Правило: установи объем [куба] в качестве делимого. Возьми одну счетную палочку и шагай через две [колонки]. Обсуди «со-дэ». Умножь «цзе-суань» [на выбранную цифру корня] [дважды], это делитель. Раздели на него. После деления [умножь] на три, это фиксированный делитель. Укороти возвратом, [получишь укороченный фиксированный делитель]. Далее умножь «со-дэ» на три, установи в средней строке. Снова установи счетную палочку в нижней строке. Перешагни в средней [строке] через одну [колонку], в нижней [строке] через две [колонки]. Снова обсуди. Умножь [число] средней [строки] на [выбранную цифру корня]. Опять умножь [число] нижней [строки] [дважды] [на выбранную цифру]. Все это прибавь к фиксированному делителю и раздели на фиксированный делитель. После деления удвой [число] нижней [строки], сложи с [числом] средней [строки] и с фиксированным делителем. Возвратом укороти [его], [получишь] [дополненный фиксированный делитель]. [Продолжай], как раньше. Если извлечение корня не выполняется полностью, то [можно продолжать, как ранее] [11]. Если объем выражен дробью, то число долей в числителе будет фиксированным делимым. Из него извлеки корень. Извлеки корень из знаменателя. Раздели результаты друг на друга. Если из знаменателя корень не извлекается, то [дважды] умножь фиксированное делимое на знаменатель, из этого извлеки корень и объедини со знаменателем [12].

23. Имеется объем [сферы] в 4500 чи. Спрашивается, каков диаметр сферы?

Ответ: 20 чи.

24. Имеется другой объем [сферы] в 1 644 866 437 500 чи [13]. Спрашивается, каков диаметр сферы?

Ответ: 14 300 чи.

Правило: количество чи в объеме [сферы], умножь на 16, раздели на 9 и возьми 1 раз. Из полученного извлеки кубический корень, это и будет диаметр шара [14].

Книга V. Оценка работ [1]

1. Имеется земляная яма объемом в 10 000 чи. Спрашивается, сколько будет утрамбованной и рыхленой земли, каждой в отдельности?

Ответ: утрамбованной земли будет 7500 чи, рыхленой земли будет 12 500 чи.

Правило: [объемы] выкопанной ямы, рыхленой земли, утрамбованной земли и вынутой земли относятся, как $4:5:3:4$. Взяв [объем] выкопанной ямы, ищи [объем] рыхленой земли, разделив на $\frac{4}{5}$; ищи [объем] утрамбованной земли, разделив на $\frac{4}{3}$. Взяв [объем] рыхленой земли, ищи [объем] вырытой ямы, разделив на $\frac{5}{4}$, ищи [объем] утрамбованной земли, разделив на $\frac{5}{3}$. Взяв [объем] утрамбованной земли, ищи [объем] вырытой ямы, разделив на $\frac{3}{4}$, или объем рыхленой земли, разделив на $\frac{3}{5}$.

Для крепостной стены, стены, плотины, канала, крепостного рва, канавы правило одно и то же.

Правило: сложи верхнюю и нижнюю ширины и раздели пополам, умножь на высоту или на глубину, также умножь на длину, это и будет объем в чи [2].

2. Имеется крепостная стена. Нижняя ширина 4 чжана, верхняя—2 чжана, высота 5 чжанов, длина 126 чжанов 5 чи. Спрашивается, каков объем [3]?

   Ответ: 1 897 500 чи.

3. Имеется стена. Нижняя ширина 3 чи, верхняя ширина 2 чи, высота 1 чжан 2 чи, длина 22 чжана 5 чи 8 цуней. Спрашивается, каков объем?

   Ответ: 6774 чи.

4. Имеется плотина. Нижняя ширина 2 чжана, верхняя ширина 8 чи, высота 4 чи, длина 12 чжанов 7 чи. Спрашивается, каков объем?

   Ответ: 7112 чи.

При зимнем строительстве каждый человек вырабатывает 444 чи. Спрашивается, сколько потребуется людей?

Ответ: $16\frac{2}{111}$ человека.

Правило: объем в чи есть делимое. Количество чи в выработке есть делитель. Объедини делимое и делитель, это и будет требуемое количество людей.

5. Имеется канал. Верхняя ширина 1 чжан 5 чи, нижняя ширина 1 чжан, глубина 5 чи, длина 7 чжанов. Спрашивается, каков объем?

   Ответ: 4375 чи.

При весеннем строительстве каждый человек вырабатывает 766 чи, всего вынули $\frac{4}{5}$ земли, установленная выработка $612\frac{4}{5}$ чи. Спрашивается, сколько потребуется людей?

Ответ: $7\frac{427}{3064}$ человека.

Правило: установи, что в данном случае из выработки [каждого] человека надо убрать $\frac{1}{5}$ ее, остаток есть делитель. Объем канала в чи есть делимое. Объедини делимое и делитель, получится требуемое количество людей.

6. Имеется крепостной ров. Верхняя ширина 1 чжан 6 чи 3 цуня, нижняя ширина 1 чжан, глубина 6 чи 3 цуня, длина 13 чжанов 2 чи 1 цунь. Спрашивается, каков объем? Ответ: 10 943 чи 8 цуней [4].

При летнем строительстве каждый человек вырабатывает 871 чи; вынули по $\frac{1}{5}$ положенной [нормы] земли, выработка гравия [составила] большую половину [оставшейся нормы] [5]; устанавливается норма $232\frac{4}{15}$ чи. Спрашивается, сколько потребуется людей [6]?

Ответ: $47\frac{409}{3484}$ человека.

Правило: установи, что в данном случае из выработки каждого человека надо убрать $\frac{1}{5}$ выработки вынутой земли, также убрать бо́льшую половину выработки гравия, остаток есть делитель. Объем крепостного рва в чи есть делимое. Делимое и делитель объедини, это и будет требуемое количество людей.

7. Имеется пустая канава, верхняя ширина 1 чжан 8 чи, нижняя ширина 3 чи 6 цуней, глубина 1 чжан 8 чи, длина 51 824 чи. Спрашивается, каков объем?

Ответ: 10 074 585 чи и 6 цуней [7].

При осеннем строительстве каждый человек вырабатывает 300 чи. Спрашивается, сколько потребуется людей?

Ответ: 33 582 человека, не хватит 14 чи и 4 цуней [8].

[Если] тысяча человек прибыли раньше других, то спрашивается, какой длины канаву они должны вырыть?

Ответ: 154 чжана 3 чи $2\frac{8}{81}$ цуня.

Правило: делимое есть количество чи, которое вырабатывает 1 человек, умноженное на количество ранее прибывших людей. Сложи нижнюю и верхнюю ширины и возьми половину этого, умножь на глубину, это делитель. Объедини делимое и делитель, получишь длину в чи.

8. Имеется квадратное бао-дао [9]. Сторона [квадрата] 1 чжан 6 чи, высота 1 чжан 5 чи. Спрашивается, каков объем?

Ответ: 340 чи.

Правило: умножь сторону саму на себя, умножь на высоту, это и будет объем в чи.

9. Имеется круглое бао-дао [10]. Обвод 4 чжана 8 чи, высота 1 чжан 1 чи. Спрашивается, каков объем?

Ответ: 2112 чи.

Правило: умножь обвод сам на себя, умножь на высоту, разделив на 12, возьми 1 раз.

10. Имеется квадратное тин [11]. Нижняя сторона 5 чжанов, верхняя сторона 4 чжана, высота 5 чжанов. Спрашивается, каков объем?

Ответ: 101 666 с большой половиной чи.

Правило: перемножь верхнюю и нижнюю стороны и каждую умножь саму на себя, сложи все это, умножь на высоту, раздели на 3, возьми 1 раз.

11. Имеется круглое тин [12]. Нижний обвод 3 чжана, верхний обвод 2 чжана, высота 1 чжан. Спрашивается, каков объем?

Ответ: $527\frac{7}{9}$ чи.

Правило: перемножь верхний и нижний обводы, умножь каждый сам на себя, все это сложи, умножь па высоту, разделив на 36, возьми 1 раз.

12. Имеется пирамида с квадратным основанием [13]. Нижняя сторона 2 чжана 7 чи, высота 2 чжана 9 чи. Спрашивается, каков объем?

Ответ: 7047 чи.

Правило: умножь сторону основания саму на себя, умножь на высоту, разделив на 3, возьми 1 раз.

13. Имеется конус. Обвод основания 3 чжана 5 чи, высота 5 чжанов 1 чи. Спрашивается, каков объем?

Ответ: $1735\frac{5}{12}$ чи.

Правило: обвод основания умножь сам на себя, умножь на высоту, разделив на 36, возьми 1 раз [14].

14. Имеется цзянь-ду [15]. Ширина основания 2 чжана, длина 18 чжанов 6 чи, высота 2 чжана 5 чи. Спрашивается, каков объем?

Ответ: 46 500 чи.

Правило: перемножь ширину и длину, умножь на высоту, разделив на 2, возьми 1 раз.

15. Имеется ян-ма [16]. Ширина 5 чи, длина 7 чи, высота 8 чи. Спрашивается, каков объем?

Ответ: 93 с малой половиной чи.

Правило: перемножь ширину и длину, умножь на высоту, разделив на 3, возьми 1 раз.

16. Имеется бе-нао [17]. Нижняя ширина 5 чи, длины нет, верхняя длина 4 чи, ширины нет, высота 7 чи. Спрашивается, каков объем?

Ответ: 23 с малой половиной чи.

Правило: перемножь ширину и длину, умножь на высоту, разделив на 6, возьми 1 раз.

17. Имеется сянь-чу [18]. Нижняя ширина 6 чи, верхняя ширина 1 чжан, глубина 3 чи, верхняя ширина 8 чи, глубины нет, длина 7 чи. Спрашивается, каков объем?

Ответ: 84 чи.

Правило: сложи [все] три ширины, умножь на глубину, еще умножь на длину, разделив на 6, возьми 1 раз.

18. Имеется чу-мэн [19]. Нижняя ширина 3 чжана, длина 4 чжана, верхняя длина 2 чжана, ширины нет, высота 1 чжан. Спрашивается, каков объем?

Ответ: 5000 чи.

Правило: удвой нижнюю длину, присоедини верхнюю длину, умножь на ширину, еще умножь на высоту, разделив на 6, возьми 1 раз.

Для чу-тун, цюй-чи, пань-чи, мин-гу правило одно и то же [20].

Правило: удвой верхнюю длину, присоедини нижнюю длину. Также удвой нижнюю длину, присоедини верхнюю длину. Каждое из них умножь на их ширины и сложи. Умножь на высоту или на глубину, все это разделив на 6, возьми 1 раз. Если это цюй-чи, то сложи верхние внутренний и внешний обводы и возьми половину, это верхняя длина. Также сложи нижние внутренний и внешний обводы и возьми половину, это нижняя длина.

19. Имеется чу-тун. Нижняя ширина 2 чжана, длина 3 чжана, верхняя ширина 3 чжана, длина 4 чжана, высота 3 чжана. Спрашивается, каков объем?

Ответ: 16 500 чи [21].

20. Имеется цюй-чи. Верхние внутренний обвод 2 чжана, внешний обвод 4 чжана, ширина 1 чжан, нижние внутренний обвод 1 чжан 4 чи, внешний обвод 2 чжана 4 чи, ширина 5 чи, глубина 1 чжан. Спрашивается, каков объем?

Ответ: 1883 чи 3 с малой половиной цуня [22].

21. Имеется пань-чи. Верхние ширина 6 чжанов, длина 9 чжанов, нижние ширина 4 чжана, длина 6 чжанов, глубина 2 чжана. Спрашивается, каков объем?

Ответ: 70 666 с большой половиной чи.

Носят землю на расстояние в 70 бу. Из них 20 бу в гору и под гору. [Каждые] 2 [бу] в гору и под гору составляют 5 [бу] по ровной дороге. Из-за столкновений на расстояние в 10 [бу] прибавляется 1 [бу]. Транспортировка производится на расстояние в 30 бу. Установленная [норма] для одного раза туда и обратно 140 бу. Объем [одной] корзины 1 чи и 6 цуней земли [23]. Осенью [каждый] человек должен выработать 59 с половиной ли. Спрашивается, какой объем [земли] в чи перенесет [один] человек и сколько потребуется людей, [чтобы перенести вычисленный объем земли]?

Ответ: [один] человек перенесет 204 чи, потребуется $346\frac{62}{153}$ человека.

Правило: [объем] корзины в чи умножь на количество бу ходьбы, которое положено выработать, это делимое. 2 [бу], пройденные в гору и под гору, составляют 5 [бу] по ровной дороге. Установи проходимое количество бу, на [каждые] 10 [бу] прибавь 1 [бу] и расстояние в 30 бу, на которое производится транспортировка, это есть делитель. Раздели на него. Полученное и будет то, сколько чи перенесет один человек. Разделив объем в чи на это перенесенное [количество], получишь требуемое количество людей.

22. Имеется мин-гу. Верхние ширина 2 чжана, длина 7 чжанов, нижние ширина 8 чи, длина 4 чжана, глубина 6 чжанов 5 чи. Спрашивается, каков объем?

Ответ: 52 000 чи.

Землю переносят на расстояние в 200 бу, перевозят на расстояние в 1 ли. Выработать надо 58 ли, 6 человек [работают] на одной повозке. Повозка [вмещает] 34 чи 7 цуней [24]. Спрашивается, какой объем [земли] в чи перевезет [один] человек и сколько потребуется людей?

Ответ: [один] человек перевезет $201\frac{13}{50}$ чи, потребуется $258\frac{3726}{10063}$ человека.

Правило: объем в чи одной повозки умножь на количество бу, которые нужно выработать, это делитель. Установи теперь количество бу, нужное на перевозку, прибавь промежуток в 1 ли, [на который] перевозят [землю], умножь это на 6 человек, которые [работают] на одной повозке, это делимое. Раздели на него, полученное и будет [количество] чи, которое перевезет один человек. Объем в чи раздели на полученное, получится требуемое количество людей.

23. На земле имеется куча проса. Нижний обвод 12 чжанов, высота 2 чжана. Спрашивается, каков объем и сколько проса [в куче]? [25].

Ответ: объем 8000 чи, проса будет $2962\frac{26}{27}$ ху.

24. У стены имеется куча бобов. Нижний обвод 3 чжана, высота 7 чи. Спрашивается, каков объем и сколько бобов [в куче]?

Ответ: объем [равен] 350 чи, бобов будет $144\frac{8}{243}$ ху.

25. В углу имеется куча риса. Нижний обвод 8 чи, высота 5 чи. Спрашивается, каков объем и сколько риса [в куче]?

Ответ: объем [равен] $35\frac{5}{9}$ чи, риса будет $21\frac{691}{729}$ ху.

«Куча зерна»

Правило: умножь нижний обвод сам на себя, умножь на высоту, раздели на 36 и возьми 1 раз. Когда лежит у стены, раздели на 18 и возьми 1 раз. Когда лежит в углу, раздели на 9 и возьми 1 раз. Объем одного весового ху проса 2 чи 7 цуней, объем одного весового ху риса 1 чи $6\frac{1}{5}$ цуня, объем одного весового ху бобов, гороха, кунжута, пшеницы 2 чи и $4\frac{3}{10}$ цуня [25].

26. Имеется яма. Длина 1 чжан 6 чи, глубина 1 чжан, верхняя ширина 6 чи, объем стены 576 чи. Спрашивается, какова нижняя ширина ямы [26]?

    Ответ: $3\frac{3}{5}$ чи.

    Правило: объем в [куб] чи, умноженный на 4, есть делимое. Перемножь глубину и длину, умножь на 3, это делитель. Полученное удвой, вычти верхнюю ширину, остаток есть нижняя длина.

27. Имеется амбар. Ширина 3 чжана, длина 4 чжана 5 чи; наполняющее его просо [составляет] 10 000 ху. Спрашивается, какова высота [амбара] [27].

    Ответ: 2 чжана.

    Правило: установи, что [количество] чи в 10 000 ху проса, ссыпанного в амбар, есть делимое. Перемножь ширину и длину, это делитель. Делимое и делитель объедини, получишь высоту в чи.

28. Имеется большой куль в виде цилиндра. Высота 1 чжан 3 чи 3 с малой половиной цуня; содержится 2000 ху риса. Спрашивается, каков обвод?

    Ответ: 5 чжанов 4 чи.

    Правило: установи объем риса в чи, умножь на 12, объедини с высотой, из полученного извлеки квадратный корень, это и будет обвод.

Книга VI. Пропорциональное распределение [1]

1. Производится пропорциональное распределение налогового зерна: уезду *А* в 10 000 дворов нужно 8 дней пути, уезду *Б* в 9500 дворов—10 дней пути, уезду *В* в 12 350 дворов—13 дней пути, уезду *Г* в 12 200 дворов—20 дней пути, чтобы из каждого [уезда] прибыть на место доставки. Вместе четыре уезда должны доста-

вить 250 000 ху [зерна] на 10 000 повозках. Спрашивается, сколько каждому уезду соответственно нужно доставить зерна и сколько повозок потребуется для этого, если учитывать дальность пути и количество дворов?

Ответ: уезд *А*—83 100 ху зерна, 3324 повозки,
уезд *Б*—63 175 ху зерна, 2527 повозок,
уезд *В*—63 175 ху зерна, 2527 повозок,
уезд *Г*—40 550 ху зерна, 1622 повозки.

Пропорциональное распределение

Правило: в качестве ступеней возьми каждое количество дворов в уезде, объединенное [2] с количеством дней пути для данного уезда. Ступень *А*—125, каждая из ступеней *Б* и *В*—95, ступень *Г*—61; сложи, это делитель. Количество повозок для налогового зерна умножь на каждую еще не сложенную с другими ступень, это делимое. Объедини делимые и делитель, получишь [искомые количества] повозок. Если имеются дробные [количества], то округли их, умножь 25 ху на количества повозок, это и будут [искомые] количества зерна.

2. Производится пропорциональное распределение поставки людей для выполнения повинности. Уезд *А* в 1200 человек находится около самой крепости, уезд *Б* в 1550 человек—[на расстоянии] 1 дня пути, уезд *В* в 1280 человек—[на расстоянии] 2 дней пути, уезд *Г* в 990 человек—[на расстоянии] 3 дней пути, уезд *Д* в 1750 человек—[на расстоянии] 5 дней пути [3]. Из всех этих пяти уездов в течение месяца должно быть послано [в крепость] 1200 человек. Спрашивается, сколько человек [должен послать] каждый уезд, если учитывать расстояние и количество человек [4]?

Ответ: уезд *А*—229 человек,
уезд *Б*—286 человек,
уезд *В*—228 человек,
уезд *Г*—171 человек,
уезд *Д*—286 человек.

Правило: в качестве ступеней возьми [количество] людей в каждом уезде, объединенное с количеством дней пути и их проживания на месте: ступень *А*—4, *Б*—5, *В*—4, *Г*—3, *Д*—5; сложи, это делитель. Количество людей умножь на части, еще не сложенные с другими, это делимое. Объедини делимое и делитель. Если имеются дробные [количества], то округли их.

3. Налог в виде зерна пропорционально распределяется между: уездом *А* в 20 520 дворов, где 1 ху зерна по 20 цяней, [зерно] привозят в этот уезд; уездом *Б* в 12 312 дворов, где 1 ху зерна по 10 цяней, от места доставки 200 ли; уездом *В* в 7182 двора, где 1 ху зерна по 12 цяней, от места доставки 150 ли, уездом *Г* в 13 338 дворов, где 1 ху зерна по 17 цяней, от места доставки 250 ли; уездом *Д* в 5130 дворов, где 1 ху зерна по 13 цяней, от места доставки 150 ли. Всеми пятью уездами доставляется 10 000 ху налогового зерна. На 1 телегу грузят по 25 ху, везут 1 ли за 1 цянь. Спрашивается, сколько зерна соответственно [должен поставить] каждый уезд, если учитывать количество дворов в уезде и расход на перевозку налогового зерна?

Ответ: уезд $А$—$3571\frac{517}{2873}$ ху,

уезд $Б$—$2380\frac{2260}{2873}$ ху,

уезд $В$—$1388\frac{2276}{2873}$ ху,

уезд $Г$—$1719\frac{1313}{2873}$ ху,

уезд $Д$— $939\frac{2253}{2873}$ ху.

Правило: стоимость платы [за провоз] на 1 ли умножь на [количество] ли до места транспортировки, это раздели на [количество] в 25 ху, которое помещается в 1 повозке, прибавь стоимость 1 ху зерна к расходу на провоз 1 ху. Каждый раз количество дворов [уезда], разделенное на это [5], суть ступени. Ступень *А*—1026, *Б*—684, *В*—399, *Г*—494, *Д*—270. Сложи, это делитель. [Общее] количество налогового зерна умножь на каждую еще не объединенную с другими ступень, это делимые. Объедини делимые и делитель.

4. Налог в виде зерна пропорционально распределяется между: уездом *А*, где 42 000 суаней [6], 1 ху зерна [стоит] 20 [цяней], стоимость найма на работу на 1 день 1 цянь [7], везут зерно в этот уезд; уездом *Б*, где 34 272 суаня, 1 ху зерна [стоит] 18 [цяней], стоимость найма на работу на 1 день 10 цяней, до места сдачи 70 ли; уездом *В*, где 19 328 суаней, 1 ху зерна [стоит] 16 [цяней], стоимость найма на работу на 1 день 5 цяней, до места сдачи 140 ли; уездом *Г*, где 17 700 суаней, 1 ху зерна [стоит] 14 цяней, стоимость найма на работу на 1 день 5 цяней, до места сдачи 175 ли; уездом *Д*, где 23 040 суаней, 1 ху зерна [стоит] 12 цяней, стоимость найма на работу на 1 день 5 цяней, до места сдачи 210 ли; уездом *Е*, где 19 136 суаней, 1 ху зерна [стоит] 10 [цяней], стоимость найма на работу на 1 день 5 цяней, до места сдачи 280 ли. Все вместе шесть уездов должны сдать 60 000 ху зерна. Все везут в уезд *А*. Каждые 6 человек имеют [одну] общую повозку. На повозку грузят 25 ху. Груженая повозка за 1 день проходит 50 ли, порожняя повозка за 1 день проходит 70 ли. Каждый [раз] на погрузку и разгрузку отводится по 1 дню. Спрашивается, сколько зерна [должен поставить] каждый уезд, если учитывать стоимость зерна, найма на работу, [количество] суаней и т. д.?

Ответ: уезд *А* — $18\,947\frac{49}{133}$ ху,

уезд *Б* — $10\,827\frac{9}{133}$ ху,

уезд *В* — $7218\frac{6}{133}$ ху,

уезд *Г* — $6766\frac{122}{133}$ ху,

уезд *Д* — $922\frac{74}{133}$ ху,

уезд *Е* — $7218\frac{6}{133}$ ху.

Правило: перемножь нормы пути пустой и груженой телег, это делитель. Сложенные [пути] пустой и груженой [телег] умножь на расстояние для каждого [уезда], это делимые. Объедини делимые и делитель, получишь [искомые] количества дней. Прибавь [к этому] по одному дню, которые тратятся на погрузку и разгрузку и умножь на 6 человек, умножь на стоимость найма [транспорта], раздели на 25 ху, прибавь к стоимости 1 ху зерна, это и будет расход на доставку 1 ху [зерна]. Каждое количество суаней, разделенное на это [вычисленное количество], суть ступени. Сложи, это делитель. Зерновой налог умножь на каждую часть, еще не сложенную с другими, это делимые. Объедини делимые и делитель, получишь [искомые количества] в ху.

5. Имеется 7 доу проса. 3 человека разделили его между собой и очистили: один получил грубо обработанное пшено, другой—очищенное пшено, третий—хорошо очищенное пшено. Пусть [получившиеся] количества пшена равны. Спрашивается, сколько каждый взял проса и сколько получил пшена после очистки?

Ответ: для грубо обработанного пшена было взято $2\frac{10}{12}$ доу проса,

для очищенного пшена было взято $2\frac{38}{121}$ доу проса,

для хорошо очищенного пшена было взято $2\frac{73}{121}$ доу проса,

каждый получил по $1\frac{151}{605}$ доу пшена.

Правило: установи соответственно [коэффициенты]: 30—для грубо обработанного пшена, 27—для очищенного пшена, 24—для хорошо очищенного пшена, и возьми обратные ступени. Сложи, это делитель. Умножь 7 доу на еще не сложенные между собой ступени, получишь делимые для проса. Объедини, делимые и делитель, получишь [искомые количества] доу. Чтобы найти равные количества пшена, надо каждый из данных коэффициентов умножить на полученные количества проса, это делимые. Коэффициент проса 50 есть делитель. Объедини делимые и делитель, получишь [искомые количества] в доу.

6. Человек должен получить в качестве пособия 2 ху проса. Но в амбаре нет проса. Спрашивается, сколько каждого [получит человек], если заменить одну [долю] его пшеном, две [доли]—бобами [8]?

Ответ: 5 доу $1\frac{3}{7}$ шэна пшена,

1 ху $2\frac{6}{7}$ шэна бобов.

Правило: установи 1 для пшена и 2 для бобов, найди их количества, [выраженные] в просе. Сложи их, получится $3\frac{8}{9}$, это делитель. Также установи 1 для пшена и 2 для бобов, умножь их на 2 ху проса, это делимые. Объедини делимые и делитель, получишь [искомые количества] в ху.

7. Нанялись нести 2 ху соли на расстояние 100 ли за 40 цяней. Нанялись нести 1 ху 7 доу 3 с малой половиной шэна соли на расстояние 80 ли. Спрашивается, за сколько цяней?

Ответ: $27\frac{11}{15}$ цяня.

Правило: установи количество шэнов в 2 ху и умножь на 100 ли, это делитель. 40 цяней умножь на количество шэнов в ноше соли [9] и умножь еще на 80 ли, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в цянях.

8. Корзину весом в 1 дань 17 цзиней носят 50 раз [10] на расстояние в 76 бу. Корзину весом в 1 дань носят на расстояние 100 бу. Спрашивается, сколько раз?

Ответ: $57\frac{1629}{2603}$ раза.

Правило: количество бу в первом случае умножь на количество цзиней в весе корзины в первом случае, это делитель. Количество цзиней в весе корзины во втором случае умножь на [количество] бу во втором случае и на количество раз, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] раз.

9. При перевозке по тракту порожняя повозка в день проходит 70 ли, груженая телега в день проходит 50 ли. Из императорского амбара перевозят зерно в парк императорского дворца за 5 дней в три рейса. Спрашивается, каково расстояние между амбаром и парком дворца?

Ответ: $48\,\frac{11}{18}$ ли.

Правило: сложи количества ли для порожней и груженой телег, умножь на три рейса, это делитель. [Количества ли] для порожней и груженой телег перемножь и умножь на 5 дней, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в ли.

10. Моток шелка в 1 цзинь эквивалентен белому шелку в 12 ланов, 1 цзинь белого шелка эквивалентен 1 цзиню 12 чжу цветного шелка. Имеется 1 цзинь цветного шелка, спрашивается, сколько было шелка в мотках?

Ответ: 1 цзинь 4 лана $16\,\frac{16}{33}$ чжу.

Правило: 12 ланов белого шелка умножь на 1 цзинь 12 чжу цветного шелка, это делитель. Количество чжу в 1 цзине цветного шелка умножь на количество ланов в 1 цзине белого шелка и умножь на 1 цзинь шелка в мотках, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в цзинях.

11. Имеется 20 доу неочищенного пшена. Очистили его и получили 9 доу грубо обработанного пшена. Пусть теперь имеется 10 доу очищенного пшена. Спрашивается, сколько было взято неочищенного пшена [11]?

Ответ: 24 доу $6\,\frac{74}{81}$ шэна.

Правило: 9 доу грубо обработанного пшена умножь на 9, это делитель. 10 доу очищенного пшена умножь на 10 и умножь на 20 доу грубо обработанного пшена, это делимое. Объедини делимое и делитель, получится [искомое количество] в доу.

12. Быстро идущий проходит 100 бу, медленно идущий [за это же время] проходит 60 бу. Пусть теперь медленно идущий пройдет сначала 100 бу, быстро идущий догоняет его. Спрашивается, сколько [пройдут они] бу, [пока один] догонит [другого]?

Ответ: 250 бу.

Правило: из 100 бу быстро идущего вычти 60 бу медленно идущего, остаток 40 бу есть делитель. 100 бу быстро идущего умножь на вначале пройденные 100 бу медленно идущего, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в бу.

13. Медленно идущий проходит сначала 10 ли. Быстро идущий догоняет его, и через 100 ли медленно идущий оказывается отставшим на 20 ли. Спрашивается, сколько ли пройдет быстро идущий, прежде чем догонит [медленно идущего]?

Ответ: 33 с малой половиной ли.

Правило: тот путь в 10 ли, который прошел медленно идущий, сложи с путем в 20 ли, на который обгоняет его быстро идущий, это делитель. 10 ли пути медленно идущего умножь на 100 ли пути быстро идущего, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в ли.

14. Заяц сначала пробежал 100 бу. Собака, преследуя его, пробежала 250 бу, не добежав до него 30 бу, остановилась. Спрашивается, сколько бу должна пробежать, не останавливаясь, собака, чтобы догнать зайца?

Ответ: $107\frac{1}{7}$ бу.

Правило: из 100 бу, которые пробежал вначале заяц, вычти 30 бу, на которые собака не добежала [до зайца], остаток есть делитель. Не хватающие до встречи 30 бу умножь на количество бу, которые пробежала собака, догоняя зайца, это делимое.

Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в бу.

15. У человека имеется 12 цзиней золота. При выходе за заставу он платит сбор: одну десятую часть. Отдал в сбор 2 цзиня золотом, а возвратили 5000 цяней. Спрашивается, сколько цяней стоит 1 цзинь золота?

Ответ: 6250.

Правило: 10 умножь на 2 цзиня, из этого вычти 12 цзиней, остаток есть делитель. 10 умножь на 5000, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество].

16. Гость на лошади за 1 день проезжает 300 ли. Гость уехал, забыв взять одежду. Когда через $\frac{1}{3}$ дня хозяин обнаружил оставленную одежду, поехал догонять гостя, вернулся домой, то прошло уже $\frac{3}{4}$ дня. Спрашивается, сколько проезжает хозяин на лошади, не останавливаясь, за день?

Ответ: 780 ли.

Правило: из $\frac{3}{4}$ дня удали $\frac{1}{3}$ дня, половина этого остатка есть делитель. К делителю прибавь $\frac{1}{3}$ дня, 300 ли умножь на это, получится делимое. Объедини делимое и делитель, получишь путь хозяина на лошади за один день.

17. Имеется золотая трость длиною в 5 чи. Отрубили основание в 1 чи весом в 4 цзиня. Отрубили верхушку в 1 чи весом в 2 цзиня. Спрашивается, каков вес каждого чи [12]?

Ответ: 1 чи верхушки весит 2 цзиня, следующий 1 чи весит 2 цзиня 8 ланов, следующий 1 чи весит 3 цзиня, следующий 1 чи весит 3 цзиня 8 ланов, следующий 1 чи весит 4 цзиня.

Правило: вес верхушки вычти из веса основания, остаток есть коэффициент разности. Затем умножь вес основания на 4 промежутка, это нижняя первая ступень. Расположи ступени для каждого чи: каждый раз из нее [13] вычитай коэффициент разности.

Нижняя первая ступень есть делитель. Вес основания в 4 цзиня умножь подряд на каждую ступень, это делимые. Объедини делимые и делитель, получишь [искомые количества] в цзинях [14].

18. Между 5 людьми делится 5 цяней. Первые 2 получают столько же, сколько последние 3. Спрашивается, сколько получил каждый [15]?

Ответ: *А* получил $1\frac{2}{6}$ цяня, *Б* получил $1\frac{1}{6}$ цяня, *В* получил 1 цянь, *Г* получил $\frac{5}{6}$ цяня, *Д* получил $\frac{4}{6}$ цяня.

Правило: установи цяни в пирамидообразные строки—ступени. Сложи первые [строки] для двух человек, получится 9. Сложи последние [строки] для трех человек, получится 6. 6 меньше 9 на 3. 3 прибавь ко всем. Сложи, это делитель. [Количество] цяней, которые делятся, умножь на еще не сложенные [ступени], это делимые. Объедини делимые и делитель, получишь [искомые количества] в цянях [16].

19. Имеется бамбук из девяти колен. Объем трех нижних колен 4 шэна, четырех верхних колен 3 шэна. Спрашивается, каковы [объемы] двух средних колен, если объем каждого [колена] отличается от соседних на равную [величину]?

Ответ: самое нижнее [колено] — $1\frac{29}{66}$ шэна, следующее — $1\frac{22}{66}$ шэна, следующее — $1\frac{15}{66}$ шэна, следующее — $1\frac{8}{66}$ шэна, следующее — $1\frac{1}{66}$ шэна, следующее — $\frac{60}{66}$ шэна, следующее — $\frac{53}{66}$ шэна, следующее — $\frac{46}{66}$ шэна, следующее — $\frac{39}{66}$ шэна.

Правило: 4 шэна, разделенные на 3 нижних колена, составляют нижний коэффициент. 3 шэна, разделенные на 4 верхних колена, составляют верхний коэффициент. Из большего нижнего коэффициента вычти верхний меньший, остаток есть делимое. Сумму половин 4 колен и 3 колен вычти из 9 колен, остаток является делителем. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в шэнах, т. е. на столько отличается каждая ступень от соседней. Нижний коэффициент, т. е. 1 с малой половиной шэна, есть объем второго снизу колена [17].

20. Дикая утка от южного моря до северного летит 7 дней. Дикий гусь от северного моря до южного летит 9 дней. Теперь дикая утка и дикий гусь вылетают одновременно. Спрашивается, через сколько дней они встретятся [18]?

Ответ: [через] $3\frac{15}{16}$ дня.

Правило: сложи количество дней, это делитель. Количество дней перемножь, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в днях.

21. *А* отправился из Чаньаня и достигает княжество Ци за 5 дней. *Б* отправился из княжества Ци и достигает Чаньаня за 7 дней. [Пусть] теперь *Б* [находился в пути] уже 2 дня, [когда] *А* отправляется из Чаньаня. Спрашивается, через сколько дней они встретятся?

Ответ: [через] $2\frac{1}{12}$ дня.

Правило: сложи 5 дней и 7 дней, это делитель. Вычти из 7 дней 2 дня, которые уже двигался *Б*. Остаток умножь на количество дней *А*, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в днях.

22. 1 человек делает за 3 дня 38 черепиц одного вида и за 2 дня 76 черепиц другого вида. Пусть теперь он делает черепицы одного и другого видов за 1 день по равному количеству. Спрашивается, сколько черепиц он сделает?

Ответ: 25 с малой половиной штуки [19].

Правило: сложи [количества] [черепиц] обоих родов, это делитель. Перемножь их, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] штук [20].

23. 1 человек за 1 день [делает] 50 стержней для стрел, за 1 день делает 30 оперений для стрел, за 1 день делает 15 наконечников для стрел. Спрашивается, сколько стрел сделает 1 человек за 1 день, если он будет делать сразу вместе стрелы, оперения и наконечники?

Ответ: 8 с малой половиной стрелы.

Правило гласит: 50 стержней для стрел делает 1 человек, 50 оперений для стрел делает 1 с большой половиной человека, 50 наконечников делают 3 с малой половиной человека. Сложи все это, получится 6 человек, это делитель. 50 стрел есть делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] стрел [21].

24. Имеется арендное поле. В первый год аренды за 3 му [платят] 1 цянь, в будущем году за 4 му—1 цянь, в последний год за 5 му—1 цянь. Всего за 3 года получилось 100 цяней. Спрашивается, каково поле?

Ответ: 1 цин $27\frac{31}{47}$ му.

Правило: установи количества му и количества цяней, количество му поочередно умножь на количества цяней, сложи их, это делитель. Количества му перемножь и умножь на 100 цяней, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] му [22].

25. Производится обработка поля. 1 человек, выполняя 1-й вид работ, обрабатывает за 1 день 7 му, выполняя 2-й вид, обрабатывает за 1 день 3 му, а выполняя 3-й вид, обрабатывает за 1 день 5 му. Пусть теперь человек в 1 день делает одновременно все три вида работ. Спрашивается, какой участок поля [он обработает]?

Ответ: 1 му $111\frac{66}{71}$ бу.

Правило: расположи количества му трех видов работ, поочередно умножь и сложи, это делитель. Количества му перемножь, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в му.

26. Имеется водоем с пятью водосточными канавами. Если открыть одну из них, [водоем] наполнится за $\frac{1}{3}$ дня, если другую, [он] наполнится за день, если третью, [он] наполнится за 2 с половиной дня, если четвертую, [он] наполнится за 3 дня, если пятую, [он] наполнится за 5 дней. Спрашивается, через сколько дней наполнится водоем, если сразу открыть все [канавы]?

Ответ: [через] $\frac{15}{74}$ дня.

Правило: каждый раз установи, какую часть водоема наполняет канава за 1 день. Сложи [все части], это делитель. 1 день есть делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в днях. Еще одно правило: соответственно установи количества дней, [за которые] наполняется [водоем]. Умножь их поочередно, сложи, это делитель. Перемножь количества дней, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в днях [23].

27. Человек везет рис, проходит через три заставы. На внешней заставе берется $\frac{1}{3}$, на средней заставе берется $\frac{1}{5}$, на внутренней заставе берется $\frac{1}{7}$ [24]. Остаток риса [составляет] 5 доу. Спрашивается, сколько риса было вначале?

Ответ: 10 доу $9\frac{3}{8}$ шэна.

Правило: 5 доу зерна умножь на 3, на 5, на 7, это делимое. Перемножь остатки от сборов, т. е. 2, 4, 6, это делитель. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в доу [25].

28. Человек, имея золото, проходит через пять застав: у первой заставы в качестве сбора берут половину, у следующей заставы $\frac{1}{3}$, у третьей заставы $\frac{1}{4}$, у четвертой заставы $\frac{1}{5}$, у последней заставы $\frac{1}{6}$ [24]. Всего

у пяти застав взяли 1 цзинь. Спрашивается, сколько было первоначально золота?

Ответ: 1 цзинь 3 лана $4\frac{4}{5}$ чжу.

Правило: 1 цзинь умножь на общий знаменатель [частей], которые выделяются в качестве сбора, это делимое. Также из общего знаменателя вычти произведение остатков от сборов, остаток есть делитель. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в цзинях [26].

Книга VII. Избыток—недостаток

1. Сообща покупают вещь. Если каждый человек внесет по 8, то избыток [равен] 3. Если [каждый] человек внесет по 7, то недостаток [равен] 4. Спрашиваются количество людей и стоимость вещи?

   Ответ: 7 человек, стоимость вещи—53.
2. Сообща покупают курицу. Если [каждый] человек внесет по 9, то избыток [равен] 11. Если [каждый] человек внесет по 6, то недостаток [равен] 16. Спрашиваются количество людей и стоимость курицы?

   Ответ: 9 человек, стоимость курицы—70.
3. Сообща покупают [полудрагоценный камень] «чжунь». Если [каждый] человек внесет по половине, то избыток [равен] 4. Если [каждый] человек внесет по малой половине, то недостаток [равен] 3. Спрашиваются количество людей и стоимость [камня] «чжунь»?

   Ответ: 42 человека, стоимость камня «чжунь»—17.
4. Покупают сообща буйвола. Если [каждые] 7 семей вместе внесут по 190, то недостаток [равен] 330. Если [каждые] 9 семей внесут вместе по 270, то избыток [равен] 30. Спрашиваются количество семей и стоимость буйвола?

   Ответ: 126 семей, стоимость буйвола—3500.

Избыток—недостаток

Правило: расположи избыток, недостаток вместе с нормами, которые вносятся при покупке вещи сообща: избыток и недостаток, каждый из них, помести под нормами. Перемножь [с ними] нормы, которые вносятся, крест-накрест, сложи, это «ши». Сложи избыток и недостаток, это «фа». Если имеются дроби, то приведи их к общему знаменателю. Сопоставь и расположи нормы, которые вносятся, из большей вычти меньшую, на [этот] остаток раздели «ши» и «фа». «Ши» дает стоимость вещи, «фа»—количество людей [2].

Еще одно правило: сложи избыток и недостаток, это делимое. Взяв нормы, которые вносятся, из большей вычти меньшую, остаток является делителем. Объедини делимое и делитель, получится [искомое количество] людей. Умножь на это нормы, которые вносятся, убавь на избыток или добавь недостаток, это и будет стоимость вещи [3].

5. Сообща покупают золото. Если [каждый] человек внесет по 400, то избыток [равен] 3400. Если же [каждый] человек внесет по 300, то избыток [равен] 100. Спрашиваются количество людей и стоимость золота?

Ответ: 33 человека, стоимость золота—9800.

6. Сообща покупают барана. Если [каждый] человек внесет по 5, то недостаток [равен] 45. Если [каждый] человек внесет по 7, то недостаток [равен] 3. Спрашиваются количество людей и стоимость барана?

Ответ: 21 человек, стоимость барана—150.

Оба избытка—оба недостатка

Правило: расположи оба избытка или оба недостатка вместе с нормами, которые вносятся при покупке вещи сообща; избытки или недостатки, каждые из них, помести под нормами. Перемножь [с ними] нормы, которые вносятся, крест-накрест, из большего вычти меньшее, остаток есть «ши». [Возьми] оба избытка или оба недостатка, из большего вычти меньший, остаток есть «фа». Если имеются дроби, то приведи их к общему знаменателю. Сопоставь и расположи нормы, которые вносятся, из большей вычти меньшую, на этот остаток раздели «ши» и «фа». «Ши» дает стоимость вещи, «фа»—количество людей.

Еще одно правило: расположи нормы, которые вносятся, из большей вычти меньшую, остаток есть делитель. [Возьми] оба недостатка или оба избытка, из большего вычти меньший, остаток есть делимое. Делимое и делитель объедини, получишь [искомое] количество людей. Умножь на это нормы, которые вносятся, вычти излишек или добавь недостаток, это и будет стоимость вещи [4].

7. Сообща покупают свинью. Если [каждый] человек внесет по 100, то излишек [равен] 100. Если [каждый] человек внесет по 90, то как раз хватит. Спрашиваются количество людей и стоимость свиньи?

Ответ: 10 человек, стоимость свиньи—900.

8. Сообща покупают собаку. Если [каждый] человек внесет по 5, то недостаток [равен] 90. Если [каждый] человек внесет по 50, то как раз хватит. Спрашиваются количество людей и стоимость собаки?

Ответ: 2 человека, стоимость собаки—100.

Избыток-равновесие или недостаток-равновесие. Правило: в качестве делимого возьми избыточное или недостаточное количество. Возьми нормы, которые вносятся, из большей вычти меньшую, остаток есть делитель. Объедини делимое и делитель, получится [искомое] количество людей. Чтобы найти стоимость вещи, количество людей умножь на размер взноса, при котором получается равновесие [5].

9. В бочке в 10 доу находится неизвестное количество пшена. Бочку дополнили доверху неочищенным просом и очистили его, получилось 7 доу пшена. Спрашивается, сколько пшена было сначала?

Ответ: 2 доу 5 шэнов.

Правило: ищи по способу «избыток—недостаток». Если предположить, что пшена сначала было 2 доу, то не хватит 2 шэнов, если же 3 доу, то остаток равен 2 шэнам [6].

10. Имеется стена высотою 9 чи. Тыква растет наверху стены, стебель за день вырастает на 7 цуней. Кабачок растет внизу у стены, стебель за день вырастает на

1 чи. Спрашивается, через сколько дней они встретятся и какова длина каждого стебля?

Ответ: [через] $5\frac{5}{17}$ дня, длина стебля тыквы 3 чи $7\frac{1}{17}$ цуня, длина стебля кабачка 5 чи $2\frac{16}{17}$ цуня.

Правило: если предположить, [что через] 5 дней, то не хватит 5 цуней, если же [через] 6 дней, то останется 1 чи 2 цуня [7].

11. Имеются тростник, который за день вырос на 3 чи, и горох, который за день вырос на 1 чи. Тростник каждый следующий день вырастает наполовину того, насколько вырос в предыдущий, а горох — в 2 раза больше того, насколько вырос накануне. Спрашивается, через сколько дней они будут равны по длине и какова эта длина?

Ответ: [через] $2\frac{6}{13}$ дня, длина каждого из них 4 чи $8\frac{6}{13}$ цуня.

Правило: если предположить, [что через] 2 дня, тогда не хватит 1 чи 5 цуней, если же предположить, [что через] 3 дня, тогда остаток будет 1 чи 7 цуней с половиной [8].

12. Имеется стена толщиною в 5 чи. Две крысы, [находящиеся по разные стороны стены], прогрызают отверстие навстречу друг другу. Большая крыса за [первый] день прогрызла 1 чи, маленькая крыса—тоже 1 чи. Большая крыса каждый [следующий] день прогрызает в 2 раза больше, чем накануне, маленькая — в 2 раза меньше. Спрашивается, через сколько дней они встретятся и какова длина каждого отверстия?

Ответ: [через] $2\frac{2}{17}$ дня, отверстие большой крысы 3 чи $4\frac{12}{17}$ цуня, отверстие маленькой крысы 1 чи $5\frac{5}{17}$ цуня.

Правило: предположим [что через] 2 дня, тогда не хватит 5 цуней. Предположим [что через] 3 дня, тогда будет остаток 3 чи 7 цуней с половиной.

Большая крыса за второй день [прогрызает] в 2 раза больше, [чем в первый]. За 2 дня она прогрызла 3 чи. Маленькая крыса за [второй] день [прогрызает] в 2 раза меньше, [чем в первый]. За 2 дня прогрызла 1 чи 5 цуней. Сложи то, что прогрызла большая крыса, с 1 чи 5 цунями. Результат по сравнению с толщиной стены, равной 5 чи, меньше на 5 цуней. Пусть теперь [через] 3 дня. Тогда большая крыса прогрызет 7 чи, маленькая крыса прогрызет 1 чи 7 цуней с половиной. Сложи это и вычти толщину стены, равную 5 чи, остаток равен 3 чи 7 с половиной цуням. Ищи по способу «избыток—недостаток». То, что прогрызают за последний день, умножь на числитель дробного дня и объедини со знаменателем дробного дня, получится дыра, которая образовалась за дробную часть. К каждому прибавь то, сколько прогрызли за 2 дня, это и будет ответом на вопрос [9].

13. 1 доу чистого вина стоит 50 цяней, 1 доу разбавленного вина стоит 10 цяней. Когда их перемешали, получилось 2 доу ценою в 30 цяней. Спрашивается, сколько смешали того и другого вина?

Ответ: чистого вина [было] 2 шэна с половиной, разбавленного вина [было] 1 доу 7 шэнов с половиной.

Правило: предположим, что [для смеси взяли] чистого вина 5 шэнов, [тогда] разбавленного вина будет 1 доу 5 шэнов, и остаток равен 10. Пусть теперь чистого вина 2 шэна, тогда разбавленного — 1 доу 8 шэнов и недостаток равен 2.

14. Объем 5 больших посудин и 1 малой посудины равен 3 ху. Объем 1 большой посудины и 5 малых посудин равен 2 ху. Спрашивается, каков объем большой и малой посудин в отдельности?

Ответ: объем большой посудины $\frac{13}{24}$ ху, объем малой посудины $\frac{7}{24}$ ху.

Правило: предположим, что [объем] большой посудины [равен] 5 доу, [тогда] малой посудины также [равен] 5 доу, превышение [будет] в 10 доу. Пусть теперь [объем] большой посудины [равен] 5 доу 5 шэнам, [тогда] малой посудины [равен] 2 доу 5 шэнам, не хватит 2 доу [10].

15. За 3 [меры] лака можно получить 4 [меры] масла, 4 [меры] масла нужно перемешать с 5 [мерами] лака. Имеется 3 доу лака, если отделить часть и обменять на масло и это масло перемешать с остатком лака, то спрашивается, сколько надо отдать лака и сколько можно получить масла и лака, оставшегося для смеси?

Ответ: израсходуется 1 доу $1\frac{1}{4}$ шэна лака, получится 1 доу 5 шэнов масла, лака для смеси будет 1 доу $8\frac{3}{4}$ шэна.

Правило: предположим, что израсходуется 9 шэнов лака, [тогда] не хватит 6 шэнов, предположим, что израсходуется 1 доу 2 шэна лака, [тогда] останется 2 шэна.

16. Имеется [куб] из яшмы со стороной в 1 цунь, весом в 7 ланов и [куб] из камня со стороной в 1 цунь, весом в 6 ланов. Имеется камень-куб [со стороной] в 3 цуня, внутри него находится яшма, общий вес 11 цзиней. Спрашивается, каков вес яшмы и каков вес камня [11]?

Ответ: яшма—14 цуней, вес 6 цзиней 2 лана, камень—13 цуней, вес 4 цзиня 14 ланов.

Правило: предположим, что весь [куб] из яшмы, [тогда] превышение [составляет] 13 ланов; предположим, что весь [куб] из камня, [тогда] недостаток—14 ланов. Недостаток есть [объем] яшмы, превышение есть [объем] камня. Умножь на это вес каждого цуня, получишь веса объемов яшмы и камня [11].

17. 1 му плодородной земли стоит 300 [цяней], 7 му неплодородной земли стоит 500 [цяней]. Купили всего 1 цин за 10 000 цяней. Спрашивается, сколько купили плодородной и неплодородной земли?

Ответ: плодородной земли—12 с половиной му, неплодородной земли—87 с половиной му.

Правило: предположим, что [купили] 20 му плодородной земли и 80 му неплодородной земли, [тогда] избыток составляет $1714\frac{2}{7}$ циня. Предположим, что [купили] 10 му плодородной земли и 90 му неплодородной земли, [тогда] недостаток [будет равен] $571\frac{3}{4}$ циня.

18. Имеется 9 слитков золота и 11 слитков серебра, их взвесили, вес как раз совпал. Переложили слиток золота и слиток серебра, золото стало легче на 13 ланов. Спрашивается, каков вес слитка золота и слитка серебра, каждого в отдельности?

Ответ: вес [слитка] золота 2 цзиня 3 лана 18 чжу, вес [слитка] серебра 1 цзинь 13 ланов 6 чжу.

Правило: предположим, что [вес слитка] золота 3 цзиня, тогда [вес слитка] серебра $2\frac{5}{11}$ цзиня, недостаток [равен] 49 в правой строке. Предположим, что [вес слитка] золота 2 цзиня, тогда [вес слитка] серебра $1\frac{7}{11}$ цзиня. Избыток 15 в левой строке. Каждый знаменатель умножь на количества, содержащиеся в этих строках. Избыток и недостаток умножь крест-накрест на предположенные нормы, сложи, это делимое.

Сложи избыток и недостаток, это делитель. Объедини делимое и делитель, получишь вес [слитка] золота. Знаменатель умножь на делитель, раздели на него [делимое], получишь вес [слитка] серебра. Сократи, получишь [искомую] дробь [[12]].

19. Рысак и кляча движутся от Чанъаня к княжеству Ци, которое удалено от Чанъаня на 3000 ли. В первый день рысак пробегает 193 ли, [каждый следующий] день пробегает на 13 ли больше. Кляча в первый день пробегает 97 ли, [каждый следующий] день пробегает на половину ли меньше. Рысак первым достиг княжества Ци, повернул обратно и [в некотором месте] встретил клячу. Спрашивается, через сколько дней

они встретятся и сколько [ли] пробежит каждая [лошадь]?

Ответ: встретятся через $15\frac{135}{191}$ дня, рысак пробежит $4534\frac{46}{191}$ ли, кляча пробежит $1465\frac{145}{191}$ ли.

Правило: предположим, [что через] 15 дней, [тогда] недостаток [равен] 337 с половиной ли. Предположим, [что через] 16, [тогда] избыток [равен] 140 ли. Избыток и недостаток умножь крест-накрест на предположенные количества, сложи, это делимое. Сложи избыток и недостаток, это делитель. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое] количество дней. Если разделится не до конца, то сократи на общий делитель и обозначь делитель [13].

20. Человек взял с собой цяни и поехал в княжество Шу, торговал и получил прибыль на десять три. Первый раз он отослал [домой] 14 000, следующий раз 13 000, третий раз 12 000, четвертый раз 11 000, последний раз 10 000, всего за 5 раз он привез домой все свои цяни и всю свою прибыль. Спрашивается, каковы первоначальное количество цяней и прибыль?

Ответ: первоначально было $30\,468\frac{84676}{371293}$ цяня, прибыль $29\,531\frac{286417}{371293}$ цяня.

Правило: предположим, что первоначально было 30 000, [тогда] недостаток [равен] 1738 с половиной цяня. Предположим, что было 40 000, [тогда] избыток [равен] $35\,390\frac{8}{10}$ цяня.

Книга VIII. [Правило] «фан-чэн» [1]

1. Из 3 снопов хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 39 доу [зерна]. Из 2 снопов хорошего урожая, 3 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 34 доу [зерна]. Из 1 снопа хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 3 снопов плохого урожая получили 26 доу [зерна]. Спрашивается, сколько [зерна] полу-

чили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожаев?

Ответ: из 1 снопа хорошего урожая $9\frac{1}{4}$ доу,

из 1 снопа среднего урожая $4\frac{1}{4}$ доу,

из 1 снопа плохого урожая $2\frac{3}{4}$ доу.

[Правило] «фан-чэн»

Правило: расположи 3 снопа хорошего урожая, 2 снопа среднего урожая, 1 сноп плохого урожая, составляющие [их] 39 доу [зерна] с правой стороны. [Расположи] посредине и слева [количества снопов] урожаев в таком же порядке, как и с правой стороны [2]. [Числа] среднего столбца умножь на [количество] [снопов] хорошего урожая в правом столбце и образуй остатки. И еще раз так же образуй остатки до тех пор, пока не исчерпается все до [количество снопов] среднего урожая в среднем столбце [3]. И снова образуй остатки до тех пор, пока не исчерпается все до [количество снопов] плохого урожая в левом столбце. Верхнее [число] есть делитель, нижнее [число] есть делимое, делимое для [искомого количества] снопов плохого урожая. [Чтобы] найти [делимое] для среднего урожая, нижнее составляющее среднего столбца умножь на делитель и вычти делимое для плохого урожая. Остаток объедини с количеством снопов среднего урожая, это и будет делимое для среднего урожая. [Чтобы] найти [делимое] для хорошего урожая, нижнее составляющее [количество] правого столбца также умножь на делитель, исключи делимые для плохого урожая и среднего урожая [4], объедини остаток с количеством снопов хорошего урожая, это и будет делимое для хорошего урожая. Все делимые объедини с делителем, получатся [искомые количества] в доу [5].

2. Из [зерна] 7 снопов хорошего урожая убавили 1 доу, добавив к этому [зерно] 2 снопов плохого урожая,

получили всего 10 доу [зерна]. К [зерну] 8 снопов плохого урожая добавили 1 доу вместе с [зерном] 2 снопов плохого урожая, получили 10 доу [зерна]. Спрашивается, сколько [зерна] получили из каждого снопа хорошего и плохого урожаев?

Ответ: из 1 снопа хорошего урожая получили $1\frac{18}{52}$ доу,

из 1 снопа плохого урожая получили $\frac{41}{52}$ доу.

Правило: составь [6] таблицу «фан-чэн», убыток прибавь, добавку вычти, т. е. убыток в 1 доу присоедини к 10 доу, добавку в 1 доу отбавь от 10 доу [7].

3. 2 снопам хорошего урожая, 3 снопам среднего урожая и 4 снопам плохого урожая не хватает до 1 доу соответственно по 1 снопу среднего урожая, плохого урожая, хорошего урожая. Спрашивается, сколько [зерна] получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожаев?

Ответ: из 1 снопа хорошего урожая получили $\frac{9}{25}$ доу,

из 1 снопа среднего урожая получили $\frac{7}{25}$ доу,

из 1 снопа плохого урожая получили $\frac{4}{25}$ доу.

Правило: составь таблицу «фан-чэн», установи для каждого то, что не хватает. По способу «чжэн-фу» вычисляй [8].

Правило «чжэн-фу»: если одинакового названия, то вычитается; если разного названия, то прибавляется; если положительное без пары, то [становится] отрицательным, если отрицательное без пары, то [становится] положительным. Если разного названия, то вычитается, если одинакового названия, то прибавляется; если положительное без пары, то [становится] положительным, если отрицательное без пары, то [становится] отрицательным.

4. Если из [зерна] 5 снопов хорошего урожая убавить 1 доу 1 шэн, то это соответствует [количеству зерна] 7 снопов плохого урожая. А если из [зерна] 7 снопов хорошего урожая убавить 2 доу 5 шэн, то это соответствует [количеству зерна] 5 снопов плохого урожая. Спрашивается, сколько [зерна] получают из каждого снопа хорошего и плохого урожаев?

   Ответ: из 1 снопа хорошего урожая [получают] 5 шэнов.
   из 1 снопа плохого урожая [получают] 2 шэна.

   Правило: составь таблицу «фан-чэн». Установи, что 5 снопов хорошего урожая положительны, 7 снопов плохого урожая отрицательны, убыль 1 доу 1 шэн положительна. Еще раз установи, что 7 снопов хорошего урожая положительны, 5 снопов плохого урожая отрицательны, убыль 2 доу 5 шэн положительна. Вычисляй по способу «чжэн-фу» [9].

5. Если [зерно] 6 снопов хорошего урожая убавить на 1 доу 8 шэнов, то это соответствует [зерну] 10 снопов плохого урожая. Если [зерно] 15 снопов плохого урожая убавить на 5 шэнов, то это соответствует [зерну] 5 снопов хорошего урожая. Спрашивается, сколько [зерна] получают из каждого снопа хорошего и плохого урожаев?

   Ответ: из 1 снопа хорошего урожая получили 8 шэнов,
   из 1 снопа плохого урожая получили 3 шэна.

   Правило: составь таблицу «фан-чэн». Установи, что 6 снопов хорошего урожая положительны, 10 снопов плохого урожая отрицательны, убыль в 1 доу 8 шэнов положительна; еще установи, что 5 снопов хорошего урожая отрицательны, 15 снопов плохого урожая положительны, убыль 5 шэнов положительна. Вычисляй по способу «чжэн-фу» [10].

6. Если к [зерну] 3 снопов хорошего урожая прибавить 6 доу, то это соответствует [зерну] 10 снопов плохого урожая. Если к [зерну] 5 снопов плохого урожая прибавить 1 доу, то это соответствует [зерну] 2 снопов

хорошего урожая. Спрашивается, сколько [зерна] получают из каждого снопа хорошего и плохого урожаев?

Ответ: из 1 снопа хорошего урожая получают 8 доу,
из 1 снопа плохого урожая получают 3 доу.

Правило: составь таблицу «фан-чэн». Установи, что 3 снопа хорошего урожая положительны, 10 снопов плохого урожая отрицательны, прибавка в 6 доу положительна. Еще установи, что 2 снопа хорошего урожая отрицательны, 5 снопов плохого урожая положительны, прибавка в 1 доу положительна. Вычисляй по способу «чжэн-фу».

7. 5 буйволов и 2 барана стоят 10 ланов золота, 2 буйвола и 5 баранов стоят 8 ланов золота. Спрашивается, сколько стоят буйвол и баран?

Ответ: 1 буйвол стоит $1\frac{13}{21}$ лана золота,
1 баран стоит $\frac{20}{21}$ лана золота.

Правило: составь таблицу «фан-чэн».

8. Продали 2 буйволов, 5 баранов, купили 13 свиней, осталось 1000 цяней. Продали 3 буйволов, 3 свиньи, купили 9 баранов, как раз хватило. Продали 6 баранов, 8 свиней, купили 5 буйволов, не хватило 600 цяней. Спрашивается, сколько стоят буйвол, баран и свинья?

Ответ: буйвол стоит 1200, баран стоит 500, свинья стоит 300.

Правило: составь таблицу «фан-чэн». Установи, что 2 буйвола, 5 баранов положительны, 13 свиней отрицательны, остаток цяней положителен. Еще установи, что 3 буйвола положительны, 9 баранов отрицательны, 3 свиньи положительны; еще установи, что 5 буйволов отрицательны, 6 баранов положительны, 8 свиней положительны, недостаток цяней отрицателен. Вычисляй по способу «чжэн-фу» [12].

9. Имеется 5 воробьев и 6 ласточек, их взвесили на весах. Вес всех воробьев тяжелее веса всех ласточек. Если переместить 1 ласточку и 1 воробья, то вес будет как

раз одинаковым. Общий вес ласточек и воробьев 1 цзинь. Спрашивается, сколько [весят] ласточка и воробей [13]?

Ответ: вес воробья $1\frac{13}{19}$ лана, вес ласточки $1\frac{5}{19}$ лана.

Правило: составь таблицу «фан-чэн». Вес после перемещения с каждой стороны по 8 ланов.

10. У *А* и *Б* имеется неизвестное количество цяней. Если *А* получит половину того, что у *Б*, то будет 50 цяней. Если *Б* получит большую половину того, что у *А*, то также будет 50 цяней. Спрашивается, сколько цяней у каждого из них?

Ответ: у *А*—37 с половиной цяней, у *Б*—25 цяней.

Правило: составь таблицу «фан-чэн», убавь и прибавь [14]...

11. Стоимость 2 лошадей и 1 буйвола превышает 10 000 на половину стоимости лошади. Стоимость 1 лошади, 2 буйволов недостает до 10 000 на половину стоимости буйвола. Спрашивается, сколько стоят лошадь и буйвол?

Ответ: лошадь стоит $5454\frac{6}{11}$ цяня,
буйвол стоит $1818\frac{2}{11}$ цяня.

Правило: составь таблицу «фан-чэн». Убавь и прибавь [15]...

12. 1 военная лошадь, 2 средние лошади, 3 слабые лошади, [по отдельности] везущие груз в 40 даней по равнине, не могут въехать на косогор. Когда к военной лошади прибавили 1 среднюю лошадь, к средним лошадям прибавили 1 слабую лошадь, а к слабым лошадям прибавили 1 военную лошадь, они все въехали наверх. Спрашивается, на сколько сильна каждая из лошадей [16]?

Ответ: 1 военная лошадь может везти $22\frac{6}{7}$ даня,
1 средняя лошадь может везти $17\frac{1}{7}$ даня,
1 слабая лошадь может везти $5\frac{5}{7}$ даня.

Правило: составь таблицу «фан-чэн». Установи для каждого то, что прибавляется. Вычисляй по способу «чжэн-фу».

13. У 5 семей имеется общий колодец. Чтобы достать [до поверхности воды], 2 веревкам [семьи] *А* недостает 1 веревки [семьи] *В*, 3 веревкам [семьи] *Б* недостает 1 веревки [семьи] *В*, 4 веревкам [семьи] *В* недостает 1 веревки [семьи] *Г*, 5 веревкам [семьи] *Г* недостает 1 веревки [семьи] *Д*, 6 веревкам [семьи] *Д* недостает 1 веревки [семьи] *А*. Спрашивается, какова глубина колодца и какова длина каждого куска веревки [17]?

Ответ: глубина колодца 7 чжан 2 чи 1 цунь,
длина веревки [семьи] *А*—2 чжана 6 чи 5 цуней,
длина веревки [семьи] *Б*—1 чжан 9 чи 1 цунь,
длина веревки [семьи] *В*—1 чжан 4 чи 8 цуней,
длина веревки [семьи] *Г*—1 чжан 2 чи 3 цуней,
длина веревки [семьи] *Д*—7 чи 6 цуней.

Правило: составь таблицу «фан-чэн», вычисляй по способу «чжэн-фу».

14. Урожаю с 2 бу белого проса, с 3 бу зеленого проса, а с 4 бу желтого проса, с 5 бу черного проса не хватает каждому в отдельности до доу. Если, соответственно, к белому добавить зеленого и желтого, к зеленому—желтого и черного, к желтому—черного и белого, к черному—белого и зеленого, каждого по 1 бу, то соберут по полному доу. Спрашивается, сколько каждого вида проса собирают с одного бу [18]?

Ответ: с 1 бу белого проса собирают $\frac{33}{111}$ доу,
с 1 бу зеленого проса собирают $\frac{28}{111}$ доу,
с 1 бу желтого проса собирают $\frac{17}{111}$ доу,
с 1 бу черного проса собирают $\frac{10}{111}$ доу.

Правило: составь таблицу «фан-чэн», каждый [раз] установи то, что нужно добавлять, вычисляй по способу «чжэн-фу».

15. 2 снопа урожая A, 3 снопа урожая $Б$, 4 снопа урожая $В$ превышают по весу дань: вес 2 [снопов] [урожая] A [превышает дань] на [вес] 1 [снопа урожая] $Б$, вес 3 [снопов урожая] $Б$ на вес 1 [снопа урожая] $В$, вес 4 [снопов урожая] $В$ на [вес] 1 [снопа урожая] A. Спрашивается, каков вес каждого из снопов урожаев A, $Б$, $В$?

Ответ: 1 сноп урожая A весит $\frac{17}{23}$ даня,

1 сноп урожая $Б$ весит $\frac{11}{23}$ даня,

1 сноп урожая $В$ весит $\frac{10}{23}$ даня.

Правило: установи таблицу «фан-чэн». Установи, что вещи, на веса которых превышают дань [веса данных снопов], отрицательны. Вычисляй по способу «чжэн-фу».

16. Пусть 1 начальнику, 5 чиновникам, 10 человекам свиты подают к столу 10 кур. Пусть 10 начальникам, 1 чиновнику, 5 человекам свиты подают к столу 8 кур. Пусть 5 начальникам, 10 чиновникам, 1 человеку свиты подают к столу 6 кур. Спрашивается, сколько кур нужно подать начальнику, чиновнику, человеку свиты [20]?

Ответ: 1 начальнику нужно подать $\frac{45}{122}$ курицы,

1 чиновнику нужно подать $\frac{41}{122}$ курицы,

1 человеку свиты нужно подать $\frac{97}{122}$ курицы.

Правило: установи таблицу «фан-чэн», вычисляй по способу «чжэн-фу».

17. 5 баранов, 4 собаки, 3 курицы, 2 зайца стоят 1496 цяней. 4 барана, 2 собаки, 6 куриц, 3 зайца стоят 1175 цяней. 3 барана, 1 собака, 7 куриц, 5 зайцев стоят 958 цяней. 2 барана, 3 собаки, 6 куриц, 1 заяц стоят

861 цянь. Спрашивается, сколько стоят баран, собака, курица и заяц?

Ответ: баран стоит 177, собака стоит 121, курица стоит 23, заяц стоит 29.

Правило: установи таблицу «фан-чэн», вычисляй по способу «чжэн-фу».

18. 9 доу кунжута, 7 доу пшеницы, 3 доу бобов, 2 доу гороха, 5 доу проса стоят 140 цяней. 7 доу кунжута, 6 доу пшеницы, 4 доу бобов, 5 доу гороха, 3 доу проса стоят 128 цяней. 3 доу кунжута, 5 доу пшеницы, 7 доу бобов, 6 доу гороха, 4 доу проса стоят 116 цяней. 2 доу кунжута, 5 доу пшеницы, 3 доу бобов, 9 доу гороха, 4 доу проса стоят 112 цяней. 1 доу кунжута, 3 доу пшеницы, 2 доу бобов, 8 доу гороха, 5 доу проса стоят 95 цяней. Спрашивается, сколько стоит 1 доу [каждого вида] [22]?

Ответ: 1 доу кунжута [стоит] 7 цяней,
1 доу пшеницы [стоит] 4 цяня,
1 доу бобов [стоит] 3 цяня,
1 доу гороха [стоит] 5 цяней,
1 доу проса [стоит] 6 цяней.

Правило: установи таблицу «фан-чэн», вычисляй по способу «чжэн-фу».

Книга IX. Гоу-гу [1]

1. Имеется горизонтальный катет в 3 чи, вертикальный катет в 4 чи. Спрашивается, какова гипотенуза?

Ответ: 5 чи.

2. Имеется гипотенуза в 5 чи, горизонтальный катет в 3 чи. Спрашивается, каков вертикальный катет?

Ответ: 4 чи.

3. Имеется вертикальный катет в 4 чи, гипотенуза в 5 чи. Спрашивается, каков горизонтальный катет?

Ответ: 3 чи.

Гоу-гу

Правило: умножь сам на себя каждый из катетов, сложи, извлеки из этого квадратный корень, это и будет гипотенуза.

Также: умножь сам на себя вертикальный катет, вычти из умноженной саму на себя гипотенузы, извлеки из остатка квадратный корень, это и будет горизонтальный катет.

Также: умножь сам на себя горизонтальный катет, вычти из умноженной сама на себя гипотенузы, извлеки из остатка квадратный корень, это и будет вертикальный катет.

4. Имеется бревно диаметром в 2 чи 5 цуней. Если выпилить прямоугольный брус толщиной, например, в 7 цуней, то спрашивается, какова будет его ширина?

Ответ: 2 чи 4,5 цуня [2].

Правило: диаметр в 2 чи 5 цуней умножь сам на себя, вычти из этого умноженные сами на себя 7 цуней, извлеки из остатка квадратный корень, это и будет ширина [3].

5. Имеется дерево в 2 чжана длиной, обхват его 3 чи. У его подножья растет пуэрария, которая поднимается семью витками вокруг дерева до его вершины. Спрашивается, какова длина пуэрарии?

Ответ: 2 чжана 9 чи.

Правило: 7 кругов умножь на 3 [чи] обхвата, это вертикальный катет, длина дерева—горизонтальный катет, это дает искомую гипотенузу, которая является длиной пуэрарии [4].

6. Имеется водоем со стороной в 1 чжан. В центре его растет камыш, который выступает над водой на 1 чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснется его. Спрашивается, какова глубина воды и какова длина камыша?

Ответ: глубина воды 1 чжан 2 чи,
длина камыша 1 чжан 3 чи.

Правило: половину стороны водоема умножь саму на себя, надводную часть в 1 чи умножь саму на себя, вычти это [из первого], остаток раздели на удвоенную надводную часть камыша, получишь глубину воды. Прибавь количество [чи] надводной части, получишь длину камыша [5].

7. Имеется столб, к его вершине привязан канат. Конец [каната] [длиною] в 3 чи [лежит] на земле. Если канат

натянуть, то расстояние до основания столба будет 8 чи. Спрашивается, какова длина каната.

Ответ: 1 чжан $4^1/_{21}$ чи.

Правило: умножь расстояние до основания столба само на себя. Объедини [6] с длиной конца, [лежащего на земле], к полученному добавь длину конца, [лежащего на земле], и раздели пополам, это и будет длина каната [7].

8. Имеется стена высотой в 1 чжан. К стене прислонен столб так, что высота [наклонного столба] сравнялась со стеной. Если столб оттащить на 1 чи от стены, то он упадет на землю. Спрашивается, каков столб?

Ответ: 5 чжанов 5 цуней.

Правило: высоту стены в 10 чи умножь саму на себя, объедини с количеством чи, на которое оттащили [столб]; полученное прибавь к количеству чи, на которое оттащили [столб], и возьми половину этого, это и будет длина [столба] [8].

9. Имеется замурованное в стену бревно, величина его неизвестна. Если спилить его на 1 цунь, то длина среза будет равна 1 чи. Спрашивается, каков диаметр [бревна] [9]?

Ответ: диаметр бревна 2 чи 6 цуней.

Правило: половину [длины] среза умножь саму на себя, объедини с цунями глубины, к этому прибавь цуни глубины, это и есть диаметр бревна.

10. Имеются открытые ворота, которые удалены от порога на 1 чи и не совпадают на 2 цуня. Спрашивается, какова ширина ворот?

Ответ: 1 чжан 1 цунь.

Правило: удаленность от порога в 1 чи умножь саму на себя, получившееся объедини с половиной от 2 цуней, насколько не совпадает [проекция ворот с порогом]. Получившееся увеличь наполовину того, насколько не совпадает [проекция ворот с порогом], это и будет ширина ворот.

11. Имеется дверь, высота которой больше ее ширины на 6 чи 8 цуней. Наибольшее расстояние между углами 1 чжан [11]. Спрашивается, каковы ширина и высота двери?

Ответ: ширина 2 чи 8 цуней,
высота 9 чи 6 цуней.

Правило: 1 чжан умножь сам на себя, это «ши», половину избытка умножь саму на себя, удвой, вычти из «ши», возьми половину остатка, извлеки квадратный корень, из него, из полученного вычти половину излишка, это и будет ширина двери. Прибавь половину излишка, это и будет высота двери [12].

12. Имеется дверь неизвестной высоты и ширины. Ширина [двери] короче неизвестной длины бамбукового шеста, не хватает 4 чи, длина [двери] короче [длины шеста], не хватает 2 чи, с диагональю [13] [длина шеста] как раз совпадает. Спрашивается, каковы ширина, высота и диагональ двери?

Ответ: ширина 6 чи, высота 8 чи, диагональ 1 чжан.

Правило: перемножь недостатки длины и ширины, удвой и извлеки квадратный корень. То, что получится, прибавь к недостатку длины, это и будет ширина двери. Прибавь к недостатку ширины, это и будет высота двери. Прибавь к обоим, получишь диагональ двери [14].

13. Имеется бамбук высотой в 1 чжан. Вершину его согнули так, что она касается земли на расстоянии 3 чи от корня. Спрашивается, какова высота после сгибания?

Ответ: $4\frac{11}{12}$ чи.

Правило: расстояние от корня умножь само на себя, объедини с высотой. То, что получится, вычти из высоты бамбука, возьми половину остатка, это и будет высота после сгибания [15].

14. Два человека находятся в одном месте. Норма ходьбы *А* есть 7, норма ходьбы *Б* есть 3. *Б* идет на восток. *А* идет 10 бу на юг, а затем [идет] по косому [направлению] на северо-восток до встречи с *Б*. Спрашивается, какой путь прошел каждый из них, *А* и *Б*?

Ответ: *Б* прошел на восток 10 с половиной бу, *А* прошел по косому [направлению] 14 с половиной бу, когда догнал его.

Правило: 7 умножь само на себя, 3 тоже умножь само на себя, сложи и возьми половину. Возьми это в качестве нормы ходьбы A по косому [направлению]. Вычти из 7, умноженного само на себя, норму ходьбы по косому [направлению], остаток является нормой ходьбы на юг. 3 умножь на 7, это норма ходьбы $Б$ на восток. 10 бу ходьбы на юг умножь на норму ходьбы A по косому направлению, 10 бу умножь на норму ходьбы $Б$ на восток, каждое есть делимое. Объедини делимое и норму ходьбы на юг, получишь для каждого количество пройденного [16].

15. Имеются горизонтальный катет в 5 бу, вертикальный катет в 12 бу. Спрашивается, какова [сторона] квадрата, вписанного в этот треугольник?

Ответ: сторона [квадрата] $3\frac{9}{17}$ бу.

Правило: сложи горизонтальный и вертикальный катеты, это делитель. Перемножь горизонтальный и вертикальный катеты, это делимое. Объедини делимое и делитель получишь сторону [квадрата] в бу [17].

16. Имеется горизонтальный катет в 8 бу, вертикальный катет в 15 бу. Спрашивается, каков диаметр круга, вписанного в прямоугольный треугольник?

Ответ: 6 бу.

Правило: 8 бу есть горизонтальный катет, 15 есть вертикальный катет, ищи гипотенузу. [Все] эти 3 [величины] сложи вместе, это делитель. Катеты перемножь, удвой, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь диаметр в бу [18].

17. Имеется город [19] со сторонами в 200 бу, в середине каждой [находятся] ворота. На расстоянии 15 бу от восточных ворот имеется столб. Спрашивается, сколько бу нужно пройти от южных ворот, чтобы увидеть столб?

Ответ: 666 с большой половиной бу.

Правило: количество бу, пройденное от восточных ворот, есть делитель. Умножь половину стороны города саму на себя, это делимое. Объедини делимое и делитель, получится [искомое количество] в бу [20].

18. Имеется город, [длина которого] с востока на запад 7 ли, с юга на север—9 ли, в середине каждой [стороны] [находятся] ворота. На расстоянии 15 ли от восточных ворот имеется столб. Спрашивается, сколько бу [нужно пройти], выйдя из южных ворот, чтобы увидеть столб?

Ответ: 315 бу.

Правило: количество бу от восточных ворот до угла южной [стороны] умножь на количество бу от южных ворот до угла восточной [стороны], это делимое. Количество бу, на которое отстоит дерево от ворот, есть делитель. Объедини делимое и делитель [21].

19. Имеется город в виде квадрата со стороной неизвестного размера, в центре каждой [стороны] [находятся] ворота. На расстоянии 30 бу от северных ворот имеется столб. Если пройти 750 бу от западных ворот, то можно увидеть столб. Спрашивается, какова сторона города?

Ответ: 1 ли.

Правило: перемножь оба количества бу, на которые удалены ворота, и [умножь] еще на 4, это делимое. Извлеки квадратный корень, это и будет сторона города [22].

20. Имеется город в виде квадрата со стороной неизвестного размера, в центре каждой [стороны] [находятся] ворота. На расстоянии 20 бу от северных ворот имеется столб. Если пройти от южных ворот 14 бу и повернуть на запад, пройти еще 1775 бу, то можно увидеть столб. Спрашивается, какова сторона города?

Ответ: 250 бу.

Правило: количество бу, пройденное от северных ворот, умножь на удвоенное количество бу, [пройденное] на запад, это делимое. Сложи с количеством бу, пройденным от южных ворот, это дополненный делитель. Извлеки квадратный корень, это и будет сторона города [23].

21. Имеется город в виде квадрата со стороной в 10 ли, в центре каждой [стороны] [находятся] ворота. *А* и *Б*,

находясь в центре города, начинают двигаться: *Б* идет на восток, *А* — на юг, какое количество он проходит от ворот, неизвестно. [Затем] он [*А*] идет по косому направлению так, что проходит возле угла [стороны] восточных ворот, и догоняет *Б*. Норма ходьбы *А* есть 5, *Б* есть 3. Спрашивается, какие пути пройдут *А* и *Б* каждый в отдельности?

Ответ: *А* пройдет 800 бу от южных ворот, путь до встречи с *Б* по косому направлению [составит] $4887^1/_2$ бу, путь *Б* на восток [равен] $4312^1/_2$ бу.

Правило: 5 умножь само на себя, также 3 умножь само на себя, сложи и возьми половину, это норма ходьбы по косине. Норму ходьбы по косине вычти из 5, умноженного само на себя, остаток есть норма ходьбы на юг. 3 умножь на 5, это норма ходьбы на восток. Возьми половину стороны города, умножь на норму ходьбы на юг, объедини с нормой ходьбы на восток, это и будет количество бу, пройденное от южных ворот. Добавь к половине стороны города, это и будет дорога на юг. Установив [количество] бу по южной дороге, ищи гипотенузу, умножив на норму ходьбы по косине, ищи [путь] на восток, умножив на норму ходьбы на восток. Каждый раз это делимое. Объедини делимые с нормой ходьбы на юг, получатся [искомые] количества в бу [24].

22. Столб отстоит от человека на неизвестном расстоянии. Поставлены 4 столбика, [которые] удалены друг от друга на 1 чжан. Пусть два столбика [находятся] слева от наблюдателя, сам же он находится у правого последнего столбика и наблюдает столб [на расстоянии] в 3 цуня от правого переднего столбика. Спрашивается, насколько удален от человека столб?

Ответ: 33 чжана 3 чи 3 с малой половиной цуня.

Правило: умножь 1 чжан сам на себя, это делимое. 3 цуня есть делитель. Объедини делимое и делитель [25].

23. Гора расположена на запад от столба. Высота ее неизвестна. Она удалена от столба на 53 ли. Высота столба 9 чжанов 5 чи. В 3 ли к востоку [от него] стоит

человек и наблюдает вершину столба на одном уровне с вершиной горы. Уровень зрения человека расположен на высоте в 7 чи. Спрашивается, какова высота горы?

Ответ: 164 чжана 9 чи 6 с большой половиной цуня.

Правило: из высоты столба вычти высоту уровня зрения 7 чи, остаток умножь на 53 ли, это делимое. [Расстояние], на которое удален человек от столба в 3 ли, есть делитель. Объедини делимое и делитель. То, что получится, прибавь к высоте столба, это и будет высота горы [26].

24. Диаметр колодца 5 чи, глубина неизвестна. У верхнего края колодца поставлен шест в 5 чи. Вершина шеста наблюдается на одном уровне с границей воды и стены, а на диаметре откладывается 4 цуня. Спрашивается, какова глубина колодца?

Ответ: 5 чжанов 7 чи 5 цуней.

Правило: из 5 чи, диаметра колодца, вычти 4 цуня, что откладывается на диаметре. Остаток умножь на 5 чи, высоту шеста, это делимое. 4 цуня, что откладывается на диаметре, есть делитель. Объедини делимое и делитель, получишь [искомое количество] в цунях [27].

ПРИМЕЧАНИЯ К «МАТЕМАТИКЕ В ДЕВЯТИ КНИГАХ»

Э. И. Березкина

ПРИМЕЧАНИЯ К КНИГЕ I

1. Заглавия китайских древних текстов, как правило, трудно перевести на любой современный язык. Так название книги I есть 方田 (фантянь). Второй иероглиф обозначает поле. Из многочисленных значений первого слова здесь подходит прямоугольная площадка. Если под ней подразумевать прямоугольник со сторонами 15 и 16 бу, площадь которого принималась древними китайцами в качестве единичной, равной 1 му, то словосочетание «фан-тянь» может быть переведено «измерение полей». Тогда измерить поле

一 二 三 四 五 六 七 八 九

Черт. 1а.

十 百 千 萬 億

Черт. 1б.

в древней китайской математике означало вымостить его единичным прямоугольником и назвать число таких единиц.

2. В оригинальном тексте все числа записаны иероглифами, означающими соответственно цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, по китайской системе счисления, которая является десятичной и основана на мультипликативном принципе, очень близком к позиционному (черт. 1а).

Применяемые обозначения разрядов следующие (черт. 1б): 10, 100, 1000, 10 000, 100 000 000. В каждом классе имеется по 4 разряда: в первый класс входят единицы, десятки, сотни, тысячи; во второй—десятки тысяч и т. д., в третий—десятки тысяч десятков тысяч, т. е. сотни миллионов и т. д. Например, число 3 972 150 625 из книги IV трактата имеет оригинальную запись, изображенную на черт. 2, т. е. «3 десятка 9 сотен миллионов 7 тысяч 2 сотни 1 десяток 5 десятков тысяч 6 сотен 2 десятка 5» Отметим, что при описанной системе записи знак нуля не требуется.

Поэтому неудивительно, что он появился в Китае только в XII веке и был заимствован из Индии.

Китайская система счета возникла в глубокой древности, когда образовывалась письменность народа. В текстах на гадальных

三十九億七千二百一十五萬六百二十五

Черт. 2.

костях эпохи Инь (XVIII—XII вв. до н. э.), на бронзовых изделиях эпохи Чжоу (XII—III вв. до н. э.) содержится запись чисел до 30 000, которая тогда не была однородной. Подробно по этому вопросу см. книгу Ли Яня «Материалы по истории математики древнего Китая», 1954, Шанхай, стр. 3—7, 18—19, на китайском

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Эпоха Инь	一	二	三	亖	X	∧ ∩	+	)(	ǂ
Эпоха Чжоу	一	二	三	亖	亖 X	⇑	+	)(	九
Династия Хань	一	二	三	⊕	X	介	ǂ	)(	九

Черт. 3.

языке. В оригинале, с которого сделан перевод, неоднородность наблюдается только в записи чисел второго десятка. Например, запись 15 в данном случае читается «ши у», т. е. «десяток 5», а на стр. 112 число 14—«и ши сы», т. е. «1 десяток 4».

Начертания самих цифр также претерпевали изменения, как видно из таблицы, взятой из книги Ли Яня «История китайской математики», 1955, Шанхай, стр. 2, на китайском языке (черт. 3).

В переводе ради простоты числа всюду будут записаны в нашей системе счисления.

3. Основные меры длины и площади, применяющиеся в книге I трактата, таковы:

1 бу (т. е. по-русски шаг), во времена Ханьской династии, к которым относится данное произведение, принимался равным 6 чи и составлял $\sim$ 1,33 *м*. Сейчас 1 бу = 5 чи = 1,6 *м*.

1 ли = 300 бу,
1 му = 240 кв. бу,
1 цин = 100 му.

Как видно, единицей площади му служил не квадрат, но прямоугольник в 15·16 кв. бу.

См. Ян Куань «Исследование величины чи в разные эпохи в Китае», 1955, Шанхай, на китайском языке.

4. В оригинальном тексте нигде не указывается размерность единиц, в которых выражаются площади и объемы. В переводе мы будем следовать оригиналу.

5. Иероглиф «площадь» (цзи) одновременно употребляется в книгах IV, V оригинала для обозначения объема. В задачах на измерение полей при формулировании вопроса этот термин не употребляется; вопрос древнего китайца «каково поле?» однозначно соответствовал вопросу о величине площади его. Как видно, четкой терминологии еще не было. В настоящее время этот иероглиф входит составной частью в слова «площадь» (мянь цзи), т. е. «плоская величина», «объем» (ти цзи), т. е. «телесная величина».

6. Дробь $\frac{12}{18}$ в оригинале записана так: «ши ба фэнь чжи ши ер», т. е. «18-х долей 12», где «фэнь»—дробь, делить, а «чжи»—грамматическая частица, отделяющая определение от определяемого.

7. В древнем Китае вычисления производились на счетной доске, где числа изображались с помощью счетных палочек. Поэтому в правилах трактата употребляется специальная терминология, имеющая в виду счет на доске. Здесь термин «установи» (фу чжи) говорит о том, что данные количества надо расположить на счетной доске, а затем над ними произвести указанные правилом действия.

В трактате нет ни описания счетной доски, ни правил четырех арифметических действий, так как, по-видимому, они были тогда широко известны. См. по этому вопросу книгу Ли Яня «История китайской математики», 1955, Шанхай, стр. 59 и след., на китайском языке; а также IV том книги Ли Яня «Собрание работ по истории китайской математики», 1956, Пекин, стр. 1—8, на китайском языке.

8. Изложенное здесь правило представляет собой древнекитайский вариант так называемого алгоритма Евклида для определения общего наибольшего делителя двух чисел. В «Началах» Евклида (кн. VII, предл. 2) общий наибольший делитель двух чисел a и b $(a>b)$ находится с помощью следующего алгоритма: из a вычитается b последовательно столько раз, чтобы остаток r_1 был меньше b, такая же операция производится с b и r_1, пока не получится остаток $r_2<r_1$; затем с r_1 и r_2 и т. д., пока не получится два остатка $r_{n-2}>r_{n-1}$, таких, что меньший содержится в большем целое число раз. Алгоритм можно представить системой равенств:

$$
\begin{gathered}
a-q_0b_1=r_1,\\
b-q_1r_1=r_2,\\
r_1-q_2r_2=r_3,\\
\dots\dots\dots\dots,\\
r_{n-3}-q_{n-2}r_{n-2}=r_{n-1}.\\
r_{n-2}=q_{n-1}r_{n-1}.
\end{gathered}
$$

Последний остаток r_{n-1} есть о.н.д. чисел a и b.

Поскольку в «Началах» алгоритм Евклида дан в геометрической форме, то производится не деление a на b, как мы обычно делаем, а вычитание отрезка b из отрезка a столько раз, чтобы получился отрезок r_1, меньший отрезка b. Для последовательного вычитания в древнегреческом языке существовал особый термин «последовательное отнятие» ἀνθοφαιρονμενοσ от ἀνθοφαιρεῖν. В древнекитайском алгоритме, хотя он дан в арифметической форме, также применяется такое последовательное вычитание меньшего числа из большего; о. н. д. называется «равным количеством» (дэн-шу). Этот термин для о. н. д. употребляется далее в трактате.

9. Иероглифы (ху чэн), переведенные термином «поочередно умножить», означают, что надо числитель каждой дроби умножить на все знаменатели всех остальных дробей. Таким образом, при приведении дробей к общему знаменателю древний китайский вычислитель в качестве общего знаменателя берет не н.о.к. знаменателей, а просто их произведение. Термин «ху-чэн» в трактате всюду употребляется в указанном смысле.

Такой способ приведения дробей к общему знаменателю удержался до XVI века.

Однако уже в рассматриваемом трактате (см. книгу IV и примечание 3 к книге IV) встречаются примеры, когда при сложении дробей в качестве общего знаменателя берется н.о.к. знаменателей. Поэтому утверждение, что первыми в этом отношении были Леонардо Пизанский (XIII в.) и Н. Тарталья (XVI в.), требует поправки. См. в статье А. П. Юшкевича «Арифметический трактат Мухаммеда бен Муса ал-Хорезми», примечание 73 на стр. 115.

10. «Объедини делимое и делитель»—перевод часто встречающегося в трактате специального выражения «ши жу фа эр и». Здесь «ши» есть делимое, «фа»—делитель, «жу» означает «составить» (ср., например, со значением этого слова в конструкции «составь таблицу» «жу фан чэн», которая употребляется в правилах к задачам книги VIII). «Эр» является служебным словом, может быть союзом «и»; «и» означает «объединить», «единица». Таким образом, «ши жу фа эр и» буквально можно перевести «делимое составь с делителем в одно». Смысл этой фразы состоит в том, что после получения на счетной доске в результате всех описанных в правиле операций двух целых чисел, делимого a и делителя b, рекомендуется составить из них одно число—дробь $\frac{a}{b}$. В процессе «объединения» требуется, если можно, сократить a и b на их о.н.д. и, если $a > b$, выделить целую часть: $A\frac{a_1}{b}$, где $Ab+a_1=a$. В случае $a<b$ и $(a, b)=1$ специально указывается: «Если делитель больше делимого, то обозначь делитель» (бу мань фа чжу и фа минь чжи). Здесь явно имеется в виду счетная доска, на которой происходит вычисление делимого и делителя. В дальнейшем указание на «обозначение» делителя часто опускается, по-видимому, как само собой разумеющееся.

Подобным же образом толкует это выражение Лю Хуэй в своих комментариях к данному месту трактата (Лю Хуэй—математик III века, написавший комментарии к «Математике в девяти книгах»; см. текст оригинала к данному месту, где помещены комментарии Лю Хуэя). Аналогично понимает рассматриваемую фразу проф. Ли Янь.

В подтверждение сказанному проследим употребление в оригинале «...жу...эр и» в других случаях.

Например, на стр. 120 и след. т. I оригинала встречаемся с выражением «ши жу фа дэ...», т. е. «[объедини] делимое и делитель, получишь...», которое является, по-видимому, производной от «ши жу фа эр и дэ...», т. е. «объедини», делимое и делитель, получишь...». Иногда встречается выражение «ши жу фа дэ и» (стр. 120 и далее т. I), т. е. «объедини делимое и делитель, получишь (искомое)».

Отметим, что «... эр и» употребляется отдельно. Обычно перед ним стоит числительное, что означает, например, «сань ши лю эр и», «раздели на 36 и возьми 1 раз» (стр. 156 т. I). На стр. 75 т. I есть фраза «му фа эр и», т. е. «выдели му», являющаяся исключением из только что указанного употребления конструкции. Ее значение аналогично фразе «и му фа», т. е. «выдели му» (стр. 68 т. I).

Наконец, общий случай употребления рассматриваемой конструкции встречаем, например, на стр. 46 т. II оригинала: «юй жу чжун хэ бин шу эр и», т. е. «объедини остаток с количеством снопов среднего урожая».

Таким образом, «ши жу фа эр и» является специальным математическим термином, который систематически применяется в трактате. В переводе термин «объединить» мы будем всегда употреблять именно в указанном значении.

Расшифровка далеко не сразу понятной фразы «ши жу фа эр и», трудно передаваемой на любой современный язык даже после выяснения ее смысла, является наглядным примером сложности текста трактата. Неудивительно поэтому, что древние математические сочинения со временем были забыты и перестали быть понятными самим китайцам.

При таком толковании фразы «объедини делимое и делитель» видно, что в математике древнего Китая дробь понималась как единое число. В подтверждение см. также [2] и [6] к книге IV.

11. Здесь называется только числитель дроби $\frac{2}{12}$, на которую надо убавить $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$, и т. д. Здесь особенно ярко проявляется характер древнекитайских вычислений на счетной доске, во время которых производится оперирование с числителями и знаменателями дробей как с отдельными числами. Ср. аналогичное правило к следующей задаче.

12. В этих задачах, возможно, данных на закрепление правила вычитания дробей, находится среднее арифметическое трех чисел.

Более простые задачи на определение среднего арифметического двух чисел в трактате отсутствуют. Кроме того, отметим некоторую осторожность, с которой выбраны в задачах значения дробей: первые из них $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ простейшие, две другие $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$ также и притом взяты одинаковыми в обеих задачах.

Правило содержит много специальных технических терминов, точное значение которых ныне неизвестно и представляет большие трудности для перевода.

13. «Уравненное делимое» (пин-ши) является суммой $12 + 16 + 18 = 46$ числителей заданных дробей, приведенных к общему знаменателю $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

14. Этот делитель равен $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, так что сумма данных дробей равна $\frac{46}{24}$.

15. Так как числители и знаменатели дробей на счетной доске располагались, по-видимому, в ряд, то «количество рядов» (ле шу) есть количество дробей n. Здесь $n = 3$.

16. Числители и знаменатели дробей $\frac{12}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{18}{24}$ умножаются на 3, так как среднее арифметическое для них равно $\frac{1}{3}$ их суммы, т. е. $\frac{1}{3} \cdot \frac{46}{24} = \frac{46}{72}$, а 46 на 3 не делится нацело. Числители дробей, «стоящих в ряду», т. е. еще не сложенные между собой, которые здесь названы «рядовыми делимыми» (ле ши), будут 36, 48, 54, очевидно, 72-х.

17. То есть из «рядовых делимых» 48 и 54 надо вычесть «уравненное делимое» 46—числитель среднего арифметического, получается $\frac{2}{72}$ и $\frac{8}{72}$. Далее предлагается полученные дроби сократить: $\frac{1}{36}$ и $\frac{4}{36}$. Их называют разностями, поскольку они обозначают разности, которые составляют со средним арифметическим две последние из заданных дробей.

18. То есть $\frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$ надо прибавить к меньшей дроби $\frac{36}{72} = \frac{18}{36}$.

19. Имеется в виду назвать среднее арифметическое, т. е. $\frac{23}{36}$ (см. 10 к данной книге). Здесь делитель уже не 72, а 36—сокращение не было специально оговорено.

20. В задачах 17 и 18 производится деление целых с дробями на целые с дробями, притом в очень своеобразной форме и еще до задач на умножение дробей. Причины такого местоположения и формы задач следующие.

Книга I посвящена измерению площадей полей различной геометрической формы, стороны которых могут быть выражены как целыми, так и дробными числами (иррациональных чисел древние китайцы не знали). Но для того, чтобы найти площадь хотя бы простейшего, прямоугольного поля в общем случае, надо уметь умножать смешанные дроби. Вероятно, составители трактата при систематизации древних текстов решили поместить перед задачами на измерение полей правила действий с дробями: сокращение их, сложение и вычитание. Все эти действия производятся над отвлеченными дробями. Далее, естественно, следовало определить умножение правильных дробей. Однако это делается уже в конкретной форме, в виде определения площади поля (см. следующие задачи 19—21 книги I). Тем самым эти задачи, помещенные под заголовком «Умножение дробей» (чэн фэнь) (но не измерение полей; очевидно, размеры сторон, равных дробной части бу, по-русски, шага, для поля неестественны), являются по форме подготовкой к «Общему измерению полей» (да гуань тянь), когда стороны суть смешанные дроби (см. задачи 22—24). После всего этого идут задачи на нахождение площадей полей другой геометрической формы, являющиеся основной целью книги I. Поместить деление дробей после умножения, когда уже начинается изложение материала на определение площадей, значило нарушить цельность текста книги. Таким образом, для деления дробей естественно определялось то место, которое оно занимает в книге I.

Относительно терминологии задач 17 и 18, выделяющей их из текста книги, заметим, что деление дробей, как умножение, облечено в конкретную, видимо, традиционную форму. Производится распределение (фэнь) количества монет между людьми. Когда эти количества целые, но деление не производится нацело, задача могла служить наглядным примером образования дроби («фэнь» также значит дробь). Составители воспользовались формой задачи для демонстрации деления сначала дроби на целое число, а затем дробного количества на дробное количество. Отсюда $3\frac{1}{3}$ человека.

Интересно, что обычного правила деления дробей здесь все же нет (см. примечание 22 к книге I). Задачи, в которых деление дробей производится по общеизвестному правилу, встречаются также в книгах II и III, но само правило приводится лишь в начале книги IV (ср. примечание 5 к книге IV).

21. «Цзин-фэнь» мы переводим «делением дробей» с учетом смысла приведенных задач. Точное значение «цзин» здесь неизвестно. Ван Лин и Дж. Нидхэм в статье «Horner's method in Chinese mathematics...» (Tóung Pao, v. XLIII, livre 5, Лейден, 1955) выбирают здесь для иероглифа «цзин» значение «основа для тканья» (the warp of a textile) и видят в этом названии геометрическое истолкование древними китайскими математиками процесса деления. Такой перевод довольно условен. Скорее в слове «цзин» (одно из значений которого—проходить) можно усмотреть отражение того факта, что процесс деления производится не обычным способом, а при помощи сведения к другому правилу (см. следующее

примечание), т. е. «прохождением» дробных количеств через некоторое преобразование.

22. Смысл этого правила заключается в сведении деления дробных количеств к делению целых.

Например, чтобы разделить $6\frac{1}{3}+\frac{3}{4}$ на $3\frac{1}{3}$, приводят к общему знаменателю, очевидно, сначала дроби первого количества $6\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=6\frac{13}{12}$, а затем обоих количеств: $6\frac{13}{12}=\frac{255}{36}$, $3\frac{1}{3}=\frac{120}{36}$ или $6\frac{13}{12}=\frac{85}{12}$, $3\frac{1}{3}=\frac{40}{12}$. Тогда деление дробей сводится к делению целых чисел 255 на 120, или 85 на 40, что дает $2\frac{1}{8}$. Такой процесс деления хорошо вяжется с представлением вычислений на доске.

Таким образом, обычного теперь алгоритма деления дроби на дробь $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ здесь еще нет, хотя задачи явно помещены для того, чтобы восполнить пробел, состоящий в отсутствии определения процесса деления дробей (ср. примечание 5 к книге IV).

Такой прием деления дробей путем приведения их к общему знаменателю применялся математиками средневековой Европы Леонардо Пизанским (XIII в.), Хр. Рудольфом (XVI в.), М. Штифелем (XVI в.) и др. Он изложен еще в арифметике среднеазиатского математика IX века ал-Хорезми, латинский перевод которого был знаком математикам Европы. См. статью А. П. Юшкевича «Арифметический трактат Мухаммеда бен Муса ал-Хорезми», Труды ИИЕиТ, т. I, стр. 112—115). Быть может, вышеописанный прием был заимствован среднеазиатскими учеными из китайской метематики.

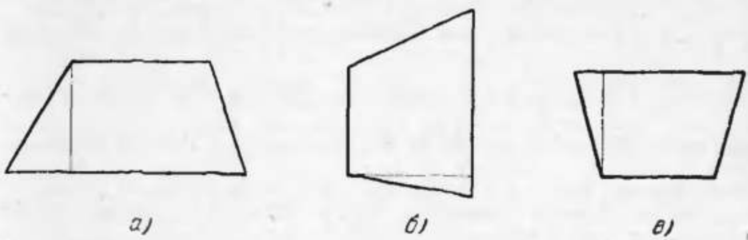
Таким образом, указанный способ деления дробей следует возводить к древней китайской математике, по крайней мере ко II веку до н. э.

23. Так древние китайцы называли высоту.

24. Здесь отсутствует определение «прямая» к слову «длина» и можно думать, что имеется в виду прямоугольный треугольник. Поэтому возможно, что при измерении полей выделялись прямоугольные треугольники, хотя для них не употреблялось специального названия.

Таким образом, название поля определялось в зависимости от формулы площади для него. Например, квадратные и прямоугольные поля, измеряемые по одной и той же формуле, также не различались. Для них вообще нет специального названия, они обозначаются просто «полем» (тянь) с длиной «цзун» и шириной «гуань». Естественно, что поля в виде прямоугольного треугольника и произвольного треугольника также называются одним термином, поскольку формула для их площади одна и та же. И здесь задаются ширина «гуань» и прямая длина «чжэн-цзун», т. е. не стороны фигуры, а измерения поля.

25. «Косое поле»—это наша трапеция. Как и в предыдущих задачах на определение площадей полей, здесь задаются его измерении: либо две ширины и прямая длина (задача 27), либо прямая ширина и две длины (задача 28). Наименование сторон показывает ориентацию поля относительно измерителя. Так, в задаче 27 трапеция занимает положение *а* (черт. 4), а в задаче 28 трапеция занимает положение *б*. К обеим задачам дано одно общее правило вычисления их площадей.



Черт. 4.

Таким же по содержанию правилом сопровождаются две следующие задачи 29 и 30, где заданы «поля в виде совка», т. е. в виде трапеции, занимающей положение *в*. В данном случае параллельные стороны носят такие названия: «задняя ширина»—это та сторона совка, которая прикрепляется к ручке; «передняя ширина»—противоположная сторона совка.

Выделение задач 29 и 30 в самостоятельную группу с отдельным правилом объясняется тем, что «совок» представляет собой, по-видимому, равнобочную трапецию, формула площади которой была обобщена на случай произвольной трапеции, т. е. «косого» поля. Задачи на измерение поля-совка образуют частный случай более общих задач измерения площади произвольной трапеции, помещены после них и со своим правилом.

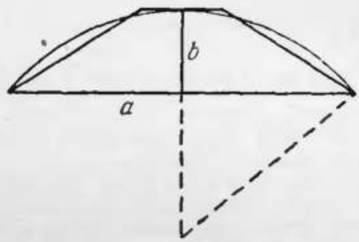
26. Здесь $\pi=3$. В трактате всюду принимается указанное значение числа, нередко использовавшееся и позднее, кроме одного места, где оно принимается равным $\frac{27}{8}$ (см. примечание 31 к книге IV).

Китайским математикам были известны и более точные значения числа π. Уже у Лю Синя (I в. до н. э.) $\pi=3{,}1547$. Чжан Хэн (II в. н. э.) употреблял значение $\pi=\sqrt{10}$, какое мы позднее находим у индийского математика VII века Брахмагупты. Лю Хуэй, математик III века, комментатор «Математики в девяти книгах», с помощью вписанных многоугольников получил значение $\pi=3{,}14$. Самых замечательных успехов достиг Цзу Чун-чжи (V в.н.э.), который дал для π два значения подходящих дробей $\frac{22}{7}$ и $\frac{355}{113}$ и оценил $2{,}1415296 < \pi < 3{,}1415297$.

27. «Кривое поле»—это сектор круга.

28. Как и в греческой математике, окружность и часть ее называются здесь одним словом «обвод» (чжоу). Также нет особого термина для радиуса, всегда задается диаметр (цзин). И в настоящее время в китайской математике радиус именуется половиной диаметра (бань цзин).

29. Поле в виде лука—это сегмент круга. Тетива—основание, стрела—высота его.



Черт. 5.

30. То есть площадь сегмента вычисляется по формуле $S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2}(ab+b^2)$, где a—основание, b—высота сегмента (черт. 5). Эта формула приближенная. Ее можно геометрически интерпретировать как площадь трапеции с основаниями a и b и высотой b:

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} b (a+b).$$

Интересно, что в частном случае, для площади полукруга эта формула дает точное значение, т. е. такое, какое получается из китайской формулы

$$S_{\text{круга}} = \frac{\pi}{4} D^2$$

при $\pi=3$. Действительно, в таком случае $a=D$, $b=\frac{1}{2}D$,

$$S_{\text{полукруга}} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}D\left(D+\frac{1}{2}D\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{4}D^2.$$

Кроме того, в задаче 35, первой из двух задач на нахождение площади сегмента, задаются $a=30$, $b=15$, т. е. именно задан полукруг! Возможно, что формула для площади сегмента была получена заменой D на a, $\frac{1}{2}D$ на b, т. е. по аналогии с полукругом площадь сегмента заменяли площадью трапеции с основаниями, равными основанию сегмента и его высоте, и с высотой, равной высоте сегмента.

31. Ширина кольца здесь названа «диаметром» (цзин). Это $R-r$, где R—радиус внешнего обвода C, r—радиус внутреннего обвода c, так что

$$S_{\text{кольца}}=\frac{C+c}{2}(R-r).$$

32. Это неверно. Если $\pi=3$, то диаметр должен быть равным $8\frac{11}{24}$.

Ответ также будет другим, именно равным 3 му $25\frac{25}{64}$ бу.

33. Смешанная дробь переводится в чистую.

34. Под обводом здесь подразумевается, найденное среднее арифметическое двух данных обводов.

35. То есть дробная часть получившегося количества бу.

36. То есть на общий наибольший делитель.

Вторая половина этого правила содержит большие трудности для перевода, которые удалось преодолеть благодаря письменной консультации проф. Ли Яня.

ПРИМЕЧАНИЯ К КНИГЕ II

1. Заголовок назван «Су ми» 粟米, т. е. соотношение между различными видами зерновых культур. Действительно, 31 задача из 46 книги II посвящена товарному обмену указанных в таблице продуктов.

Математическое содержание задач заключается в определении одного из членов геометрической пропорции $\frac{x}{a}=\frac{c_x}{c_a}$, где a и x—данное и искомое количества, c_a и c_x—соответствующие им числа из таблицы.

2. Иероглиф «люй» мы переводим «основная норма», поскольку просо является всеобщим эквивалентом, как это видно из задач.

Интересно, что на островах Рюкю, расположенных приблизительно на одинаковом расстоянии как от Китая, так и от Японии, но испытавших большее влияние китайской, чем японской, культуры, общим эквивалентом также служило зерно. В рукописях XIX века «Sanyō—nuki» есть таблица, где стоимость ткани определяется с помощью риса, берущегося вместо монет (см. статью Sudō Toshiichi «A stady of the history of mathematics in Ryu-kyu (I)».— Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1954, 4, № 2, стр. 165—177. Указывается также, что мужчины платили налог зерном.

Очевидно практическое значение этих задач. Конечно, эта практика более далеких времен, чем Ханьская династия, когда был составлен данный трактат.

3. Для $\frac{1}{2}$, кроме обычной записи «эр фэнь чжи и», т. е. «двух первых», употребляется специальное название «половина» (бань) во всех книгах, кроме I. Также для $\frac{1}{3}$ — «малая половина» (шао-бань), для $\frac{2}{3}$ — «большая половина» (тао бань). Других специальных названий для дробей в трактате нет.

Заметим здесь же, что коэффициент основной нормы проса можно было бы взять равным 100, тогда в таблице не потребовались бы дробные коэффициенты.

4. В оригинале здесь пропуск. Данное правило описывает для искомой величины формулу $x=\frac{a\cdot c_x}{c_a}$ (обозначения см. в примечании 1 к данной книге). Оно не совпадает с теми частными правилами, которые непосредственно следуют за каждой задачей и содержание которых сводится к отысканию частного от деления a на дробь $\frac{c_a}{c_x}$, которая обычно берется уже после сокращения на о.н.д. чисел, взятых из таблицы, т. е. производится деление на несократимую дробь:

$$x=\frac{a}{\frac{p}{q}}, \quad \text{где} \quad \frac{p}{q}=\frac{c_a}{c_x}; \qquad (p,\ q)=1.$$

Между тем деление на дробь еще не описано. Вероятно, из сопоставления частных правил, где данное число делится на дробь, с общим правилом, где это деление уже проведено, китайский вычислитель получал возможность пользоваться алгоритмом деления, хотя он явно дан только в книге IV (см. примечания 20—22 к книге I и 5 к книге IV).

5. В древнем Китае зерно измеряли не весовыми единицами, а объемными. Единицы объема, употребляемые в трактате, следующие:

1 ху=10 доу (в настоящее время 1 ху=5 доу, 1 доу составляет 10,35 *л*),

1 доу=10 шэнам.

6. Буквально «раздели на $\frac{5}{3}$ и возьми 1 раз» (см. примечание 10 к книге I). Как следует производить деление на $\frac{5}{3}$, можно усмотреть из общего правила, данного в начале книги (см. примечание 4 к данной книге).

7. Здесь описка в оригинале, надо разделить на $\frac{12}{25}$.

8. Хотя эта задача начинается, как все задачи трактата, с оборота «имеется» (динь ю), здесь и в некоторых других местах он не переводится. Быть может, он был механически присоединен

в начале задач более поздними переписчиками для придания единообразия всему трактату.

9. Заголовок назван «цзин люй». Значение первого слова, по-видимому, такое же, какое оно принимает в словосочетании «цзин-фэнь» (см. примечание 21 к книге I). Под вторым иероглифом (ср. примечание 2 к данной книге) понимается количество n предметов, купленных на A цяней. Таким образом, заголовок правила указывает на распределение денег между количеством предметов, т. е. указывает на содержание задач.

10. Единицы длины при измерении ткани в «Математике в девяти книгах» таковы:

1 чи,
1 чжан=10 чи,
1 пи=4 чжанам.

Сейчас чи, составлявший во времена династии Хань около 0,22 или 0,23 *м*, равен $\frac{1}{3}$ *м*. «Пи» ныне употребляется лишь в качестве счетного суффикса для кусков ткани.

11. Весовые единицы, встречающиеся в трактате, следующие:

1 дань=4 цзюням,
1 цзюнь=30 цзиням,
1 цзинь=16 ланам,
1 лан=24 чжу.

В настоящее время из всех соотношений употребительно только третье, причем 1 цзинь (китайский фунт) составляет около 0,6 *кг*. Первого соотношения ныне нет, в современных словарях дань является мерой объема, равной 10 доу. Второе соотношение употреблялось только в древности, а 1 лан ныне составляет в 2 раза больше, т. е. 48 чжу.

12. См. примечание 9 к книге II.

С помощью термина «люй» текст данного правила на вэньяне записан очень кратко. Выражение «и со цю люй» соответствует переводу: «количество самых мелких единиц в единице, стоимость которой определяется», а «и со май люй»—«количество самых мелких единиц во всем купленном количестве». Термин «люй» употребляется в задачах 32—46 именно в указанном смысле.

Очевидно, рассмотренные задачи обобщают предыдущие: здесь $x=\frac{A}{\frac{n}{m}}=\frac{Am}{n}$.

13. Если обозначить через x и y количества малых и больших бамбуков, каждый из которых стоит соответственно u и v цяней, то задача сведется к решению системы:

$$\begin{cases} x+y=78, \\ ux+vy=576. \end{cases}$$

Кроме того, судя по ответу, $v=u+1$.

Эту систему легко привести к линейной системе трех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} 78u + y = 576, \\ x + y = 78, \\ v = u + 1. \end{cases}$$

Задача заключается в отыскании целого положительного решения, которое легко получается из первого уравнения:

$$u + \frac{y}{78} = 7 + \frac{30}{78}.$$

Единственные натуральные значения u и y суть $u=7$, $y=30$, так что $v=8$, $x=48$.

Ход решения китайских ученых был по существу близок к приведенному, хотя они не пользовались алгебраической символикой (см. следующее примечание).

14. Заголовок «цзи люй» значит «разные нормы». Здесь имеется в виду такое «распределение» общего количества A монет между n/m предметами, где $n>m$, когда принимается во внимание наличие предметов двух родов: x предметов по стоимости u цяней за штуку, y—по стоимости v цяней. Таким образом,

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{n}{m}, \\ ux + vy = A, \end{cases}$$

где $v=u+1$, или

$$\begin{cases} Am = ux' + vy', \\ n = x' + y', \\ v = u + 1, \end{cases}$$

где $x'=mx$, $y'=my$.

Значение $m=1$ соответствует задачам 38 и 39.

Решение системы можно получить, произведя деление

$$\frac{Am}{n} = \frac{ux' + vy'}{x' + y'} = u + \frac{y'}{n}.$$

Отсюда определяется u как целая часть $\dfrac{Am}{n}$; y'—как числитель дробной части. Далее легко находятся $v=u+1$, $x'=n-y'$.

Таким образом, на первый взгляд «неопределенные» задачи являются совершенно определенными, так как решение находится в целых положительных числах.

15. Две последние фразы правила: «Бу мань фа чжу фан и ши цзянь фа. Фа цзянь ши гуй» трудно поддаются переводу. Согласно консультации проф. Ли Яня их можно перевести указанным

образом. На языке математической символики это значит:

$$\text{при}\quad \frac{Am}{n}=u+\frac{y'}{n},\ \text{когда}\ y'<n\ \text{ и }\ n-y'=x',$$

$$y'\,u+x'\,v=A.$$

Таким образом, эти две фразы являются, по-видимому, проверкой.

Заметим, что здесь «ши» и «фа» приобретают новые значения, отличные от «делимого» и «делителя», которые они обычно обозначают в тексте. Ср. с примечанием 10 к книге I.

16. Эта единица меры не известна в настоящее время.

17. Заголовок этого правила «фан цзи люй» по смыслу аналогичен предыдущему (см. примечание 14 к данной книге); в нем указано, видимо, на то, что для решения надо прибегнуть к делению чисел, поменяв предварительно делимое и делитель ролями («фан»— обратный). Это правило дано к задачам 44—46, которые сводятся к системе:

$$\begin{cases} A=\dfrac{x}{u}+\dfrac{y}{v}\,. \\ n=x+y, \\ v=u+1, \end{cases}$$

где $A<n$ и все обозначения прежние, кроме u и v, которые теперь обозначают количества вещей, покупаемых на 1 цянь. По-прежнему $v=u+1$.

Решение можно получить, произведя деление:

$$\frac{n}{A}=\frac{(x+y)\,uv}{xv+uy}=u+\frac{y}{v}\,\frac{1}{A}\,.$$

Отсюда легко определяются x и v.

18. Последние две фразы правила «бу мань фа чжэ...», переведенные с помощью консультаций проф. Ли Яня, очевидно, также являются проверкой (см. примечание 15 к данной книге). Они означают следующее:

$$\text{при}\ \frac{n}{A}=u+\frac{y}{v}\,\frac{1}{A},\ \text{когда}\ A>\frac{v}{y}\ \text{ и }\ A-\frac{y}{v}=\frac{x}{u},$$

$$\frac{x}{u}\,u+\frac{y}{v}\,v=n.$$

ПРИМЕЧАНИЯ К КНИГЕ III

1. Это перевод 衰分 —«чуй фэнь».

В этой книге помещены задачи на пропорциональное деление и пропорции. В первых семи задачах речь идет о «делении по ступеням», т. е. делении пропорционально заданным числам. Кроме задачи 5, во всех остальных числа убывают, т. е. как бы образуя ступени.

2. Иначе говоря, $x_i = \dfrac{An_i}{\sum\limits_{1}^{n} n_i}$, где A—количество, распределяемое пропорционально числам n_i, x_i—искомые количества.

3. Перечисленные ранги чиновников времен Чжоу, Цин и Хань расположены в убывающем порядке. Подразумевается, что их доли при разделе относятся, как 5 : 4 : 3 : 2 : 1. Действительно, такие отношения приводятся в комментариях Лю Хуэя к данной задаче (III в. н. э.).

4. В трактате нет правила суммирования членов арифметической и геометрической прогрессий. В данных задачах легко проводится непосредственное суммирование. Однако в задаче 19 книги VII находится сумма 15 членов арифметической прогрессии.

甲 乙 丙 丁 戊 己 庚 辛 壬 癸

Черт. 6.

Весьма вероятно, что формула суммы членов хотя бы арифметической прогрессии была в то время известной. Впервые, однако, встречаем это правило в «Математическом трактате» Чжан Цю-цзяня («Чжан Цю-цзянь суань цзин»), относящемся к VI веку.

5. A, B, B,—перевод первых трех из десяти специальных знаков (черт. 6), употребляемых для литер, поскольку в китайском языке отсутствует алфавит.

6. Напомним, что 1 чи=10 цуням.

7. Налог «суань»—подушный налог, который ввел в 210 г. до н. э. император Ханьской династии Гао-цзу. Каждый подданный в возрасте от 15 до 65 лет должен был платить налог. 120 человек составляли 1 суань. В данной задаче выделение людей для выполнения повинности производится согласно количеству суаней, имеющихся в каждом уезде.

8. Правило дано к задачам, где производится деление обратно пропорционально заданным числам. Текст правила настолько краток, что понять его очень трудно. Ср. далее примечание 10.

9. В оригинале этот текст непосредственно следует за текстом предыдущего правила. Мы его выделили, написав с красной строки.

10. По-видимому, вычисления следуют в таком порядке. Сначала устанавливаются «ступени», т. е. на счетной доске выкладываются числа

$$5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.$$

Так как заданное число делится обратно пропорционально этим числам, то надо составить «перевернутые ступени», т. е. ряд

$$\frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1}.$$

Не обозначая его явно на доске, древний китайский вычислитель вместо него берет сразу ряд

$$24,\ 30,\ 40,\ 60,\ 120,$$

который получается из первоначального с помощью «поочередного умножения» «ху-чэн» (см. примечание 9 к книге I), т. е. для каждой дроби находится соответственный дополнительный целый множитель, которому она пропорциональна, для чего составляется числитель дробей при общем знаменателе, равном произведению их знаменателей. Этот ряд на основании сокращения дробей заменяется рядом

$$12,\ 15,\ 20,\ 30,\ 60,$$

сумма членов которого есть 137.

Замена первоначального ряда рядом

$$12,\ 15,\ 20,\ 30,\ 60$$

и полагающиеся здесь вычисления подразумеваются, вероятно, в фразе общего правила: «установи по порядку ступени и взаимно перемножь перевернутые ступени» (ле чжи чуй эр лин сян чэн дун чжэ вэй бу дун чжэ чуй).

11. У *А*, *Б*, *В* имеется по 3 шэна зерна разной стоимости: соответствующие коэффициенты их суть 50, 30, 75. Если выразить зерно каждого в просе-эквиваленте, коэффициент которого 50, то они соответственно имеют 3 шэна, $3\cdot\frac{5}{3}=5$ шэнов, $3\cdot\frac{2}{3}=2$ шэна. Объем всех 9 шэнов зерна равен по стоимости 10 шэнам проса, т. е. каждый из 9 шэнов «смеси» имеет стоимость, равную $\frac{9}{10}$ стоимости 1 шэна проса. Тогда *А*, *Б*, *В* соответственно получат $\frac{9}{10}\cdot 3 = 2{,}7$; $\frac{9}{10}\cdot 5 = 4{,}5$; $\frac{9}{10}\cdot 2 = 1{,}8$ шэна новой стоимости.

Задача является примером правила товарищества. Интересно, что она имеет гораздо более древнее происхождение, чем подобные задачи, появившиеся в Европе уже в новое время в связи с развитием торгового и промышленного капитала. Основой для возникновения древнекитайской задачи была, по-видимому, налоговая система, когда с уездов, например, собирали дань в виде зерна разного вида, ссыпаемого в хранилища одной и той же емкости. Чтобы рассчитать, сколько сдал каждый уезд, все зерно выражали в какой-то новой стоимости и производили нужные расчеты.

12. Результат, как видно, получен из пропорции $\frac{1}{240}=\frac{x}{1328}$. Здесь и далее решаются задачи на правило, которое позднее, в средневековой европейской литературе, получило название тройного (тройное потому, что задавались три числа), т. е. на прямую пропорциональную зависимость.

13. Это лунный год. В Китае пользовались и теперь пользуются в некоторой степени лунным календарем.

14. Это—задача на сложное тройное правило. Аналогичные задачи содержатся в книге VI.

ПРИМЕЧАНИЯ К КНИГЕ IV

1. Название заголовка 少廣 (шао-гуан) трудно перевести. Первый из иероглифов значит мало, отсутствовать, недоставать, второй—ширина, расширяться. В задачах 1—11 речь идет об определении длины прямоугольного поля с единичной площадью, равной 1, если известна его ширина, которая равна $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$, где последовательно $n=2, 3, \ldots, 12$. Остальные задачи 12—24 посвящены извлечению квадратных и кубических корней. Первые задачи можно рассматривать как введение к последующим: при одной и той же площади увеличение одной стороны уменьшает вторую, причем может наступить такой момент, когда стороны окажутся равными. Тогда прямоугольник станет квадратом, и деление переходит в извлечение квадратного корня.

Таким образом, можно полагать, что «шао-гуан» означает уменьшение одной из сторон и соответствующее увеличение другой стороны прямоугольника с постоянной площадью. По мнению проф. Ли Яня, «шао-гуан» является специальным термином именно для указания метода, когда некоторая площадь в одном месте заменяется эквивалентной ей площадью в другом месте, т. е. в одном месте она «исчезает» (шао), а в другом месте расширяется (гуан) ровно настолько, насколько было отрезано в начале.

Другое толкование «шао-гуан» дают Ван Лин и Дж. Нидхэм (см. примечание 21 к книге I). Они переводят это словосочетание «уменьшение ширин» и видят в нем указание на геометрическое происхождение правила извлечения корней (см. примечание 8 к данной книге), т. е. постепенное отнятие от площади заданного квадрата, например, $(100a+10b+c)^2$ сначала $(100a)^2$, затем полоски $2(100a\cdot 10b)+(10b)^2$ и т. д., пока квадрат не исчерпается.

2. «Целый» (цюань)—специальный термин для обозначения дроби $\frac{n}{n}$, равной единице, употреблявшийся и позднее (см. Ли Янь «Собрание работ по истории китайской математики», т. I, стр. 15—43, ср. примечание 7 к книге I). Таким образом, единица древними китайскими математиками могла рассматриваться как дробь. (Ср. примечание 10 к книге I.)

В правиле рекомендуется данные числа расположить на счетной доске в определенном порядке: числители справа, знаменатели слева, при этом, вероятно, «целый» бу представляется в виде $\frac{1}{1}$ (см. примечание 6 к данной книге).

3. Во всех рассматриваемых задачах, кроме 5 и 11, общий знаменатель заданных дробей является н.о.к. их знаменателей. Действия, вероятно, располагались следующим образом (ср. с примечанием 9 к книге I). Числители дробей умножаются сначала на самый большой знаменатель. Например, для задачи 7, когда на доске расположены числа

1 1 1 1 1 1 1 1

1 2 3 4 5 6 7 8

(верхней строкой мы заменили правый столбец, содержащий числители, нижней строкой—левый столбец, содержащий знаменатели), производится умножение числителей на самый большой знаменатель:

8 8 8 8 8 8 8 8

1 2 3 4 5 6 7 8

Затем должно быть проведено деление, где это возможно, числителей на знаменатели. Но при этом, вероятно, производится не только деление нацело, но и сокращение дробей:

8 4 8 2 8 4 8 1

3 5 3 7

Только при этом условии общий знаменатель будет н.о.к. знаменателей дробей.

Далее, умножаем число верхней строки на 7

56 28 56 14 56 28 8 7

3 5 3,

а затем на 3 и на 5: $56 \cdot 3 \cdot 5$; $28 \cdot 3 \cdot 5$; $56 \cdot 5$; $14 \cdot 3 \cdot 5$; $56 \cdot 3$; $28 \cdot 5$; $8 \cdot 3 \cdot 5$; $7 \cdot 3 \cdot 5$, или 840, 420, 280, 210, 168, 140, 120, 105. Сумма этих чисел 2283 является делителем, произведение $240 \cdot 840$—делимым для искомого числа.

4. Искомая величина находится по формуле $x=\frac{240\,n}{m}$, где $\frac{m}{n}=\sum_{1}^{n}\frac{1}{k}$, т. е., действительно, 1 му=240 кв. бу умножается на то число—количество долей, которое стоит в числителе «целого» бу $\frac{n}{n}$. Это число—первое в окончательном ряду чисел, из которых составляется делитель.

5. Это правило выражает обычный алгоритм деления числа на дробь (ср. примечание 20 к книге I). Перевод правила сделан благодаря консультации проф. Ли Яня.

6. Здесь и в следующих задачах единица рассматривается как дробь $\frac{1}{1}$. См. примечание 2 к данной книге.

7. Буквально «раскрытие стороны» (кай фан), т. е. отыскание стороны квадрата, площадь которого задана.

При переводе правила мы пользовались статьей Ван Лина и Дж. Нидхэма (см. примечание 21 к книге I).

Китайский способ извлечения квадратного корня отличается от обычного лишь своей терминологией, поскольку он описывает процесс счета на доске.

Подкоренное число, или площадь квадрата, сторона которого ищется, называется делимым (ши). Оно помещается на доске там же, где делимое при делении, т. е. во второй строке сверху. Первая строка предназначена для искомого корня, куда при делении помещается частное. Аналогия с делением в терминологии не случайна, так как по своей идее процесс извлечения корня на счетной доске строится подобно процессу деления целых чисел (о делении на счетной доске см. книгу Ли Яня «История математики Китая», 2-е изд., 1955, стр. 61—62, на китайском языке). В процессе вычислений остается неподвижным подкоренное число, каждая цифра которого стоит в определенной колонке. Относительно этого числа располагаются при вычислении все остальные числа.

Формулировка правила, несомненно, дополнялась устными объяснениями и, конечно, предполагала свободное владение счетом на доске. Вероятно, впоследствии текст правила в силу своей лаконичности не был понятен переписчикам, и поэтому он дошел до нас с пропусками, которые весьма затрудняют перевод. Точное значение терминов, употребляющихся при вычислении, неизвестно, так что подстрочный перевод правила без подробных комментариев мало понятен, хотя вообще сущность правила ясна. Она состоит в следующем.

Делимое, т. е. подкоренное число, располагается на счетной доске. Единичная счетная палочка, помещаемая в самой нижней строке, сдвигается влево через одну колонку, начиная с колонки, в которой находится последняя цифра подкоренного числа. Это позволяет определить число знаков в корне; движение счетной палочки равносильно разбиению подкоренного числа на группы по две цифры; в последней группе может быть и одна цифра. В заключительном положении единичная счетная палочка выражает число 10^{n-1}, если n—нечетно, или 10^{n-2}, если n—четно, где n—количество цифр в подкоренном выражении; это число называется техническим термином «цзе-суань».

Сам процесс извлечения корня состоит из операций двух родов: 1) подбор очередной цифры корня; 2) преобразование чисел доски к виду, пригодному для подбора следующей цифры корня.

Первая цифра корня определяется путем пробы чисел 1, 2, 3, ..., 9 так, чтобы так называемое «со-дэ»—произведение «цзе-суань» на выбранное число, при умножении на это же выбранное число давало произведение, не превышающее подкоренного числа;

требуется взять наибольшее однозначное число, удовлетворяющее указанному условию.

Например, в задаче 14, где

$$x=\sqrt{71\,824}\,,$$

первоначально на доске будет следующее расположение чисел:

71 824	делимое
1	единичная счетная палочка

Производится разбиение подкоренного числа на группы:

71 824	делимое
10 000	«цзе-суань»

Выбирается вышеуказанным образом первая цифра корня. В данном случае она будет 2. Действительно, $(10\,000\cdot 2)2<71\,824$. Цифра 2 является наибольшей из обладающих таким свойством, так как 3 уже не подходит. После этого доска будет выглядеть так:

2	корень
71 824	делимое
20 000	«со-дэ»
10 000	«цзе-суань»

Фраза правила: «Обсуди „со-де“» понимается именно в таком смысле. Значение «со-дэ» помещается в предпоследней строке доски.

Далее производится преобразование чисел счетной доски. Делимое заменяется разностью между подкоренным выражением и произведением делителя—«со-дэ», на число, выбранное для первой цифры квадратного корня.

Кроме того, делитель удваивают, называют это «фиксированным делителем» и передвигают его направо на одну колонку. Полученное число называют «укороченным фиксированным делителем», помещают в 3-й строке сверху (1-я содержит корень, 2-я—остаток). В последней строке счетную палочку сдвигают на две колонки вправо, т. е. получают число 10^{n-3} либо 10^{n-4}, т. е. новое значение «цзе-суань», которое мы будем называть вторым.

В нашем примере числа доски преобразуют следующим образом:

$$10\,000\cdot 2=20\,000,$$
$$71\,824-2\cdot 20\,000=31\,824 \text{ (1-й остаток)},$$
$$20\,000\cdot 2=40\,000 \text{ (фиксированный делитель)},$$
$$\frac{40\,000}{10}=4000 \text{ (укороченный фиксированный делитель)}.$$

Таким образом, доска примет вид:

2	корень
31 824	первый остаток
4000	укороченный фиксированный делитель
100	второе «цзе-суань»

После этого определяют вторую цифру корня. Для этого выбирается наибольшее однозначное число, удовлетворяющее условию: сумма произведения на него второго «цзе-суань» и укороченного фиксированного делителя, умноженная на само это выбранное число, не превышает первого остатка. Таково содержание фразы правила: «[продолжай], как и ранее».

В примере вторая цифра корня равна 6, так как $(100\cdot 6+4000)6<31\,824$, а $(100\cdot 7+4000)7>31\,824$.

Затем числа доски преобразуются для нахождения следующей, третьей цифры корня. Вместо первого остатка помещается второй остаток, который получается от «деления» первого остатка на сумму укороченного фиксированного делителя и нового «со-дэ», являющегося произведением второго «цзе-суань» на только что выбранную вторую цифру корня.

Эта сумма, т. е. новый делитель складывается со вторым «со-дэ», результат сдвигается на колонку вправо, и этот новый «укороченный фиксированный делитель» ставится вместо первого «укороченного фиксированного делителя». В последней строке счетную палочку сдвигают на две колонки вправо, получая третье «цзе-суань» равным 10^{n-5} или 10^{n-6}.

Третья цифра корня находится подобно второй.

В нашем примере:

$100 \cdot 6 = 600$ (новое «со-дэ»),

$4000 + 600 = 4600$ (новый делитель),

$31\,824 - 6 \cdot 4600 = 4224$ (второй остаток),

$\frac{4600+600}{10} = 520$ (новый укороченный фиксированный делитель).

Теперь доска будет выглядеть следующим образом:

26	корень
4224	второй остаток
520	укороченный фиксированный делитель
1	третье «цзе-суань»

Третьей цифрой корня здесь будет 8, так как $(1 \cdot 8 + 520)\,8 = 4224$. Процесс извлечения корня закончился. В случае квадратного числа с большим числом цифр следует поступать аналогичным образом.

Мы выразим процесс извлечения корня в алгебраических обозначениях. Пусть $x = \sqrt{N}$ и $x = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ записан в десятичной системе, т. е.

$$(100\alpha_1 + 10\alpha_2 + \alpha_3)^2 = N,$$

или

$$N = 10\,000\alpha_1^2 + (2 \cdot 100\alpha_1 \cdot 10\alpha_2 + 100\alpha_2^2) + 2 \cdot 100\alpha_1\alpha_3 + 2 \cdot 10\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2 = \\ = (N - A_1) + (B_1\alpha_2 + C_1\alpha_2^2) + B_2\alpha_3 + C_2\alpha_3^2,$$

где

$$A_1 = N - (100\alpha_1)^2,$$
$$B_1 = 2000\alpha_1,$$
$$C_1 = 100,$$
$$B_2 = 200\alpha_1 + 20\alpha_2,$$
$$C_2 = 1.$$

Сначала приводится выбор первой цифры α_1 корня как такого наибольшего однозначного числа, что $A_1 = N - (100\alpha_1)^2 \geqslant 0$.

α_1	корень
N	делимое
$10\,000\ \alpha_1$	«со-дэ»
$10\,000$	«цзе-суань»

Далее следует подготовка чисел доски к выбору второй цифры α_2 корня:

α_1	корень	
$A_1 = N - (100\alpha_1)^2$	первый остаток	
$B_1 = 2000\alpha_1$	укороченный фиксированный делитель	(1)
$C_1 = 100$	второе «цзе-суань»	

Для определения второй цифры корня ищется такое наибольшее однозначное число α_2, что

$$A_1 - (B_1 + C_1\alpha_2)\,\alpha_2 \geqslant 0,$$

или

$$[N - (100\alpha_1)^2] - (2000\alpha_1 + 100\alpha_2)\,\alpha_2 \geqslant 0,$$

т. е.

$$N - (100\alpha_1 + 10\alpha_2)^2 \geqslant 0.$$

Подготовка чисел доски к выбору третьей цифры корня происходит следующим образом.

$\alpha_1\alpha_2$	корень
A_2	второй остаток
B_2	второй укороченный фиксированный делитель
C_2	третье «цзе-суань»

(2)

где

$$A_2 = N - (100\alpha_1 + 10\alpha_2)^2,$$

$$B_2 = \frac{(B_1 + C_1\alpha_2) + C_1\alpha_2}{10} = 200\alpha_1 + 20\alpha_2,$$

$$C_2 = \frac{C_1}{100} = 1.$$

Далее аналогично выбирается третья цифра α_3 корня такой, чтобы

$$A_2 - (B_2 + C_2\alpha_3)\,\alpha_3 \geqslant 0,$$

т. е.

$$N - (100\alpha_1 + 10\alpha_2 + \alpha_3)^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, процесс извлечения квадратного корня опирается на разложение $(a+b)^2$.

Нам кажется спорным мнение Ван Лина и Дж. Нидхэма, что рассмотренное правило было получено геометрически. Конечно, это не дает основания в то же время отрицать факт позднейшего геометрического представления древними китайскими математиками, например Лю Хуэмом, тождества $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Существенно отметить, что получение чисел B_i и C_i в третьей и четвертой строках, в частности примененный при этом сдвиг вправо, происходит не в соответствии с формулой квадрата бинома, а так, как это делается при решении уравнения $x^2 - N = 0$ по так называемому способу Горнера.

Метод Горнера заключается в том, что, например, для алгебраического уравнения n-й степени $f(x) = 0$, которое имеет вещественный корень $x = \alpha_1, \alpha_2\alpha_3\ldots$, записанный в десятичной системе, подбором находится целая часть корня α_1. Затем от $f(x) = 0$ переходят к уравнению $\varphi(y) = 0$, где $y = \alpha_2, \alpha_3\ldots$ Для этого делают подстановку $y = 10x' = 10(x - \alpha_1)$. Снова подбором находим α_2 и т. д. Таким образом, определяем значение корня $x = \alpha_1, \alpha_2\alpha_3\ldots$ с точностью до нужного десятичного знака.

Особые преимущества способа Горнера связаны с удобной предложенной им схемой вычислений коэффициентов вспомогательных уравнений. Переход от уравнения $f(x)=0$ к $\varphi(y)=0$ совершается в два приема.

Сначала переходят к $f(x')=f(x-\alpha_1)$, что производится очень легко с помощью схемы Горнера, разработанной для деления многочлена $f(x)$ на $(x-\alpha_1)$. Применяя последовательно такое деление, получаем коэффициенты разложения $f(x)$ по степеням $(x-\alpha_1)$, т. е. коэффициенты уравнения $f(x-\alpha_1)$.

Затем подстановкой $y=10x'$ переходим к уравнению $\varphi(y)$. Для этого полученные по схеме Горнера коэффициенты уравнения $f(x')$ последовательно делятся на степени 10, т. е. на 10^0, 10^1, $10^2, \ldots, 10^n$.

Рассмотренное уравнение $x^2-N=0$ по способу Горнера решается так.

Пусть $x=\alpha_1\alpha_2\alpha_3$.

Сначала положим $x=100x'$, т. е. $x_1=\alpha_1, \alpha_2\,\alpha_3$. Тогда $10\,000x'^2-N=0$. Подберем α_1 так, чтобы левая часть уравнения была $\leqslant 0$. Далее переходим к уравнению $\varphi(y)$, где $y=\alpha_2, \alpha_3 \ldots$ Схема Горнера получения коэффициентов разложения $f(x)$ по степеням $(x-\alpha_1)$ такая:

$$\begin{array}{lll|l}
10\,000 & 0 & -N & \alpha_1 \\
 & 10\,000\alpha_1 & 10\,000\alpha_1^2 & \\
\hline
10\,000 & 10\,000\alpha_1 & (100\alpha_1)^2-N=A_1 & \\
 & +\,10\,000\alpha_1 & & \\
\cline{1-2}
10\,000=100C_1 & 20\,000\alpha_1=10B_1 & &
\end{array} \tag{3}$$

Таким образом,

$$\varphi(y)=C_1y^2+B_1y+A_1=0,$$

т. е.

$$\varphi(y)=100y^2+2000\alpha_1y+(100C_1)^2-N=0.$$

Далее, аналогично

$$\begin{array}{lll|l}
100 & 2000\alpha_1 & -N\ +(100\alpha_1)^2 & \alpha_2 \\
 & +\ 100\alpha_2 & +\,(2000\alpha_1+100\alpha_2)\,\alpha_2 & \\
\hline
100 & 2000\alpha_1+100\alpha_2 & A_2=(100\alpha_1+10\alpha_2)^2-N & \\
 & +\,100\alpha_2 & & \\
\cline{1-2}
100C_2=100 & 10B_2=2000\alpha_1+200\alpha_2 & &
\end{array} \tag{3'}$$

Следующее уравнение будет таким:

$$\psi(z)=C_2z^2+B_2z+A_2=0,$$

т. е.

$$\psi(z)=z^2+(2000\alpha_1+200\alpha_2)\,z+(100\alpha_1+10\alpha_2)^2-N=0, \text{ где } z=\alpha_3, \ldots,$$

и т. д.

Итак, мы видим, что схема (2) на доске соответствует схеме Горнера (3). Составление чисел схемы (2), движение на разряд вправо соответствуют получению чисел в схеме (1) и делению их соответственно на степени 10: 10^0, 10, 10^2, т. е. получению коэффициентов уравнения $\psi(z)=0$.

Теперь отчетливо видно, что при составлении чисел A_1, B_1, C_1 на счетной доске только движение вправо на разряды напоминает получение их по схеме Горнера. Конструирование самих чисел так просто, что здесь еще не обнаруживается различие с формулой квадрата бинома. Например, $B_1=2000\alpha_1$ получается удвоением $1000\alpha_1$, а не так, как по схеме Горнера:

$$B_1=\frac{10\,000\alpha_1+10\,000\alpha_1}{10}.$$

Но уже построение A_2, B_2, C_2 производится так, как это делается по схеме Горнера. Например,

$$B_2=\frac{2000\alpha_1+100\alpha_2+100\alpha_2}{10}.$$

Конечно, было бы неверно сказать, что извлечение корней производится по схеме Горнера. Напротив, способ Горнера (в Европе он был открыт почти одновременно итальянцем Руффини в 1804 г. и в 1819 г. англичанином Горнером), который в общем виде разработан, был уже в работах китайского математика XIII века. Цинь Цзю-шао, возник в науке Китая, вероятно, в результате разработки и обобщения рассматриваемого способа извлечения корней. Такое обобщение на случай решения полного квадратного уравнения можно видеть уже в этом трактате (см. примечание 25 к книге IX). См. также далее способ извлечения кубического корня и примечание 21 к данной книге.

8. Перевод второй половины фразы «жо кай чжи бу цзинь чжэ вэй бу кэ кай, дан и мянь мин чжи» довольно условен. Ван Лин и Дж. Нидхэм (см. примечание 21 к книге I) полагают, что китайские математики в те времена умели продолжать извлечение корня из неквадратного числа—фактически с помощью десятичных дробей. Хотя мы не находим ни одного примера такого рода, подобное толкование фразы возможно. Подтверждается оно существованием в те времена десятичной метрологической системы, обнаруживаемой в комментариях Лю Хуэя, у которого введены обозначения для четырех десятичных знаков: «фэнь», «ли», «хао», «мяо» соответственно.

Однако нам кажется более вероятным другое толкование китайского текста, и мы думаем. что во второй половине фразы речь идет об объявлении (мин) числа-остатка (мянь), т. е. [остаточной] площади от подкоренного числа. Таким образом, в случае $\sqrt{a^2+r}$ требуется, назвав корень a, еще указать число r.

9. Если в дроби $\frac{m}{n}$ знаменатель—не полный квадрат, то $\sqrt{\frac{m}{n}}=\frac{\sqrt{mn}}{n}$.

10. То есть «раскрытие стороны стоячего квадрата» (кай ли фан)—отыскание стороны куба, объем которого задан.

При переводе этого правила мы пользовались также статьей Ван Лина и Дж. Нидхэма.

Рассматриваемое правило аналогично правилу извлечения квадратных корней. Все общие замечания, относящиеся к последнему, могут быть также отнесены к рассматриваемому правилу извлечения кубических корней (см. примечание 7 к данной книге).

Содержание правила следующее.

Подкоренное число, т. е. делимое, являющееся объемом куба, устанавливается на счетной доске во второй строке сверху. В первой будет находиться искомый корень. С помощью движения справа налево единичной счетной палочки, помещенной в самой нижней строке, из колонки, в которой находится последняя цифра подкоренного числа, через две колонки определяют число знаков в корне. Такое движение счетной палочки равносильно обычному разбиению подкоренного числа на группы по три цифры; в последней может оказаться две или одна цифры. В заключительном положении счетная палочка выражает число 10^{n-1}, если $n\equiv1(3)$; 10^{n-2}, если $n\equiv2(3)$; 10^{n-3}, если $n\equiv0(3)$, где n —число знаков в делимом; это число называется «цзе-суань».

Первая цифра корня определяется путем пробы чисел 1, 2, 3, ..., 9 так, чтобы «со-дэ», т. е. произведение «цзе-суань» на выбранное число, умноженное дважды на это же число, оказалось меньше или равно делимому, требуется взять наибольшее однозначное число, удовлетворяющее указанному условию. Фраза правила: «Обсуди „со-дэ"» должна пониматься именно в таком смысле.

Далее числа доски преобразуются для определения второй цифры корня следующим образом.

Делимое заменяется первым остатком, полученным из равенства:

(делимое) = (делителю) × (выбранное число) + (первый остаток),

где

(делитель) = («цзе-суань») × (выбранное число) × (выбранное число).

Делитель, которым только что пользовались для получения первого остатка, утраивается, это называется «фиксированным делителем». Он сдвигается на одну колонку вправо, получается «укороченный фиксированный делитель», который помещается в строке под делимым, т. е. в третьей строке.

В следующей четвертой строке помещается утроенное «со-дэ», передвинутое предварительно на две колонки вправо. Число, стоящее в этой строке, называется «числом средней строки».

В последней строке число сдвигается на три колонки вправо и называется «числом нижней строки».

После этого доска готова к выбору из чисел 1, 2, 3, ..., 9 следующей цифры корня. Фраза правила: «Снова обсуди» говорит о том, что надо выбрать вторую цифру корня так, чтобы [(число нижней строки)$\times$(выбранное число)$\times$(выбранное число)$+$(число средней строки)$\times$(выбранное число)$+$(фиксированный укороченный делитель)]$\times$(выбранное число) $\leqslant$ остатка.

Выбранное во второй раз число опять-таки должно быть возможно бо́льшим.

Далее числа доски преобразуются для определения третьей цифры корня.

Первый остаток заменяется вторым, который находится из равенства:

(первый остаток)$=$(делителю)$\times$(выбранное число)$+$(второй остаток), где (делитель)$=$(числу нижней строки для второго остатка)$+$(число средней строки для второго остатка)$+$(укороченный фиксированный делитель);

(число нижней строки для второго остатка)$=$
$=$(числу нижней строки)$\times$(выбранное число)$\times$(выбранное число);

(число средней строки для второго остатка)$=$
$=$(числу средней строки)$\times$(выбранное число).

Укороченный фиксированный делитель заменяется дополненным фиксированным делителем, равным $\frac{1}{10}$ [2$\times$(число нижней строки для второго остатка)$+$(число средней строки для второго остатка)$+$(делитель для второго остатка)].

Далее, правило кратко говорит: «Продолжай, как раньше». Очевидно, число средней строки надо заменить вторым числом

$$\text{средней строки}=\frac{3\times(\text{число нижней строки})\times(\text{выбранное число})+}{100}$$
$$\frac{+(\text{первое число средней строки})}{100};$$

$$\text{второе число нижней строки}=\frac{(\text{первому числу нижней строки})}{1000}.$$

Затем подбирается следующая цифра корня так, чтобы [(число нижней строки)$\times$(выбранное число)$\times$(выбранное число)$+$(число средней строки)$\times$(выбранное число)$+$(дополненный фиксированный делитель)]$\times$(выбранное число)$\leqslant$(второго остатка), и т. д.

Запишем процесс извлечения кубического корня в алгебраических обозначениях.

Пусть $x=\sqrt[3]{N}$ и $x=\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, записанный в десятичной системе, т. е. $(100\alpha_1+10\alpha_2+\alpha_3)^3=N$, или

$$N=(100\alpha_1)^3+[300\,000\alpha_1^2\alpha_2+30\,000\alpha_1\alpha_2^2+1000\alpha_2^3]+$$
$$+[30\,000\alpha_1^2\alpha_3+3\cdot2\cdot1000\alpha_1\alpha_2\alpha_3+300\alpha_2^2\alpha_3]+[300\alpha_1\alpha_3+30\alpha_2\alpha_3]+\alpha_3^3=$$
$$=(N-A_1)+(B_1\alpha_2+C_1\alpha_2^2+D_1\alpha_2^3)+B_2\alpha_3+C_2\alpha_3+D_2\alpha_3^3,$$

где

$$N-A_1=(100\alpha_1)^3, \qquad B_1=300\,000\alpha_1^2,$$
$$C_1=30\,000\alpha_1, \qquad D_1=1000,$$
$$B_2=B_1+3\cdot 2\cdot 1000\alpha_1\alpha_2+300\alpha_2^2,$$
$$C_2=300\alpha_1+30\alpha_2,$$
$$D_2=1.$$

Схемы вычислений на доске будут следующие. Первоначальное положение чисел доски:

α_1	корень
N	делимое
$1\,000\,000\alpha_1^2$	делитель
$1\,000\,000\alpha_1$	«со-дэ»
$1\,000\,000$	«цзе-суань»

(1)

и α_1 — такое наибольшее однозначное число, что $N-(100\alpha_1)^3=$ $=A_1\geqslant 0$.

Подготовив числа доски к определению второй цифры корня:

α_1	корень
$A_1=N-(100\alpha_1)^3$	первый остаток
$B_1=300\,000\alpha_1^2$	укороченный фиксированный делитель
$C_1=30\,000\alpha_1$	число средней строки
$D_1=1000$	число нижней строки

(2)

Здесь

$$B_1=\frac{3\cdot 1\,000\,000\alpha_1^2}{10}=300\,000\alpha_1^2,$$

$$C_1=\frac{3\cdot 1\,000\,000\alpha_1}{100}=30\,000\alpha_1,$$

$$D_1=\frac{1\,000\,000}{1000}=1000.$$

Выбираем наибольшее однозначное α_2 так, чтобы

$$A_1-[(D_1\alpha_2+C_1)\alpha_2+B_1]\alpha_2\geqslant 0,$$

т. е.

$$[N-(100\alpha_1)^3]-[(1000\alpha_2+30\,000\alpha_1)\alpha_2+300\,000\alpha_1^2]\alpha_2\geqslant 0,$$

или

$$N-(100\alpha_1+10\alpha_2)^3\geqslant 0.$$

После выбора α_2 числа доски преобразуются так:

$\alpha_1\alpha_2$	корень
$A_2=N-(100\alpha_1+10\alpha_2)^3$	второй остаток
$B_2=30\,000\alpha_1^2+6000\alpha_1\alpha_2+300\alpha_2^2$	дополненный фиксированный делитель
$C_2=300\alpha_1+30\alpha_2$	второе число средней строки
$D_2=1$	второе число нижней строки

(3)

Здесь $A_2=A_1-[(D_1\alpha_2+C_1)\alpha_2+B_1]\alpha_2=A_1-\overline{A}\alpha_2$, $\overline{A}$ есть так называемый делитель для 2-го остатка,

$$B_2=\frac{\overline{A}+C_1\alpha_2+2D_1\alpha_2^2}{10}=300\alpha_2^2+6000\alpha_1\alpha_2+30\,000\alpha_1^2,$$

$$C_2=\frac{C_1+3D_1\alpha_2}{100}=300\alpha_1+30\alpha_2,$$

$$D_2=\frac{D_1}{1000}=1.$$

Третья цифра корня α_3 выбирается аналогично первым двум, т. е. так, чтобы выполнялось

$$A_2-[(D_2\alpha_3+C_2)\,\alpha_3+B_2]\,\alpha_3\geqslant 0,$$

т. е.

$$N-(100\alpha_1+10\alpha_2+\alpha_3)^3\geqslant 0.$$

Теперь решим уравнение $x^3-N=0$ по схеме Горнера (см конец примечания 7 к данной книге).

Пусть $x=100x'$, т. е. $x'=\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, и является вещественным корнем уравнения $(100x')^3-N=0$.

Разложим $f(x')=(100x')^3-N$ по степеням $(x'-\alpha_1)$:

$$\begin{array}{llll|l}
1\,000\,000 & 0 & 0 & -N & \alpha_1 \\
 & +1\,000\,000\alpha_1 & 1\,000\,000\alpha_1^2 & +(100\alpha_1)^3 & \\
\hline
1\,000\,000 & 1\,000\,000\alpha_1 & 1\,000\,000\alpha_1^2 & -A_1=(100\alpha_1)^3-N & \\
 & 1\,000\,000\alpha_1 & 2\,000\,000\alpha_1^2 & & (4) \\
\cline{1-3}
1\,000\,000 & 2\,000\,000\alpha_1 & 3\,000\,000\alpha_1^2=10B_1 & & \\
 & 1\,000\,000\alpha_1 & & & \\
\cline{1-2}
1\,000\,000=1000\,D_1 & 3\,000\,000\alpha_1=100C_1 & & &
\end{array}$$

Таким образом, вспомогательное уравнение будет:

$$\varphi(y)=D_1y^3+C_1y^2+B_1y-A_1=0,$$

или

$$\varphi(y)=1000y^3+30\,000\alpha_1y^2+300\,000\alpha_1^2y+(100\alpha_1)^3-N=0,$$

где $y=\alpha_2,\ \alpha_3$.

Следующая схема такова:

$$\begin{array}{llll|l}
D_1 & +\begin{array}{l}C_1\\ D_1\alpha_2\end{array} & \begin{array}{l}B_1\\ (C_1+D_1\alpha_2)\,\alpha_2\end{array} & \begin{array}{l}-A_1\\ [B_1+(C_1+D_1\alpha_2)\alpha_2]\alpha_2\end{array} & \alpha_2 \\
\hline
D_1 & \begin{array}{l}C_1+D_1\alpha_2\\ +D_1\alpha_2\end{array} & \begin{array}{l}B_1+(C_1+D_1\alpha_2)\alpha_2\\ +(C_1+D_1\alpha_2)\,\alpha_2\end{array} & -A_1+\bar{A}\alpha_2=-A_2 & \\
\hline
D_1 & \begin{array}{l}C_1+2D_1\alpha_2\\ +D_1\alpha_2\end{array} & \bar{A}+C_1\alpha_2+2D_1\alpha_2^2=10B_2 & & (4') \\
\hline
D_1=1000D_2 & C_1+3D_1\alpha_2=100C_2 & & &
\end{array}$$

Получается уравнение

$$\psi(z)=D_2z^3+C_2z^2+B_2z-A_2=0,\ \text{где}\ z=\alpha_3.$$

Так же как при извлечении квадратного корня, мы видим, что кубический корень извлекается на основании разложения $(a+b)^3$, приспособленного к счетной доске. При этом коэффициенты A_2, B_2, C_2, D_2 вычисляются как в схеме Горнера. Ср. схему (3) доски и схему Горнера (4′).

11. Ван Лин и Дж. Нидхэм считают, что вторая половина фразы может быть восстановлена именно в таком смысле, так как она должна быть подобна той, которая употребляется в правиле для извлечения квадратного корня (ср. примечание 8 к данной книге).

12. Если n — некубическое число, то $\sqrt[3]{\frac{m}{n}}=\frac{\sqrt[3]{mn^2}}{n}$.

13. При китайской системе записи чисел здесь не требуется новых разрядов, кроме уже указанных в примечании 2 к книге I.

14. Здесь $\pi=\frac{27}{8}$, что является исключением из общего правила употребления в трактате $\pi=3$ (см. примечание 26 к книге I).

ПРИМЕЧАНИЯ К КНИГЕ V

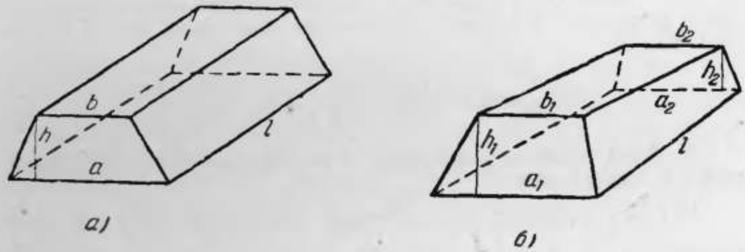
1. Заголовок «Оценка работ» 商功 (шан гун) определяется назначением содержания в книге задач на вычисление объемов крепостных стен, валов, плотин, каналов и подобных сооружений, а также на различные расчеты, возникающие при земляных работах (см., например, вопросы к задачам 4—7, 21, 22). Задачи книги можно разделить на две группы: в одних речь идет о вычислении объемов геометрических тел: параллелепипеда, призмы, конуса, пирамиды и т. д. (задачи 8—18), в других говорится о различных практических вопросах, подобных вышеуказанным. Можно предположить, что первоначально математические тексты содержали задачи практического характера. Затем к ним были добавлены задачи 8—18. Подтверждением этому служат дополнительные вопросы к задачам 5—7, 21, 22, содержащие, вообще говоря, довольно разнообразные расчеты количества людей, требующихся для строительства, и т. п. в зависимости от нормы выработки для каждого работающего, причем здесь же в условии даются так называемые «установившиеся» нормы выработки (см. тексты указанных задач), которые упрощают решение задачи настолько, что задачи, собственно, теряют свой практический интерес. Демонстрация довольно разнообразных норм выработки, не отражающаяся на решении задач, является рудиментом старых, прежних текстов. Помещая эти задачи в раздел на измерение объемов, не было необходимости подробно останавливаться на них, поскольку они не были основными.

2. Правило выражает формулу объема призматического тела, у которого четыре грани являются прямоугольниками, а две боковые — трапециями (черт. 7, a) $V=\frac{a+b}{2}hl$, где a — нижняя ширина, b — верхняя ширина, l — длина, h — высота или глубина в зависимости от того, является ли сооружение описанной формы наземным или вырытым в земле.

Интересно, что древневавилонские тексты по математике, подобно китайским, содержат вычисление объемов каналов, плотин, насыпей, валов и т. п. вместе с расчетами числа людей, нужных для их возведения. См. О. Нейгебауер «Лекции по истории античных математических наук», 1937, М.—Л., стр. 186—187. Для вычисления объемов таких сооружений вавилоняне пользовались приближенной формулой

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+b_1}{2}+\frac{a_2+b_2}{2}\right)\frac{h_1+h_2}{2}\,l,$$

где величины, в нее входящие, обозначают указанные на черт. 7, *б* размеры. Вавилонские математики употребляли для ребер этого



Черт. 7.

тела такую же терминологию, как и китайцы: «нижняя ширина», «верхняя ширина» и т. д.

Заметим следующее. В задачах книги V геометрические тела называются условными терминами, смысл которых сейчас неясен, а задание «верхних» и «нижних» «ширин» и «длин» не может дать точного однозначного представления о теле. Поэтому, вообще говоря, неясно, являются ли приводимые в правилах формулы для объемов тел точными или приближенными. Мы предполагаем, что имеются в виду достаточно правильные тела и формулы следует рассматривать в качестве точных. При этом нужно учитывать, что в случае круговых тел (конус, цилиндр) принимается $\pi=3$.

3. Напомним, что 1 чжан=10 чи=100 цуням. Интересно отметить, что размеры крепостной стены, приведенные в задаче, которые в наших единицах длины будут следующими: нижняя ширина 9 *м*, верхняя ширина 4,5 *м*, высота 11 *м*, длина 280 *м*, являются вполне реальными и почти совпадают с размерами Великой китайской стены: ширина ее 5—7 *м*, высота 10—15 *м* (данные взяты из книги Цянь Вэй-чжана «Научные открытия в истории нашей страны», 1953, Пекин, на китайском языке). Создается впечатление, что размеры плотин, каналов и т. п. в остальных задачах также взяты из окружающей действительности.

4. На самом деле получается 10 943 куб. чи $824\frac{1}{2}$ куб. цуня. Прежде всего здесь производится округление числа, и с этим мы впервые встречаемся в трактате, хотя в правиле специально об этом не говорится. Кроме того, здесь как и всюду далее дробные доли единицы объема называются с помощью линейных единиц. Но и тогда нужно было бы написать 10 943 чи 800 цуней. Лю Хуэй в своих комментариях к данному месту поясняет, что 8 цуней здесь обозначает объем параллелепипеда с основанием в 1 кв. чи и высотой в 8 цуней. Лю Хуэй указывает также, что остается еще объем, равный произведению площади в 1 кв. цунь на 0,245 цуня.

5. Большая половина, по старинной китайской терминологии, есть $\frac{2}{3}$.

6. В задаче спрашивается, сколько людей потребуется еще, чтобы выполнить всю работу, поскольку от нормы каждого осталось еще по

$$232\frac{4}{15}=871-\left[\frac{871}{5}+\frac{2}{3}\left(871-\frac{871}{5}\right)\right].$$

7. Здесь ответ надо понимать в смысле, указанном в примечании 4 к данной книге.

8. Здесь производится округление числа $33\,581\frac{2856}{3000}$ и в ответе сообщается, что в таком случае «не хватит» 14,4 куб. чи, т. е. будет выработано на 14,4 куб. чи больше, чем это требуется в задаче.

9. «Квадратное бао-дао» есть параллелепипед с квадратным основанием. Это — древнее название параллелепипеда, не сохранившееся до настоящего времени и означающее нечто вроде «квадратных подмостков». Кроме того, заметим, что боковые грани суть площадки в $15\cdot 16=240$ кв. чи, численно равные количеству кв. бу в единице площади 1 му. Этот параллелепипед, видимо, считался «единичным».

10. «Круглое бао-дао» — древний термин для цилиндра, означающий «круглые подмостки». Здесь $V=\frac{C^2h}{12}$, т. е. $V=\frac{C^2h}{4\pi}$ при $\pi=3$.

11. «Квадратное тин» есть усеченная пирамида высоты h с квадратными основаниями a^2 и b^2. Этот древний термин в настоящее время не употребляется.

12. «Круглое тин» — это усеченный конус; объем находится по формуле $V=\frac{(Cc+C^2+c^2)\,h}{36}$, т. е. $V=\frac{h}{3}\,\frac{Cc+C^2+c^2}{4\pi}$, где $\pi=3$, C и c — длины окружностей нижнего и верхнего оснований, h — высота. Термин является древним и ныне не употребляется.

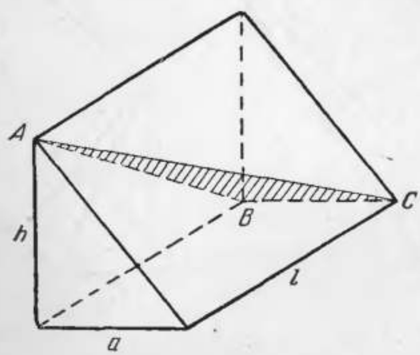
13. Здесь и в следующей задачах, как и ранее (см. задачи 9—12), для пирамиды и конуса употребляются такие термины,

которые отличаются только определением «квадратный» или «круглый»: «квадратное чжуй», «круглое чжуй» («чжуй» может иметь значение «шило»). Из них термин для конуса сохранился до сих пор в употреблении.

14. Объем конуса определяется по формуле

$$V=\frac{h}{3}\,\frac{C^2}{4\pi}, \quad \pi=3.$$

15. «Цзя-ду» есть прямая призма; ее основание — прямоугольный треугольник со сторонами a и h, высота l; призма расположе-



Черт. 8.

на, как показано на черт. 8. Объем вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{2}\,alh.$$

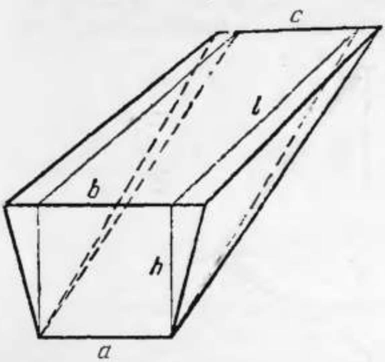
16. «Ян-ма» — это левое нижнее тело, получившееся при сечении «цзянь-ду» плоскостью ABC (см. предыдущее примечание), т. е. пирамида, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами a и l, а высота которой h является одновременно одним из ребер. Объем пирамиды вычисляется по формуле $V=\frac{1}{3}\,alh$.

17. «Бе-вао» — это правая верхняя часть «цзянь-ду», отсеченная плоскостью ABC (см. примечание 15 к данной книге), т. е пирамида, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами a и h, а высота которой l является в то же время одним из ее ребер. Объем $V=\frac{1}{6}\,ahl$.

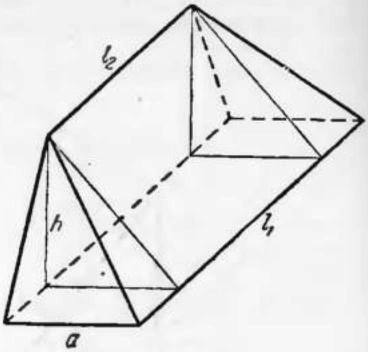
18. «Сянь-чу», по-видимому, есть тело, изображенное на черт. 9. Правило получено путем вычисления объемов прямой призмы,

в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами l и h и высота которой равна a, и двух равновеликих пирамид, в основании которых лежит трапеция со сторонами $\frac{b-a}{2}$ и $\frac{c-a}{2}$ и высотой l и высота которых равна h.

При таком вычислении объемов должны были применяться тождественные преобразования. Вышеприведенная формула могла



Черт. 9.



Черт. 10

быть получена, например, так:

$$V=\frac{1}{2}\,lha+2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}+\frac{c-a}{2}\right)l\,\frac{h}{3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\,alh+\frac{1}{6}\,blh+\frac{1}{6}\,clh-\frac{1}{3}\,alh=\frac{1}{6}\,lh\,(a+b+c).$$

19. «Чу-мэн», по-видимому, есть тело, указанное на черт. 10. Оно состоит из прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами a, h, с высотой l_2 и из двух равновеликих пирамид с прямоугольным основанием, имеющим стороны a и $\frac{l_1-l_2}{2}$, а высоту h, являющуюся также ребром пирамиды. Объем

$$V=\frac{1}{2}\,ahl_2+2\,\frac{1}{3}\,ah\,\frac{l_1-l_2}{2}=\frac{(l_2+2l_1)\,ah}{6}.$$

20. «Чу-тун», «пань-чи», «мин-гу» суть обелиски, т. е. усеченные четырехгранные пирамиды, грани которых не сходятся

в одной точке. Объем во всех случаях вычисляется по формуле

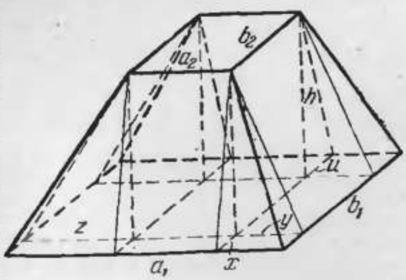
$$V=\frac{(2a_1+a_2)\,b_1+(2a_2+a_1)\,b_2}{6}\,h,$$

где a_1, b_1 — нижние ширина и длина, a_2, b_2 — верхние ширина и длина, h — высота тела «чу-тун» или глубина тел «пань-чи» и «мин-гу». Формула объема обелиска, вероятно, была получена путем разбиения его на призмы и пирамиды (черт. 11):

$$V=a_2b_2h+\frac{1}{2}a_2hx+\frac{1}{2}b_2hy+\frac{1}{2}b_2hz+\frac{1}{2}a_2hu+$$
$$+\frac{1}{3}xyh+\frac{1}{3}xzh+\frac{1}{3}zuh+\frac{1}{3}uyh=$$
$$=h\left(\frac{2}{6}a_1b_1+\frac{2}{6}a_2b_2+\frac{1}{6}a_2b_1+\frac{1}{6}a_1b_2\right)=$$
$$=\frac{1}{6}h\left[(2a_1+a_2)\,b_1+(2a_2+a_1)\,b_2\right].$$

Вывод такой формулы имеется у Ван Сяо-туна в «Ци гу суань шу».

Различные названия одного и того же геометрического тела свидетельствуют о том, что здесь принимаются во внимание такие свойства тела, которые не являются абстрактными, математическими. Так, «чу-тун» является, видимо, наземным сооружением, имеющим форму обелиска, так как оно обладает высотой. «Пань-чи» в отличие от него имеет глубину, поэтому «пань-чи» может быть ямой, вырытой в земле. У «мин-гу» также задается глубина, оно также имеет форму обелиска, но в отличие от предыдущих обелисков, этот вытянут в длину, причем «нижняя ширина» очень мала по сравнению с «верхней шириной» (см. цифровые данные задачи 22).

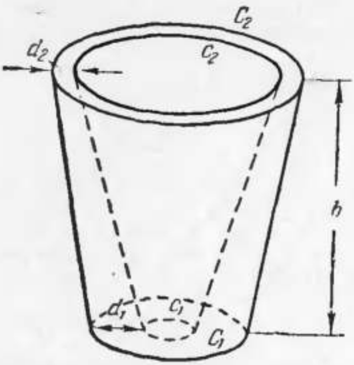


Черт. 11.

Что в данном случае речь идет действительно о конкретных объектах строительства, подтверждается появлением здесь вновь дополнительных задач на расчеты, связанных со строительными работами (см. тексты задач 21, 22). «Цюй-чи» есть полый усеченный конус, изображенный на черт. 12. Его объем вычисляется по формуле, аналогичной формуле для обелиска, в которой $a_1=\frac{C_1+c_1}{2}$, $b_1=d_1$, $a_2=\frac{C_2+c_2}{2}$, $b_2=d_2$.

21. Здесь, очевидно, ошибка. Объем данного «чу-тун» равен на самом деле 26 500 куб. чи.

22. Малая половина, по старинной китайской терминологии, есть $\frac{1}{3}$. Об употребленном здесь способе записи дробных долей единиц объемов с помощью линейных единиц см. примечание 4 к данной книге.



Черт. 12.

23. То есть 1,6 куб. чи.

Текст данной задачи и правила переведены с помощью консультации проф. Ли Яня.

24. То есть 34,7 куб. цуня.

25. В задачах 23—25 сыпучие тела образуют конус, его половину, четверть. Объем вычисляется по формуле для объема конуса $V=\frac{h}{3}\frac{c^2}{4\pi}$ при $\pi=3$ (см. примечание 13 к данной книге).

Вторые половины вопросов решаются с привлечением данных, приведенных в правиле к этим задачам, которые соответственно надо читать так: 2,7 куб. чи; 1,62 куб. чи; 2,43 куб. чи. Интересно, что здесь объемная единица 1 ху употребляется в качестве весовой.

26. Яма имеет форму прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольник, а боковые грани ее — трапеции, т. е. форма ее та же, что у тел в задачах 2—7. Объем такого тела равен $V=\frac{a+b}{2}lh$ (см. примечание 2 к данной книге). Здесь требуется найти a.

Кроме того, подразумевается, что вынутой землей наполняется стена в 576 куб. чи, при этом земля утрамбовывается. Отношение объемов утрамбованной и вынутой земли берется из задачи 1 данной книги.

27. Амбар имеет форму параллелепипеда. Здесь имеется в виду весовой ху, объем которого дан выше в правиле «куча зерна».

ПРИМЕЧАНИЯ К КНИГЕ VI

1. Название заголовка в оригинале «Цзюнь шу» 均輸. Имеется в виду пропорциональное, равномерное, «справедливое» распределение налога. Действительно, в первых четырех задачах книги производятся расчеты, возникающие при распределении налога (например, зерна) между уездами в зависимости от различ-

ных условий (например, в зависимости от стоимости зерна, от удаленности уезда, от места сбора зерна и т. п.). Таким образом, в этих первых задачах книги VI, как и в первых задачах книги III, рассматривается пропорциональное деление. Аналогия между этими книгами может быть продолжена: и в той и в другой далее следуют задачи на простое и сложное тройное правило. Многие задачи родственны по тематике. Например, задача 5 книги III и 2, 4 книги VI, задача 9 книги III и 5 книги VI, задача 7 книги III и 18 книги VI и т. д. Этими задачами книга III исчерпывается, тогда как книга VI содержит еще ряд арифметических задач, например так называемые задачи на совместную работу, и др.

Такое расположение в основном одинакового материала в разных книгах трактата может быть объяснено, если принять во внимание древнее назначение трактата. На самом деле, трактат составлен из самостоятельных книг, содержание которых определялось не столько единством математических методов, хотя впоследствии это стало определяющим, сколько темой задач. Так, в книге I, как мы видели, собраны задачи на измерение полей, в книге II — на обмен зерновых продуктов, в книге III — на распределение доходов и расходов между чиновниками разных классов. В книге V, например, помещены задачи, связанные с оценкой работ при строительстве. В перечисленных книгах первые задачи составлены именно на тему, указанную заголовками. Так же обстоит с первыми задачами книги VI.

Однако отличие книги VI от книги III заключается не только в тематике первых ее задач, но и в том, что в книге VI помещены более сложные задачи. Числа, пропорционально которым происходит деление заданного количества, как правило, в этих задачах не являются членами прогрессий и могут быть произвольными. Кроме того, они не заданы в условии задачи, как это сделано в книге III, а их нужно составить по данным задачи. Собственно в этом заключается вся сложность задачи.

2. «Объединить» — значит разделить (см. примечание 10 к книге I). Искомые числа находятся по формуле

$$x_i = \frac{An_i}{\Sigma_i n_i},$$

где n_i составляются по условию задачи (ср. примечание 2 к книге III).

3. Здесь имеется в виду, вероятно, только количество взрослого мужского населения уездов (ср. с числом жителей в уездах других задач).

4. В оригинале написано «семей», тогда как в предыдущем тексте задачи постоянно говорится о числе людей.

5. То есть на полученную общую стоимость 1 ху зерна.

6. Что такое «суань» (см. примечание 7 к книге III).

7. Так как везут зерно в этот уезд, то, очевидно, стоимость найма на перевозку зерна для уезда *A* не нужна. Это условие лишнее.

8. По ответу задачи видно, что из таблицы книги II берется именно тот вид пшена, коэффицпент которого равен 30. Коэффициенты для бобов и проса, соответственно равные 45 и 50, также берутся из этой таблицы.

9. Имеется в виду количество соли в ноше во втором случае.

10. Здесь (фань) переводится словом «раз», т. е. корзину с ношей надо отнести и вернуться, чтобы наполнить ее снова.

11. Из таблицы книги II берутся коэффициенты 30 для грубо обработанного пшена и 27 для очищенного пшена.

12. Здесь под «чи» надо подразумевать просто части трости, веса которых составляют арифметическую прогрессию:

$$a+4d,\quad a+3d,\quad a+2d,\quad a+d,\quad a$$

и

$$\begin{cases} a+4d=4, \\ a=2. \end{cases}$$

13. То есть из нижней ступени.

Словом «коэффициент» мы переводим иероглиф «люй» (ср. с примечаниями 2 и 12 к книге II).

14. Решение задачи проведено по методу, подобному «делению по ступеням» книги III трактата.

Надо определить члены арифметической прогрессии, расположенные в порядке убывания:

$$a_1=a,\ a_2=a-d,\ \ldots,\ a_i=a-(i-1)\,d,\ \ldots,\ a_n=a-(n-1)\,d,$$

где n, a_1 и a_n известны. Решение строится по следующим этапам.

1) Находится «коэффициент разности» $k=a_1-a_n=(n-1)\,d$.

2) Составляются «ступени» $n_1=(n-1)\,a_1,\ \ldots,$ вообще

$$n_i=(n-1)\,a_1-(i-1)\,k=(n-1)\,a_i,\quad i=2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда искомые

$$a_i=\frac{a_1}{n_1}\,n_i.$$

Действительно,

$$a_i=\frac{a_1\,[(n-1)\,a_i]}{(n-1)\,a_1}.$$

15. Подразумевается, что доли каждого образуют арифметическую прогрессию:

$$a+5d,\ a+4d,\ a+3d,\ a+2d,\ a+d.$$

16. То есть способ таков. Устанавливаются «пирамидообразные строки-ступени»: $a+5d$, $a+4d$, $a+3d$, $a+2d$, $a+d$. По условию задачи $2a+9d=3a+6d$ или $a=3d$. «3 прибавь ко всем»: $8d$, $7d$, $6d$, $5d$, $4d$.

Тогда

$$x_i = \frac{5(3+i)d}{\sum\limits_{j=1}^{5}(3+j)d}, \quad \text{где} \quad \sum_{j=1}^{5}(3+j)d = 30d.$$

Расшифровка решения задачи по тексту правила произведена с помощью консультации, полученной от проф. Ли Яня.

17. Пусть объемы бамбуковых колен расположены в ряд:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9,$$

где $a_i = a + (i-1)d$, $i = 1, \ldots, 9$; d — разность прогрессии.

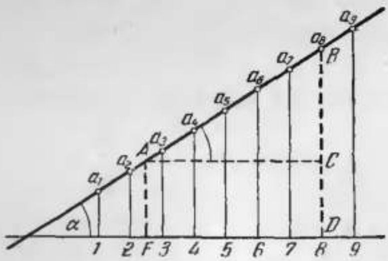
Задачу можно свести к системе:

$$\begin{cases} 4a + 6d = 3, \\ 3a + 21d = 4, \end{cases}$$

откуда

$$a = \frac{39}{66}, \quad d = \frac{7}{66}.$$

Хотя подобные системы свободно решаются в книге VIII, в правиле предложен другой способ решения:



Черт. 13.

1) Находится разность между «верхним» и «нижним» коэффициентами: $\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$. Она является делимым.

2) Делитель составляется так: $9 - \frac{4}{2} - \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$.

3) Частное дает $\frac{7}{12} : \frac{11}{2} = \frac{7}{66} = d$, т. е. «настолько отличается каждая ступень от соседней».

4) $a_8 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Решение можно интерпретировать геометрически (черт. 13).

Здесь $y=a+dx$, $-\infty < x < +\infty$. Когда $x=0, 1, 2, \ldots, 8$, $y=a, a+d, \ldots, a+8d$, т. е. $y=a_1, a_2, \ldots, a_9$.

1) Находится среднее арифметическое a_7, a_8, a_9 и a_1, a_2, a_3, a_4, т. е. AF и BD. Составляется их разность $BC=BD-AF$.

2) Вычисляется AC.

Между a_1 и a_4 $(4-1)$ промежутка, между a_7 и a_9 $(3-1)$ промежутка; всего же между a_1 и a_9 $(9-1)$ промежутков. Следовательно,

$$AC=(9-1)-\frac{4-1}{2}-\frac{3-1}{2}=9-\frac{4}{2}-\frac{3}{2}=\frac{11}{2}.$$

3) Составляется отношение $\frac{BC}{AC}=\operatorname{tg}\alpha=d$.

4) Для определения величины членов прогрессии указывается, что $BD=a_8$.

Интересно, что подобные задачи таким же образом решали древние вавилоняне (см. «Лекции О. Нейгебауера», стр. 196).

Приведем в качестве примера следующую вавилонскую задачу: «10 братьев и $1\frac{2}{3}$ мина серебра. Брат выше брата (в отношении его доли). Насколько он выше, я не знаю. Доля восьмого 6 шекелей. Брат над братом, насколько он выше?» (1 мина = 60 шекелям).

Таким образом, известны $\sum_{10}^{1} a_i=S$ и $a_8=a+7d$, требуется определить d.

Решение проводится в такой последовательности:

1) $\frac{1}{n}S\cdot 2=a_1+a_{10}=2\bar{a}$, где $\bar{a}=\frac{1}{n}\sum_{10}^{1} a_i$.

2) $2\bar{a}-2a_8=2(\bar{a}-a_8)$, т. е. находится a_3-a_8.

Получаем: $2\bar{a}-2a_8=a_1+a_{10}-2a_8=(a+a+9d)-2a_8=(a+7d)+$ $+(a+2d)-2a_8=a_8+a_3-2a_8=a_3-a_8$.

3) Определяется число интервалов между a_3 и a_8. Так как между a_1 и a_{10} всего $(10-1)$ интервалов, между a_1 и a_3, a_8 и a_{10} $2(1+1)=4$ интервала, то всего будет $10-[2(1+1)+1]=5$.

4)

$$d=\frac{a_3-a_8}{5}=\frac{\frac{1}{n}S\cdot 2-2a_8}{10-[2(1+1)+1]}.$$

Нейгебауер дает такую же геометрическую интерпретацию решения, какая была приведена выше.

В вавилонском тексте d называется «то, насколько брат возвышается над братом», т. е. здесь так же, как у китайцев, нет особого термина для разности прогрессии.

Мы видели, что в китайском тексте есть несколько методов решения задач на прогрессию. Только что рассмотренный способ в точности совпадает с вавилонским. Хотя о взаимоотношениях древнего Китая с Вавилоном ничего неизвестно, этот и некоторые другие моменты из истории математики обеих стран наводят на мысль о наличии между ними каких-то прямых или косвенных связей.

18. Эта задача и следующие на так называемую «совместную работу». В данном случае искомая величина находится по формуле $x=\frac{ab}{a+b}$.

19. Ответ неверен. Действительно, на изготовление 1 черепицы I вида требуется $\frac{3}{38}$ дня, а II вида $\frac{1}{38}$ дня. Тогда 1 пара черепиц будет получаться за $\frac{4}{38}$ дня. Значит, за день будет сделано $\frac{38}{4}$ пар, т. е. 19 черепиц I и II вида. Ошибка произошла из-за применения приведенного правила (см примечание 20). Напомним, что малая половина — это $\frac{1}{3}$.

20. Правило было бы верно, если бы заданные количества черепиц I и II видов производились не в 3 и 2 дня, а в 1 день.

21. Решение задачи таково, как если бы искомая величина находилась из уравнения

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{50}+\frac{1}{30}+\frac{1}{15}$$

следующим образом:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{50}\left(1+1\frac{2}{3}+3\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{50},\quad x=\frac{50}{6}=8\frac{1}{3}.$$

Напомним, что большая половина — это $\frac{2}{3}$.

22. Значение термина «умножь поочередно» см. в примечании 9 к книге I.

Правило описывает решение задачи в общем виде: если a_i — арендная плата в i-й год за b_i му земли, A — общая плата за n лет, то размер поля

$$x=\frac{A}{\sum\limits_{1}^{n}\frac{a_i}{b_i}}=\frac{A\cdot\prod\limits^{n} b_i}{k},$$

где

$$k=\sum_{1}^{n} a_i b_1 \ldots b_{i-1} b_{i+1} \ldots b_n.$$

23. Второе правило по существу не отличается от первого. Действительно,

$$x=\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}}=$$

$$=\frac{a_1a_2a_3a_4a_5}{a_2a_3a_4a_5+a_1a_3a_4a_5+a_1a_2a_4a_5+a_1a_2a_3a_5+a_1a_2a_3a_4},$$

где a_i — количество дней, в которое наполняет водоем i-я канава.

24. Подразумевается, что берут соответствующую долю от имеющегося в данный момент количества.

25. Первоначальное количество x можно найти из соотношения $5=x\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)$.

В тексте

$$x=\frac{5\,(3\cdot5\cdot7)}{2\cdot4\cdot6},$$

где числа 2, 4, 6 называются термином «остатки от сборов» $\left(\text{это числители дробей } 1-\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{5},\ 1-\frac{1}{7}\right)$.

26. Если x — первоначальный вес золота, то по условию задачи $1=x\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\right]$.

Тогда

$$x=\frac{1}{1-\frac{(2-1)(3-1)(4-1)(5-1)(6-1)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}}=$$

$$=\frac{1\,(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6-[(2-1)(3-1)(4-1)(5-1)(6-1)]}=\frac{6}{5}.$$

ПРИМЕЧАНИЯ К КНИГЕ VII

1. Заголовок книги в оригинале 盈不足 (ин бу цзу) в отличие от других может быть переведен здесь дословно. «Избытком — недостатком» в трактате называются два определенных способа получения искомых величин.

Первый способ.

Пусть $b=f(a)=ax-y=0.$

Требуется определить x и y, если известно, что

$$\text{при } a=a_1 \quad b_1=a_1x-y,$$
$$\text{при } a=a_2 \quad b_2=a_2x-y.$$

В правиле рекомендуется составить таблицу вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

из которой получаются искомые величины:

$$y=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_2-a_1}; \quad x=\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}.$$

Иначе говоря, решается система двух линейных уравнений с двумя неизвестными частного вида, когда коэффициенты при y равны -1.

По этому способу решены задачи 1—8, которые делятся на три группы.

а) a_1 и a_2 взяты так, что $a_1 < a_0 < a_2$, где $f(a_0) \equiv 0$, т. е. так, что b_i разных знаков, и тогда одно из них называется «недостатком», другое — «избытком». Поэтому правило, данное к задачам 1—4, в этом случае названо «избыток — недостаток». Отсюда название книги.

б) a_1 и a_2 взяты так, что b_i одинаковых знаков. Тогда правило, данное к задачам 5—6, называется «оба избытка — оба недостатка».

в) a_2 взято так, что $b_2=0$ (задачи 7—8). Правило к этим двум задачам называется «избыток-равновесие, недостаток-равновесие».

Второй способ.

Пусть по условию задачи

$$y=f(x)=ax+b=0.$$

Корень заданного уравнения x_0 определяется с помощью правила двух ложных положений следующим образом:

$$\text{пусть } x=x_1, \quad \text{тогда } y_1=ax_1+b,$$
$$\text{пусть } x=x_2, \quad \text{тогда } y_2=ax_2+b.$$

После этого составляется таблица

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

из которой определяется искомая величина

$$x_0=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1}.$$

Это — формула линейной интерполяции, которая, правда, применяется только к уравнению 1-й степени, что дает точный ответ. Действительно, отсюда $x=-\dfrac{b}{a}$.

По такому правилу решены задачи 9—20 книги VII и оно также называется способом «избыток—недостаток». Название естественное, так как всегда берется $x_1 < x_0 < x_2$, где $f(x_0) = 0$, y_1, y_2 получаются соответственно разных знаков, как «недостаток» и «избыток» (ср. выше с первым случаем первой разновидности правила).

Но общность задач, помещенных в данной книге, заключена не только в терминологии. С точки зрения древнего китайского математика здесь связь более глубокая. Действительно, задачи 1—8 могут быть решены так же, как решены задачи 9—20, что показывает на взаимосвязь этих двух способов. Именно здесь $\frac{y}{x} = a$, которое может быть определено так: по заданным в условии задачи a_1 и $b_1 = a_1x - y$, a_2 и $b_2 = a_2x - y$ аналогично x_0 находим:

$$\frac{y}{x} = a = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_2 - b_1},$$

y и x находятся, если учесть еще, например, $b_1 = a_1x - y$. Поэтому для древнего китайского математика единство обоих видов задач 1—8 и 9—20 заключалось, по-видимому, в единстве способа конструирования искомых величин: по данным или найденным из условия задачи двум парам величин n_1, m_1; n_2, m_2, расположенным определенным образом в таблицу вида

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix},$$

находились искомые величины с помощью сходных действий над числами таблицы.

Можно сказать, что в первом случае находится точка (x, y) пересечения двух прямых $a_1x - y = b_1$ и $a_2x - y = b_2$, заданных своими коэффициентами, тогда как во втором случае — точка $(x_0, 0)$ пересечения прямой $y = ax + b$, которая проводится через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), с прямой $y = 0$. Здесь интересно, что за общим случаем следует частный и что, не имея математической символики, которой мы сейчас пользуемся, древние китайские математики усмотрели симметрию коэффициентов и неизвестных в этих двух видах задач.

2. Здесь «ши» уже не означает делимое, как в книге II (см. примечание 15 к книге II), но $a_1b_2 + a_2b_1$; точно так же «фа» здесь не делитель (см. примечание 15 к книге II), но $b_2 + b_1$. Отметим, что для образования «ши» употребляется специальный термин «умножь крест-накрест» (вэй-чэн) (ср. с примечанием 9 к книге I.)

3. «Еще одно правило» получается, если исключить неизвестное y, вычитая из первого уравнения второе:

$$(a_1 - a_2)x = b_1 - b_2, \quad x = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2},$$
$$y = a_1x - b_1 = a_2x - b_2.$$

4. Правило «оба избытка — оба недостатка» является вариантом предыдущего правила «избыток — недостаток» (см. примечания 2 и 3 к данной книге), когда b_i одинаковых знаков.

5. Здесь

$$\begin{cases} a_1x = y + b_1, \\ a_2x = y. \end{cases}$$

Следовательно,

$$x = \frac{b_1}{a_1 - a_2}; \ y = a_2x.$$

Случай настолько прост, что первый вариант правила здесь не нужен, поэтому формулируется только второй.

6. Эта и все следующие задачи книги VII решены с помощью правила двух ложных положений. Из таблицы книги II берутся коэффициенты 50 и 30, которые соответствуют просу и пшену. В наших обозначениях задача сводится к уравнению

$$x + \frac{3}{5}(10 - x) = 7,$$

или

$$y = f(x) = x + \frac{3}{5}(10 - x) - 7 = 0.$$

Если $\quad x_1 = 2$, то $y_1 = 2 + \frac{3}{5}(10 - 2) - 7 = -0{,}2$;

если $\quad x_2 = 3$, то $y_2 = 3 + \frac{3}{5}(10 - 3) - 7 = +0{,}2$.

Наконец,

$$x = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{y_2 - y_1} = \frac{2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}2}{0{,}2 + 0{,}2} = 2{,}5.$$

В тексте правило двух ложных положений сформулировано в задачах 18 и 19.

7. Интересно, что здесь решается по правилу двух ложных положений совсем простое уравнение

$$(10 + 7)x = 90,$$

решение которого очевидно.

8. Эта и следующая задачи примечательны тем, что здесь имеют дело с геометрическими прогрессиями.

9. Предполагается, что скорости в течение данного дня не меняются. Задачу можно записать уравнением

$$3 + 1\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x = 1 + 2 + 4x,$$

где x — часть третьего дня.

10. Здесь решается по правилу двух ложных положений линейная система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5x+\ \ y=3, \\ x+5y=2, \end{cases}$$

хотя в книге VIII такие системы решаются общим методом «фан-чэн». Этот пример показывает, что содержание книги VII является единым с точки зрения общности применяемых здесь методов, а не общности тематики задач. В этом отношении книги VII и VIII суть самые красивые по своему построению.

11. Напомним, что 1 цзинь $=16$ ланам.

В задаче задан общий вес P и объем V куба, состоящего из яшмы с удельным весом a и из камня с удельным весом b. Требуется найти их объемы V_1, V_2, а также их веса aV_1, bV_2.

Итак,

$$\begin{cases} V_1+\ \ V_2=V_1, \\ aV_1+bV_2=P. \end{cases}$$

Задача решена с помощью правила двух ложных положений, которое здесь выглядит несколько иначе.

Согласно правилу, пусть $V=V_1$. Тогда

$$a\,(V-V_2)+bV_2=P,$$

$$aV-P=V_2, \text{ так как здесь } a-b=1.$$

Пусть теперь $V=V_2$, тогда

$$aV_1+b\,(V-V_1)=P,$$

$$P-bV=V_1.$$

Отсюда легко определить остальные искомые величины aV_1 и bV_2.

12. Если искомые величины обозначить соответственно через x и z, то задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} 9x=11\,z, \\ 13+8x+z=10\,z+x, \end{cases}$$

которая здесь решается с помощью правила двух ложных положений.

Пусть $x_1=3$ цзиням, 1 цзинь $=16$ ланам; тогда

$$z_1=\frac{9}{11}x=2\frac{5}{11} \text{ цзиня}$$

и

$$y_1=\left(\frac{13}{16}+8\cdot3+2\frac{5}{11}\right)-\left(10\cdot2\frac{5}{11}+3\right)=$$

$$=27\frac{47}{11\cdot16}-27\frac{96}{11\cdot16}=-\frac{49}{11\cdot16}.$$

В правиле на этот счет сказано, что «недостаток (равен) 49 в правой строке».

Пусть теперь $x_2=2$ цзиням, тогда $z_2=1\frac{7}{11}$ цзиня и

$$y_2=\left(\frac{13}{16}+1\frac{7}{11}+8\cdot 2\right)-\left(10\cdot 1\frac{7}{11}+2\right)=$$
$$=18\frac{79}{11\cdot 16}-18\frac{64}{11\cdot 16}=\frac{15}{11\cdot 16}.$$

В правиле об этом говорится так: «избыток 15 в левой строке».

Предполагается, что полученные y_1 и y_2 вместе с x_1 и x_2 помещены в таблицу

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix},$$

которая записана по-китайски, т. е. правый столбец означает первую строку, а левый — вторую. Поскольку знаменатели $(11\cdot 16)$ в общей формуле сокращаются:

$$x=\frac{2\frac{49}{11\cdot 16}+3\frac{15}{11\cdot 16}}{\frac{49}{11\cdot 16}+\frac{15}{11\cdot 16}}=\frac{2\cdot 49+3\cdot 15}{49+15},$$

то они опускаются, и таблица выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 15 & 49 \end{pmatrix}.$$

Фраза правила: «каждый знаменатель умножь на количества, содержащиеся в этих строках» говорит о таком преобразовании таблицы, когда в результате числа будут в ней целые и она примет вид, указанный выше.

Отсюда

$$x=\frac{2\cdot 49+3\cdot 15}{15+49}=\frac{143}{64}=2\frac{15}{64}.$$

Вес слитка серебра z определяется так: «Знаменатель умножь на делитель, раздели на него [делимое]». Иначе говоря, делимое 143 делится на произведение делителя 64 и знаменателя $\frac{11}{9}$, так что

$$z=\frac{x}{\frac{11}{9}}=\frac{143}{\frac{11}{9}\cdot 64}=\frac{13\cdot 9}{64}=\frac{117}{64}=1\frac{53}{64}.$$

13. За n целых дней рысак и кляча пробегут вместе $290\,n-6\frac{1}{4}(n^2-n)$ ли. Общий их пробег должен по условию задачи

составить 6000 ли. При $n=15$ будет недостаток в $6000-5662\frac{1}{2}=$ $=337\frac{1}{2}$ ли, при $n=16$ будет избыток в $6140-6000=140$ ли. В предположении, что в течение каждого дня скорости не меняются, мы по правилу двух ложных положений получим:

$$x=\frac{15\cdot 140+16\cdot 337\frac{1}{2}}{140+337\frac{1}{2}}=15\frac{135}{191}.$$

Следует заметить, что никакого указания ва примечание формулы суммирования арифметической прогрессии в трактате не имеется. Мы полагаем, однако, что китайские математики эпохи составления трактата уже располагали такой формулой (см. примечание 4 к книге III).

ПРИМЕЧАНИЯ К КНИГЕ VIII

1. Термином «фан-чэн» 方程 здесь обозначают алгоритм вычисления корней линейной системы уравнений, содержание которого состоит в следующем.

Запишем условие задачи системой линейных уравнений, которая прежде всего приводится к каноническому виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

Далее по существу составляется расширенная матрица системы. Это и есть «выстраивание чисел по направлению», или «фан-чэн»:

$$\begin{pmatrix} a_{n1} & \ldots & a_{21} & a_{11} \\ a_{n2} & \ldots & a_{22} & a_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nn} & & a_{2n} & a_{1n} \\ b_n & & b_2 & b_1 \end{pmatrix}.$$

Такое расположение чисел в таблицу является естественным, если учесть китайский способ письма, т. е. сверху вниз, справа налево.

Далее таблицу преобразовывают к виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{11} \\ 0 & \ldots & \bar{a}_{22} & a_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_{nn} & & \bar{a}_{2n} & a_{1n} \\ \bar{b}_n & & \bar{b}_2 & b_1 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

т. е так, чтобы все числа верхнего левого угла от главной диагонали таблицы коэффициентов a_{ik} были представлены нулями. Такое преобразование первоначальной таблицы производится путем умножения чисел одного столбца на выбранное число и последовательного вычитания из них соответственных чисел другого столбца до тех пор, пока «не исчерпается все», т. е. не получится в данном месте нуль. Операции производятся только над столбцами. Со строками никогда не оперируют, так что здесь строки и столбцы неравноправны. Происходит это потому, что существует еще достаточно прочная связь таблицы с уравнениями; сама по себе таблица не рассматривается, она применялась только при решении систем линейных уравнений.

Поясним, как получается, например, нуль во втором справа столбце. Для этого производятся следующие преобразования:

$$\begin{pmatrix} \ldots & a_{21} & a_{11} & a_{11} \\ \ldots & a_{22} & a_{11} & a_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & a_{2n} & a_{11} & a_{1n} \\ & b_2 & a_{11} & b_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ldots & a_{21} & a_{11}-a_{11} & a_{11} \\ \ldots & a_{22} & a_{11}-a_{12} & a_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & a_{2n} & a_{11}-a_{1n} & a_{1n} \\ & b_2 & a_{11}-b_1 & b_1 \end{pmatrix}.$$

После вычитания из $a_{21}a_{11}$ числа a_{11}, взятого a_{21} раз, получается таблица:

$$\begin{pmatrix} \ldots & 0 & a_{11} \\ \ldots & \bar{a}_{22} & a_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & \bar{a}_{2n} & a_{1n} \\ \ldots & \bar{b}_2 & b_1 \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{a}_{2i} = a_{2i}a_{11} - a_{1i}a_{2i}; \ \bar{b}_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Таблицу вида (*) будем называть таблицей с нулями. Эта таблица с нулями соответствует ступенчатой системе

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ \bar{a}_{22}x_2 + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n &= \bar{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots &, \\ \ldots\ldots &, \\ \bar{a}_{nn}x_n &= \bar{b}_n. \end{aligned}$$

Оперирование со столбцами, очевидно, означает исключение из второго уравнения первой неизвестной, из третьего уравнения первой и второй неизвестной и т. д., из n-го уравнения первой, второй, ..., $(n-1)$-й неизвестных.

Наконец, из таблицы с нулями получают значения неизвестных. x_n получается очень просто:

$$x_n = \frac{\bar{b}_n}{\bar{a}_{nn}}; \quad x_{n-1} = \frac{1}{\bar{a}_{nn}} \frac{\bar{b}_{n-1}\bar{a}_{nn} - a_{n-1,\,n}u_n}{\bar{a}_{n-1,\,n-1}}, \text{ где } u_n = \bar{b}_n,$$

и т. д.

$$x_i = \frac{1}{a_{nn}} \frac{\bar{b}_i\bar{a}_{nn} - \bar{a}_{i,\,i+1}u_{i+1} - \bar{a}_{i,\,i+2}u_{i+2} - \ldots - \bar{a}_{in}u_n}{\bar{a}_{ii}},$$

где $i = n-1, \ldots, 1$. При $i = n$ $x_n = \frac{u_n}{\bar{a}_{nn}}$ и $u_n = \bar{b}_n$, $u_i = x_i\bar{a}_{rn}$.

Как видно, значения неизвестных как бы определяются из ступенчатой системы в последовательности $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$.

Но здесь есть одна особенность. Так как в древнем Китае все вычисления проводились на счетной доске, этот процесс счета наложил некоторый отпечаток на характер вычислений. Так, получив x_n в виде $\frac{\bar{b}_n}{\bar{a}_{nn}}$, заметили, что $\bar{a}_{nn}$ является общим делителем у всех x_i. Поэтому находят не непосредственно значения x_i, а $u_i = x_i\bar{a}_{nn}$. Так делают, по-видимому, даже тогда, когда $\bar{b}_n$ делится нацело на $\bar{a}_{nn}$. Быть может, в этом сказалась китайская традиция получать отдельно делимое и делитель, а затем «объединять их в одно» число (см. примечание 10 к книге I). Так или иначе в терминологии чисел таблицы обнаруживается следующая двойственность. С одной стороны, терминология показывает, что x_i находятся как бы из уравнений. Например, x_n составляется из «верхнего (числа)» $\bar{a}_{nn}$ и «нижнего (числа)» $\bar{b}_n$, тогда как эти $\bar{a}_{nn}$ и $\bar{b}_n$ могли быть названы соответствующими терминами таблицы: «нижнее число левого столбца», «составляющее [количество] в левом столбце». Так же обстоит дело при вычислении u_i, когда в качестве делителя берется $\bar{a}_{ii}$, которое называется «количеством снопов урожая», т. е. в переводе на наш язык коэффициентом в рассматриваемом i-м уравнении при неизвестном x_i.

Между тем, $\overline{a}_{ii}$ можно было бы назвать числом, стоящим в i-м столбце и в i-й строке. С другой стороны, при составлении первого слагаемого $\overline{b}_i\overline{a}_{nn}$ для числителя u_i, $\overline{b}_i$ называется термином таблицы: «составляющее [количество] в i-м столбце», не говоря уже о том, что все же x_i составляются из чисел, которые вычислитель видит изображенными на счетной доске, каковы бы ни были их названия.

Во время преобразований таблицы связь ее с уравнениями все же ослабевает, поскольку имеют дело с числами, расположенными в определенном порядке и подвергающимися определенным действиям, которые требуется преобразовывать так, чтобы получилась таблица с нулями. Конечно, преобразовав таблицу, вычислитель вспоминает, что она представляет систему уравнений, из которой теперь удобно найти значения неизвестных. Первоначально формулы для x_n, x_{n-1}, $\ldots$, x_1, видимо, были получены непосредственно из системы уравнений, соответствующей таблице с нулями. Впоследствии было замечено, что числители и знаменатели неизвестных легко могут быть составлены, исходя из чисел таблицы. Отсюда — смешанная терминология для чисел таблицы.

Все это показывает, как в поисках удобного и общего алгоритма для решения систем линейных уравнений постепенно перешли от непосредственного оперирования над уравнениями к матрице системы. Ее приводили к ступенчатому виду, а затем из полученной таблицы находили неизвестные по определенным правилам.

2. Заметим, что хороший, средний, плохой урожаи в оригинале названы «шан хэ», «чжун хэ», «ся хэ», что означает верхний урожай, средний урожай, нижний урожай. По-видимому, такая терминология не случайна, она очень удобна для обозначения чисел таблицы. Действительно, если под «шан хэ» разуметь символ x, под «чжун хэ» — y, под «ся хэ» — z, то все коэффициенты при x расположены в горизонтальной строке, т. е. в верхней (шан) строке, все коэффициенты при y — в средней (чжун) строке, все коэффициенты при z в нижней (ся) строке. Кроме того, в четвертой, последней строке помещаются свободные члены уравнений, т. е. «составляющие [количества]» (ши).

Столбцы-направления (фан) обозначаются словами правый (цзо), левый (ю), средний (чжун). Таким образом, получается двухиндексная таблица из коэффициентов уравнений, каждое число которой может быть охарактеризовано названием строки и столбца, где оно находится.

3. Здесь говорится о том, как вместо первого числа среднего столбца (чжун син шан хэ), т. е. коэффициента при x во втором уравнении, получить нуль. Пояснения см. в примечании 1 к данной книге.

Заметим, что собственного изображения нуля тогда не было. Поэтому в правиле говорится о том, чтобы в результате получилось пустое место.

Отметим также, что здесь употребляется еще один вид умножения (бянь чэн), т. е. «умножь один за другим». Термин употребляется в случае умножения чисел среднего, например, столбца на первое число правого столбца. Ср. с терминами, указанными в примечании 9 к книге I и в примечании 2 к книге VII.

Относительно терминологии еще укажем, что здесь числа названы так же, как если бы мы их называли с помощью индексов таблицы. Например, «ю син шан хэ» есть число, стоящее в правом столбце в верхней строке, где помещается количество снопов хорошего урожая, т. е. в данном случае, по-нашему, a_{11}, или (чжун син чжун хэ) есть число, стоящее во второй строке для среднего урожая в среднем столбце, т. е., по-нашему, a_{22}, и т. д.

4. Здесь вычитание («исключение») обозначается иероглифом (чу), что в современной математической литературе означает деление. Кроме того, вычесть надо удвоенное делимое среднего урожая.

5 Порядок вычислений такой Дана система

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39, \\ 2x+3y+z=34, \\ x+2y+3z=26. \end{cases}$$

В китайской записи она представляется таблицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}.$$

Далее идут следующие преобразования этой таблицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 15 & 5 & 2 \\ 39 & 1 & 1 \\ 171 & 24 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & 2 \\ 38 & 1 & 1 \\ 147 & 24 & 34 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 37 & 1 & 1 \\ 123 & 24 & 34 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}.$$

Из преобразованной таблицы получаем $z=\frac{99}{36}$. Затем находим «делимое» для y:

$$\frac{36\cdot 24-99}{5}=A$$

и «делимое» для x:

$$\frac{36\cdot 39-99-2A}{3}.$$

«Делитель» для них такой же, как и для z, равный 36. Таким образом, неизвестные x, y, z определены.

6. Иероглиф «жу» имеет по смыслу значение «составить». Ср. со значением его в фразе «пи жу фа эр и» (см. примечание 10 к книге I).

7. Условие задачи в нашей записи будет таким:

$$\begin{cases} 7x-1+2y=10, \\ 8y+1+2x=10. \end{cases}$$

В правиле говорится, что система должна быть приведена к канонической форме:

$$\begin{cases} 7x+2y=11, \\ 2x+8y=9. \end{cases}$$

Далее следует применить правило «фан-чэн».

8. Решение задачи сводится к решению системы

$$\begin{cases} 2x=1-y, \\ 3y=1-z, \\ 4z=1-x, \end{cases}$$

таблица которой, соответствующая канонической системе, будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь в процессе приведения расширенной матрицы к матрице с нулями появляются отрицательные числа. Действительно, уже при втором преобразовании матрицы появляется необходимость из «ничего» вычесть 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому в правиле к этой задаче приводится правило «чжэн-фу», т. е. правило сложения и вычитания отрицательных чисел (ср. далее примечание 12). В нашей записи оно будет выглядеть следующим образом.

Первая половина правила описывает вычитание:

$$(\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b),$$
$$(\pm a)-(\mp b)=\pm(a+b),$$
$$0-(+b)=-b,$$
$$0-(-b)=+b.$$

Вторая половина правила дана для сложения:

$$(\pm a)+(\mp b)=\pm(a-b),$$
$$(\pm a)+(\pm b)=\pm(a+b),$$
$$0+(+b)=+b,$$
$$0+(-b)=-b.$$

Открытие отрицательных чисел свидетельствует о высоком уровне математики в древнем Китае. Интересно, что отрицательные числа появились в результате применения алгоритма решения систем линейных уравнений к любому случаю, когда приходилось вычитать из имеющегося количества счетных палочек на доске количество большее, или из «ничего» какое-то количество. Получающиеся при этом количества древние китайцы изображали палочками другого цвета или другой формы: положительные числа изображались палочками красного цвета, отрицательные числа — черного цвета, или первые представлялись палочками с квадратным сечением, а вторые — палочками с треугольным сечением. Для этих новых количеств они определили правила действий: вычитание и сложение. Отрицательные числа содержатся уже в первоначальной таблице, когда систему, к которой сводится решение рассматриваемой задачи, приводят к каноническому виду (см. следующее примечание). Таким образом, отрицательные числа так же, как впоследствии мнимые, были открыты благодаря распространению некоторого алгоритма на более широкий класс задач. Однако отрицательные корни еще не употреблялись. См. по этому поводу статью А. П. Юшкевича «О достижениях китайских ученых в области математики», Историко-математические исследования, вып. VIII, а также книгу Цянь Бао-цзуна «Об истоках китайской математики», 1935, стр. 30, на китайском языке, книгу D. E. Smith, I. Mikami, A History of Japanese Mathematics, 1914, стр. 56.

9. По условию задачи

$$\begin{cases} 5x-11=7y, \\ 7x-25=5y. \end{cases}$$

В канонической таблице коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -5 & -7 \\ 25 & 11 \end{pmatrix}$$

сразу появляются отрицательные числа.

10. Здесь примечательно, что после приведения системы

$$\begin{aligned} &6x-18=10y, \\ &15y-5=5x \end{aligned}$$

к канонической форме становится отрицательным первый член второго уравнения

$$\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 15 & -10 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}.$$

11. Здесь, по-видимому, ошибка. Во всех задачах правила описывают канонические таблицы. По условию задачи

$$\begin{aligned} &3x+6=10y, \\ &5y+1=2x \end{aligned}$$

т. е. таблица должна иметь вид

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -10 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Это — последняя задача на расчет количества зерна в снопах хорошего, среднего и плохого урожаев. Далее терминология задач меняется: идут самые разнообразные задачи, которые также сводятся к решению систем линейных уравнений. Кроме того, если до сих пор задачи шли в порядке усложнения, то теперь такое наращение трудности начинается сначала. Таким образом, и здесь мы видим, что первые задачи книги подобраны тщательно на одну и ту же тему, в порядке усложнения и составляют единое целое, тогда как другие задачи были добавлены впоследствии.

12. По условию задачи

$$\begin{aligned} &2x+5y=13z+1000, \\ &3x+3z=9y, \\ &6y+8z=5x-600, \end{aligned}$$

где x, y, z — стоимость буйвола, барана и свиньи, 1000 — остаток цяней от продажи 2 буйволов и 5 баранов и покупки 13 свиней, 600 есть недостаток цяней от продажи 6 баранов, 8 свиней, покупки

5 буйволов. Здесь мы видим, как истолковывались в древнекитайской математике отрицательные числа. Они означали долг, нехватку монет при покупке. Иероглиф «фу», употребляющийся для названия отрицательных чисел, имеет следующие значения: ноша, долг, недостача и т. п., тогда как «чжэн», употребляющийся для положительных чисел, обозначает правильный, основной, справедливый и т. д., т. е. положительный во всех отношениях.

13. Ср. с задачей 18 книги VII. Задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} 4x + y = 5y + x, \\ 5x + 6y = 1. \end{cases}$$

14. На этом текст правила обрывается. Эта и следующая задачи интересны тем, что в таблице появляются дробные числа. Система в этой задаче следующая:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 50, \\ y + \frac{2}{3}x = 50. \end{cases}$$

15. На этих словах текст правила обрывается. Задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} 2x + y = 10\,000 + \frac{1}{2}x, \\ x + 2y = 10\,000 - \frac{1}{2}x. \end{cases}$$

16. В данной задаче

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ 2y + z = 40, \\ 3z + x = 40. \end{cases}$$

17. Эта задача представляет исключительный интерес: ее решение сводится к системе пяти уравнений с шестью неизвестными x, y. z, u, v, a:

$$\begin{cases} 2x + y = a, \\ 3y + z = a, \\ 4z + u = a, \\ 5u + v = a, \\ 6v + x = a. \end{cases}$$

В ответе a берется так, чтобы целые положительные значения x, y, z, u, v были наименьшими. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&2\\ 0&0&0&3&1\\ 0&0&4&1&0\\ 0&5&1&0&0\\ 6&1&0&0&0\\ a&a&a&a&a \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0&0&0&0&2\\ 0&0&0&3&1\\ 0&0&4&1&0\\ 0&5&1&0&0\\ 721&1&0&0&0\\ 76a&a&a&a&a \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$v=\frac{76a}{721},\quad u=\frac{1}{721}\cdot\frac{721a-76a}{5}=\frac{129}{721}a,$$

$$z=\frac{148}{721}a,\quad y=\frac{191}{721}a,\quad x=\frac{265}{721}a,$$

так что a должно быть равно 721.

18. Задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} 2x+y+z=1,\\ 3y+z+u=1,\\ 4z+u+z=1,\\ 5u+x+y=1. \end{cases}$$

19. Системе

$$\begin{cases} 2x=1+y,\\ 3y=1+z,\\ 4z=1+x \end{cases}$$

соответствует таблица

$$\begin{pmatrix} -1&0&2\\ 0&3&-1\\ 4&-1&0\\ 1&1&1 \end{pmatrix}.$$

20. Из ответа ясно, что задача не имеет практического смысла, поскольку никогда никто не станет делить курицу на 122 части. Впрочем, все остальные задачи также не имеют непосредственной связи с практикой, хотя формулировки первых шести задач, например, взяты как будто из окружающей действительности. Многие задачи книги VIII как бы специально подобраны для того чтобы во всем разнообразии показать способ решения систем линейных уравнений.

21. Здесь

$$\begin{cases} 5x+4y+3z+2v=1496,\\ 4x+2y+6z+3v=1175,\\ 3x+y+7z+5v=958,\\ 2x+3y+5z+v=861. \end{cases}$$

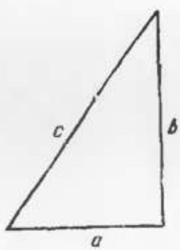
22. Задача, венчающая книгу, сводится к решению самой большой системы пяти уравнений с пятью неизвестными:

$$\begin{aligned} 9x + 7y + 3z + 2u + 5v &= 140, \\ 7x + 6y + 4z + 5u + 3v &= 128, \\ 3x + 5y + 7z + 6u + 4v &= 116, \\ 2x + 5y + 3z + 9u + 4v &= 112, \\ x + 3y + 2z + 8u + 5v &= 95. \end{aligned}$$

Искомые величины в данном случае подобраны в виде целых, небольших по величине чисел.

ПРИМЕЧАНИЯ К КНИГЕ IX

1. В древности и в настоящее время иероглифы 勾 (гоу), 股 (гу) обозначают катеты прямоугольного треугольника: горизонтальный и притом меньший, вертикальный и больший (черт. 14). «Гоу» в буквальном переводе значит крюк, «гу»—бедро, связка и т. п. Гипотенуза называется 弦 (сянь), что значит тетива, т. е. стягивающая концы двух катетов. В настоящее время теорему о равенстве суммы квадратов катетов квадрату гипотенузы в китайском языке называют «гоу гу сянь дин ли», буквально «закон о катетах и гипотенузе». Название книги «гоу гу» на древнем языке означает то же самое: зависимость между катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника.



Черт. 14.

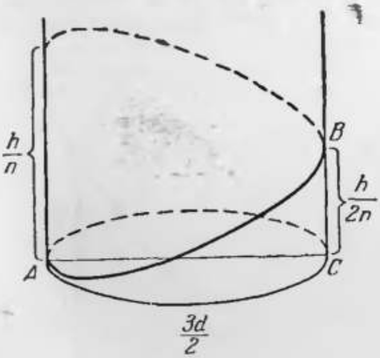
Математическое содержание книги IX состоит в употреблении теоремы Пифагора или свойств подобных прямоугольных треугольников к решению самых разнообразных геометрических задач.

Теорема Пифагора, как и у других народов, была известна в древнем Китае очень давно, задолго до составления рассматриваемого трактата. Так, летописи упоминают, что в эпоху правления Юй династии Ся (2200 лет до н. э.) теорема применялась для случая, когда стороны треугольника равны 3, 4, 5. В «Математическом трактате о чжоу-би» («Чжоу-би суань цзин»), который скорее является астрономическим (чжоу-би — шест для измерения солнечной тени) и о времени составления которого известно лишь, что он предшествовал «Математике в девяти книгах», можно прочитать, как впервые теорема для такого частного случая была высказана Шан Гао, жившим в XII веке до н. э. Во второй части этого трактата сообщается, что Чэнь-цзы (VII — VI вв. до н. э.) знал и применял теорему в общем виде. Более подробно об истории теоремы Пифагора в древнем Китае см. статью Сюй Чун-фана в журнале «Кэсюэ дачжун», 1953, № 9.

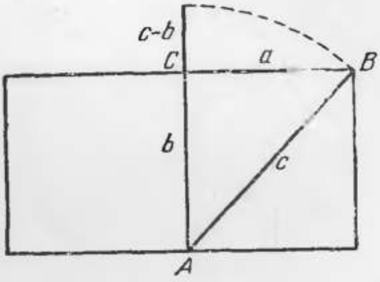
Следующее несколько далее правило «Гоу-гу» выражает теорему Пифагора в общем виде. Если a и b — катеты, c — гипотенуза, то правило словесно описывает следующие формулы:

$$c=\sqrt{aa+bb},\quad a=\sqrt{cc-bb},\quad b=\sqrt{cc-aa}.$$

2. Очевидно, здесь ошибка, должно быть 2 чи 4 цуня.



Черт. 15.



Черт. 16.

3. Здесь неявно используется свойство: угол, опирающийся на диаметр, прямой.

4. Здесь вычисляется длина винтовой линии по формуле

$$e=\sqrt{(Cn)^2+h^2},$$

где h — высота цилиндра, C — длина окружности его основания, n — количество витков.

Решение задачи можно получить, если рассмотреть цилиндрический треугольник ABC (черт. 15), у которого

$$BC=\frac{h}{2n},\ AC=\frac{C}{2},$$

AB — гипотенуза, которую надо вычислить. Тогда длина всей пуэрарии определится, если этот треугольник увеличить в $2n$ раз. Один катет будет равным

$$\frac{h}{2n}\cdot 2n=h,$$

другой будет

$$\frac{C}{2}\cdot 2n=Cn.$$

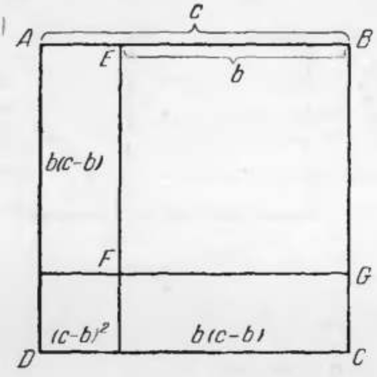
5. В прямоугольном треугольнике ABC (черт. 16), где известны a, $c-b$, надо определить b и c.

Правило к задаче выражает следующие формулы:

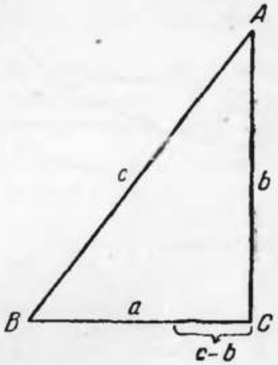
$$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)};$$

$$c=b+(c-b)=\frac{a^2+(c-b)^2}{2(c-b)}.$$

Как были получены эти формулы, неизвестно. Лю Хуэй в своих комментариях (см. его комментарии к данной задаче в китайском тексте оригинала, а также статью Сюй Чунь-фана в журнале «Кэсюэ дачжун», 1953, № 10) предполагает, что здесь пользовались следующим геометрическим преобразованием (черт. 17). Если $AB=c$ и $BE=b$, то $a^2=c^2-b^2=$ пл. $AEFGCD=(c-b)^2+2b(c-b)$. Отсюда



Черт. 17.



Черт. 18.

находится b. Но, может быть, древние китайцы получили решение для такого рода задач несколько иным путем. О другой реконструкции решения см. примечание 16 к данной книге.

Интересно, что такая же задача встречается у индийского математика XII века Бхаскары.

6. То есть раздели. Об этом термине см. примечание 10 к книге I. В следующих задачах данной книги термин «объедини» употребляется в таком же смысле.

7. В прямоугольном треугольнике ABC (черт. 18), где $a^2+b^2=c^2$, заданы a и $(c-b)$. Здесь c определяется по формуле

$$c=\frac{\frac{a^2}{c-b}+(c-b)}{2}.$$

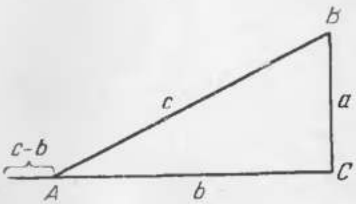
Однако порядок действий здесь иной, чем в задаче 6.

8. Задача аналогична предыдущей (черт. 19): по зависимости $a^2+b^2=c^2$ и заданным a и $(c-b)$ находится

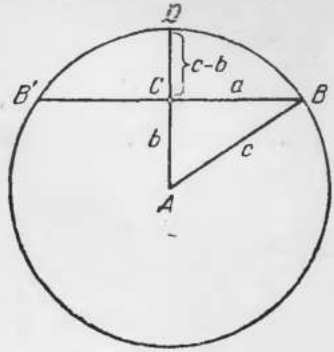
$$c=\frac{\frac{a^2}{c-b}+(c-b)}{2}.$$

9. Бревно в горизонтальном положении спиливается по линии BB' (черт. 20). Снова по $a^2+b^2=c^2$ и заданным $2a$ и «глубине» $(c-b)$ находится

$$2c=\frac{a^2}{c-b}+(c-b).$$



Черт. 19.

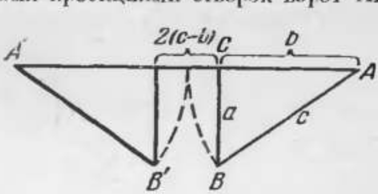


Черт. 20.

10. Предполагается, что обе половинки ворот открыты на один и тот же угол, вследствие чего образуется «несовпадение», равное расстоянию между прямоугольными проекциями створок ворот AB и $A'B'$ на AA' (черт. 21). Термина для проекции нет.

Так же как в предыдущих задачах 5—9, в $\triangle ABC$, где $a^2+b^2=c^2$, по заданным a и $2(c-b)$ определяется

$$2c=\frac{a^2}{c-b}+(c-b).$$



Черт. 21.

11. Имеется в виду диагональ прямоугольника.

12. Здесь впервые в трактате проводится решение полного квадратного уравнения.

Пусть искомые величины будут x и y. Задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} c^2=x^2+y^2, \\ k=y-x \end{cases}$$

или квадратного уравнения $2x^2+2kx+k^2-c^2=0$. Правило выражает искомые величины следующим образом:

$$x=\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2}}-\frac{k}{2},\quad y=\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2}}+\frac{k}{2},$$

где c^2 называется «ши».

Решение квадратного уравнения, по-видимому, проводилось так же, как в Древнем Вавилоне.

Пусть

$$x=z-\frac{k}{2},$$
$$y=z+\frac{k}{2}.$$

Тогда

$$x^2+y^2=2z^2+2\left(\frac{k}{2}\right)^2=c^2.$$

Отсюда

$$z=\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2}}$$

и x, y вычисляются по вышеуказанным формулам.

13. Соответствующее китайское слово буквально значит «косое» (се). Ср. с описанием диагонали в предыдущей задаче, как наибольшего расстояния между углами. Для диагонали еще не было специального единого термина.

14. Решение задачи, по всей вероятности, проводилось следующим образом. Если x — ширина, y — высота, z — диагональ двери, то

$$\begin{cases} z=c, \\ x=c-a, \\ y=c-b. \end{cases}$$

Тогда

$$z^2=(z-a)^2+(z-b)^2.$$

Величина z могла быть найдена либо из квадратного уравнения, либо из выражения

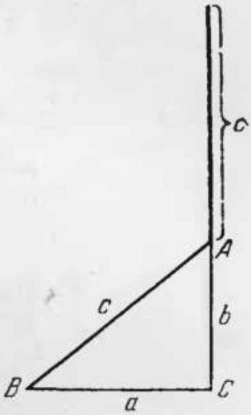
$$[z-(a+b)]^2=2ab.$$

Отсюда

$$z=\sqrt{2ab}+(a+b),$$
$$x=\sqrt{2ab}+b,$$
$$y=\sqrt{2ab}+a.$$

15. В этой задаче (черт. 22), встречающейся также у индийского математика VII века Брахмагупты, находится b, если известно, что $a^2+b^2=c^2$ и заданы a и $(b+c)$. Ср. с задачами 5—10. Искомая величина определяется по формуле

$$b=\frac{(b+c)-\dfrac{a^2}{b+c}}{2}.$$



Черт. 22.

По аналогии с комментариями Лю Хуэя к задаче 5 здесь также можно провести геометрическую реконструкцию решения (черт. 23):

$$a^2=c^2-b^2=\text{пл. } KBNMLF=$$
$$=\text{пл. } ABED=(b+c)^2-(b+c)\cdot 2b.$$

Тогда

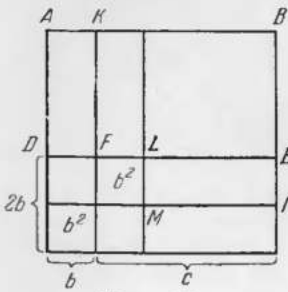
$$b=\frac{(b+c)^2-a^2}{2(b+c)}. \qquad (*)$$

Однако последовательность операций, данная в правиле, не совпадает с той, которую дает формула (*). Поэтому нам кажется более вероятной следующая реконструкция решения задач 5—10, 13.

По условию задач

$$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b).$$

Если известны a и $(c-b)$, то



Чрет. 23.

$$c+b=\frac{a^2}{c-b}, \quad c=\frac{a^2}{c-b}-c+(c-b),$$

$$c=\frac{\dfrac{a^2}{c-b}+(c-b)}{2}.$$

Если же известны a и $(c+b)$, то

$$c-b=\frac{a^2}{c+b},$$

$$b=c-\frac{a^2}{c+b}=(c+b)-b-\frac{a^2}{c+b},$$

$$b=\frac{(b+c)-\dfrac{a^2}{b+c}}{2}.$$

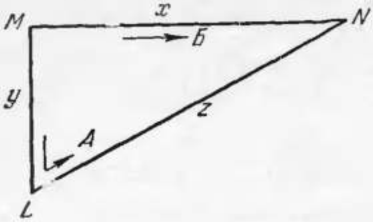
16. Пусть A и $Б$ выходят из точки M (черт. 24) и, пройдя соответственно $ML+LN$ и MN, встречаются в точке N. $\triangle MNL$ — прямоугольный, надо найти MN и LN. Пусть $MN=x$, $LN=z$, $ML=y=10$ бу. Тогда $x^2+10^2=z^2$ и $\dfrac{x}{z+10}=\dfrac{3}{7}$. Отсюда мы

бы нашли

$$z=\frac{7}{3}x-10, \qquad x^2+10^2=\left(\frac{7}{3}x-10\right)^2$$

или $\quad 40x^2-10\cdot2\cdot7\cdot3x=0, \qquad x=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}, \quad z=\frac{29}{2}=14\frac{1}{2}.$

Однако в трактате искомые величины получаются иначе. Сначала составляются «нормы ходьбы» (син люй), которым пропорциональны стороны треугольника: $21:20:29=MN:ML:LN$,



Черт. 24.

а далее определяются длины этих сторон, поскольку одна из них ML известна.

Числа 21, 20, 29 находятся следующим образом:

«норма ходьбы по косому направлению» $\frac{7^2+3^2}{2}=29$,

«норма ходьбы на юг» $7^2-\left(\frac{7^2+3^2}{2}\right)=20$,

«норма ходьбы на восток» $7\cdot3=21$.

Если положить

$$z=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}, \quad y=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}, \quad x=\alpha\beta,$$

то, очевидно, при всяких α и β выполняется: $z^2=x^2+y^2$.

Здесь x, y, z — пифагоровы числа, которые дают все рациональные значения сторон прямоугольного треугольника.

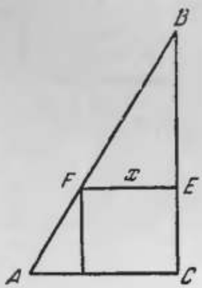
В задаче $\alpha=7$, $\beta=3$, тогда числа 29, 20, 21 составляются по формулам для пифагоровых чисел:

$$z=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=29, \quad y=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}=20, \quad x=\alpha\beta=21.$$

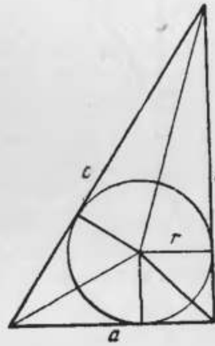
Действительно, $\frac{x}{y+z}=\frac{3}{7}$, или, подставив значения x, y, z, получаем $\frac{\alpha\beta}{\alpha^2}=\frac{3}{7}$. Отсюда наименьшие целые $\alpha=7$, $\beta=3$

Таким образом, древние китайские математики знали формулы для пифагоровых чисел и ими владели.

Частные правила составления чисел для сторон прямоугольного треугольника a, $\frac{a^2-1}{2}$, $\frac{a^2+1}{2}$ для a нечетного, a, $\left(\frac{a}{2}\right)^2-1$, $\left(\frac{a}{2}\right)^2+1$ для a четного обычно приписывают соответственно пифагорейцам и Платону. Общая формула для целых решений уравнения $x^2+y^2=z^2$, $x=amn$, $y=a\frac{m^2-n^2}{2}$, $z=a\frac{m^2+n^2}{2}$, вероятно, была известна древним грекам, так как она непосредственно следует из предложения 6 книги II «Начал» Евклида (см. Г. Г. Цейтен «История математики в древние и средние века», 1932, стр. 37, 40—41).



Черт. 25.



Черт. 26.

17. Решение задачи основано, вероятно, на пропорциональности сторон подобных прямоугольных треугольников ABC и BEF (черт. 25): если $BC=b$, $AC=a$, $FE=x$, то

$$\frac{x}{b-x}=\frac{a}{b}, \quad x=\frac{ab}{a+b}.$$

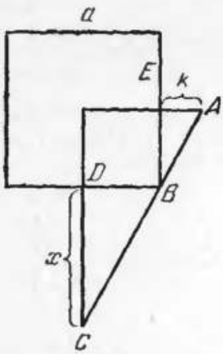
18. Задача, по-видимому, решалась следующим образом. Площадь треугольника разбивается на три составные части (черт. 26):

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rc.$$

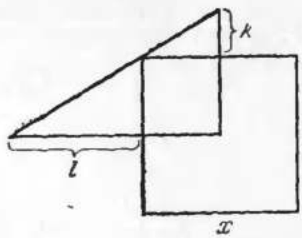
Отсюда $2r=\frac{2ab}{a+b+c}$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

19. В этой и следующих задачах под словом «город» подразумевается огороженное место в виде квадрата или прямоугольника.

20. То есть $x=\dfrac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}{k}$. Очевидно, x получено из соотношения $\dfrac{k}{\dfrac{a}{2}}=\dfrac{\dfrac{a}{2}}{x}$, вытекающего из подобия треугольников EAB и DBC (черт. 27).



Черт. 27.



Черт. 28.

21. Эта задача подобна предыдущей с той лишь разницей, что город является прямоугольником со сторонами a и b. Если x и k те же величины, что и в предыдущей задаче, то искомая величина равна $x=\dfrac{\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}}{k}$.

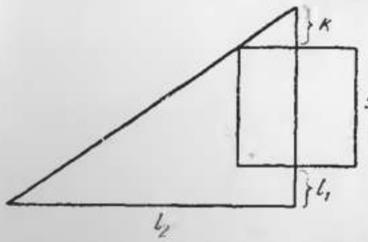
22. Искомая величина находится из соотношения

$$k:x/2=x/2:l,$$

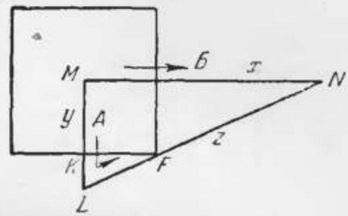
вытекающего из свойства подобных треугольников (черт. 28); kl есть «делимое», т. е. подкоренное выражение. Как извлекается корень, см. примечание 8 к книге IV.

23. Задача сводится к решению квадратного уравнения $x^2+(k+l_1)x-2kl_2=0$, где буквы обозначают размеры величин, указанных на черт. 29. Квадратное уравнение здесь решается не так, как в задачах 11—12 (см. примечания 13, 15 к данной книге), а по способу Горнера (см. конец примечания 8 к книге IV). Хотя самого решения в тексте оригинала не содержится, о нем свидетельствуют термины, употребляемые в правиле задачи. Свободный член уравнения $2kl_2$ называется «делимым», коэффициент $(k+l_1)$ при 1-й степени x «дополненным двигателем» (цун фа), т. е. здесь употребляется терминология, применяемая при извлечении квадратного корня (см. примечание 8 к книге IV), когда ищутся вторая и следующие цифры корня.

Данная задача является примером того, как процесс извлечения квадратного корня, т. е. решения уравнения $x^2 - N = 0$, был обобщен на случай решения полного квадратного уравнения.

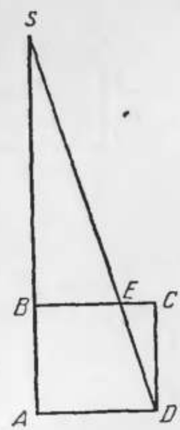


Черт. 29.



Черт. 30.

Такое обобщение извлечения корней на решение уравнений высших степеней привело в дальнейшем к созданию в древней математике Китая численного метода решения уравнений высших степеней, подобного методу Горнера. В VIII веке для уравнений третьей степени это было сделано Ван Сяо-туном, а в XIII веке в общем виде способ был разработан Цинь Цзю-шао. Подробно об этом см. статью А. П. Юшкевича «О достижениях китайских ученых в области математики» (Историко-математические исследования, вып. VIII), а также статью Ван Лина и Дж. Нидхэма, указанную в примечании 21 к книге I.



Черт. 31.

24. Задача аналогична 14. См. примечание 16 к данной книге. Сохраним все обозначения примечания 16. Требуется определить MN, $ML + LN$ (черт. 30). Известна $KF = 5$ ли. Напомним, что старинный 1 ли $= 300$ бу. Здесь также находятся сначала пифагоровы числа x, y, z, которым пропорциональны искомые стороны треугольника MNL, причем здесь $\alpha = 5$, $\beta = 3$.

Тогда «норма ходьбы по косине» $z = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = 17$, «норма ходьбы на юг» $y = \alpha^2 - z = 8$, «норма ходьбы на восток» $x = \alpha\beta = 15$.

Теперь из

$$\frac{KL}{KF} = \frac{ML}{MN} = \frac{y}{x}$$

находим:

$$KL = \frac{KF \cdot y}{x}, \quad LN = \frac{ML \cdot z}{y}, \quad MN = \frac{ML \cdot x}{y}.$$

25. Решение этой и следующих задач основано на свойствах подобных прямоугольных треугольников (черт. 31). Так, из рассмотрения подобных треугольников SAD и ECD находится искомая

$$AS = \frac{CD \cdot AD}{EC}.$$

В задаче подразумевается, что в момент наблюдения человек переходит из точки A в точку D.

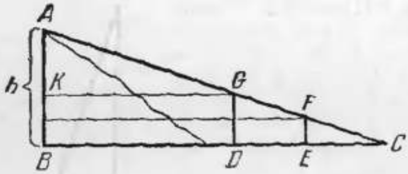
26. Здесь заданы величины GD, FE, BD, DE (черт. 32). Искомая величина h находится из соотношения

$$\frac{h - GD}{BD} = \frac{GD - FE}{DE}.$$

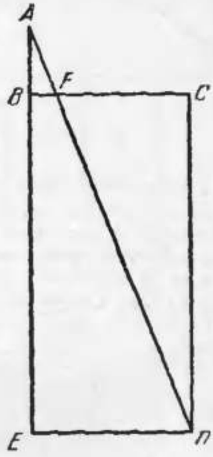
27. Искомая величина определяется по формуле

$$DC = \frac{AB\,(BC - BF)}{BF},$$

получающейся из рассмотрения подобных треугольников AFB и FCD (черт. 33).



Черт. 32.



Черт. 33.

Задачи 22—24 являются задачами практической геометрии, которой в новое время интенсивно занимались многие европейские ученые.

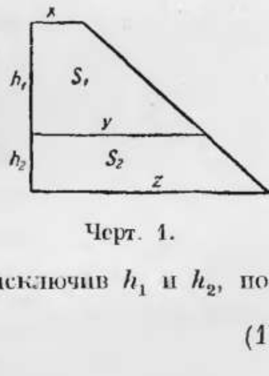
Комментатор «Математики в девяти книгах» Лю Хуэй написал к этим задачам приложение, которое впоследствии стало самостоятельным произведением, носящим название «Математики морского острова». Оно содержит задачи, подобные рассмотренным.

СТАТЬИ РАЗЛИЧНОГО СОДЕРЖАНИЯ

ВАВИЛОНСКИЕ ЧИСЛА

А. А. Вайман

Рассмотрим прямоугольную трапецию, разделенную на две равновеликие полосы. Пусть x и z — основания трапеции, y — делящая линия, h_1 и h_2 — отрезки высоты и S_1, S_2 $(S_1 = S_2)$ — площади полос (черт. 1).



Черт. 1.

В такой трапеции имеем:

$$(x+y)\,h_1 = (y+z)\,h_2,$$

$$\frac{y-x}{z-y} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Решив совместно оба уравнения и исключив h_1 и h_2, получим:

$$x^2 + z^2 = 2y^2. \tag{1}$$

Из последнего уравнения следует

$$y = \sqrt{\frac{x^2+z^2}{2}}. \tag{1'}$$

Формула (1′) показывает, что при рациональных значениях x и z величина делящей линии не обязательно будет рациональной. Чтобы получить рациональное значение y, для x и z надо подобрать подходящие числа. Такой подбор чисел может быть осуществлен путем следующих рассуждений.

Представим уравнение (1) в виде

$$(z-x)^2 + (z+x)^2 = (2y)^2$$

и возьмем в качестве $z-x$, $z+x$ и $2y$ общие выражения для пифагоровых чисел:

$$z-x=2k\ (q^2-p^2),$$
$$z+x=2k\ (2qp),$$
$$2y=2k\ (q^2+p^2).$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} x&=k\,[(q+p)^2-2q^2],\\ y&=k\,(q^2+p^2),\\ z&=k\,[(q+p)^2-2p^2], \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где k — любое рациональное число, а p и q — любые целые числа, удовлетворяющие неравенствам $q>p>0$ и $(q+p)^2>2q^2$. При этом

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{y-x}{z-y}=\frac{q}{p}.$$

Так, в частности, при $k=1$ и $q=p+1$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} x&=2p^2-1,\\ y&=p^2+(p+1)^2,\\ z&=2\,(p+1)^2-1. \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Соответственно

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{p+1}{p}.$$

Взяв в качестве p последовательные значения натурального ряда чисел 1, 2, 3, ..., получим для оснований трапеций и делящих линий нижеследующие тройки: 1, 5, 7; 7, 13, 17; 17, 25, 31 и т. д. Все эти тройки могут быть сведены в ряд

$$\begin{array}{rcccccccccccl} B_n= & 1 & 5 & 7 & 13 & 17 & 25 & 31 & 41 & 49 & 61 & 71 & \ldots, \\ n= & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \ldots, \end{array}$$

в котором B с четными номерами выражает делящие линии, а B с нечетными номерами — основания трапеций. Заметим, что ряд B_n может быть образован при помощи таблицы:

H_n	4	2	6	4	8	6	10	8	12	10...	
B_n	1	5	7	13	17	25	31	41	49	61	71 ...
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ...,

(3)

в которой каждое число ряда B_n получается из предшествующего ему числа путем добавления к последнему соответствующего числа ряда H_n ($B_{n+1} = B_n + H_n$, $B_1 = 1$), а ряд H_n состоит из двух арифметических прогрессий. При этом имеет место отношение

$$H_1 : H_2 : H_3 : H_4 : H_5 : H_6 \ldots = 2:1:3:2:4:3 \ldots$$

Понятно, что все указанные выше соотношения справедливы не только для прямоугольной, но для любой трапеции.

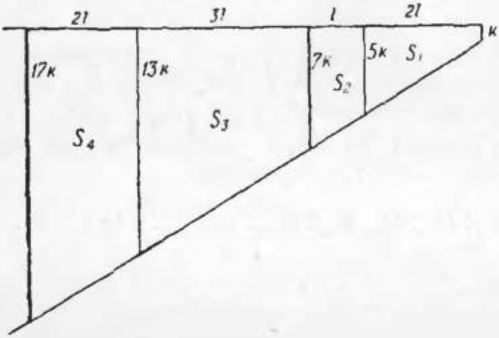
Ряд B_n интересен для нас потому, что определенный участок его, $B_1 - B_{11}$, засвидетельствован несколькими клинописными текстами. Числа ряда B_n мы поэтому в дальнейшем будем называть вавилонскими числами[1]). Вавилоняне использовали эти числа для составления задач по делению трапеции на параллельные, попарно равновеликие полосы (см. черт. 2, где k и l — любые рациональные числа и $S_1 = S_2$, $S_3 = S_4$ и т. д.).

Так, в одном из клинописных текстов Государственного Эрмитажа (инв. № 15189) приведены десять трапе-

---

[1]) «Вавилонскими» мы называем эти числа по аналогии с «пифагоровыми», с которыми они, как выше было показано, непосредственно связаны. Такое название представляется тем более оправданным, что у других древних народов: египтян, греков, арабов и т. д., задачи по рациональному делению трапеции на попарно равновеликие полосы и связанный с ними ряд чисел B_n, насколько мне известно, не засвидетельствованы.

ций, каждая из которых разделена на четыре параллельные, попарно равновеликие полосы. Деление трапеции осуществлялось на основе начальной части ряда B_n, а именно $B_1 - B_5$. Особенно важно, что соответствующие вавилонские числа 1, 5, 7, 13, 17 выписаны специально на верхнем крае таблички. Там же отмечены числа, выражающие отношение отрезков высоты: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, 1 (т. е. 2 : 1 : 3 : 2) [1]). В другом клинописном тексте, храня-



Черт. 2.

щемся в Луврском музее (AO 17264) [2]), содержится задача по разделению непрямоугольной трапеции на шесть параллельных попарно равновеликих полос. При составлении задачи использованы вавилонские числа $B_5 - B_{11}$. Определение делящих линий произведено по формуле (1').

Как же были найдены в древности вавилонские числа? Вряд ли, конечно, тем способом, который был применен нами выше. Более вероятен другой способ, косвенные

---

[1]) А. А. Вайман, Эрмитажная клинописная математическая табличка № 015189, Эпиграфика Востока, Х. М.-Л., 1955, стр. 73—83. Табличка датируется первой четвертью II тысячелетия до н. э.

[2]) См. публикацию таблички Тюро-Данженом в Revue d'Assyrologie et d'Archeologie Orientale, XXI, 1934, стр. 61 и сл. См. также O. Neugebauer, Mathematische Keilschrifttexte, Kopenhagen, Berlin, 1935—1937, ч. 1, стр. 126 и след. Табличка датируется второй четвертью II тысячелетия до н. э.

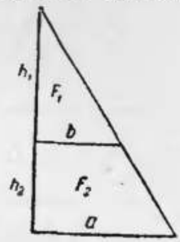
сведения о котором содержатся в клинописной табличке VAT 8512.

В этой табличке решается задача на прямоугольный треугольник, разделенный линией, параллельной одному из катетов, на две части (черт. 3).

Даны:

$$a = 30,$$
$$F_2 - F_1 = F = 420,$$
$$h_1 - h_2 = h = 20.$$

Требуется найти b, h_1, h_2, F_1, F_2 [1]).



Черт. 3.

Непосредственное отношение к нашей теме имеет только первая часть задачи, посвященная вычислению величины b. Условие задачи позволяет составить систему трех уравнений:

$$\frac{1}{2}(a+b)h_2 - \frac{1}{2}bh_1 = F,$$
$$h_1 - h_2 = h,$$
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{b}{a-b}.$$

Исключив из этой системы неизвестные величины h_1 и h_2, получим квадратное уравнение относительно b

$$b^2 + \frac{2F}{h}b - \left(\frac{aF}{h} + \frac{1}{2}a^2\right) = 0,$$

решение которого дает формулу

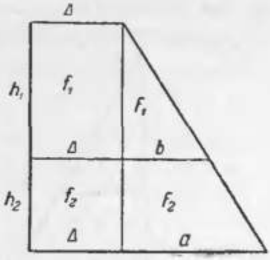
$$b = \sqrt{\left(\frac{F}{h}\right)^2 + \frac{aF}{h} + \frac{1}{2}a^2} - \frac{F}{h} = 18.$$

Однако, выкладки текста отвечают другой формуле:

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{F}{h}\right)^2 + \left(\frac{F}{h} + a\right)^2\right]} - \frac{F}{h} = 18,$$

[1]) O. Neugebauer, цит. соч., ч. 1, стр. 341 и след.

отличающейся от предшествующей по виду[1]). Из этого следует, что вавилонский математик решал задачу не так, как мы, а несколько иначе[2]). Ниже предлагается реконструкция вавилонского решения, учитывающая специфику последней формулы.



Черт. 4.

Дополним приведенный выше треугольник к прямоугольной трапеции (черт. 4), причем выберем Δ таким образом, чтобы линия $b+\Delta$ делила трапецию на две равновеликие части.

Такое значение Δ можно получить при условии, что разность площадей прямоугольников

$$f_1 - f_2 = F_2 - F_1,$$

или

$$\Delta h_1 - \Delta h_2 = F_2 - F_1.$$

Отсюда

$$\Delta = \frac{F_2 - F_1}{h_1 - h_2} = \frac{F}{h} = 21.$$

Так как Δ и $a+\Delta$ являются основаниями трапеции, а $b+\Delta$ — линией, которая делит последнюю на две равновеликие полосы, то согласно формуле (1′)[3])

$$b+\Delta = \sqrt{\frac{1}{2}[\Delta^2 + (a+\Delta)^2]} = 39.$$

---

[1]) О. Нейгебауер и вслед за ним М. Я. Выгодский полагали, что имело место преобразование первой формулы во вторую. См. О. Нейгебауер, Лекции по истории античных математических наук, т. 1, перевод с немецкого, предисловие и примечания С. Я. Лурье, М.—Л., 1937, стр. 207; М. Я. Выгодский, Арифметика и алгебра в древнем мире, М.—Л., 1941, стр. 134.

[2]) Такого же мнения был и С. Я. Лурье, однако дать конкретное объяснение вавилонского решения задачи и происхождения формулы текста ему не удалось. См. примечание С. Я. Лурье на стр. 207 указанного выше сочинения О. Нейгебауера.

[3]) Формула (1) засвидетельствована у вавилонян упомянутой выше клинописной табличкой АО 17264.

Отсюда

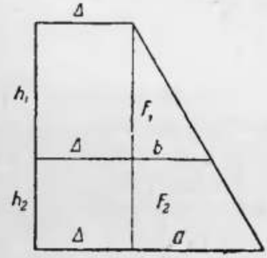
$$b=\sqrt{\frac{1}{2}[\Delta^2+(a+\Delta)^2]}-\Delta$$

или

$$b=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{F}{h}\right)^2+\left(a+\frac{F}{h}\right)^2\right]}-\frac{F}{h}=18,$$

что и является решением текста[1]).

Итак, мы видим, что в процессе решения задачи была построена трапеция, в которой основания и линия, разделяющая ее на две равновеликие части, рациональны. В этой трапеции мы имеем: $\Delta=21$, $b+\Delta=39$, $a+\Delta=51$. Разделив все числа на три, получим вавилонскую тройку 7, 13, 17. Но указанным в задаче способом можно было получить и другие вавилонские тройки и, следовательно, любой интервал ряда B_n.



Черт. 5.

Действительно, рассмотрим прямоугольную трапецию, разделенную линией, параллельной основаниям, на две равновеликие части (черт. 5.) В такой трапеции имеют место соотношения:

$$h_1>h_2,$$

$$\Delta=\frac{F_2-F_1}{h_1-h_2}=\frac{\frac{1}{2}[(a+b)h_2-bh_1]}{h_1-h_2}.$$

Дадим h_1 и h_2 последовательный ряд значений, удовлетворяющих равенству $h_1-h_2=1$. Руководствуясь затем соотношением $\frac{h_1+h_2}{h_1}=\frac{a}{b}$, выберем подходящие и наиболее

[1]) После того как настоящая статья была сдана в печать, И. Н. Веселовский любезно сообщил мне, что аналогичная реконструкция вавилонского решения была уже дана Huber'ом (см. Isis, 1955, 46, стр. 104—106).

простые значения для a и b. Наконец, имея уже заданные h_1, h_2, a и b, вычислим соответствующие Δ, $b+\Delta$ и $a+\Delta$. В результате указанных действий получим:

1) $h_1=2,\ a=3,\ h_2=1,\ b=2$: $\quad \Delta=\frac{1}{2}(5-4)=\frac{1}{2},\quad b+\Delta=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},\quad a+\Delta=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$;

2) $h_1=3,\ a=5,\ h_2=2,\ b=3$: $\quad \Delta=\frac{7}{2},\quad b+\Delta=\frac{13}{2},\quad a+\Delta=\frac{17}{2}$;

3) $h_1=4,\ a=7,\ h_2=3,\ b=4$: $\quad \Delta=\frac{17}{2},\quad b+\Delta=\frac{25}{2},\quad a+\Delta=\frac{31}{2}$ и т. д.

Освободившись от знаменателей, т. е. умножив все найденные числа на 2, получим вавилонские тройки: 1, 5, 7; 7, 13, 17; 17, 25, 31, . . . , которые и составляют ряд $B_n = 1, 5, 7, 13, 17, \ldots$ При этом отрезки соответствующих высот образуют другой ряд чисел, а именно: 2, 1, 3, 2, 4, 3, . . .

Описанный нами способ нахождения вавилонских троек и начальной части ряда B_n и был применен, очевидно, математиками древней Месопотамии (начало II тысячелетия до н. э.).

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАКАХ И ТЕРМИНАХ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В АРХЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАМЯТНИКАХ ДРЕВНЕЙ РУСИ [1])

Л. Е. Майстров

Древняя Русь была в свое время одним из передовых государств с высокой и своеобразной культурой. Такие города, как Киев, Новгород и другие, не уступали городам Византии и Западной Европы. По своему устройству и управлению эти города также напоминали западноевропейские. В экономическом развитии древняя Русь шла на одном уровне с передовыми странами Западной Европы, а в отдельных производствах даже опережала эти страны. Но нашествие монголов в XIII веке привело к разгрому и расхищению русских культурных ценностей, к задержке в развитии русской культуры на полтора столетия. Новый экономический подъем Русь начинает переживать с середины XIV века [2]).

Исследование культуры древней Руси наталкивается на большие трудности: бедность или полное отсутствие письменных источников по тем или иным вопросам, недостаточное до сих пор развитие археологических раскопок, которые во многих случаях могут заменить отсутст-

---

[1]) Автор благодарит Д. К. Щербачева за выполнение фотографий и рисунков.

[2]) По исследованию экономики и культуры древней Руси имеются ценные работы, например: Б. А. Рыбаков, Ремесло древней Руси, 1948; Т. И. Райнов, Наука в России XI—XVII веков, М.—Л., 1940; Сборник статей «История культуры древней Руси», М.—Л., т. I, 1948, т. II, 1951; М. Н. Тихомиров, Древнерусские города, М., 1956 и др.

вующие письменные источники. Эти трудности особенно сказываются при изучении математических знаний в древней Руси. Мы почти не располагаем здесь дописьменными источниками. Известно, например, что в IV—V веках возникает производство на гончарном круге, что говорит о знании некоторых свойств круга, оси вращения и т. п. Несколько позже, к VI веку, появляется токарный станок.

Рис. 1.

Различные древние орнаменты позволяют утверждать, что циркуль был известен в VI—VII веках. В Государственном Историческом музее в Москве имеется дубовая доска, на которой отчетливо видна нанесенная циркулем окружность; доска эта найдена в Новгороде в слоях XII—XIV веков (рис. 1). К этому же времени относится найденный в Новгороде подъемный блок из дуба (хранится в Государственном Историческом музее). В самых ранних находках наблюдается симметричность.

Древнейшие письменные памятники относятся к концу X века. Это—так называемые «Киевские листки» и надпись некоего Самуила, относящаяся к 993 г. Надпись Самуила открыта на каменной плите в селении Герман, невдалеке от озера Преспы. Это надгробная надпись отцу, матери и брату Самуила. В конце надписи имеются слова: «в лето от сотворения мира ѕ҃·:ф҃а҃· », что означает 6501, т. е. год от сотворения мира, который соответствует 993 г. нашего летосчисления [1]). Эта надпись—первая точно датированная известная нам запись числа в славянской нумерации.

Последующие дошедшие до нас письменные памятники XI—XV веков в основном состоят из церковных книг, летописей, а также государственных и частных актов, в которых фиксировались договорные отношения князей и торговых людей, сделки по купле и продаже, дела о наследстве, имущественные споры и т. п. Древнейшая русская рукопись—Остромирово евангелие—относится к 1056—1057 гг. Следующая по времени рукопись—Изборник Святослава Ярославовича—относится к 1073 г.

Во всех этих письменных источниках в тех случаях, когда необходимо, употребляются числа и простейшие арифметические сведения.

Например, монастырский устав Федора Студита, принятый в Киеве в XI веке, устанавливает следующие наказания за порчу сапожного инструмента: «О усмошьвци: аще небережением переломит шило или ино что, им же усние режут, да поклониться 30 и 50 или 100» [2]).

Мы здесь упомянем также «Русскую Правду», отдельные статьи которой неоднократно привлекали внимание историков математики, и Кирика Новгородского с его «Наставлением» [3]).

Но все эти сочинения и документы составлялись немногими авторами, а затем переписывались специально подготовленными писцами. Отметим попутно, что далеко не все писцы принадлежали к духовенству, как это часто

---

[1]) Пропись текста дана в книге: С. Д. Никифоров, Старославянский язык, 2-е изд., М., 1955, стр. 99. В конце статьи на стр. 616 приведена табличка славянской нумерации.

[2]) Цитировано по книге: Б. А. Рыбаков, Ремесло древней Руси, 1948. стр. 402.

[3]) «Наставление, как человеку познать счисление лет», а также статью В. П. Зубова о Кирике Новгородце см. в Историко-математических исследованиях, вып. VI, 1953, стр. 175—212.

думают. От XI—XII веков дошло до нас 25 подписей писцов, из них лишь семь принадлежат к духовным лицам; остальные 18 были писцы-ремесленники.

Возникают вопросы: какое распространение имела грамотность в древней Руси среди населения? Какое распространение имели математические сведения? Как часто и в каком виде встречаются в исторических источниках математические знаки и термины?

Это, конечно, только первые вопросы, на которые необходимо ответить при изучении истории развития математики в древней Руси. Освещению этих самых первых вопросов и посвящена настоящая статья.

Прежде всего следует обратить внимание на записи, встречающиеся на отдельных предметах.

Большой интерес представляет уже неоднократно описанный в литературе Тмутараканский камень. Тмутаракань играла большую роль в древней Руси. Она была крупнейшим торговым городом и гаванью, выросшим невдалеке от древней греческой торговой колонии Фанагории. Пролив между Тмутараканью и Керчью был местом оживленной переправы. Князь Глеб Святославович в 1068 г. зимой по льду измерил ширину пролива. Запись об этом была высечена на лежавшей поблизости от переправы мраморной плите из развалин какого-то античного здания «в лето 6576 индикта 6 Глеб князь мерил море по льду от Тъмутораканя до Кърчева 10000 и 4000 сажен». Камень хранится сейчас в Ленинградском Эрмитаже. Копия с этого камня имеется в Государственном Историческом музее в Москве.

Сын Ладожского посадника Иванко Павлович производил в 1133 г. углубления или запруды Волги, пытаясь связать ее с Новгородом через реку Полу и Ловать. В честь начала этой работы был поставлен на берегу озера Стерж так называемый каменный Стерженский крест. На кресте имеется следующая надпись: «6641 месяца июня 14 день почах рыти реку сию, яз Иванко Павловиц и крест сь поставих»[1]).

---

[1]) Цитировано по книге «История культуры в Древней Руси», т. 1, М.—Л., 1948, стр. 298

В 1161 г. мастер Лазарь Богшей сделал для Ефросиньи Потоцкой крест, на котором имеется следующая надпись: «кованье его, злото и серебро и каменье и жемчюг в 100 гривен, а... 40 гривен»[1]). Перед цифрой 40 имеется пропуск, вызванный порчей креста. Возможно 40 гривен означает стоимость работы.

В Государственном Историческом музее в Москве хранятся медные золоченые листы, покрывавшие среднюю главу Успенского собора во Владимире, построенного в 1158—1161 гг. На этих листах имеются номера, обозначавшие порядок пригнанных друг к другу листов. На них имеются, например, такие цифры:

є—5; аѯ—61; нх—608; рѯѳ—169.

и др. (рис. 2).

В Новгороде был раскопан погреб XII века и на наружной стороне его северной стенки были обнаружены параллельные вертикальные насечки в порядке венцов: на первом венце—одна насечка, на втором—две и так до четырнадцати; на четырнадцатом венце—четырнадцать насечек. Следовательно, строитель различал бревна по числу насечек. Трудно предположить, чтобы это делалось иначе, чем пересчитыванием количества насечек. Вообще, для счета тех или иных предметов насечки в те времена применялись часто. В Государственном Историческом музее хранятся счетные бирки, найденные в Новгороде в 1947—1948 гг., относящиеся примерно к XI—XIII векам (рис. 3).

В 1951 г. в Новгороде на глубине 2,13 *м* обнаружили надпись на нижнем венце сруба. Надпись состоит из одной славянской буквы, вырубленной тремя ударами плотницкого топора на массивном бревне: а҃. Сверху имеется небольшая зарубка, которая служит титлом. Следовательно, перед нами цифра 1. Это метка для первого венца сруба. Если в предыдущем случае венцы метились

[1]) Цитировано по книге: Б. А. Рыбаков. Ремесло древней Руси, 1948, стр. 512.

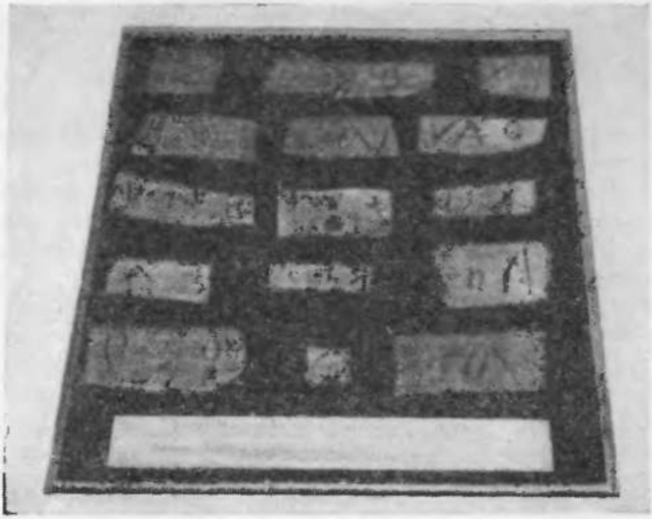


Рис. 2.

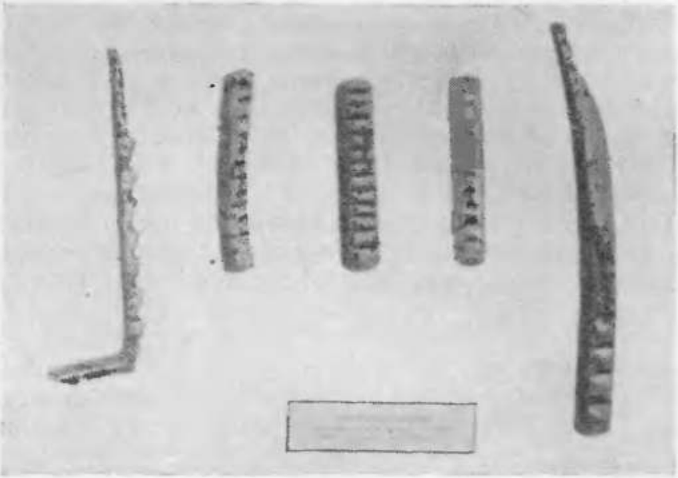


Рис. 3.

зарубками, а так именно поступали вплоть до XX века, то в древнем Новгороде нам встретился грамотный плотник, который метил вещи цифрами. Это бревно относится к XIV—XV векам [1]).

В Новгороде также обнаружена деревянная бирка, относящаяся к первой половине XIII века, с шестью насечками и следующей надписью: «три рожи, а три жита». По-видимому, это запись для памяти владельца бирки (хранится в Государственном Историческом музее).

В 1951 г. в том же Новгороде на глубине 5,64 *м* был обнаружен деревянный цилиндр длиной 8 *см*, шириной 5,5 *см* с двумя взаимно перпендикулярными каналами внутри (хранится в Государственном Историческом музее). Цилиндр относится к X—XI векам. На цилиндре имеется надпись «емьця гривны 3». Деревянный цилиндр, по-видимому, служил для хранения гривен, в нем помещалось в соответствии с надписью 3 гривны [2]).

В Киевских пещерах при обвале стен была обнаружена медная гирька, относящаяся к княжению Глеба Юрьевича в Киеве в 1170—1172 гг. На гирьке написана цифра 7, а вокруг нее нарисовано семь кружков. Такие гирьки служили для проверки веса монет. Кружочки, по-видимому, поставлены для того, чтобы те, кто не мог прочитать

ꙁ, могли бы посчитать кружочки [3]).

Представляет большой интерес обнаруженный в 1954 г. в Тмутаракани на восточном участке в слоях IX—X веков высокий красноглиняный кувшин с таблицей математических знаков.

[1]) Фотография этого бревна приведена в книге: А. В. Арцихо вский и М. Н. Тихомиров, Новгородские грамоты на бересте, М., 1953.

[2]) Гривна—слиток серебра или золота, служивший денежной и весовой единицей в древней Руси, имевший повсеместное распространение. Относительно веса гривны имеются разноречивые сведения. В XV веке половина гривны—рубль вытеснил гривну. С XVI века гривна стала денежной единицей в 10 коп.

[3]) Рисунок этой гирьки приведен в книге: И. Я. Депман, Меры и метрическая система, М., 1954, стр. 37.

Таблица эта расположена в два столбца. После прочтения она в современной записи выглядит так:

Левая таблица на кувшине.

КАТ	200? 290
Н	200 190
	200 100 120
Б	270 180 180 150 150
	180 260 180 280
F	120 160 ? 250
	160 160
Δ	50
	70
$СМ^{Е}$	250 270 210 250 100?

Правая таблица на кувшине.

?	59	?
180		240
Н	?	170

+	150
	180 170
	170
F	? 250 10

Вопросы поставлены в тех местах, где надпись разобрать не удалось. По-видимому, правая таблица есть продолжение левой. Любопытно, что все числа, кроме одного, округлены до 10. Возможно, что перед нами какая-нибудь хозяйственная запись владельца кувшина (рис. 4 и 5).

Аналогичных надписей можно было привести значительно больше. Эти надписи на бытовых предметах делались простыми людьми, и они показывают, что простейшие математические сведения, как и письменность в древней Руси, имели значительно более широкое распространение, чем думали историки раньше.

Существует много других косвенных указаний на широкое распространение математических сведений.

Ремесленники, изготовляя посуду, на днищах горшков ставили свои отличительные знаки—клейма. Почти все клейма носят геометрический характер. На рис. 6 приведены наиболее распространенные клейма.

Лишь редко клейма носили негеометрический характер: цветок, человек, ключ

Рис. 4. Фотография кувшина, найденного в Тмутаракани. (Фотография получена автором от чл.-корр. АН СССР Б. А. Рыбакова.)

от замка и т. п. В подавляющем большинстве случаев, как мы видим, это—концентрические окружности, соприкасающиеся окружности, квадрат, описанный вокруг

Рис. 5. Тот же кувшин в увеличенном виде; хорошо видна правая таблица. (Фотография получена автором от чл.-корр. АН СССР Б. А. Рыбакова.)

окружности, и т. п. Это указывает на знакомство мастеров хотя бы с простейшими свойствами геометрических фигур.

Самые ранние клейма обнаружены на посуде в кургане дер. Митино, недалеко от Смоленска. Курган относится к началу XI века.

В XII—XIII веках широко была распространена орнаментовка различных украшений (браслеты, височные кольца) с помощью металлического зубчатого колесика.

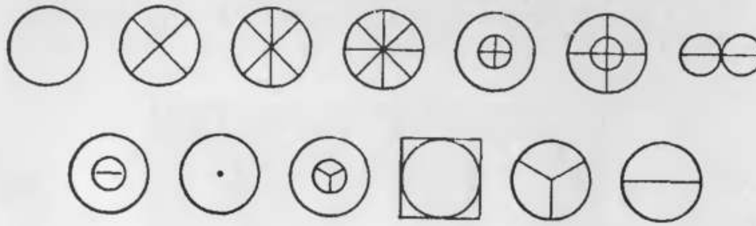


Рис. 6.

Для нанесения орнамента на браслет, найденный в Вотской Пятине, было использовано зубчатое колесо $R=1{,}6$ *см* с нарезанными 24 зубцами. Для этого нужно было уметь разделить окружность на 24 части[1]).

Деление окружности на равное число частей встречается в это время и у волжских болгар. В Болгарах, в Красной Палате, раскопана баня XIV века, в центре которой находился каменный бассейн фонтана в виде цветка с 12 лепестками. Бассейн имеет в диаметре приблизительно 1,5 *м* (хранится в Государственном Историческом музее в Москве). Чтобы сделать лепестки, необходимо было уметь делить окружность на 12 частей (рис. 7).

Веретенные пряслица (грузики для веретен) из глины, а затем из шифера имели формы шара, усеченного конуса, двух усеченных конусов, соединенных основаниями. Такие пряслица встречаются, начиная с VIII века. Знаки на пряслицах также имеют геометрический характер. Наиболее часто встречающиеся знаки на пряслицах приведены на рис. 8.

К большому сожалению, до сегодняшнего дня только небольшая часть древнерусских городов подвергалась планомерным раскопкам. По отношению ко всей терри-

[1]) Рисунок этого браслета приведен в книге: Б. А. Рыбаков, Ремесло древней Руси, 1948, стр. 160.

територии города площадь раскопок бывает так мала, что нельзя получить общую картину планировки. Все же раскопано много отдельных жилищ и кварталов, что дает нам материал по интересующим вопросам.

На первое место здесь нужно поставить раскопки в Перыни, недалеко от места, где Волхов вытекает из

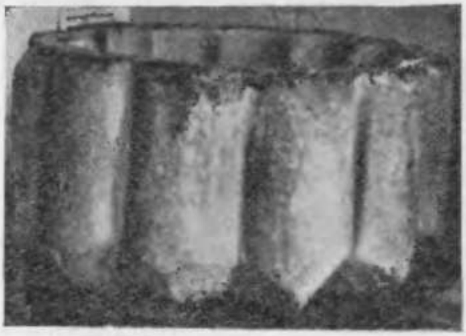


Рис. 7.

Ильменя (близ Новгорода). Раскопанное сооружение представляет круг, ограниченный рвом. Диаметр круга 33 *м*. Точно в центре круга находится яма от столба.

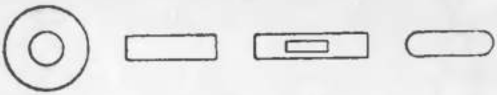


Рис. 8.

Ров, окружающий круглую площадку, в плане представляет громадный цветок с восемью лепестками, которые расположены симметрично.

Все сооружение поражает своей правильной формой. Это было святилище Перуна. В центре стояла деревянная статуя Перуна, которая была срублена в 988 г. Перынь была одним из важнейших центров древнерусской религии.

Исходя из правильной планировки святилища, можно сделать вывод о применении строителями различных измерительных инструментов, а также о знании свойств геометрических фигур (рис. 9). Звездочками отмечены места, где раскладывали костры.

Чем древнее раскапываемые избы и хозяйственные помещения, тем чаще среди них встречаются строения, которые имеют квадратное основание. Например, в Ладоге IX—XI веков все раскопанные избы квадратные, размером от 3,7×3,7 и до 6×6 *м*. Землянки в Суздале X—XII веков также квадратные, размером от 2,3×2,3 *м* до 6×6 *м*. Хлевы тоже квадратные, несколько меньших размеров, от 2,8×2,8 до 3,2×3,2 *м*. Лишь впоследствии строения принимают форму прямоугольников.

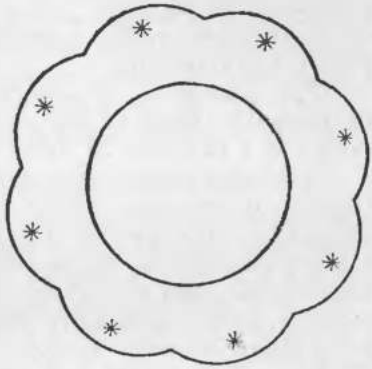


Рис. 9.

Можно предположить, что объяснение этому находится в том, что в то время было известно, что квадрат является таким четырехугольником, который при том же периметре охватывает наибольшую площадь, так что строения с квадратным основанием требуют при одинаковой площади меньшей затраты труда и материала. Впоследствии большую роль стала играть эстетическая сторона. В отдельных случаях землянки имели форму равнобедренной трапеции.

Керамические плиты для настила полов церквей XII—XIII веков обычно были квадратные. Наиболее часто встречаются следующие размеры: 17×17×2 *см*, 16×16×2,5 *см*, 11×11×2,3 *см*, 8×8×1,5 *см*, но иногда встречаются и равносторонние треугольники со стороной 6 *см* при толщине 1,5 *см*.

Во Вщижском городище, относящемся к концу XII века, обнаружено много жерновов, наиболее крупные из них достигают в диаметре 50 *см*, с диаметром отверстия в 11 *см*.

Количество таких примеров можно было бы значительно увеличить. Все они показывают, что широкий круг простых людей имел первоначальные математические сведения; кроме того, эти примеры показывают, что математические сведения вырабатывались в практике различных производств, ремесел и строительства.

Возвращаясь к письменным источникам, мы должны сказать, что их круг до самого недавнего времени был очень ограничен. Но совершенно неожиданно этот круг резко расширился.

При раскопках в Новгороде были обнаружены так называемые берестяные грамоты. Первая берестяная грамота была найдена 26 июня 1951 г.

Основным материалом древней письменности был пергамент, изготовляемый из телячьей кожи. С XIV века начала распространяться бумага. Пергамент в земле сохраняется хорошо, но на нем писали только чернилами. Береста же, как и другие остатки растений, сохраняется в земле, если очень сухо или если очень сыро. В Новгороде сыро, чернила поэтому сохраняются в земле очень плохо, и потому нахождение пергаментных грамот маловероятно.

Свидетельства о применении бересты в древней Руси в качестве письма имелись давно. Были известны, например, берестяные рукописи XVII—XVIII и XIX веков, но все они написаны только чернилами. Были еще обнаружены берестяные поплавки с отдельными буквами, которые процарапывались на бересте.

В Новгороде же были найдены целые берестяные грамоты, надписи на которых нанесены процарапыванием острым костяным или металлическим предметом. Один из костяных инструментов для писания на бересте был также найден.

Березовая кора для грамот бралась во всю толщину. Буквы, как правило, наносились на внутреннюю поверхность березовой коры. Возможно, что береста специально обрабатывалась для облегчения процесса письма, тем более, что следы некоторой обработки налицо. Берестяные грамоты обрезаны сверху и снизу, а иногда с боков. Содержание грамот очень разнообразно. В подавляющем большинстве—это частные письма. Само существование древнерусских частных писем до находок берестяных грамот было неизвестно. Наряду с письмами встречаются хозяйственные документы, а также грамоты самого различного содержания, например встречаются загадка, духовное завещание и др.

Находка берестяных грамот не есть находка какого-либо архива. Грамоты находятся в тех местах, где они были утеряны или выброшены. Чем больше будет производиться раскопок, тем больше будет найдено берестяных грамот, этих совершенно новых уникальных исторических документов. В древней Руси берестяные грамоты назывались берестo.

В 1951 г. их было найдено 10; в 1952 г.—73; в 1953 г.—23; в 1954 г.—30. Из них опубликованы первые 83 грамоты, которые занумерованы в порядке их нахождения (см. А. В. Арциховский и М. Н. Тихомиров, Новгородские грамоты на бересте (из раскопок 1951 г.), М., 1953; А. В. Арциховский, Новгородские грамоты на бересте (из раскопок 1952 г.), М., 1954). Кроме того, одна грамота была найдена в Смоленске. Грамоты в Новгороде встречаются довольно равномерно в слоях веков от XI до XIV века.

Для интересующего нас вопроса берестяные грамоты представляют богатый материал. В деловых грамотах, да и в частных письмах приводится большое количество чисел. Рассмотрим некоторые наиболее важные для нас грамоты.

Первая найденная грамота № 1 представляет большой интерес. Это—так называемая грамота «О поземе и даре», найдена на глубине 2,4 *м*, длина ее 13 *см*, ширина 38 *см*; она относится к первой четверти XV века. Значительная часть утеряна; но, несмотря на это, содержание грамоты можно установить довольно точно. Позема—разновидность оброка. Дар—феодальная повинность приносить подарки феодалу в случае его приезда, а также в определенные праздники. Величина дара устанавливалась заранее.

В грамоте идет речь о поземе и даре, которые поступали с ряда сел Фоме. Числа всюду ставятся между двумя точками, титлы над числами отсутствуют. Ввиду того, что документ хозяйственный, чисел встречается много, например: ·К·, ·Л·, ·М· и т. п. Любопытно, что единственное число «тридцать три» написано словами, но это единственное число в грамоте, которое больше 10 и не кратно 10.

Вся феодальная повинность по записи в грамоте выплачивалась в бе́лках и натурой. Никаких других единиц обмена, кроме бе́лок, в грамоте не встречается. Счет на бе́лки в те времена был распространен.

В грамоте имеется такое место: «4 ваци солоду». Слово «ваци» не известно, но еще в XIX веке употреблялось слово «вачик»—двойная сумка. В XVII веке известно слово «ват», уменьшительное от него «вачик»—единица для меры объема. Можно предположить, что «ваци»—употребительная в то время единица объема. В грамоте имеется слово «кадь»—известная мера сыпучих тел.

Грамота № 2, так называемая грамота «О мехах», найдена на глубине 2,6 *м* около мостовой. Длина грамоты 8,5 *см*, ширина 26,5 *см*. Текст написан на обеих сторонах бересты. Текст на одной стороне является продолжением текста на другой стороне. Относится к концу XIV—началу XV века. Текст читается так:

«Аекуев бела росомуха. У Фоме 3 куници. У Мики 2 куници. У Фоме соху даль, дару куницю. Вельяказа 4 куница. Игугмор на Волоки куница. У Мятещи 2 куници. У Вельютовых 2 куници. У Воземута 2 куници. У Филипа 2 куници. У Наместа 2 бели. В Жидили куница. Воликом острове куница. У Вихтимаса 2 белки. У Гостили 2 куници. У Вельюта 3 куници. У Лопинкова 6 бел.».

Все числа записаны между точками и с титлами, причем и количество точек различно, а титлы имеют разную форму, как, например, на рис. 10.

.Г҃. Д҃ В҃· ·В҃·

Рис. 10.

Грамота № 50. От этой грамоты сохранилось шесть кусков, найденных в различных местах, далеко от построек и на различной глубине, от 2,57 до 3,22 *м*. Пять кусков подошли один к другому вплотную. Шестой кусок отделен от них промежутком, размер которого не известен. Не хватает еще одного куска, очертания которого видны (рис. 11). Длина 34 *см*, ширина 9 *см*. Грамота является хозяйственным документом, относящимся к XIV веку.

«3 дежи трьтие... Радославомо дижя семая. Воислали 2 дежи... дословля пс половия 13 улоки. За Олександромо лонеского жита 13 улоки. Олоксандре дале Коромолнику 3 улки верши. Волосе на Хомутини у... искорми. Ладога 3 дежи. Ондришку 4 улки искормими. 14 улки овиса Олександрь с Волосомо».

«Дежа»—какая-то мера объема, «семая»—седьмая. «Половье»—натуральный оброк, половина урожая, отдаваемая испольщиками.

Пять раз в этой грамоте встречается слово «улоки» (улки). Из текста следует, что улками мерили зерно: емкость улки, по-видимому, меньше, чем емкость дежи. Такая единица измерения нигде раньше не встречалась.

Грамота, как видно, представляет документ сельскохозяйственной отчетности.

Эта грамота представляет интерес из-за того, что в ней встречаются новые единицы объема: улка и дежа. Конечно, по одной грамоте мы не можем судить о распространенности этих единиц.

В некоторых грамотах числа писались словами. Тогда ярко выступала структура того или иного числа. В этом смысле очень интересна грамота № 78 (муляж этой грамоты выставлен на витрине в Государственном Историческом музее). Она найдена на глубине 4,01 *м* невдалеке от мостовой Великой улицы. Длина грамоты 39 *см*, ширина 4 *см*. Относится к XI—XII векам.

«Въземи у Тимоще одинунадесяте гривъну, у Въщина шурина на коне псании хомуть и воже, и оголове, и попону».

В слове «одинунадесяте» хорошо видна первоначальная структура слова одиннадцать. 11 гривен по тому времени очень большая сумма.

В берестяных грамотах все дробные числа писались только словами.

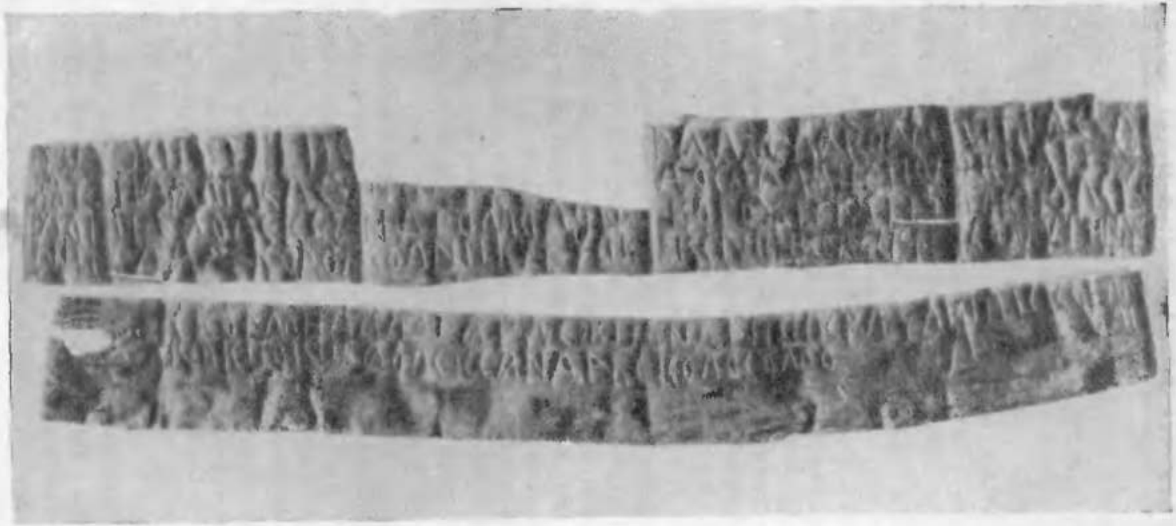


Рис. 11. Фотография берестяной грамоты № 50. (Взята из книги: А. В. Арциховский, Новгородские грамоты на бересте, М., 1954.)

Рассмотрим грамоту № 45, найденную на глубине 3 *м* на мостовой Великой улицы. Длина грамоты 18,3 *см*, ширина 3,8 *см*. Грамота представляет собой начальную часть какого-то денежного документа. Относится к рубежу XIV—XV веков.

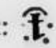
«Се соцетеся добро со Семеномо на полотеретея рубля на 3 годы полоцтевртынатця гривно, а рубл...» Цифра 3 написана с титлом и с одной точкой:  «Полотеретея» — два с половиной; «полоцтевртынатця»—тринадцать с половиной.

К сожалению, документ оборван и не позволяет установить соотношение между этими числами.

Числа встречаются также в грамоте № 61. Грамота найдена на глубине 3,06 *м* невдалеке от мостовой Великой улицы. Длина грамоты 39,2 *см*, ширина 2,1 *см*. Текст представляет собой конечную часть письма, которое относится к XIII веку. В этой грамоте любопытна запись числа 10.

«... з гостомо полотрьтиядесято гривьно сьрьбра... истины 10 пудово мьду, а три годы, а Ное самь ведаете, кодцо исправить, кодь, что взяти, а ко мне кажить о всьмо».

«Полотрьтиядесято»—25.

Речь идет о присылке с гостем 25 гривен серебра, огромной по тому времени суммы. 10 пудов меда—тоже большая ценность. Можно сделать вывод, что это отрывок переписки богатых людей. Число 10 записано так:  . Перечеркнутое і—(десятиричное) сверху имеет дугу и обведено пунктирным ободком.

Встречаются и некоторые другие разновидности записи чисел, о чем мы уже говорили раньше.

В грамоте № 42, относящейся к XIV веку, число 2 записано следующим образом: 

Из дробей, как мы видели, встречаются половины, но в грамоте № 23, относящейся к рубежу XIV—XV веков, встречается четверть—«два овина цьтвьри»—четверть, конечно, записана словами.

Следует отметить, что в более древних грамотах числа чаще записываются словами. Например, в грамоте № 7, относящейся к XII веку, написаны словами числа: «сорок», «шесть». Но в другой грамоте, относящейся к XII веку (№ 8), число 8 записано так: Н .

В нашей литературе широко распространено мнение, что в древнерусской записи чисел титло совершенно необходимо (например: БСЭ, т. 26, стр. 471). Как мы видим, это далеко не так; при скорописи, например, ставили просто с двух сторон точки.

Берестяные грамоты говорят о широком распространении грамотности в древнем Новгороде, а также о широком распространении арифметических сведений.

Новгород того времени был одним из крупнейших городов в Европе. В нем широко были развиты различные ремесла и производства со значительной производственной дифференциацией. Имелись кузнецы, сапожники, зольники, игрушечные мастера, всевозможные мастера по дереву, включая и изготовляющих детали различных механизмов, и многие другие. Улицы города были замощены, следили за чистотой улиц. Новгород вел обширную торговлю не только с русскими землями, но и с Западом и Востоком.

Поэтому можно ожидать много интересного от дальнейших раскопок.

Остановимся еще на одном вопросе. Игральные кости хорошо были известны грекам и римлянам. Есть свидетельства, что игры в кости в античную древность имели довольно широкое распространение.

Рассмотрение истории азартных игр, в первую очередь игр в кости, в древней Руси имеет значение как для истории вообще, так и для истории математики, в частности для правильного освещения зарождения теории вероятностей.

Наиболее древняя игральная кость на территории древней Руси была обнаружена в Чернигове при раскопке кургана Черная Могила, относящегося к X веку. Кость эта не совсем обычная (хранится в Государственном Историческом музее). Это—палочка длиной около 6 *см* с поперечным сечением квадратной формы площадью около 1 *см*^{2}. Такие или аналогичные игральные палочки, кроме обнаруженной в Черной Могиле, известны были египтянам, грекам, римлянам, древним британцам и индейцам племени майя. Боковые грани таких палочек отмечены разным числом кружочков. Такие кости древнее кубических игральных костей, так как их проще изготовлять.

В раскопках 1951—1952 гг. в Новгороде обнаружена игральная кость, относящаяся к XI—XII векам, сделанная из кости (хранится в Государственном Историческом музее). Очки на гранях отмечены маленькими кружочками. Расположение очков на гранях следующее: 1 против 2; 3 против 4; 5 против 6. Длина ребра колеблется близко к 9 *мм*. Кость хорошо сохранена.

В журнале «Biometrica» за июнь 1955 г. были опубликованы результаты испытаний трех игральных костей классической древности, хранящихся в Британском музее, сделанных из разного материала: горного хрусталя, железа и мрамора. Каждая кость была брошена 204 раза и зафиксированы количества выпадании всех граней (очков). Чем все частоты ближе к $\frac{1}{6}$, тем качество изготовления кости лучше. Чтобы сравнить Новгородскую кость с этими данными, я произвел две серии бросаний по 204 раза. Все результаты сведены в одну таблицу:

Очки / Название кости	1	2	3	4	5	6
Горный хрусталь	30	38	31	34	34	37
Железо	35	39	30	21	37	42
Мрамор	27	28	23	47	25	54
Кость (Новгородская):						
первая серия бросаний	27	35	28	39	29	46
вторая серия бросаний	30	37	20	44	30	43

В идеальном случае количество появлений каждого очка должно равняться 34; чем ближе все числа к 34, тем правильнее сделан куб.

Из таблицы видно, что лучше всего сделана кость из горного хрусталя. Новгородская кость выполнена значительно лучше мраморной. По качеству она примерно совпадает с железной.

Приложение

Табличка славянской нумерации
(славянские буквы приведены без титлов).

а = 1, в = 2, г = 3, д = 4, є = 5, ѕ = 6,

з = 7, и = 8, ѳ = 9, і = 10, к = 20, л = 30,

м = 40, н = 50, ѯ = 60, о = 70, п = 80, ч = 90,

р = 100, с = 200, т = 300, у = 400, ф = 500, х = 600,

ѱ = 700, ѡ = 800, ц = 900 (или также ѧ = 900)

Начиная с тысячи, употреблялись те же обозначения, только ставился знак, ҂ , например: ҂а — 1000, ҂в — 2000, ҂єхді — 5614 .

ОБ АВТОРСТВЕ ПЕРВОГО УЧЕБНИКА АРИФМЕТИКИ ДЛЯ НАРОДНЫХ УЧИЛИЩ В РОССИИ [1]

О. Ф. Хичий

Первые государственные общеобразовательные школы в России были открыты в 80-х годах XVIII столетия. В 1782 г. была организована «Комиссия об учреждении народных училищ», которая подготовила общегосударственную систему народного образования. Работа комиссии завершилась разработкой утвержденного в 1786 г. «Устава народных училищ», который «впервые устанавливал в России школьную систему и учреждения для заведывания делом народного образования»[2].

По этому уставу в уездных городах создавались малые народные училища с двухлетним обучением и в губернских городах—главные народные училища с пятилетним обучением (IV класс двухгодичный). По учебным планам народных училищ среди обязательных предметов числилась также и арифметика, которой обучали в I и II классах малых училищ и в I, II и III классах главных училищ.

Для нормального развития новой школьной системы необходимы были соответствующие учебники. Большую работу по созданию таких учебников провел самый выдающийся деятель Комиссии по учреждению народных училищ Федор Иванович Янкович, австрийский серб, который в 1782 г. по приглашению Екатерины II приехал в Россию для проведения школьной реформы. Ф. И. Янкович

---

[1]) «Руководство к арифметике», ч. I, СПб, 1783.

[2]) Е. Н. Мединский, История педагогики, М., 1947, стр. 336.

имел большой опыт в проведении организации школ. Еще в 1776—1780 гг. он провел организацию училищ для австрийских сербов, проживающих в королевстве Венгрии, и был первым директором неуниатских (православных) школ Баната (Raizisches Schul—Direktorat) в Темешваре [1]. Если добавить, что Янкович знал русский язык, то ясно, что он вполне соответствовал той задаче, для выполнения которой был приглашен в Россию. Ф. И. Янкович организовал группу авторов, которая под его руководством выпустила ряд учебников.

Среди них был издан первый учебник арифметики для народных училищ в России «Руководство к арифметике», ч. I, СПб, 1783, 102 стр. Автор учебника не указан. Вопрос об авторстве этого учебника интересовал как историков математики, так и историков педагогики, но среди исследователей этого вопроса имеются разногласия.

Профессор А. П. Юшкевич в своей работе «Математика и ее преподавание в России» считает вслед за В. В. Бобыниным автором «Руководства к арифметике» академика М. Е. Головина [2]. Такое же мнение высказывает и проф. А. В. Ланков [3].

П. Ф. Каптерев считает появившиеся в 80-х годах XVIII века учебники для народных училищ переводными, а переводчиком «Руководства к арифметике», по Каптереву, следует считать Н. Г. Курганова.

Е. Н. Медынский в 1938 г. считал «Руководство к арифметике» переводным учебником, а переводчиком Ф. И. Янковича [4], но несколько позже он приписывает ему авторство [5].

---

[1] Ernö Finácz y, A magyarországi közoktatás története Mária Terézia korabán, k. II, Budapest, 1902 (Эрно Финаци, История публичного образования Венгрии в эпоху Марии Терезии, т. II, Будапешт, 1902).

[2] А. П. Юшкевич, Математика и ее преподавание в России XVIII—XIX вв., «Математика в школе», 1947, № 4, стр. 28.

[3] А. В. Ланков, К истории развития передовых идей в русской методике математики, М., 1951, стр. 20.

[4] Е. Н. Медынский, История русской педагогики, 2-е изд., 1938, стр. 98.

[5] Е. Н. Медынский, История педагогики, М., 1947, стр. 333.

Настоящей заметкой я хочу внести некоторую ясность в этот вопрос.

В фондах Закарпатского государственного краеведческого музея в г. Ужгород, в отделе книг, завезенных в Закарпатье из России в XVIII столетии, имеется в числе других книг и «Руководство к арифметике». Я имел возможность сравнить этот учебник с найденным мною в не разобранном еще фонде библиотеки Ужгородского университета учебником арифметики, изданным в 1777 г. в Вене на двух языках: церковно-славянском и немецком. Левые страницы этого учебника напечатаны на церковно-славянском языке, а правые—на немецком языке. Оба текста, церковно-славянский и немецкий, являются точными переводами один другого. Учебник называется «Руководствие ко арифметике. За употребление Иллирические в малых училищах учащиеся юности» и соответственно немецкое название «Anleitung zur Rechenkunst. Zum Gebrauche der in den Trivialschulen lernenden nicht unirten Illyrischen Jugend».

Уже на титульном листе точно указано, для кого и для каких школ напечатан этот учебник арифметики. «Иллирийцами» называли немцы южных неуниатских (православных) славян, проживавших в то время в пределах королевства Венгрии. Следовательно, учебник арифметики был издан для сербских малых училищ, организованных по разрешению австрийского правительства, Ф. И. Янковичем. Этот факт подтверждает Э. Финаци в своей фундаментальной работе, в которой он исследует историю публичного образования в Венгрии в эпоху Марии Терезии. Финаци приводит полное название учебника, год издания и типографию, в которой он был напечатан. Финаци добавляет, что в том же 1777 году была издана такая же арифметика на румынском и немецком языках[1].

Славяно-немецкий учебник арифметики напечатан в типографии Иосифа Курцбека (Josef Kurzböck) в Вене. Типография Курцбека была первой типографией в Австрийской империи, которая в 1770 г. начала печатать книги славянским шрифтом. До того времени славянские

[1] Э. Финаци, цит. соч., стр. 330.

народы, проживавшие в пределах Австрийской империи, получали церковные и другие книги из-за границы, главным образом из России.

С целью прекращения влияния русской культуры на австрийских славян Мария Терезия специальным декретом разрешила И. Курцбеку открыть «иллирскую» типографию в Вене и предоставила ему privilegium exclusivum (исключительную привилегию) на печатание книг для славянского населения Австрийской империи.

Одновременно был запрещен ввоз таких книг из-за границы. Типография Курцбека имела также цель помогать пропаганде униатства среди румын, сербов и хорватов, а униатские цензоры и корректоры имели задание незаметно протаскивать в православные книги униатские взгляды [1]).

Сопоставление русского учебника «Руководство к арифметике», ч. I, издания 1783 г. со славяно-немецким учебником издания 1777 г. показывает, что «Руководство к арифметике» является *дословным переводом* учебника арифметики, изданного в 1777 г. типографией Курцбека в Вене. Для сравнения привожу фотоснимки титульных листов и некоторых других страниц этих двух учебников (см. рис. 1—10 на стр. 621—630).

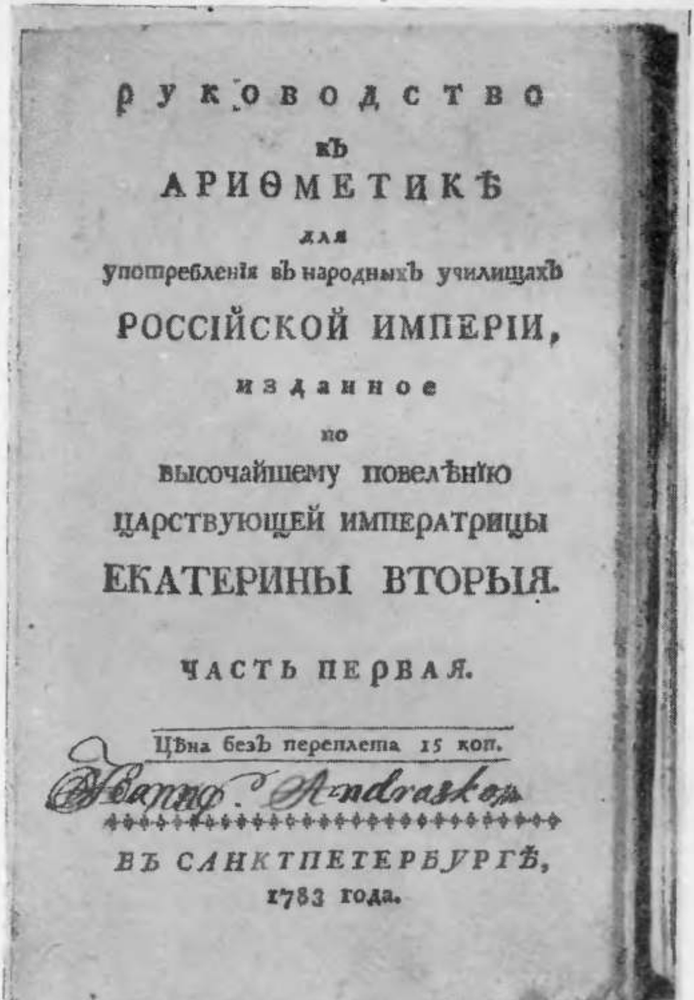
Нужно отметить, что в переводе второй главы учебника, в которой рассматриваются именованные числа и действия над ними, австрийские монеты, меры и веса заменены соответственно русскими.

В венском издании учебника арифметики не указывается, что это первая часть арифметики и на последней, 154-й, странице напечатано «конец», тогда как в с.-петербургском издании на последней, 102-й, странице напечатано «конец первой части» (см. рис. 9, 10).

И действительно, учебник арифметики, изданный в Вене для австрийских сербов, не имел продолжения и охватывал те разделы арифметики, которые изучались в школах, организованных для сербов в 70-х годах XVIII столетия.

[1]) А. Андрохович, «Іллірська» друкарня і книгарня Йосифа Курцбека 1770—1792 та її зв'язки з угорською і галицькою землею.—Записки Наукового Товариства ім. Шевченка, т. CL, Львів, 1929, стр. 109—120.

Рис. 1. Репродукция славянского титульного листа славяно-немецкой арифметики.



РУКОВОДСТВО

КЪ

АРИѲМЕТИКѢ

ДЛЯ

употребленія въ народныхъ училищахъ

РОССІЙСКОЙ ИМПЕРІИ,

изданное

по

высочайшему повелѣнію

царствующей императрицы

ЕКАТЕРИНЫ ВТОРЫЯ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

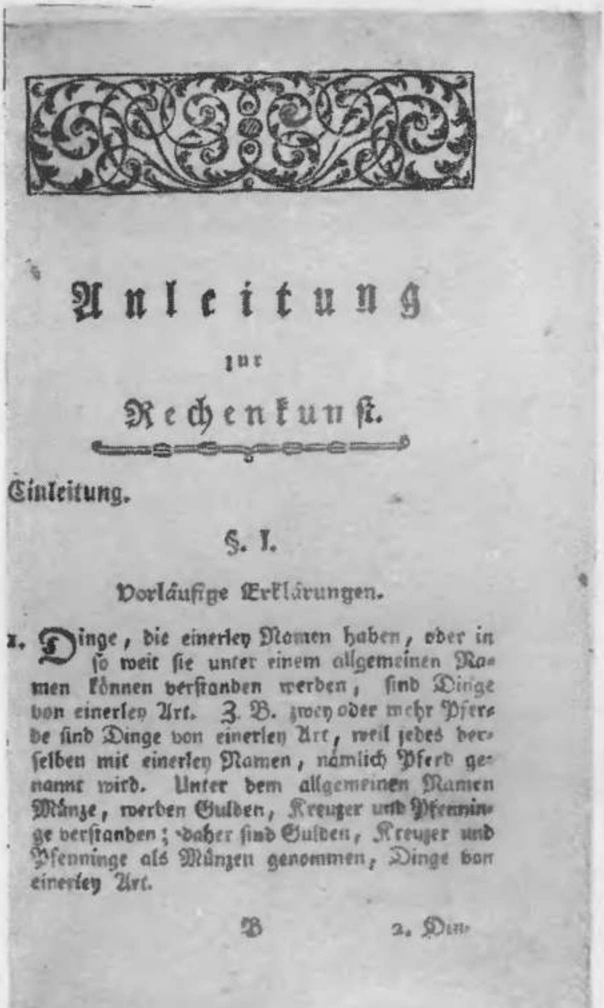
Цѣна безъ переплета 15 коп.

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ,

1783 года.

Рис. 2. Репродукция титульного листа «Руководства к арифметике», ч. I.

Рис. 3. Репродукция первой славянской страницы славяно-немецкой арифметики.



Anleitung

zur

Rechenkunst.

Einleitung.

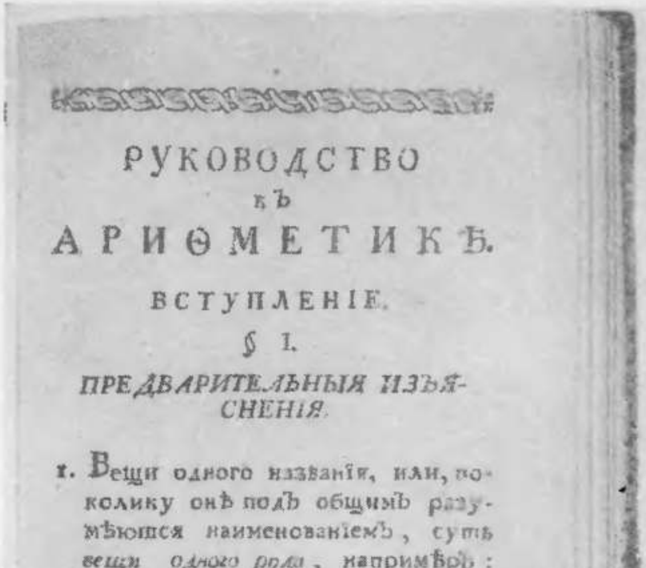
§. I.

Vorläufige Erklärungen.

1. Dinge, die einerley Namen haben, oder in so weit sie unter einem allgemeinen Namen können verstanden werden, sind Dinge von einerley Art. Z. B. zwey oder mehr Pferde sind Dinge von einerley Art, weil jedes derselben mit einerley Namen, nämlich Pferd genannt wird. Unter dem allgemeinen Namen Münze, werden Gulden, Kreuzer und Pfenninge verstanden; daher sind Gulden, Kreuzer und Pfenninge als Münzen genommen, Dinge von einerley Art.

B 2. Din-

Рис. 4. Репродукция первой немецкой страницы славяно-немецкой арифметики.



РУКОВОДСТВО
КЪ
АРИѲМЕТИКѢ.

ВСТУПЛЕНІЕ.

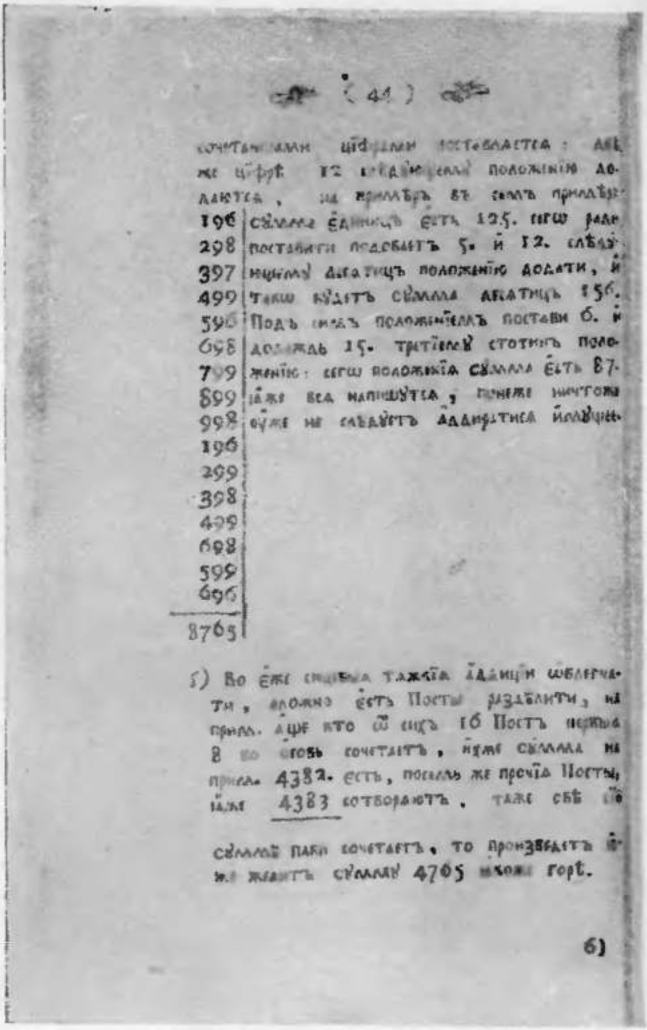
§ 1.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ИЗЪЯСНЕНІЯ.

1. Вещи одного названія, или, поколику онѣ подъ общимъ разумѣются наименованіемъ, суть *вещи одного рода*, напримѣръ: двѣ лошади или болѣе, суть вещи одного рода, по тому что каждая изъ нихъ одинакимъ названіемъ, то есть лошадью, именуется: подобнымъ образомъ рубли, копейки и полушки могутъ быть тогда приняты за вещи одного рода, когда они подъ общимъ названіемъ денегъ разумѣются.

2 2.

Рис. 5. Репродукция первой страницы «Руководства к арифметике», которая соответствует первым страницам славяно-немецкой арифметики.



(44)

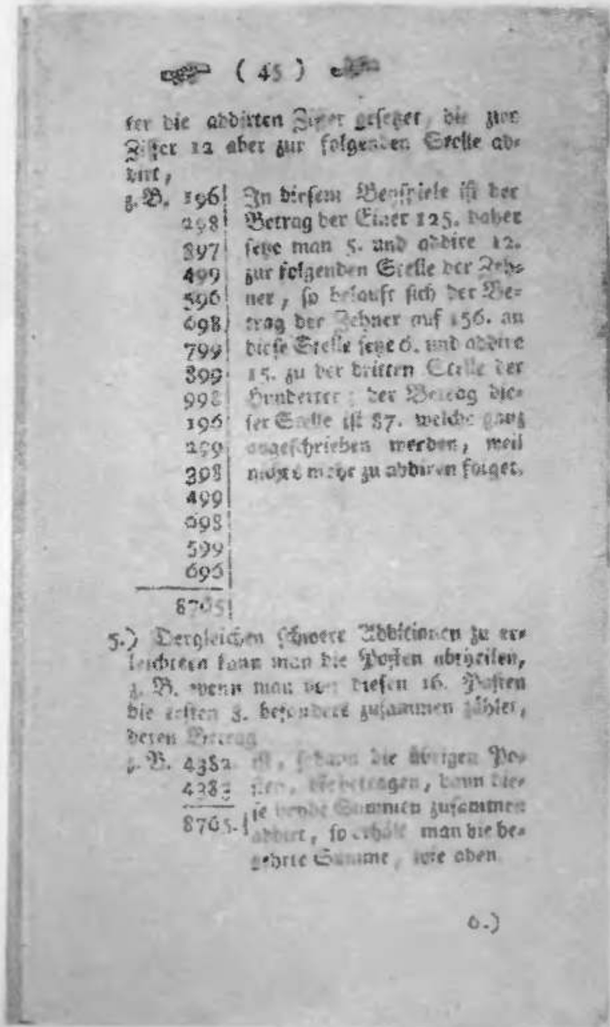
сочетан[illegible]ами цифрами поставляется: аще же цифрѣ 12 [illegible] положенію додаются, на примѣръ въ семъ прилѣж[illegible]

196 | сумма единицъ есть 125. сего ради
298 | поставити подобаетъ 5. и 12. слѣду
397 | ющимъ десятицъ положенію додати, и
499 | тако будетъ сумма десятицъ 156.
596 | Подъ симъ положеніемъ постави 6. и
698 | додавай 15. третіему стотицъ поло
799 | женію: сего положенія сумма есть 87.
899 | иже вся напишутся, понеже ничтоже
998 | уже не слѣдуетъ аддиціи [illegible]
196
299
398
499
698
599
696
8765

5) Во еже сицевыя тяжкія аддиціи облегчати, удобно есть Посты раздѣлити, на прим. аще кто от сихъ 16 Постъ первыя 8 во [illegible] сочетаетъ, иже сумма на прим. 4382. есть, послѣ же прочія Посты, иже 4383 сотворяютъ. также сіе [illegible] сумму паки сочетаетъ, то произведетъ [illegible] же желаетъ сумму 4705 [illegible] горѣ.

6)

Рис. 6—7. Репродукция 44-й и 45-й


(45)

fer die addirten Ziffer gesetzet, die zwey Ziffer 12 aber zur folgenden Stelle addirt,

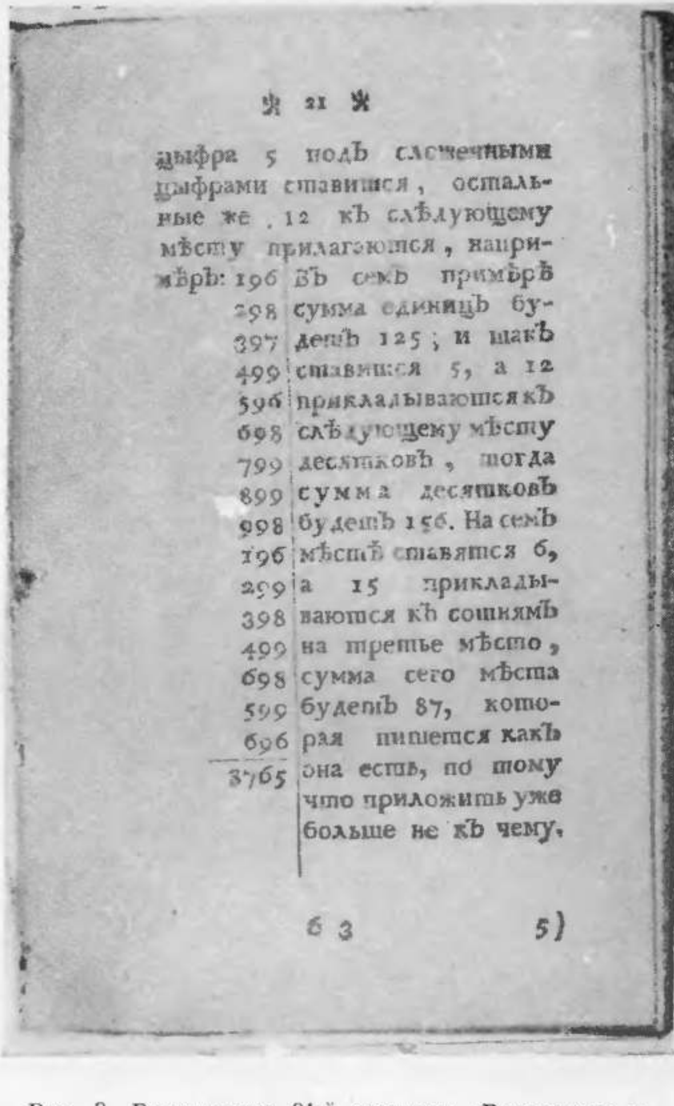
z. B. 196	In diesem Beyspiele ist der
298	Betrag der Einer 125. daher
397	setze man 5. und addire 12.
499	zur folgenden Stelle der Zeh-
596	ner, so belauft sich der Be-
698	trag der Zehner auf 156. an
799	diese Stelle setze 6. und addire
899	15. zu der dritten Stelle der
998	Hunderter; der Betrag die-
196	ser Stelle ist 87. welche ganz
299	ausgeschrieben werden, weil
398	nichts mehr zu addiren folget.
499	
698	
599	
695	
8765	

5.) Dergleichen schwere Additionen zu erleichtern kann man die Posten abtheilen, z. B. wenn man von diesen 16. Posten die ersten 8. besonders zusammen zählet, deren Betrag

z. B. 4382 ist, sodann die übrigen Posten, die betragen, dann diese
4383 beyde Summen zusammen
8765. addirt, so erhält man die begehrte Summe, wie oben.

6.)

страниц славяно-немецкой арифметики.



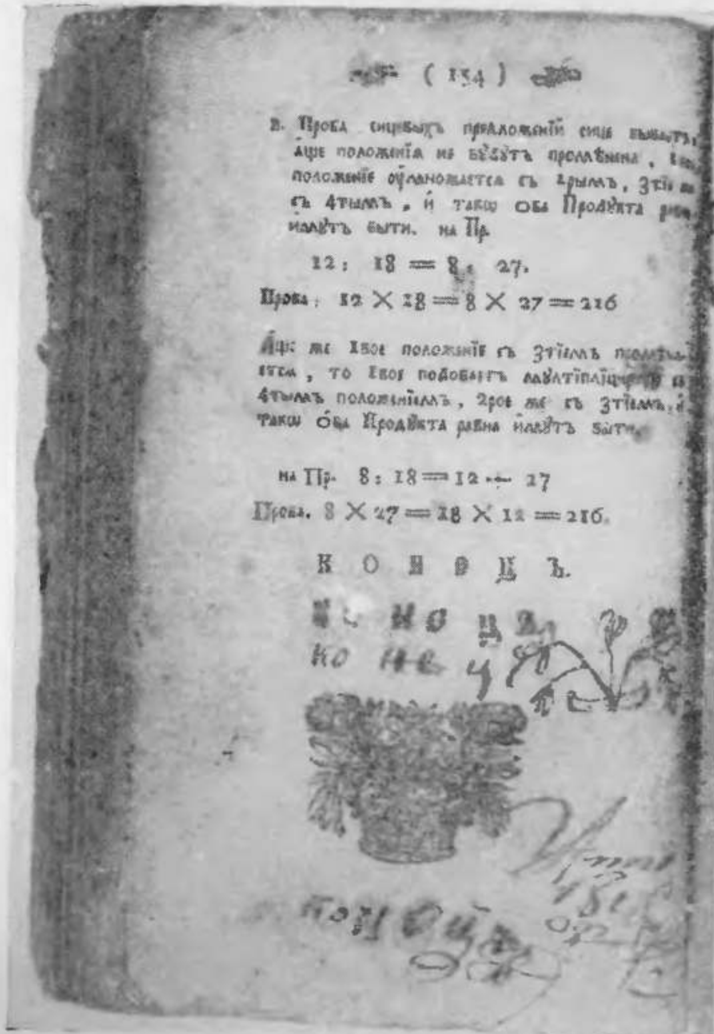
✽ 21 ✽

цыфра 5 подъ слечными цыфрами ставится, остальные же 12 къ слѣдующему мѣсту прилагаются, напримѣръ:

196	Въ семъ примѣрѣ
298	сумма единицъ бу-
397	детъ 125; и такъ
499	ставится 5, а 12
596	прикладываются къ
698	слѣдующему мѣсту
799	десятковъ, тогда
899	сумма десятковъ
998	будетъ 156. На семъ
196	мѣстѣ ставятся 6,
299	а 15 приклады-
398	ваются къ сотнямъ
499	на третье мѣсто,
698	сумма сего мѣста
599	будетъ 87, кото-
696	рая пишется какъ
3765	она есть, по тому
	что приложить уже
	больше не къ чему.

б 3 5)

Рис. 8. Репродукция 21-й страницы «Руководства к арифметике», которая соответствует 44-й и 45-й страницам славяно-немецкой арифметики.



(154)

в. Проба сицевыхъ пропорцій сице бываетъ, аще положенія не будутъ преложенны, 1вое положеніе оумножается съ 2рымъ, 3тіе же съ 4тымъ, и тако оба Продукта равна имѣютъ быти. на Пр.

$12 : 18 = 8 : 27.$

Проба: $12 \times 18 = 8 \times 27 = 216$

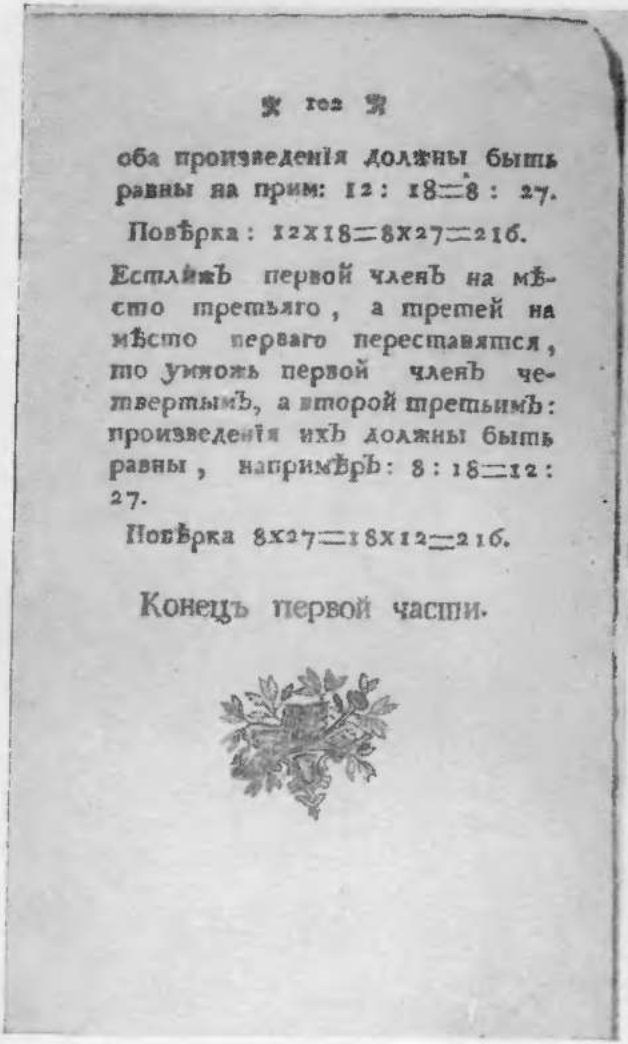
Аще же 1вое положеніе съ 3тіимъ премѣняется, то 1вое подобаетъ мультиплицировати съ 4тымъ положеніемъ, 2рое же съ 3тіимъ, и тако оба Продукта равна имѣютъ быти.

на Пр. $8 : 18 = 12 : 27$

Проба. $8 \times 27 = 18 \times 12 = 216.$

КОНЕЦЪ.

Рис. 9. Репродукция последней, 154-й, страницы славяно-немецкой арифметики.



102

оба произведенія должны быть равны на прим: 12 : 18 = 8 : 27.

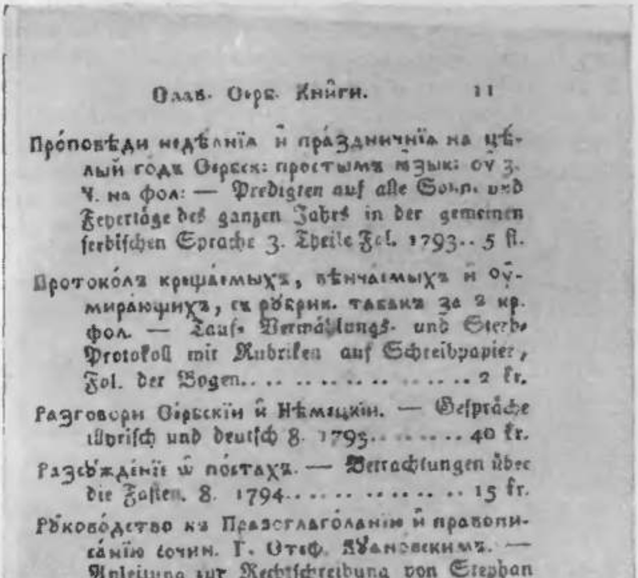
Повѣрка: 12x18 = 8x27 = 216.

Естьли жъ первой членъ на мѣсто третьяго, а третей на мѣсто перваго переставятся, то умножь первой членъ четвертымъ, а второй третьимъ: произведенія ихъ должны быть равны, напримѣръ: 8 : 18 = 12 : 27.

Повѣрка 8x27 = 18x12 = 216.

Конецъ первой части.

Рис. 10. Репродукция последней, 102-й, страницы «Руководства к арифметике».



Слав. Серб. Книги. 11

Проповѣди недѣлнїа и празничнїа на цѣлый годъ Сербск: простымъ мзык: оу 3. Ч. на фол: — Predigten auf alle Sonn. und Feyertäge des ganzen Jahrs in der gemeinen serbischen Sprache 3. Theile Fol. 1793.. 5 fl.

Протоколъ крещаемыхъ, вѣнчаемыхъ и оумирающихъ, съ рубрик. такахъ за 2 кр. фол. — Tauf- Vermählungs- und Sterb- Protokoll mit Rubriken auf Schreibpapier, Fol. der Bogen.. .. .. 2 kr.

Разговори Сербскїи и Нѣмецкїи. — Gespräche illyrisch und deutsch 8. 1795.. .. .. .. 40 kr.

Разсужденїе ѡ постахъ. — Betrachtungen über die Fasten. 8. 1794.. .. .. 15 kr.

Руководство къ Правоглаголанїю и правописанїю сочин. Г. Стеф. Вуяновскимъ. — Anleitung zur Rechtschreibung von Stephan Wujanovsky, 8. 1793.. .. .. 12 kr.

Руководство къ Славенстѣй Грамматїцѣ Г. Авраама Мразовича. — Anleitung zur illyrischen Sprachlehre von Mrasovitsch 8. .. .. 36 kr.

Руководство къ честности и правости сербск. и нѣмец. — Anleitung zur Rechtschaffenheit, oder Lesebuch, illyrisch und deutsch. 8. 1798.. .. ..

Руководство къ Арїѳметїки серб. и нѣмецк. Г Вуяновск. — Anleitung zur Rechenkunst illyrisch und deutsch von Wujanovsky. 8. 1777.. .. .. 20 kr.

Руко-

Рис. 11. Репродукция 11-й страницы «Каталога»

Школьная система 1774 г. предусматривала для сербов только один тип школ, так называемые малые или тривиальные училища, в которых обучали чтению, письму, счету и религии.

Следовательно, можно полагать, что «Руководство к арифметике», ч. II, СПб, 1786 г. не является переводным учебником и автором второй части арифметики для народных училищ является кто-либо из русских математиков второй половины XVIII столетия.

Возможно, что в отношении второй части «Руководства к арифметике» правы историки математики, которые автором первого учебника арифметики для народных училищ в России считают академика М. Е. Головина.

В учебнике, изданном в 1777 г., фамилия автора тоже не указывается. Однако имеются некоторые данные, по которым можно утверждать, что автором этого учебника является Стефан Вуяновский.

В библиотеке Ужгородского университета находится «Каталог славяно-сербских книг» (Verzeichniß der Slaveno-Serbischen Bücher), изданный типографией Венгерского университета в Будине (ныне Будапешт) в 1807—1808 гг.

В этом Каталоге на стр. 11 значится также книга «Руководство к арифметике серб. и немецк. Г. Вуяновск—Anleitung zur Rechenkunst illyrisch und deutsch von Wujanowsky. 8. 1777» (см. рис. 11 на стр. 631).

Итак, в названном каталоге автором учебника арифметики значится Вуяновский. Тот факт, что учебник арифметики, изданный в 1777 г. в Вене издателем Курцбеком, числится в каталоге, изданном типографией Венгерского университета в Будине, объясняется следующим: в 1795 г. типография Курцбека была продана вместе с имеющимся запасом уже напечатанных книг Венгерскому университету и в 1796 г. переведена из Вены в Будин. Одновременно университетская типография в Будине получила «исключительную привилегию» на право печатания книг славянским шрифтом.

Фамилия Вуяновского встречается в упомянутом каталоге еще дважды: как автор руководства «к правоглаголанию и правописанию» (1793, стр. 11 каталога) и как переводчик с российского на славянский «Краткой Церковной Истории» (1794, стр. 9 каталога).

Кроме упомянутого каталога, данные о том, что автором учебника арифметики, изданного в 1777 г., является С. Вуяновский, находим в биографическом лексиконе австрийского государства, изданном К. Вурцбахом в Вене во второй половине XIX столетия. В этом лексиконе помещена краткая биография Стефана Вуяновского (1743—1829), в которой сказано, что уже в 1777 г. он издал учебник арифметики на славяно-сербском и немецком языках. По профессии Вуяновский был учителем. В 1777 г. он был назначен королевским директором школьного округа в Аграме. Он совершил путешествие в Германию, Польшу и Россию [1].

Некоторые сведения о Стефане Вуяновском дает также Э. Финаци. По этим сведениям С. Вуяновский был ближайшим помощником Ф. И. Янковича и принимал активное участие в организации сербских школ в Банате. В частности, большую работу провел Вуяновский в деле подготовки учительских кадров для вновь организованных школ. Подготовка учителей осуществлялась через четырехмесячные курсы, организованные в 1777 г. в Темешваре [2].

Приводим краткое описание славяно-немецкого учебника арифметики.

Объем учебника 155 страниц формата 8-ки. Левые (четные) страницы имеют церковно-славянский текст, а правые (нечетные)—соответственно немецкий текст. Последняя, 155-я страница с немецким текстом в экземпляре, имеющимся в библиотеке Ужгородского университета, не сохранилась.

Учебник состоит из вступления и трех глав. Во вступлении рассматривается нумерация. Вначале дается определение единицы как «вещи одной по себе». Далее определяется число как «две или больше единиц одного рода вещей, взятых вместе». Следовательно, единица, а также

---

[1] Biographisches Lexicon des Kaiserthums Oesterreich von C. W u r z b a c h, 52 Theil, Wien, 1885.

[2] Э. Ф и н а ц и, цит. соч., т. II, стр. 329.

нуль к числам не причисляются. 2, 3, ..., 9 это знаки чисел. Знак единицы «1» и знак нуля «0». Все знаки чисел, единицы и нули называются цифрами. Рассматривание нумерации во вступлении свидетельствует о том, что автор не относит уже нумерации к основным операциям, а считает нумерацию основой арифметики вообще.

Первая глава состоит из пяти параграфов. В них рассматриваются четыре основных арифметических действия: сложение, вычитание, умножение, деление, и в последнем параграфе проверка этих действий с помощью обратных действий.

Каждый параграф начинается определением действия. Определения сходны с определениями, встречающимися в других иностранных учебниках этого периода. Далее вводятся названия для компонентов действий и приводится в догматической форме правило, по которому данное действие должно выполняться. После этого следует решение нескольких примеров. Ход каждого решения подробно описывается, а описание имеет форму рецепта. Общие разъяснения метода решений не даются, а также не рассматриваются свойства действий. После определения умножения (посредством сложения) вводятся названия: данные числа называются «факторами» (в русском переводе «множащимися»), а число, которое образуется от умножения, называется «произведением». И далее, «если один фактор больше другого, тогда обыкновенно большой называется множимым числом, а меньший—множителем» (стр. 57).

Правила умножения начинаются примечанием, в котором сказано, что если оба фактора состоят только из одной цифры, то произведение найдется в обыкновенной таблице умножения; однако сама таблица умножения в учебнике не приводится.

Нужно отметить, что в конце четвертого параграфа, в котором рассматривается деление, в русском переводе имеется добавление, которого в венском издании учебника нет. Добавление это следующее: «Когда данное делимое число разделено и после последнего вычитания остался остаток, как то в примере делимого числа 9, разделенного на 4, остался 1, тогда остаток становится подле частного числа, а под ним под чертой делитель, будет значить, что делимое разделено будучи на 4, дало в частном числе 2, и затем осталась еще одна единица, которую бы также на делителя разделить надлежало и которая в сем случае придасть к тому числу 2 еще одну четверть, например:

$$\begin{array}{l} 4\,|\,9\,|\;\; 2\frac{1}{4} \\ \;\;\;\frac{8}{1} \end{array}$$

» [1].

Видимо, переводчик этим добавлением хотел обобщить определение деления на случай деления с остатком.

Во второй главе рассматриваются действия на именованных числах. Эта глава в русском издании учебника является в некоторой степени видоизменением соответствующей главы венского издания. Очевидно, переводчику пришлось переработать параграфы, в которых рассматриваются монеты, меры и веса, так как в венской арифметике рассматриваются австрийские монеты, меры и веса того времени. В русском переводе переделаны почти все примеры, которыми объясняются действия на именованных числах.

Третья, и последняя, глава состоит из трех параграфов. В первом параграфе вводятся знаки первых четырех действий, которые до сих пор в учебнике не употреблялись. Во втором параграфе рассматривается простое тройное правило. Изложение тройного правила очень характерно для рассматриваемого учебника, и потому я приведу его почти полностью в свободном переводе с немецкого текста.

Начинается параграф определением тройного правила: «если за тремя данными числами (называемыми членами) нужно найти 4-е неизвестное число, то способ его нахождения называется тройным правилом. Например: за 3 фунта уплачено 15 копеек, сколько нужно уплатить за 9 фунтов? Чтобы найти 4-е неизвестное число, нужно иметь в виду следующие правила (merke man folgende Regeln):

1) Написать данные числа так, чтобы вопрошаемое число, то есть 9 фунтов, было написано на 3-м месте.

[1] «Руководство к арифметике», ч. I, СПб, 1783, стр. 52–53.

2) Число одного с вопрошаемым названия, то есть 3 фунта, пишется на первом месте, а остальное известное число пишется в середине.

3) Неизвестный член обозначается через x и пишется так:

$$3:15=9:x.$$

Из чего видно:

1) Что первый член с третьим, а второй с четвертым должны быть одного названия.

2) Второй член должен относиться к четвертому так, как первый к третьему, или первый ко второму, как третий к четвертому.

Поэтому такие числа называют пропорциональными, а тройное правило—правилом пропорции.

Для того чтобы отыскать четвертое пропорциональное число, умножь второй член 15 на третий 9 и произведение 135 раздели на первый член 3. Частным будет четвертое пропорциональное число 45.

Проверка делается так, что первый член умножается четвертым, а второй третьим. Произведения должны быть равны».

После этого изложения следует несколько примеров и задач на тройное правило коммерческого характера. В примерах вводятся также именованные числа, которые до составления пропорции сводятся до единиц одного названия.

Как видно из приведенного содержания параграфа, в котором рассматривается простое тройное правило, изложение учебного материала имеет явно догматический характер. Оно в некоторой степени напоминает изложение тройного правила в русских математических рукописях XVII столетия. Такие основные понятия, как «отношение» и «пропорция», не вводятся, а только употребляются без каких-либо объяснений названия «относится», «пропорциональное число». Сообщение правил в форме рецепта не могло способствовать развитию математического мышления, и при таком их изложении правила могли только механически заучиваться.

В третьем, последнем, параграфе изложено еще более туманно и кратко (на двух страницах) обратное тройное правило. Объясняется правило двумя примерами. Объяснение хода решения одного из примеров приведу полностью (стр. 151—153).

Пример. «3 человека выполняли работу за 8 дней, за сколько дней выполнят ту же работу 6 человек?

По правилу § II гл. III (т. е. по правилу простого тройного правила.—*О. Х.*) будет:

$$3:8=6:x$$

и выйдет 16 дней. Но, как известно, для 6 человек нужно меньше времени, и найденное число не может быть *настоящим пропорциональным числом* (die wahre Proportionalzall) (курсив мой.—*О. Х.*). Для того чтобы отыскать настоящее пропорциональное число, нужно первый член умножить вторым, а произведение разделить на третий член, тогда найдется настоящее пропорциональное число—4 дня:

$$3:8=6:4,$$

или переставляются первый и третий члены:

$$6:8=3:x,$$

и тогда применяется правило § II гл. III и будет

$$6:8=3:4.$$

Чтобы такого рода задачи проверять, нужно: если члены не переставлены, первый член умножить вторым, а третий четвертым и оба произведения должны быть равны, например:

$$3:8=6:4.$$

Проверка: $3\times 8=6\times 4=24$.

Если же первый член переставлен на место третьего, а третий на место первого, то умножь первый член четвертым, а второй третьим и произведения должны быть равны.

Пример: $6:8=3:4$.

Проверка: $6\times 4=8\times 3=24$».

Точно так же объясняется ход решения и второго примера.

Из этого краткого описания «Руководства к арифметике» можно сделать вывод, что как научные, так и методические достоинства этого учебника не очень высокие.

О том, что венский учебник арифметики не пользовался большой популярностью, можно судить и по тому, что 30 лет после его издания он находился еще на складе Будинской университетской типографии, о чем свидетельствует упомянутый «Каталог».

Между прочим, в каталоге приводятся список и адреса книготорговцев, у которых можно было купить названные в каталоге книги. Из этого списка видно, что Будинская университетская типография имела своих книготорговцев и в Ужгороде, и во Львове.

В учебнике отсутствуют задачи и примеры для самостоятельного решения, несмотря на то, что «Руководство учителям первого и второго классов народных училищ» рекомендовало для приобретения навыков учащимися самостоятельное решение задач не отвлеченных, а взятых из практической жизни.

Если принять во внимание, что в то время существовали уже в России учебники арифметики несравненно лучшего качества (Эйлер, Курганов), которые можно было бы переделать применительно для народных училищ, то можно заключить, что выбор Комиссии по учреждению народных училищ перевести и переиздать как первую часть «Руководства к арифметике» для народных училищ России учебник, изданный в 1777 г. в Вене для сербских малых училищ, был не совсем удачным.

К ВОПРОСУ О РАБОТАХ П. Л. ЧЕБЫШЕВА ПО АСТРОНОМИИ

В. Е. Прудников

П. Л. Чебышев интересовался весьма многими вопросами чистой и прикладной математики, практической механики, математической картографии и баллистики. Занимался он также вопросами, имевшими большое значение для астрономии, в частности следующей задачей: какие формы, кроме эллипсоида, может принимать вращающаяся жидкая масса, элементы которой притягиваются по закону Ньютона? Эту задачу Чебышев предложил Е. И. Золотареву, С. В. Ковалевской и А. М. Ляпунову. Последний в долголетних глубоких исследованиях получил ее строгое математическое решение.

Очень важно отметить, что внимание Чебышева привлекали и некоторые вопросы самой астрономии. Так, в сентябре 1876 г. на V съезде русских естествоиспытателей и врачей в Варшаве Чебышев сделал сообщение «Об определении орбиты планет по многим наблюдениям». В этом сообщении Чебышев показал, каким образом по способу интерполирования, изложенному им в мемуаре «Об интерполировании в случае большого числа данных, доставляемых наблюдениями», можно графически найти величины, входящие в определение элементов планеты по способу Лапласа.

В названном сообщении Чебышев показал, что предложенный им способ интерполирования обладает практическими преимуществами, особенно при применении в астрономии, где часто приходится иметь дело с большими рядами наблюдений, сопряженных со значительными ошибками.

Особенно высоко оценивал практическое значение интерполяционного метода Чебышева известный русский астроном академик О. А. Баклунд. В одной статье [1] он писал, между прочим: «Предложенный г. Чебышевым в его мемуаре „Об интерполировании в случае большого числа данных, доставляемых наблюдениями" в высшей степени изящный метод заслуживает такого же внимания для практического применения, какое он заслужил в теоретическом отношении».

В этой статье на ряде астрономических вычислений О. А. Баклунд показал большое преимущество интерполяционного метода Чебышева перед способом наименьших квадратов.

В начале 90-х годов прошлого века внимание Чебышева привлекал вопрос о разложении пертурбационной функции, который является одним из важнейших вопросов небесной механики.

Как известно, пертурбационная функция имеет большое значение при изучении возмущений планет, производимых их взаимным притяжением, так как в этом случае проекции возмущающего ускорения равны частным производным пертурбационной функции, и поэтому изучение возмущающего ускорения сводится к изучению пертурбационной функции. Эта функция состоит из двух частей: одна зависит от непосредственного действия планет и носит название главной части пертурбационной функции, другая—от действия солнца.

Среди проблем небесной механики, связанных с изучением пертурбационной функции, главнейшей является ее разложение в бесконечный ряд; при этом разложение второй ее части и вычисление зависящих от нее неравенств не представляет почти никакой трудности.

Вся трудность в разложении пертурбационной функции происходит от квадратного корня, входящего в ее

[1]) Ueber die Anwendung einer von P. Tchebyschew vorgeschlagenen Interpolationsmethode.—Bull. de l'Acad. des Sc. St. Petersbourg, т. XXIX, № 4, стр. 478.

главную часть:

$$R=\mu_i\left[r^2+r_i^2-2rr_i\cos(r,\ r_i)\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{I}$$

Здесь $\mu_i=\frac{m_i}{M+m}$, M — масса солнца, m_i и m — массы возмущаемой и возмущающей планеты, r и r_i — их радиусы-векторы.

Следуя обыкновенно употреблявшимся до Чебышева методам [1]), разлагали этот корень по степеням отношения $\frac{r_i}{r}$ в ряд:

$$R=\frac{\mu_i}{r}\left[1+\frac{r_i}{r}A_1+\left(\frac{r_i}{r}\right)^2A_2+\ldots\right], \tag{II}$$

который сходился при условии, что значения коэффициентов A_1, A_2, ... не превышает единицы и что $\frac{r_i}{r}<1$.

Но при таком способе разложения главной части пертурбационной функции определение коэффициентов A_1, A_2, ... требовало сложных и длинных выкладок, занимавших десятки страниц.

Желая упростить и сделать короче эти выкладки, известный русский астроном XIX века М. А. Ковальский придал равенству (I) такой вид:

$$R=\frac{\mu_i}{\sqrt{r^2+r_i^2}}\left\{1-\frac{2rr_i}{r^2+r_i^2}\cos(r,\ r_i)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

и показал, что выражение, стоящее в фигурных скобках, разлагается в ряд по степеням отношения $\frac{2rr_i}{r^2+r_i^2}$, сходящийся при тех же самых условиях, что и ряд (II), но зато каждый коэффициент пертурбационной функции и ее частной производной относительно среднего расстояния от солнца выражается менее сложными формулами [2]).

Однако особыми практическими преимуществами метод М. А. Ковальского для разложения главной части пертурбационной функции не обладал.

[1]) Эти методы были предложены известными астрономами XIX века Леверье, Ганзеном, Гюльденом и др.

[2]) См. подробнее: М. Ковальский, Теория движения Нептуна, Казань, 1854, стр. 14—20.

В 1892 г. Чебышев сам обратил внимание на то, что разложение главной части пертурбационной функции может быть изящно и просто получено из следующей его формулы, выведенной в мемуаре «О приближенных выражениях квадратного корня с помощью простых дробей» (1884):

$$\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{\sum \dfrac{\sqrt{h}\,\operatorname{dn}\dfrac{2mk}{2n+1}}{x\,\operatorname{sn}^2\dfrac{2mk}{2n+1}+h\,\operatorname{cn}^2\dfrac{2mk}{2n+1}}}{l^{2\theta}\sum \operatorname{dn}\dfrac{2mk}{2n+1}},$$

где x удовлетворяет соотношениям

$$1\leqslant x\leqslant h,$$

θ—правильная дробь, h—целое число, l определяется некоторой формулой [1]).

Будучи в Париже весной 1893 г., Чебышев кратко рассказал о своем открытии Эрмиту. Вот что писал Чебышеву по поводу этого открытия Эрмит в письме от 23 ноября 1893 г.: «Я не могу, в особенности, забыть о великом и прекрасном открытии (о котором Вы рассказали мне слишком кратко), касающемся разложения пертурбационной функции, о чем г. Баклунд должен будет сообщить в Петербургской Академии наук. Как бы мне хотелось основательно познакомиться с Вашими результатами, чтобы иметь возможность с полным пониманием поздравить Вас с этим новым достижением, которое в равной степени интересует геометров и астрономов.

Если бы Вы прислали для опубликования в наших Comptes rendus заметку о Вашем открытии, то доставили бы большую радость Вашим собратьям по институту, питающим к Вам такое уважение и симпатию» [2]).

---

[1]) См. доклад П. Л. Чебышева «О приближенном вычислении определенного интеграла» («Протоколы Петербургского математического общества 1890—1899» СПб, 1899, стр. 45—48).

[2]) Подлинник этого письма Эрмита хранится в архиве Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. См. также Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева, т. V, стр. 435—436.

Просимую Эрмитом заметку Чебышев, по-видимому, не посылал.

Среди сохранившихся до наших дней рукописей Чебышева нет таких, которые имели бы отношение к разложению пертурбационной функции. Это затрудняет установить, в чем заключалось в деталях то «великое и прекрасное открытие, касавшееся пертурбационной функции», о котором писал Эрмит в своем приведенном выше письме.

Что касается О. А. Баклунда, то он сообщения в Петербургской Академии наук по поводу указанного открытия Чебышева не делал, а ограничился публикацией в Astronomische Nachrichten (B. 135, № 3223, 1894) статьи под заглавием «Ueber die Anwendung einer Formel von Tschebyschew zur Entwickelung der Störungsfunction».

В этой статье О. А. Баклунд говорит о формуле Чебышева, которую мы привели выше, следующее: «Сам Чебышев обратил внимание, что эта формула, между прочим, может быть приложена к разложению пертурбационной функции. Действительно, она при этом дает столь же изящный, как и оригинальный метод, который вместе с тем имеет и практическое преимущество».

Надо заметить, что О. А. Баклунд в свое время считался одним из самых искусных вычислителей в Европе, что и показал в ряде своих трудов. Поэтому его мнение о практическом преимуществе, какое дает применение формулы Чебышева к разложению квадратного корня, входящего в главную часть пертурбационной функции, очень ценно. Оно свидетельствует о значительном по сравнению с общеупотребительными в то время методами упрощении выкладок при вычислении коэффициентов этого разложения (так называемых коэффициентов Лапласа) с сохранением той же степени точности.

О. А. Баклунд показывает это в названной статье на разборе одного примера.

Учитывая это, а также то, что указанная статья О. А. Баклунда осталась почти неизвестной русским математикам и астрономам, мы прилагаем перевод ее основной части на русский язык.

О ПРИМЕНЕНИИ ОДНОЙ ФОРМУЛЫ ЧЕБЫШЕВА К РАЗЛОЖЕНИЮ ПЕРТУРБАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

О. Баклунд

В своем мемуаре «О приближенном выражении переменной через простые дроби» Чебышев дает следующую формулу [1]):

$$\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{k'\left\{1+2\sum\limits_{m=1}^{m=n}\dfrac{\operatorname{dn}\dfrac{2mk}{2n+1}}{xk'^2\operatorname{sn}\dfrac{2mk}{2n+1}+\operatorname{cn}^2\dfrac{2mk}{2n+1}}\right\}}{l^{2\Theta}\left\{1+2\sum\limits_{m=1}^{m=n}\operatorname{dn}\dfrac{2mk}{2n+1}\right\}} \tag{I}$$

с условием $1\leqslant x\leqslant\frac{1}{k'^2}$, где k'^2 — дополнительный модуль, входящий в формулы эллиптических функций, n — целое число и Θ — простая дробь, l определяется формулой

$$l^4=1-16q^{2n+1}\left(\frac{1+q^{4n+2}+q^{12n+6}+\ldots}{1+q^{2n+1}+q^{6n+3}+\ldots}\right)^8.$$

Остальные обозначения не нуждаются в особом объяснении.

Чебышев сам обратил внимание на то, что приведенная формула, между прочим, может быть приложена к разложению пертурбационной функции. Действительно, она дает изящный и оригинальный метод, который одновременно имеет и практические выгоды.

В этой статье мы ограничимся приложением ее к следующей части пертурбационной функции:

$$\frac{1}{\sqrt{a'^2+a^2-2a'a\cos\varphi}}=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}A_i\cos i\varphi,$$

где a' и a — постоянные величины. Несколько удобнее

[1]) Формула, как и заглавие мемуара, дана О. А. Баклундом отлично от записи Чебышева. См. стр 642 настоящего выпуска.

рассмотреть эту часть в таком виде:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa\cos\varphi}}=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}a_i\cos i\varphi.$$

Если мы положим в формуле (I) $x=\frac{1-\varkappa\cos\varphi}{1-\varkappa}$ и заметим, что x имеет свой минимум, единицу, при $\varphi=2p\pi$ и свой максимум, $\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}$, при $\varphi=(2p+1)\pi$, то будем иметь:

$$\frac{\sqrt{1-\varkappa}}{\sqrt{1-\varkappa\cos\varphi}}=$$

$$=\frac{k'\left\{1+2\sum\limits_{m=1}^{m=n}\dfrac{(1-\varkappa)\operatorname{dn}\frac{2mk}{2n+1}}{(1-\varkappa\cos\varphi)\,k'^2\operatorname{sn}^2\frac{2mk}{2n+1}+(1-\varkappa)\operatorname{cn}^2\frac{2mk}{2n+1}}\right\}}{l^{2\theta}\left\{1+2\sum\limits_{m=1}^{m=n}\operatorname{dn}\frac{2mk}{2n+1}\right\}} \tag{II}$$

с условием

$$\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\leqslant\frac{1}{k'^2}. \tag{A}$$

В практическом отношении важно, смотря по обстоятельствам, выбрать возможно меньшее целочисленное значение n, для которого можно положить, согласно данной задаче, $l=1$.

Так как наименьшее значение модуля определяется из уравнения $k^2=\frac{2\varkappa}{1+\varkappa}$, то выбор числа n зависит от $\varkappa$. Но при определении в каждом конкретном случае k из этого уравнения вывод с помощью формулы (II) желаемого разложения потребовал бы большей работы, чем с помощью обыкновенных методов.

Однако вследствие условия (A) можно составить таблицы эллиптических функций для небольшого числа значений модуля k, благодаря чему приложение формулы (II) существенно упрощается.

По отношению к планетам в большинстве случаев достаточно положить $n=3$ и $n=4$ и только в редких случаях необходимо принять $n > 5$.

Пусть

$$A_m = \frac{\operatorname{dn} \frac{2m+1}{2n+1}}{\operatorname{cn}^2 \frac{2mk}{2n+1}}, \quad B_m^2 = \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{2mk}{2n+1}}{\operatorname{cn}^2 \frac{2mk}{2n+1}}, \quad M = 1 + 2\sum_{m=1}^{m=n} \operatorname{dn} \frac{2mk}{2n+1},$$

$$\alpha^2 = \frac{1-\varkappa}{k'^2}.$$

Приняв во внимание эти обозначения, можно формулу (II) переписать так:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa\cos\varphi}} = \frac{1}{\alpha M}\left\{1 + 2\alpha^2 \sum_{m=1}^{m=n} \frac{A_m}{\alpha^2+B_m^2}\left(1 - \frac{B_m^2\varkappa}{\alpha^2+B_m^2}\cos\varphi\right)^{-1}\right\}. \tag{III}$$

Если затем положить

$$\frac{B_m^2\varkappa}{\alpha^2+B_m^2} = \sin\Theta_m = \frac{2\eta_m}{1+\eta_m^2},$$

то легко можно получить равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa\cos\varphi}} = \frac{1}{\alpha M}\left\{1 + 2\alpha^2 \sum_{m=1}^{m=n} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{A_m}{\alpha^2+B_m^2} \sec\Theta_m \eta_m^i \cos i\varphi\right\},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa\cos\varphi}} = \frac{1}{\alpha M}\left\{1 + 4\alpha^2 \sum_{m=1}^{m=n} \sum_{0}^{\infty} \frac{A_m}{\alpha^2+B_m^2} \sec\Theta_m \eta_m^i \cos i\varphi\right\},$$

если для $i=0$ соответствующий член будет разделен на 2.

Итак, желаемое разложение получено. Нужные вычисления становятся в высшей степени простыми, если составлены таблицы для значений A_m и B_m.

Для $k=0{,}95$, $n=2$; $k=0{,}92$, $n=3$ дают значения A_m, B_m и M следующие таблицы:

$k=0{,}95$

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
$\log A_m$	0,0768124	0,2940636	0,6812890	1,95379932
$\log B_m^2$	9,5731478	0,3407786	1,0181718	2,0797020

$\log M = 0{,}7370610$

$k=0,92$

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
$\log A_m$	0,1133668	0,4604148	1,3539044	
$\log B_m^2$	9,7130846	0,6137378	1,7319856	

$\log M=0,669936$

Для иллюстрации описанного метода разберем пример. Пусть $\log \varkappa = 9,9042551$. Тогда условие $\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa} \leqslant \frac{1}{k'^2}$ позволит использовать табличку для $k = 0,95$. Вычисления будут следующие:

$$\log k'^2 = 8,9890046; \quad \log \alpha^2 = 0,3073334.$$

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
$\log \frac{A_m}{\alpha^2+B_m^2}$	9,6959723	9,6686557	9,585817	9,5068172
$\log \sec \Theta_m$	0,0034142	0,0413735	0,1301656	0,2113955
$\log \eta_m$	8,7972366	9,3387901	0,5862238	9,6889116

Разложение I (см. таблицу на стр. 648) есть результат вычислений по вышеизложенному методу, разложение II получено методом Ганзена (для малых планет). Различие коэффициентов между собой не превосходит ошибки, допускаемой обычно при вычислениях с помощью семизначных таблиц логарифмов.

Исключение составляют два первых коэффициента, различие которых достаточно близко к указанной ошибке. Это хорошо согласуется также с теоретической ошибкой, которая происходит в результате исключения $n = 4$.

С помощью формулы для l можно a priori получить ошибку, которая вытекает из определенного предположения относительно n.

	$\frac{A_m}{a^2+B_m^2}\sec\Theta_m(1+2\eta_m\cos\varphi+2\eta_m^2\cos 2\varphi+\ldots)$				$\sqrt{1-\varkappa\cos\varphi}$		
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	I	II	
cos 0φ	0,5004798	0,5128959	0,5200646	0,5226520	1,2018041	1,2018050	cos 0φ
cos φ	0,0627557	0,2237944	0,4011539	0,5106864	0,6255098	0,6255104	cos φ
cos 2φ	0,0039346	0,0488247	0,1547159	0,2494974	0,2385206	0,2385208	cos 2φ
cos 3φ	0,0002467	0,0106520	0,0596704	0,1218926	0,1004570	0,1004570	cos 3φ
cos 4φ	0,0000155	0,0023239	0,0230135	0,0595510	0,0443163	0,0443164	cos 4φ
cos 5φ	0,0000010	0,0005070	0,0088757	0,0290938	0,0200836	0,0200836	cos 5φ
cos 6φ	0,0000001	0,0001106	0,0034232	0,14	0,0092636	0,0092636	cos 6φ
cos 7φ		0,0000241	0,0013202	0,0069442	0,0043262	0,0043264	cos 7φ
cos 8φ		0,0000060	0,0005042	0,0033926	0,0020397	0,0020394	cos 8φ
cos 9φ		0,0000011	0,0001964	0,0016575	0,0009682	0,0009682	cos 9φ
cos 10φ		0,0000002	0,0000757	0,0008098	0,0004623	0,0004624	cos 10φ
cos 11φ		0,0000001	0,0000292	0,0003956	0,0002218	0,0002218	cos 11φ
cos 12φ			0,0000113	0,0001937	0,0001068	0,0001068	cos 12φ
cos 13φ			0,0000043	0,0000944	0,0000515	0,0000516	cos 13φ
cos 14φ			0,0000017	0,0000461	0,0000250	0,0000250	cos 14φ
cos 15φ			0,0000006	0,0000225	0,0000121	0,0000120	cos 15φ
cos 16φ			0,0000002	0,0000110	0,0000059	0,0000060	cos 16φ
cos 17φ			0,0000001	0,0000054	0,0000029	0,0000028	cos 17φ
cos 18φ				0,0000026	0,0000014	0,0000014	cos 18φ
cos 19φ				0,0000013	0,0000007	0,0000008	cos 19φ
cos 20φ				0,0000006	0,0000003	0,0000004	cos 20φ
cos 21φ				0,0000003	0,0000002	0,0000002	cos 21φ
cos 22φ				0,0000001	0,0000001	0,0000001	cos 22φ

ЗАДАЧИ ГЕНУЭЗСКОГО ЛОТО В РАБОТАХ КЛАССИКОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ[1])

К.-Р. Бирман

I

Среди задач, возникающих в азартных играх: игра в кости, в «орла или решку», в карты и т. д., и рассмотренных в основоположных работах по теории вероятностей [2]), уже весьма рано заняли определенное место задачи числовой лотереи.

Рассматриваемая в настоящей статье азартная игра сначала называлась «лото», в то время как слово «лотерея» означало розыгрыш определенного количества денежных выигрышей при твердо установленном количестве разыгрываемых в тираже номеров. Однако с течением времени стало обычным именовать числовое лото также «числовой лотереей». Поэтому мы используем далее оба наименования без различия.

Точная дата возникновения числового лото не установлена. Известно только, что еще до 1620 г., считающегося годом появления этой игры [3]), в Италии—«колыбели

---

[1]) Перевод с немецкого Ж. М. Гречаника.

[2]) Ср., например, K.-R. Biermann, Ueber eine Studie von G. W. Leibniz zu Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Forschungen und Fortschritte 29, 155, стр. 110 и след.

[3]) См., например, Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig, 2 III. 1900, стр. 336; Otto Warschauer, Die Zahlenlotterie in Preussen, Leipzig, 1885, стр. 7. Р. Зигхарт ошибочно называет годом проведения первых игр в лото 1720 г. См. R. Sieghart, Geschichte und Statistik des Zahlenlottos in Osterreich, Freiburg, Leipzig und Tübingen, 1898, стр. 5.

лото»[1])—во время выборов и при других событиях, привлекающих внимание публики, заключались пари. Днем, когда в документе в первый раз упоминается лото, является 9 февраля 1448 г.[2]). Во второй половине XVI века в Генуе организация пари «sponsiones Genuenses» стала своего рода предприятием. Поводом к этому послужило то обстоятельство, что ежегодно пятеро из ста сенаторов по жребию избирались в «Serenissimo Collegio» (т. е. «светлейшую коллегию»[3]). Игрок указывал фамилии сенаторов, которые по его предположению будут избраны таким путем. Если одно или несколько указанных имен оказывались в результате выборов названными верно, то игрок выигрывал по твердо установленному порядку некоторую сумму, кратную его ставке. В противном случае ставка игрока пропадала. В 1620 г. 100 фамилий сенаторов были заменены числами от 1 до 90. Эта игра получила в соответствии с местом своего возникновения наименование «генуэзского лото».

В первое время организация лото находилась в руках богатых купцов («mercatores opulenti»). Однако вскоре государство, оценив этот источник доходов, взяло в свои руки организацию лото.

После 1620 г. числовое лото получило в Италии чрезвычайно широкое распространение[4]). Спустя некоторое время лото распространяется и прочно утверждается и за пределами этой страны. 18 августа 1751 г. первое числовое лото передается в концессию в Австрии, в Вене[5]). В 1757 г.

---

[1]) Pierre Coste, Les loteries d'état en Europe et la loterie nationale, Paris, 1933.

[2]) Carlo Weidlich, La questione del lotto, Palermo, 1922. Автор приводит подробный список итальянской литературы о числовой лотерее.

[3]) По Нина (Nina), которого цитирует К. Вейдлих, цит. соч., имелось 120 кандидатов. По Вейдлиху, пари стали заключать примерно в 1576 г.

[4]) Более подробно см. в цит. соч. К. Вейдлиха.

[5]) Р. Зигхарт, цит. соч., стр. 11. Первую привилегию на числовое лото получил в Австрии итальянец граф О. ди Катальди, так же как позднее в Пруссии Е. А. Кальцабиги. Дата 13 ноября 1751 г., приводимая Ф. Эндеманом (Fr. Endemann, Beiträge zur Geschichte der Lotterie, Berlin, 1899, стр. 74), относится к патенту (Codex austriacus, III Bd., стр. 66 и след.).

числовая лотерея была введена в Париже, 8 февраля 1763 г. в Берлине, а в 1771 г. в Германии существовало уже 26 числовых лотерей [1]).

Одновременно с распространением лото увеличивались протесты против этой игры. Так, например, в одной итальянской книге, вышедшей в 1769 г., возникновение этого «уже неугасимого огня» приписывается пагубным талантам некоего арифметика, имя и национальность которого неизвестны [2]). Во многих местах вся жизнь концентрировалась вокруг лото. Так, например, в 1795 г. в г. Лукенвальде игорная горячка распространилась настолько, что все только и занимались толкованием и обсуждением лотерейных чисел. За спиной своих мужей жены делали долги, как об этом сообщает на основании одного официального донесения Варшауер [3]), чтобы сдать соответствующие билеты со своими предположениями о выигрышах. Мужчины совершали растраты и в оправдание заявляли, что ночью им явился «святой дух» и на стене написал номера, которые должны выиграть в следующем тираже. В Гамбурге в 1770 и 1771 гг. выходил специальный еженедельник «Лотология» («Lottologie» [4]). Папа Бенедикт XIII (1649—1730) запретил католикам принимать участие в лото, а его преемник папа Клементий XII (1652—1740) организовал собственную числовую лотерею.

Несмотря на распространение игорной горячки, народ понял сущность лотереи. В Италии повсюду рассказывали, как городской советник Бенедетто Джентиле из Генуи был схвачен дьяволом за то, что изобрел лото [5]).

В Берлине распевали следующую песенку:

> «Die Pest gab die Natur dem Oriente,
> unbillig ist sie nie;
> dafür gab sie dem Okzidente
> die Zahlenlotterie»[1]).

---

[1]) О. Варшауэр, цит. соч., стр. 12.

[2]) Pietro Pompilio Rodotà, De'giuochi d'industria, di sorte, e misti; di quello in particolare, che si denomina Lotto di Genova, Roma, 1769, стр. 27.

[3]) O. Warschauer, Lotteriestudien, Berlin, 1912, стр. 59 и след.

[4]) Ср. Ф. Эндеман, цит. соч., стр. 75.

[5]) Р. Зигхарт, цит. соч., стр. 5.

В 1810 г. в Пруссии числовое лото после 799 тиражей было ликвидировано [2]). В 1861 г. прекратило существование последнее немецкое числовое лото в Баварии. В 1897 г. закрылась числовая лотерея в Венгрии [3]). В Италии и Австрии числовая лотерея продолжала действовать.

В последнее время в Германии при изменении условий делаемых ставок и выпадения выигрышей вновь созданы числовые лотереи: две — в Берлине и одна — в ГДР, которые пользуются большой популярностью. Там еженедельно подается около 15 миллионов заявок с предположениями о числах, которые выигрывают.

II

Необходимо различать описанные ниже три варианта условий игры. Следует заметить, что в основе рассматриваемых нами математических исследований лежали лишь два первых вида названной игры, а третий вид упоминается только для полноты, а также потому, что он действует и ныне.

1. Согласно первоначальным правилам игры в лото игрок держит пари на то, что при розыгрыше появятся пять названных им кандидатов или номеров. Размер выигрыша зависит от того, совпадет ли предположение игрока с результатом тиража в одном или нескольких случаях (т. е. самое большее в пяти). Размеры выигрыша зависят

---

[1]) O. Warschauer, Lotteriestudien, стр. 61.

Природа наделила Восток чумой,
и она никогда не бывает несправедлива;
поэтому она наделила Запад
числовой лотереей.

[2]) O. Warschauer, Lotteriestudien, стр. 52.

[3]) Лото стало предметом множества обвиняющих и защищающих сочинений, истолкований и астрологических писаний. Поэты воспевали лото, публиковались рецепты выигрышей. В парламентах произносились пламенные речи за и против лото и т. д. Дальнейшие литературные указания можно найти в большом числе в указываемых нами источниках.

(т. е. самое большее в пяти). Размеры выигрыша зависят также от заранее установленной кратности ставки, которая тем больше, чем больше число выпадений предположений игрока. О каком-либо ограничении числа заявок с предположениями, которые может подать один игрок, нигде ничего не говорится. Такого рода пари мы встречаем в первый период существования лотереи в Италии.

2. В дальнейшем во всех странах установились примерно такие правила игры.

Участник лотереи может выбрать один из описанных ниже видов для заявок на номера, причем участие в одном виде не исключает участия в другом:

а) Игрок заявляет, что указанное им число будет находиться среди пяти вытянутых чисел. Такая игра называется по-итальянски estrado simplice (т. е. буквально простым извлечением), по-французски extrait simple, по-немецки einfacher Auszug (также unbestimmter Auszug, unbestimmter Ruf).

б) Игрок предполагает, что избранное им число появится в ряду пяти вытягиваемых чисел в указанном им месте. Если игрок избирает, например, число 3, указывая, что оно будет содержаться в пятом по счету вытянутом номере и при тираже будут вытянуты номера 4, 28, 15, 88, 63, то игрок выиграл. Такой вид игры называется estrado determinato (т. е. определенное извлечение) или extrait déterminé, или bestimmter Auszug, или bestimmter Ruf, а также Nominate.

в) Игрок указывает два числа, которые должны содержаться среди пяти вытягиваемых номеров. Такой вид игры называется Ambo (латинское: оба). Во Франции в числовой лотерее существовало также ambes déterminés, т. е. определенное амбо.

г) При игре terno (по три) игрок указывает три числа, которые по его мнению окажутся после тиража среди пяти выигравших номеров.

д) Quaterno (по четыре) выигрывается, если аналогичным образом указывается четыре числа.

е) Quinterno (по пять) выигрывается, если угадываются правильно пять чисел.

Игры кватерно и квинтерно допускались не во всех странах. Но повсюду была установлена наименьшая ставка. В некоторых местах устанавливалась также максимальная ставка.

Выигрыши колебались примерно в следующих границах:

В игре Эстрадо симпличе .	14—15-кратная ставка
Эстрадо детерминато	70—75-кратная ставка
Амбо	240—270-кратная ставка
Терно	4800—5500-кратная ставка
Кватерно	60 000—75 000-кратная ставка
Квинтерно	1 100 000-кратная ставка

Здесь не указаны крайне низкие выигрыши, как, например, в Папском государстве, и чрезвычайно высокие выигрыши, как в Сардинии [1]).

3. В упоминавшихся выше современных немецких числовых лотереях участник делает заявку, что из 90 разыгрываемых номеров будут вытянуты пять, указанные им. Каждый участник лотереи волен делать неограниченное количество заявок. В этом отношении современная числовая лотерея совпадает с первоначальной. В остальном, однако, существует принципиальное различие между двумя традиционными видами лото.

В современной числовой лотерее ставка лимитирована 0,5 немецкой марки за заявку, т. е. за билет. Для выигрышей исключается установленный процент сбора от лотереи, и выигрыш таким образом зависит от числа поданных заявок. Его распределение происходит по четырем выигрышным разрядам (1-й разряд—совпадение между заявкой и результатом розыгрыша по пяти номерам, 2-й выигрышный разряд—совпадение по четырем номерам, 3-й—по трем номерам, 4-й—по двум номерам). Распределение производится при помощи специального ключа. Лотерейное предприятие в финансовом отношении не рискует.

---

[1]) Согласно Зигхарту и Варшауэру (цит. соч. Die Zahlenlotterie in Preussen). Мы не останавливаемся здесь на таких частностях, как связывание тиража с розыгрышем пяти комплектов приданого для девушек-сирот (Пруссия и Австрия), или наложение секвестра на ставки, уменьшение выигрыша в том случае, когда разыгранная по «терно» ставка содержит более чем три числа. С этими вопросами можно подробно ознакомиться в приводимой нами литературе.

Чтобы не выйти за рамки избранной темы, мы не станем в данной статье рассматривать различия, существующие между лотерейными предприятиями и в нынешней Германии. По той же причине мы не станем излагать доводы в пользу современных немецких лотерей и против правил лотерейной игры, существовавших в прошлом.

III

Перейдем к исследованиям, проведенным классиками теории вероятностей в связи с генуэзским лото.

В первую очередь следует называть относящуюся к 1709 г. работу Николая I Бернулли (1687—1759) «Specimina Artis conjectandi ad quaestiones Juris applicatae» (Примеры применения искусства догадки к правовым вопросам)[1]), ибо среди прочего автор касается там также «чрезвычайно прославившегося генуэзского лото».

Николай Бернулли начинает рассуждения о генуэзском лото с упомянутых нами первыми условий игры: игрок делает заявку на пятерых из 100 кандидатов, внося денежную ставку. Когда после жеребьевки становится ясно, какие пять из 100 сенаторов в следующем году займут главные должности, игрок получает от проводящих лотерейную игру богатых купцов назначенную сумму денег при условии, если один из названных им сенаторов оказывается избранным. Выигрыш тем больше, чем больше совпадений между заявками и результатами жеребьевки.

Николай Бернулли устанавливает, каков должен быть справедливый выигрыш, рассуждая следующим образом. Условимся, что

a = ставке, которую Н. Бернулли полагает равной 1.

g_1 = справедливому выигрышу, соответствующему совпадению одной фамилии из заявки с результатом розыгрыша, т. е. при «одном попадании».

g_2, g_3, g_4, g_5 = справедливому выигрышу при двух, трех, четырех или соответственно пяти попаданиях.

e_0 = числу случаев, в которых заявка и результат розыгрыша не совпадают.

---

[1]) Мы следуем изложению в Acta Eruditorum, Supplementa, т. IV, стр. 159 и след., именно 167 и след., Leipzig, 1711.

e_1= числу случаев, в которых одна фамилия из заявки совпадает с результатом розыгрыша.

e_2, e_3, e_4, e_5= числу случаев, при которых заявка совпадает с результатом розыгрыша соответственно в двух, трех, четырех и пяти фамилиях [1]). Таким образом, имеется e_5 случаев, при которых кто-либо может получить выигрыш g_5, e_4 случаев, при которых кто-либо может получить выигрыш g_4, и т. д., и в e_0 случаях не бывает выигрыша. Поэтому ожидание выигрыша равно

$$\frac{e_5 \cdot g_5 + e_4 \cdot g_4 + e_3 \cdot g_3 + e_2 \cdot g_2 + e_1 \cdot g_1 + e_0 \cdot 0}{e_5 + e_4 + e_3 + e_2 + e_1 + e_0} = a. \qquad (\alpha)$$

Далее Бернулли полагает

$$e_5 + e_4 + e_3 + e_2 + e_1 + e_0 = e. \qquad (\beta)$$

Значение e_5 и т. д. находят, как указывает Бернулли, «с помощью известных правил соединений». Он не указывает явно, каким образом получает приводимые им числовые величины. Правила ему были известны из «Ars Conjectandi» его дяди Якова Бернулли (1654—1705), рукопись которого была опубликована в 1713 г. В самом деле, во второй части «Ars conjectandi» мы находим решение такой задачи [2]): среди n элементов, из которых образуются сочетания по r элементов без повторений, имеется m отмеченных элементов. Ищется число сочетаний, в которых содержатся p из этих m элементов, а остальных $m-p$ элементов нет. Искомое число сочетаний Яков Бернулли находит по формуле $\binom{m}{p} \cdot \binom{n-m}{r-p}$. В нашем случае n равно 100, $m=5$, $r=5$, $p=0$, 1, 2, 3, 4 и 5.

---

[1]) Буквенные обозначения взяты здесь иные, чем у Н. Бернулли, чтобы не применять их в настоящей статье в различных значениях. Это замечание относится и к дальнейшим рассматриваемым здесь работам.

Мы стремились возможно ближе придерживаться оригинала, но для облегчения понимания позволили себе частично развить рассуждения Н. Бернулли.

[2]) См. Ars conjectandi, Basel, 1713, стр. 105 и след.

Из этого следует:

$$\text{при } p=5 \qquad e_5=\binom{5}{5}\cdot\binom{95}{0}=1,$$

$$\text{»}\quad p=4 \qquad e_4=\binom{5}{4}\cdot\binom{95}{1}=475,$$

$$\text{»}\quad p=3 \qquad e_3=\binom{5}{3}\cdot\binom{95}{2}=44\,650,$$

$$\text{»}\quad p=2 \qquad e_2=\binom{5}{2}\cdot\binom{95}{3}=1\,384\,150,$$

$$\text{»}\quad p=1 \qquad e_1=\binom{5}{1}\cdot\binom{95}{4}=15\,917\,725,$$

$$\text{»}\quad p=0 \qquad e_0=\binom{5}{0}\cdot\binom{95}{5}=57\,940\,519.$$

Из (β) следует, что $e=75\,287\,520$.

Проверяем это значение: e есть число сочетаний из $n=100$ элементов по 5 без повторений, т. е. $\binom{100}{5}=$ $=75\,287\,520$.

Из (α) следует:

$$e_5\cdot g_5+e_4\cdot g_4+e_3\cdot g_3+e_2\cdot g_2+e_1\cdot g_1+e_0\cdot 0=$$
$$=e_5\cdot a+e_4\cdot a+e_3\cdot a+e_2\cdot a+e_1\cdot a+e_0\cdot a.$$

Так как $a=1$, то из (β) следует, далее, что

$$e_5\cdot g_5+e_4\cdot g_4+e_3\cdot g_3+e_2\cdot g_2+e_1\cdot g_1+e_0\cdot 0=e.$$

Размер выигрыша должен быть обратно пропорционален количеству случаев, при которых заявка и результат розыгрыша совпадают; g_5 должен быть наибольшим, а g_1 наименьшим выигрышем.

Примем в качестве неизвестного g_5, а g_4, g_3, g_2 и g_1 выразим через g_5, а именно:

$$e_5\cdot g_5=e_4\cdot g_4=e_3g_3=e_2g_2=e_1g_1; \quad 5\cdot e_5g_5=e. \tag{γ}$$

Отсюда

$$g_4=\frac{e_5g_5}{e_4}; \quad g_3=\frac{e_5g_5}{e_3}; \quad g_2=\frac{e_5g_5}{e_2}; \quad g_1=\frac{e_5g_5}{e_1}.$$

Далее из (γ) следует:

$$g_5 = \frac{e}{5\cdot e_5} = \frac{75\,287\,520}{5\cdot 1} = 15\,057\,504 = e_5\cdot g_5, \text{ так как } e_5 = 1.$$

Подставив $e_5 g_5$, получим:

$$g_4 = \frac{15\,057\,504}{475} = 31\,700\,\frac{4}{475},$$

$$g_3 = 337\,\frac{5\,227}{22\,325}\left(\text{а не как у Н. Бернулли } 337\ \frac{6227}{22\,325}\right),$$

$$g_2 = 10\,\frac{608\,002}{692\,075}, \quad g_1 = \frac{15\,057\,504}{15\,917\,725} \quad \text{ставки.}$$

Найденные результаты Николай Бернулли использует, чтобы показать, насколько обманывают публику организующие генуэзскую лотерею купцы. Как правило, пишет Бернулли, они выплачивают за пять попаданий 10 000 золотых, за четыре попадания 1 500, за три попадания 300, за два попадания 10 и за одно попадание 1 золотой [1]). Бернулли подставляет в уравнение (α) найденные им значения e_5, e_4 и т д., а вместо g_5, g_4 и т. д.—выплачивавшиеся в Генуе выигрыши. Это дает

$$\frac{1\cdot 10\,000 + 475\cdot 1500 + 44\,650\cdot 300 + 1\,384\,150\cdot 10 + 15\,917\,725\cdot 1}{75\,287\,520} =$$

$$= \frac{2\,925\,115}{5\,019\,168} \text{ ставки.}$$

Между тем, участник лотереи должен был бы ожидать возврата своей ставки, т. е. золотого; значит, ее организаторы присваивают у каждого участника лотереи $\frac{2\,094\,053}{5\,019\,168}$ одного золотого.

Размером справедливого выигрыша занимался также другой классик теории вероятностей Пьер Симон де Лаплас (1749—1827) в своем «Essai philosophique sur les Probabilités» (Опыте философии теории вероятностей,

---

[1]) Согласно Варшауэру (Die Zahlenlotterie in Preußen, стр. 6) выигрыш при ставке в 1 золотой пистоль составлял при пяти попаданиях 20 тыс. пистолей, при четырех попаданиях 5—6 тыс. пистолей, при трех попаданиях 500—600 пистолей. Источник этих данных не указывается.

1814) — знаменитом и, говоря по-современному, научно-популярном изложении принципов и результатов теории вероятностей[1]). Находимые им размеры выигрышей относятся к лотерее из 90 чисел, проходящей по условиям игры, изложенным нами на втором месте. Лаплас приходит к выводу что в справедливом extrait simple (estrado simplice) «для равноправности игры» надлежало бы выплачивать в лотерее 18-кратную, в справедливом «амбо» — 400,5-кратную, в «терно» — 11 478-кратную, в «кватерно» — 511 038-кратную и в справедливом «квинтерно»—43 949 268-кратную ставку.

Происхождение этих чисел Лаплас объясняет весьма кратко. При этом, как и повсюду в «Опыте», он избегает применения формул. Такая манера никогда не приводит к упрощению самого изложения и не всегда облегчает понимание. Поэтому мы переведем рассуждения Лапласа на язык математики.

Из $n=90$ номеров можно образовать сочетаний по r без повторений $\binom{n}{r}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}$. Тогда мы получаем:

при $r=1$ $\binom{90}{1}=90$ простых извлечений,

» $r=2$ $\binom{90}{2}=4005$ амбов,

» $r=3$ $\binom{90}{3}=117\,480$ терн.

» $r=4$ $\binom{90}{4}=2\,555\,190$ кватерн,

» $r=5$ $\binom{90}{5}=43\,949\,268$ квинтерн[2]).

---

[1]) Стр. 19 и след. нем. изд. в Ostwald's Klassiker № 233, Leipzig, 1932, стр. 19 и след. русского перевода А. В. Власова: П. Лаплас, Опыт философии теории вероятностей, М., 1915.

[2]) Пьер Кост в цит. соч. ошибочно дает для квинтерн число 8 789 832. См. также Georg Frhr. von Vega, Vorlesungen über die Mathematik, 1. Band, Rechenkust und Algebra, 6, 1838, Wien.

Из пяти номеров, на которые в каждом тираже выпадают выигрыши, содержатся:

$$
\begin{aligned}
&\text{при } r=1 \quad \binom{5}{1} = \ \ 5 \text{ простых извлечений,}\\
&\text{»} \quad r=2 \quad \binom{5}{2} = 10 \text{ амбов,}\\
&\text{»} \quad r=3 \quad \binom{5}{3} = 10 \text{ терн,}\\
&\text{»} \quad r=4 \quad \binom{5}{4} = \ \ 5 \text{ кватерн,}\\
&\text{»} \quad r=5 \quad \binom{5}{5} = \ \ 1 \text{ квинтерн.}
\end{aligned}
$$

Если мы, согласно определению вероятности у Лапласа, образуем частное из благоприятных и из всех возможных случаев, то получим следующие вероятности и тем самым указанные выше размеры справедливых выигрышей: $\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$ для простого извлечения, $\frac{1}{400{,}5}$ для амбо, $\frac{11}{11\,748}$ для терны, $\frac{1}{511\,038}$ для кватерны и $\frac{1}{43\,949\,268}$ для квинтерны.

В другом месте своего «Опыта» [1]) Лаплас снова касается числовой лотереи и невыгодного для игрока соотношения между шансами организаторов лотереи и шансами ее участника [2]). При этом Лаплас упоминает также о широко распространенном заблуждении, что не выходивший долго номер должен при дальнейших розыгрышах выйти скорее, чем остальные номера. Толпа игроков, пишет Лаплас, спешит покрыть такой номер ставками. С другой стороны, игроки комбинируют также и наиболее часто выходившие номера, ожидая от этого преимущества. Лаплас пишет, что он подверг проверке вычисления-

[1]) Цит. соч., стр. 124 и след. в нем. изд. и стр. 150 и след. в русск. изд.

[2]) Об огромных доходах от числовой лотереи арендаторов или же государства, например в Австрии и Пруссии, см. у Зигхарта и Варшауэра.

ми некоторые подобные случаи и постоянно находил, что они заключались в границах, которые в предположении одинаковой возможности выхода всех номеров нельзя считать неправдоподобными.

Другая постановка вопроса, возникшая на базе исследования числового лото, связана с определением вероятности появления при одном тираже двух или нескольких следующих подряд друг за другом чисел, так называемых последовательностей — секвенций. Если, например, в одном тираже выходят числа 17, 3, 76, 35, 16, то 16 и 17 образуют секвенцию из двух чисел; если же, например, среди вытянутых пяти номеров имеются числа 61, 62 и 63, то говорят о секвенции из трех чисел и т. д.

Сам Леонард Эйлер (1707—1783) занялся этой проблемой, которая, по его словам, весьма сложна, ибо на пути к ее решению встречаются величайшие препятствия [1]). Хотя к тому времени прошло лишь 2 года с момента создания в Берлине числовой лотереи, условия игры Эйлер не описывал, так как они уже были общеизвестны.

Эйлер начинает с вычислений при $r=2$, доходит затем до $r=6$, дает общий вид решения и, наконец, применение его к $r=7$. Он приводит также числа для $r=5$, т. е. для самой числовой лотереи. Вот индуктивно найденные Эйлером общие решения и специальные числовые значения для лото.

Вероятность того, что среди r номеров одного тиража не имеется ни одной секвенции, Эйлер выражает формулой

$$P_s = \frac{(n-r)\cdot(n-r-1)\cdot(n-r-2)\cdot\ldots\cdot(n-2r+2)}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+2)}.$$

Короче мы можем это записать так:

$$P_s = \binom{n-r+1}{r} : \binom{n}{r}.$$

---

[1]) L. Euler, Sur la probabilité des séquences dans la lotterie (sic!) Génoise (О вероятности секвенций в генуэзской лотерее) опубликовано в Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres, Année 1765, Berlin, 1767, стр. 191 и след. (Opera omnia, I, 7, стр. 113—152).

Для $n=90$ и $r=5$ получается, что

$$P_з = \frac{404\,957}{511\,038}.$$

Отсюда непосредственно следует вероятность появления по крайней мере одной секвенции: $P_c = 1 - P_з$; поэтому в числовой лотерее

$$P_c = \frac{106\,081}{511\,038}.$$

Вероятность того, что α секвенций из a чисел (символически $\alpha(a)$), β рядов из b чисел ($\beta(b)$), γ рядов из c чисел и т. д содержится среди r чисел, вышедших в одном тираже, по Эйлеру такова:

$$P = \frac{(n-r+1)\cdot(n-r)\cdot(n-r-1)\cdot\ldots\cdot(n-r-k+2)}{\alpha!\cdot\beta!\cdot\gamma!\cdot\ldots} : \binom{n}{r}, \quad (\omega)$$

где

$$k = \alpha+\beta+\gamma+\ldots \text{ и } \alpha(a)+\beta(b)+\gamma(c)+\ldots = r.$$

Для числовой лотереи Эйлер из этого выводит следующие значения:

СЛУЧАЙ	СЕКВЕНЦИИ	ВЕРОЯТНОСТИ
I	$1(5)\,\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{90\cdot89\cdot88\cdot87}$	$=\frac{1}{511\,038}$,
II	$1(4)+1(1)\,\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot85}{90\cdot89\cdot88\cdot87}$	$=\frac{85}{511\,038}$,
III	$1(3)+1(2)\,\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot85}{90\cdot89\cdot88\cdot87}$	$=\frac{85}{511\,038}=\frac{85}{N}$,
IV	$1(3)+2(1)\,\frac{3\cdot4\cdot5\cdot85\cdot84}{N}$	$=\frac{3570}{N}$,
V	$2(2)+1(1)\,\frac{3\cdot4\cdot5\cdot85\cdot84}{N}$	$=\frac{3570}{N}$,
VI	$1(2)+3(1)\,\frac{4\cdot5\cdot85\cdot84\cdot83}{N}$	$=\frac{98\,770}{N}$,
VII	$5(1)\,\frac{85\cdot84\cdot83\cdot82}{N}$	$=\frac{404\,957}{511\,038}$.

Седьмой случай — тот, когда секвенция не появляется; численное значение соответствующей вероятности выше было нами найдено иным путем. Для дальнейшего разъяснения вышеприведенной таблицы произведем расчет для случая IV. Ищем P для $1(3)+2(1)$, т. е. вероятность того, что при тираже появится секвенция из трех чисел и двух изолированных чисел (например, 5, 6, 7, 65, 83), причем последовательность, в которой выходят номера, не играет роли. Здесь $\alpha=1$, $\beta=2$, $k=3$. Подставляя в (ω), мы для P получаем:

$$\frac{86\cdot 85\cdot 84}{1\cdot 2}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}=\frac{3570}{511\,038}.$$

Суммируя вероятности случаев I — VI, мы находим вероятность появления в одном тираже по крайней мере 1 (2), т. е. одной секвенции из двух чисел, именно $\frac{106\,081}{511\,038}$. И это значение нами было уже найдено: $P_c=1-P_s$.

Вероятность появления по крайней мере 2 (2) или 1 (3), или 1 (4), или 1 (5), получается суммированием вероятностей случаев I — V и равна $\frac{7\,311}{511\,038}$. Вероятность того, что среди пяти вытянутых чисел есть 1 (3) или 1 (4), или 1 (5), мы получаем, складывая соответственно вероятности случаев I — IV; она равна $\frac{3\,741}{511\,038}$. Аналогично, суммируя случаи I и II, получаем P для 1 (4) или 1 (5), т. е. $\frac{86}{511\,038}$.

Надлежит ответить на вопрос, почему при $r=5$ существуют именно случаи I — VII. Вопрос этот, очевидно, тождествен с вопросом о числе возможных разбиений числа 5 на целочисленные положительные слагаемые. Эйлер в связи с этим указывает на свои «исследования о разбиении чисел» [1]). Полезно указать в связи с этим, что соответствующее правило имеется уже в упомянутом выше «Ars conjectandi» Якова Бернулли. Оно примыкает там к рассуждениям Христиана Гюйгенса о числе воз-

[1]) Эйлер, цит. соч., стр. 227.

можных комбинаций при бросании костей, дающих определенное количество очков [1]).

Достаточно сформулировать вопрос таким образом: сколькими способами можно получить 5 очков, бросая одновременно 1, 2, 3, 4 и 5 костей и не различая при этом отдельных костей? Следуя указанию Якова Бернулли, мы находим, что существует лишь семь таких возможностей.

Далее Эйлер исследует вопрос о том, какие возможности следует различать среди видов секвенций. Решение вопроса он дает в следующей форме:

$$A=\frac{(r-1)\cdot(r-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(r-k+1)}{1\cdot2\cdot\ \ldots\ \cdot(k-1)}\times$$
$$\times\frac{(n-r+1)\cdot(n-r)\cdot(n-r-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-r-k+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ \ldots\ \cdot k}.$$

Отсюда мы получаем для числовой лотереи следующие значения: a) $k=1$, т. е. $1\,(5)$:
существует 86 возможностей вытянуть пять следующих друг за другом номеров из 90;

b) $k=2$, т. е. $1\,(4)+1\,(1)$ и $1\,(3)+1\,(2)$:
$A=14\,620$ возможностей;

c) $k=3$, т. е. $1\,(3)+2\,(1)$ и $2\,(2)+1\,(1)$:
$A=614\,040$ возможностей;

d) $k=4$, т. е. $1\,(2)+3\,(1)$:
$A=8\,494\,220$ возможностей;

e) $k=5$, т. е. $5\,(1)$:
$A=34\,826\,302$ возможности.

Таким образом, исчерпаны все возможности образования из 90 элементов сочетаний по 5. Если наши расчеты, значащиеся под пп. a) — e), правильны, то сумма возможностей для видов секвенций от $k=1$ до $k=r=5$ должна быть $\binom{n}{r}=43\,949\,268$.

[1]) Яков Бернулли, цит. соч., стр. 21 и след.

Мы находим подтверждение этого расчета, производя следующее сложение:

$$86 + 14\,620 + 614\,040 + 8\,494\,220 + 34\,826\,302 = 43\,949\,268.$$

Во введении к исследованию о вероятности секвенций Эйлер указывал на то, что одновременное появление в одном тираже чисел 90 и 1, т. е. последнего и первого чисел генуэзского лото, можно рассматривать как секвенцию из двух чисел.

В частности, Эйлер буквально пишет: однако «более естественно их исключить и держаться только естественного порядка чисел» [1]).

Иоганн III Бернулли (1744—1807) и Николай де Бегелен (1714—1789) рассмотрели вероятность появления секвенций и в том случае, когда выпадение в одном тираже номеров 90 и 1 рассматривается как секвенция. Бегелен пишет: «это значит—представить себе все номера расположенными по кругу, что добавляет еще одну секвенцию, именно ту, которую образуют, замыкая круг, наибольший и наименьший номера»[2]). Бернулли видит оправдание этого в том, «что здесь нет числа, предшествующего 1, а также следующего за 90»[3]).

Работа Бегелена была напечатана непосредственно вслед за рассмотренным исследованием Эйлера. Статья Бернулли появилась 2 года спустя[4]). К моменту написания своей статьи, состоящей из двух частей, Бегелен был уже знаком с завершенным к тому моменту исследованием Бернулли. Мы бы зашли слишком далеко, рассматривая

---

[1]) Эйлер, цит. соч., стр. 191.

[2]) N. de Beguelin, Sur les suites ou séquences dans la lotterie (sic!) de Genes (О последовательностях или секвенциях в генуэзской лотерее), опубликовано в Histoire de l'Académie Royale etc., Année 1765, Berlin, 1767, стр. 231 и след.; цитата находится на стр. 233.

[3]) Jean Bernoulli, Sur les suites ou séquences dans la lotterie de Genes, опубликовано в Histoire de l'Académie Royale etc., Année 1769, Berlin 1771, стр. 234 и след.; цитата находится на стр. 235.

[4]) В сноске, приписанной к моменту выхода статьи в свет Бернулли писал:

«Этот мемуар был зачитан в 1765 г. после мемуара г-на Эйлера по этому же вопросу, помещенного в Записках Академии наук за тот же год».

и комментируя здесь найденные при допущении указанной предпосылки результаты; к тому же в «Лекциях» Кантора уже имеется подробное изложение «инволюторного» приема Бегелена[1]). Для полноты и сравнения с соответствующим результатом Эйлера мы укажем приводимую Кантором по Бегелену—Бернулли формулу вероятности того, что среди r номеров тиража секвенции не имеется

$$P_s = \frac{n}{r} \cdot \binom{n-r-1}{r-1} : \binom{n}{r}.$$

В сноске, написанной Бернулли при публикации упомянутой статьи, указывается, что лото более модно, чем когда-либо раньше. Это замечание находит подтверждение в исследованиях О. Варшауэра[2]). Варшауэр сообщает, что 10 июня 1769 г. арендаторы лотерейного предприятия добровольно предложили королю повысить арендную плату и просили продлить соответствующий договор на больший срок, чем ранее. С каждым тиражом все большее количество публики принимало участие в лотерее, а доходы арендаторов непрерывно росли. Не приходится удивляться тому, что числовое лото вместе с тем неоднократно давало повод к исследованиям в области теории вероятностей. Как и Эйлер, Бернулли подчеркивает трудности, с которыми он встретился, изыскивая решение вопроса.

В связи с числовой лотереей возникает также другой вопрос: какова вероятность того, что после i тиражей появится каждый из n номеров при условии, что в каждом тираже вытягивается r номеров?

Л. Эйлер занимался и этой проблемой[3]). Мы хотим лишь сообщить найденный им результат, который можно

---

[1]) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig—Berlin, N, IV, 1924, стр. 235 и след.

[2]) O. Warschauer, Die Zahlenlotterie in Preußen, стр. 38.

[3]) L. Euler, Opusc. analyt., II, 1785, стр. 331—346 (Opera omnia I, 7, стр. 408—424). Цитируется по М. Кантору, цит. соч., стр. 236. Кроме того Эйлер занимался числовой лотереей два раза; а) экспертиза для короля Фридриха (1749): б) Réflexions sur une expèce singulière de loterie, hommée loterie génoise, Opera postuma 1, 1862, стр. 319 и след. (Opera omnia I, 7, стр. 466—494).

представить в следующей форме:

$$P=\left\{\binom{n}{r}^i-n\cdot\binom{n-1}{r}^i+\binom{n}{2}\binom{n-2}{r}^i-+\ \ldots\right\}:\binom{n}{r}^i.$$

Если провести это деление, то получится выражение, выведенное другим способом А. Мейером в его лекциях по теории вероятностей, которые он читал в 1849—1857 гг. в Льежском университете [1]):

$$P=1-\frac{n}{1}\cdot\left(\frac{n-r}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left[\frac{(n-r)\cdot(n-r-1)}{n\cdot(n-1)}\right]^i-$$
$$-\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\left[\frac{(n-r)\cdot(n-r-1)\cdot(n-r-2)}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}\right]^i+-\ \ldots$$

Например, при $n=90$, $r=5$ и $i=100$ для вероятности того, что будут вытянуты все номера, получается

$$P=0{,}7410.$$

Последнее выражение позволяет вычислять P приближенно.

Именно:

$$(1-x)^n=1-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2-\binom{n}{3}x^3+-\ \cdots,$$

значит,

$$1-\binom{n}{1}\cdot\left(\frac{n-r}{n}\right)^i+\binom{n}{2}\cdot\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2i}-$$
$$-\binom{n}{3}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{3i}+-\ \ldots=\left[1-\left(\frac{n-r}{n}\right)^i\right]^n.$$

Очевидно, при большом n можно пренебречь опущенными членами.

[1]) A. Meyer, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von E. Czuber, Leipzig, 1879, стр. 46 и след.

Таким образом, получается приближенная формула для числового лото:

$$P=\left[1-\left(\frac{90-5}{90}\right)^{i}\right]^{90}. \qquad (ε)$$

Отсюда можно прямым путем получить i, если задано P. Для $P=\frac{1}{2}$ получается, например, ~ 85 розыгрышей.

Формула (ε) была бы точной, если бы вероятность вытягивания одного номера в одном тираже оставалась бы постоянно равной $\frac{5}{n}$. В действительности, однако, вероятность выхода номера в течение тиража изменяется. При вытягивании первого номера она равна $\frac{r}{n}$, при вытягивании второго номера $\frac{r-1}{n-1}$ и т. д., при вытягивании пятого номера $\frac{r-4}{n-4}=\frac{1}{n-4}$ [1]).

У Мейера есть еще другая задача: требуется определить вероятность того, что по крайней мере один номер в тираже будет однозначным.

Выведенную Мейером из «урновой схемы» формулу мы можем записать так [2]):

$$P=\frac{1}{n\cdot(n-1)\cdot\ \dots\ \cdot(n-r+1)}\cdot\sum_{f=1}^{r}\left\{\frac{r!}{f!\,(r-f)!}\cdot[a\cdot(a-1)\cdot\ \dots\right.$$
$$\left.\dots\cdot(a-f+1)]\cdot[b\cdot(b-1)\cdot\ \dots\ \cdot(b-r+f+1)]\right\},$$

причем

a = числу однозначных номеров ($=9$),

b = числу двузначных номеров ($=81$),

f = числу однозначных номеров в одном тираже ($f=1, 2, \dots, 5$).

---

1) А. Мейер, цит. соч., стр. 54.

2) А. Мейер, цит. соч., стр. 33 и след. и стр. 41 и след.

Вероятность того, что по крайней мере один номер в одном тираже будет однозначным $\left(=\sum_{f=1}^{r}\ldots\right)$, равна 0,417019.

Отдельные слагаемые, соответственно умноженные каждое на $\frac{1}{n\cdot(n-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-r+1)}$, дают вероятность, что все пять или соответственно четыре, три, два или один номер будут однозначными, и в частности мы получаем:

$$
\begin{array}{lll}
\text{для } f=r=5 & & P=0{,}000003,\\
\text{»}\quad f & =4 & P=0{,}000232,\\
\text{»}\quad f & =3 & P=0{,}006193,\\
\text{»}\quad f & =2 & P=0{,}069888,\\
\text{»}\quad f & =1 & P=0{,}340703.
\end{array}
$$

Не лишено интереса сопоставить с этими вероятностями действительные результаты 201 тиража, произведенного с 1794 по 1805 г. в берлинской числовой лотерее [1]). Однозначный номер выиграл в 70 тиражах (ожидать можно было 68,5 тиража), в 11 тиражах имелись два двузначных номера (ожидать можно было 14 тиражей). Имели место два случая, когда в тираже было вынуто три однозначных числа (это было вероятно для 1,3 тиража).

В целом по крайней мере один однозначный номер появился 83 раза из 201, между тем как согласно теоретическому расчету их должно было бы появиться 83,8.

---

[1]) Nachricht von den kgl. Preuß. Zahlen-und Classen-Lotterien auf das Jahr 1806, Berlin, стр. 21 и след. Речь идет здесь о наиболее обширном, имеющемся в распоряжении статистическом материале такого рода, т. е. содержащем данные о вытянутых в каждом тираже номерах.

Это—очень хорошее совпадение между теоретическими и действительными результатами, если принять во внимание, что для проверки был взят всего лишь 201 тираж.

Целью нашей статьи было рассмотреть избранные результаты тех исследований классиков теории вероятностей, которые стимулировались в течение трех столетий азартными играми. И в этом примере теории числовой лотереи проявляется живое взаимодействие между теорией и жизнью.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ИСТОРИИ АНТИЧНОЙ МЕХАНИКИ [1])

А. Т. Григорьян и В. Ф. Котов

1. Введение

Во многих обобщающих трудах по истории механики основные понятия и принципы античной механики либо не рассмотрены совсем, либо ограничены областью статических проблем; период первоначального формирования основных понятий динамики часто игнорируется вовсе.

Правда, древние не смогли найти правильные принципы динамики. Однако в разработке общих понятий они сделали так много, что эти их достижения почти без изменения могли быть положены в основание новой науки. Основоположникам новой науки в ряде случаев осталось добавить немного, чтобы придать этим общим понятиям тот специальный смысл, который они получили в классической механике нового времени.

Разумеется, между основными понятиями и принципами механики существует тесная связь. Это не мешает тому, что исторические условия их развития были существенно различными. Общие понятия механики с большим успехом разрабатывались уже древними философами,

---

[1]) При подготовке к печати этой работы большую помощь оказал В. П. Зубов, прочитавший рукопись и сделавший ряд ценных замечаний и некоторые дополнения в тексте, а также проверивший переводы всех цитат из древнегреческих авторов. Многими замечаниями авторы обязаны также А. П. Юшкевичу.

тогда как принципы не могли получить сколько-нибудь законченную форму раньше, чем техника и механическая практика достигли определенного уровня развития.

Особенности развития общих понятий механики в античную эпоху стояли в прямой зависимости от особенностей развития античной техники, преимущественно основывавшейся на знании законов статики. Древняя техника, основанная на статике (строительная механика, фортификация и гидротехника, кораблестроение и т. д.), уже достигла необходимой зрелости для научных обобщений (Архимед). Зато техника, основанная на динамике, была еще в зачаточном состоянии, а потому значительные научные обобщения в этой области могли появиться лишь гораздо позже (Галилей).

Уже из сказанного становится ясным то интересное обстоятельство, что в древнее время основания механики развивались по двум совершенно различным линиям. Общие понятия механики (время, пространство, масса, сила, движение, инерция и т. д.) и общие проблемы динамического значения (законы падения, закон инерции, принцип сохранения массы и движения и т. д.) возникли и развивались в тесной связи с философией, тогда как проблемы статики возникали и развивались в связи с античной техникой и математикой. В средние века по мере роста динамической проблематики в технике ведущая роль в развитии динамики перешла от философии к технике, неизмеримо усилилось значение математических методов, однако и философия продолжала оказывать значительное влияние на развитие новой механики: схоластика, канонизировавшая наиболее реакционные стороны древней философии, служила серьезным препятствием для прогресса научной динамики, новая динамика не могла появиться рядом со схоластикой. Нужно было прежде разрушить вековые предрассудки, старые представления и традиции. Нужно было нанести серьезные удары по всей системе средневековой науки, подорвать философские основы старого мировоззрения и лишь на новой почве строить науку. Конечно, эта задача могла быть решена механикой лишь в тесном союзе с новой теорией познания и методологией. И мы знаем, что исторические судьбы новой философии тесно переплетаются с прогрессом новой механики. Механика, как ни одна другая наука, находилась в тесной связи с развитием философии и в свою очередь оказывала на нее серьезное влияние. Так постепенно сближались и, наконец, слились в высшем синтезе результаты философского, математического и специального механического мышления. Невозможно поэтому признать обоснованным заявление Дюринга, будто «философия всегда выступала враждебно успехам механики»[1]). Такая точка зрения в корне искажает перспективу и безнадежно запутывает выяснение кардинальных исторических проблем.

Мы уже отметили, что формулировка принципов и законов механики шла в связи с развитием механической практики и, следовательно, закономерности прогресса механики, ее источники и движущие силы находились в тесной связи с характером общественного производства и техники. Этот достоверный вывод объективной истории науки прямо противоположен исторической концепции таких авторов, как, например, Г. Клейн, который сводил цели и движущие силы науки к «идеалистическим потребностям духовно одаренных мужей»[2]), или Э. Мах, усматривавший сущность и цель всякой науки в «экономии мышления»[3]).

Считаясь с огромной ролью античного наследия, нужно признать, что исследование вопросов развития общих понятий и принципов механики древнего времени имеет существенное значение для правильной разработки истории позднейшей механики.

«Греки навсегда останутся нашими учителями»[4]), ибо они развивали... «первоначальный, наивный, но по сути дела правильный взгляд на мир»[5])... «В многообразных

---

[1]) Е. Дюринг, Критическая история общих принципов механики, М., 1893, стр. 97.

[2]) H. Klein, Die Principien der Mechanik, Lpzg., 1872, стр. 3.

[3]) Э. Мах, Механика, СПб., 1909, стр. 14.

[4]) К. Маркс и Ф. Энгельс, Сочинения, т. I, Госполитиздат, М., 1938, стр. 479.

[5]) Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, Госполитиздат, М., 1951, стр. 20.

формах греческой философии уже имеются в зародыше, в процессе возникновения почти все позднейшие типы мировоззрений»[1]). Поэтому мы вынуждены будем ...«в философии, как и во многих других областях, возвращаться постоянно к достижениям того маленького народа, универсальная одаренность и деятельность которого обеспечили ему в истории развития человечества место, на какое не может претендовать ни один другой народ»[2]).

Прежде чем рассматривать первые попытки древних греков в разработке основных понятий механики, напомним, что греки появились на исторической арене тогда, когда народы Египта, Вавилона и Финикии уже достигли высокого развития. Вместе с тем за сравнительно короткое время греки смогли не только заимствовать многое ценное от этих древнейших культур, но и скоро превзойти своих учителей.

Колоссальные сооружения Египта, Ассирии, Вавилона, выполненные в древнейшие времена, одним своим существованием доказывают, что уже тогда были известны такие механические орудия, как клин, рычаг, наклонная плоскость и, может быть, блок[3]). Египетские фараоны стали строить пирамиды уже за III тысячи лет до н. э. Наиболее высокой являлась пирамида Хуфу (IV династия); на ее сооружение употреблено 2 300 000 каменных глыб, средний вес которых равен 2,5 тонны. При сооружении храмов, колоссальных статуй и обелисков вес каменных глыб достигал десятков и даже сотен тонн[4]). Каменные глыбы вырабатывались в каменоломнях и доставлялись на место на специальных салазках; колесные повозки впервые стали применяться в армии. Однако, если доставка камней на место сооружений могла быть выпол-

---

[1]) Ф. Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, М., 1955, стр. 25.

[2]) Там же, стр. 25.

[3]) О раннем применении весов имеются свидетельства, восходящие к XIV веку до н. э. В одной из надписей этого времени говорится: «Да наградит тебя бог юбилеями как „число песку" берега моря, как вес горы, взвешенной на весах».

[4]) Так называемые «колоссы Мемнона», например, имели вес 700 *т*, а колоссы Рамсеса II в Танисе—1000 *т* (Всеобщая история архитектуры, т. I, М., 1944, стр. 50).

нена усилиями огромного количества людей (согласно Геродоту, над постройкой пирамиды Хеопса работало в течение 20 лет 100 000 человек), то подъем тяжестей на большие высоты и их установка требовали специальных механических приспособлений.

Какие же механические орудия применяли египтяне? В каменоломнях для отрыва каменных глыб от породы широко применялся клин. В отверстие, просверленное в камне, забивали деревянный смоченный водой клин, который от набухания расчленял породу. Для подъема тяжестей нередко пользовались наклонной плоскостью. Наклонная дорога к пирамиде Хафра имела подъем, равный 45,8 *м*, при длине 494,6 *м*. Следовательно, угол наклона к горизонту равнялся 4,4°, и, таким образом, выигрыш в силе при поднятии тяжестей на эту высоту был значительный. Применялись насыпи с более крутым наклоном, а также ступенчатые насыпи, на которых тяжести передавались со ступеньки на ступеньку с помощью специальных приспособлений. Наличие выбоин в каменных глыбах, составляющих пирамиды, указывает на то, что для поднятия и установки на место камней применялись специальные механические приспособления. Возможно, что эти приспособления состояли из крючьев, схватывавших каменные плиты, и блоков, поднимавших камни на известную высоту. Широко применялся рычаг для поднятия и горизонтального перемещения каменных глыб, тем более, что рычаг для подъема воды (шадуф) в Египте был известен с древнейших времен. Для облицовки и пригонки камней, а возможно и для поднятия камней со ступеньки на ступеньку применялись качалки. Особыми механическими приспособлениями приходилось пользоваться для установки обелисков и колоссальных статуй [1]).

В целом характер античной техники естественно определялся экономическими основами рабовладельческого хозяйства. С возникновением рабства были созданы пред-

[1]) Из литературы вопроса укажем: Н. А. Шолпо, Подъем тяжестей в строительной технике древнего Египта.—Архив истории науки и техники, вып. 8, М.—Л., 1936, стр. 137—160; Н. М. Лурье, Горное дело в древнем Египте.—Там же, вып. 3, Л., 1934, стр. 105—138.

посылки для более широкого разделения труда между земледелием и производством, для разделения труда в производстве. Рабство обеспечило более быстрый рост техники, предоставило рабовладельцам досуг для духовной деятельности. Однако рабовладельческое хозяйство содержало в себе не менее мощные начала, тормозившие дальнейший рост техники. Основной формой разделения труда в древнем рабовладельческом хозяйстве была простая кооперация рабов. Рабы выполняли столь элементарные работы, что их без труда можно было перебрасывать с одной работы на другую. Рабовладельцы поручили рабам такие примитивные работы, которые или вовсе не требовали орудий труда, или орудия были крайне грубыми, неуклюжими и во всяком случае такими, которые раб не мог бы испортить. Раб, низведенный сам до степени орудий труда, не был заинтересован в высокой производительности труда, и, если представлялась возможность, он всеми средствами старался мстить и вредить рабовладельцу.

Таким образом, из самого характера рабовладельческой экономики вытекали примитивный характер античной техники и ее медленная эволюция. Массовая техника носила исключительно примитивный и статический характер. Более или менее сложные механические орудия (водяное колесо, червячная передача, архимедов винт, насос и т. д.) применялись сравнительно редко и случайно. Рабский труд препятствовал массовому распространению механических приспособлений.

Более значительные импульсы развития по сравнению с ремеслом и сельским хозяйством техника древнего мира получала со стороны морского и особенно военного дела. Здесь применялись более тонкие, сложные и разнообразные механические приспособления, которыми управляли не рабы, а свободные рабочие или военнослужащие.

Техника военного дела стояла (особенно в эллинистически-римский период) значительно выше техники сельского хозяйства и промышленности. На мощи огромной армии покоился рабовладельческий строй, армия была основным средством добычи рабов и материальных ценностей. И, наконец, тот факт, что технические средства армии находились в руках свободных граждан, также являлся необходимым условием технического прогресса.

Уже в V веке до н. э. (Пелопоннесская война) афинская армия применяет тараны (стенобитные орудия) и гелеполы. Гелеполы иногда достигали гигантских размеров. Для метания больших стрел пользовались катапультами; прототипом пулемета являлся полибол, применявшийся для непрерывного метания стрел; баллисты служили для метания камней, ядро в 4 фунта могло быть выбрасываемо на расстояние до 300 *м*. Существовали специальные прицельные приспособления и приборы для изменения траектории.

Большое значение в экономике древнего мира имел гражданский и военно-морской флот. Античная техника кораблестроения достигла высокого совершенства, а массовость ее способствовала возникновению гидростатической проблематики. На судах рабов использовали лишь для гребли; более ответственные функции (управление рулями, парусами и т. д.) поручались свободным рабочим.

Понятно, что при основном статическом характере античной техники рычаг являлся одним из основных ее элементов и почти все проблемы древней статики концентрировались вокруг проблемы обоснования принципа действия рычага.

Греки и римляне применяли рычаг в самых разнообразных вариантах, но особенно важным случаем применения рычага являлись равноплечные весы и безмены самых разнообразных конструкций: безмен с перемещающейся точкой опоры, безмен с неподвижной точкой опоры, но с перемещающимся грузом или противовесом и т. д. Развитие торговли, появление золота в качестве менового эквивалента, драгоценных камней и т. п. требовали более точных способов взвешивания. Совершенно очевидно, что практика взвешивания грузов на безменах основывалась на эмпирическом знании закона рычага и сама она, в свою очередь, доводила эти законы до степени очевидности. Устройство безмена было основано на твердом убеждении, что двойному грузу, подвешенному к одному плечу рычага (с неподвижной точкой опоры и постоянным по величине противовесом), соответствует вдвое большее удаление противовеса от точки опоры. Более точные способы взвешивания (определение удельных весов, взвешивание драгоценностей) требовали и более точных сведений о законах рычага.

Раньше уже было сказано о применении клина для отрыва камней от породы. Последующее развитие торговли и производства привело к его более широкому использованию. Так, например, при развитии виноделия и маслоделия появился рычажный пресс, затем пресс, работающий с помощью вдавливаемого клина, и, наконец, винтовой пресс. Однако, несмотря на многочисленные попытки, древние не смогли дать правильную теорию клина.

Ворот применялся для горизонтального передвижения тяжестей (ворот с вертикальной осью), подъема тяжестей, подъема воды из колодцев и т. д.

Достоверных сведений о времени появления блока у древних народов нет. Греки и римляне уже широко применяли в строительной технике как единичные блоки, так их системы (полиспасты). Теорию блока и полиспастов разрабатывал Архит Тарентский (IV в. до н. э.), но результаты его исследований до нас не дошли.

Колесо уже рано стало применяться в военной технике древних народов (боевые колесницы). В греческую и римскую эпоху широко применялись для преобразования вращательных движений зубчатые колеса.

Хорошо знали древние и технические применения винта. Некоторые древние авторы приписывали изобретение винта Архиту Тарентскому. Изобретение бесконечного винта для подъема и передвижения тяжестей и бесконечного водоподъемного винта древние авторы приписывают Архимеду. Применение винта явилось побудительной причиной для постановки ряда новых технических и математических проблем. Известно, что Архимед, изобретатель бесконечного винта, сделал замечательные математические исследования спиралей. Папп Александрийский (конец III—IV в. н. э.) рассматривал винт как закрученный клин, приводимый в движение не ударом, а вращением.

В отличие от статики античная динамика не имела серьезной технической основы для своего развития. Сравнительно примитивный характер динамической техники (ударные и метательные орудия) не благоприятствовал разработке более сложных проблем динамики, а потому понятно, что в области принципов динамики древние ничего значительного не оставили.

Говоря о технике как источнике и стимуле развития античной механики нельзя вместе с тем забывать еще об одной области—астрономии. Потребность объяснить сложные видимые движения планет (небесные «явления» или «феномены») приводила к необходимости разлагать их на более простые, представляя их как результат нескольких круговых движений. Эту задачу призвана была решить теория «гомоцентрических сфер», предложенная Евдоксом Книдским (IV в. до н. э.). Евдокс предположил, что каждая планета неразрывно связана с равномерно вращающейся сферой. Ее объемлет другая, с ней концентрическая, но ось которой расположена под известным углом к первой. Внутренняя вращающаяся сфера увлекается в своем движении сферой, которая ее объемлет, и т. д. В центре всех сфер находится Земля. Для Луны и Солнца Евдокс принимал по три сферы, а для планет по четыре. С помощью этой гипотезы более или менее удовлетворительно удавалось описать движения наиболее удаленных планет (Сатурн и Юпитер). Евдокс ввел 27 сфер, Аристотель увеличил их число до 56. Теория «гомоцентрических сфер» предполагала, таким образом, уменье разобраться в довольно сложной кинематике небесных движений.

То же следует сказать о теории эпициклов и деферентов. Чтобы объяснить видимое движение планет, Гиппарх (160—125 гг. до н. э.) ввел предположение об эксцентрических кругах, центры которых не совпадают с центром Земли, а Клавдий Птолемей (70—147 гг. н. э.) дополнил это предположение гипотезой эпициклов—круговых движений вокруг точки, в свою очередь перемещающейся по эксцентрическому кругу, или так называемому «деференту» (т. е. по кругу, «переносящему» или перемещающему эпицикл).

В сущности вся теория «гомоцентрических сфер», «эксцентрических кругов» и «эпициклов» покоилась на сложении равномерных круговых движений. Другими словами, координаты видимых движений небесных тел древние астрономы представляли в переводе на наш язык в виде ряда периодических членов:

$$x = x_0 + Q_1 \cos \alpha_1 t + Q_2 \cos \alpha_2 t + \ldots + Q_n \cos \alpha_n t,$$
$$y = y_0 + Q_1 \sin \alpha_1 t + Q_2 \sin \alpha_2 t + \ldots + Q_n \sin \alpha_n t.$$

Несмотря на искусственность теории эпициклов и деферентов, она сыграла положительную историческую роль в развитии научной астрономии.

Эти попытки дать кинематическую картину небесных движений были тесно связаны с общими успехами кинематического метода в математике. Известно, что древние математики пользовались кинематическим методом для образования математических кривых. Архит Тарентский конструировал для вычерчивания кривых специальные приборы. Гиппий Элидский, живший около 400 г. до н. э., нашел новую кривую, известную под названием квадратрисы, путем сложения двух равномерных движений, а Никомед (II в. до н. э.) нашел аналогичным путем конхоиду.

Кинематический метод определения кривых применялся также Архимедом. Вот его определение спирали: если прямая линия равномерно вращается в некоторой плоскости вокруг одного из своих концов, остающегося неподвижным, возвращаясь в исходное положение, и если одновременно некоторая точка также равномерно движется по этой линии, начиная от неподвижного конца, то эта точка описывает спираль.

Заметим, что кинематические расчеты применялись также при изготовлении различного рода автоматов (счетчики проходимых расстояний, часы и т. д.). Так, например, Архимед изготовил знаменитую модель небесной сферы, в которой автоматически воспроизводились видимые движения светил.

О тесной связи методов механики и математики в эллинистический период свидетельствует «Эфодик» Архимеда — произведение, в котором механика рассматривается как средство для решения геометрических задач[1]). Правда, Архимед не считал механический метод доказательным;

[1]) И. Гейберг, Новое сочинение Архимеда. Послание Архимеда к Эратосфену о некоторых теоремах механики, перевод с нем. с предисловием И. Ю. Тимченко, Одесса, 1909, стр. 5–6.

он скорее рассматривал его как удобный прием для нахождения геометрических теорем, которым после этого надлежит дать строгое, геометрическое доказательство.

Конкретным примером применения теоретических положений механики к выводу геометрических теорем может служить определение площади сегмента параболы, опирающееся на теоремы о центре тяжести плоских фигур и закон рычага[1]).

С другой стороны, засвидетельствовано (например, у Архита) пользование механическими (инструментальными) приемами при решении математических задач: Архиту принадлежит изобретение прибора для нахождения двух средних пропорциональных к двум отрезкам (к чему, как известно, может быть сведено решение задачи об удвоении куба).

Наконец, нельзя забывать, что разработка механики и механическое истолкование природных явлений не были оторваны от идеологической борьбы. Так, учение древних атомистов служило острым орудием против религии, суеверий, мистики, помогало в борьбе против идеалистических тенденций в естествознании. Уже в самом начале своей поэмы Лукреций[2]) отметил великие заслуги перед человечеством Эпикура, смело восставшего против религии и суеверий. Борьба с религией должна быть основана на объективных знаниях о природе; освободиться от суеверий можно только на базе изучения законов природы, механики мироздания. Такую же цель ставит себе и Лукреций:

«... учу я великому знанью, стараясь
Дух человека извлечь из тесных тенет суеверий»[3])

[1]) В «Эфодике» сохранилось лишь механическое доказательство этой теоремы. Геометрическое, более строгое доказательство, обещанное автором, утрачено вместе с концом сочинения. Оно дошло до нас в другом сочинении Архимеда — «О квадратуре параболы». Изложение и анализ того и другого см. в книге С. Я. Лурье, Архимед, М.—Л., 1945, стр. 78—82 и 108—116.

[2]) Лукреций, О природе вещей, книга 1, стихи 62—69. Здесь и дальше поэма Лукреция цитируется по переводу Ф. А. Петровского (Изд. АН СССР, т. 1—2, 1945—1947).

[3]) Там же, книга 1, стихи 931—932.

Со своей стороны философы идеалистического лагеря делали все возможное, чтобы углубить и узаконить разрыв между теоретическим исследованием и практикой. Интересно в этом отношении высказывание Плутарха: «Всем любезное и прославленное искусство строить орудия (ὀρ-γανική) начали культивировать Евдокс и Архит вместе со своими последователями, разукрашивая и основывая на чувственных и инструментальных иллюстрациях решение проблем, трудно решаемых с помощью числовых и геометрических доказательств... Но когда Платон в негодовании стал упрекать их, что они губят и разрушают достоинство убегающей от бестелесного и умопостигаемого к чувственному и вновь начинающей пользоваться телами, нуждающимися для своего изготовления в большой и трудной работе рук, тогда отвергнутая механика отделилась от геометрии и, долгое время презираемая философией, стала одной из отраслей военных искусств»[2]).

Таковы в общих чертах разнообразные факторы, способствовавшие формированию основных понятий античной механики. Нам предстоит теперь ближе присмотреться к начальным этапам греческой философии, объединявшей в еще нерасчлененном виде первые знания о самых различных явлениях природы.

2. Развитие основных понятий механики в произведениях первых греческих философов

Уже в ранних стадиях развития греческой философии можно обнаружить зачатки двух принципиально различных механических концепций: кинетической и динамической. Со времени появления научной динамики (XVII в.) эти две концепции легли в основу двух различных методов обоснования механики и до конца XIX столетия

[1]) Плутарх, Биография Марцелла, § 14. Ср. аналогичное свидетельство Плутарха в его «Застольных вопросах» (книга VIII, вопрос 2, гл. I): «Платон упрекал школу Евдокса, Архита и Менехма, стремившихся удвоение куба свести к инструментальным и механическим приспособлениям, ... ибо таким образом разрушается достоинство геометрии, которая вновь возвращается к чувственному, не поднимаясь ввысь и не постигая вечные и бестелесные образы».

научный прогресс был ознаменован борьбой этих двух направлений.

Основные положения динамической концепции древних сводятся к следующему: материи чуждо самодвижение; сама по себе материя может пребывать лишь в покое. Движение косной материи определяется действием на нее активных, движущих начал—сил, существующих независимо от материи и действующих извне на косные массы. По Эмпедоклу, например, материя приводится в движение двумя противоборствующими мировыми силами: «любовью» и «ненавистью».

Напротив, с точки зрения кинетической концепции в природе нет каких-либо особых начал движения, отличных от свойств самой материи. Материи свойственно самодвижение. Наиболее последовательными представителями античного кинетизма являлись атомисты (Левкипп, Демокрит, Эпикур и Лукреций). Принцип механического самодвижения материи в общей форме был выражен в их учении о несоздаваемости и неразрушимости материи и движения. Согласно учению атомистов природа ничего не содержит, кроме материи, движущейся в пустом пространстве.

Очагом возникновения и развития греческой философии явились, как известно, торговые города Ионии. Наиболее видные представители ионийской натурфилософии были сторонниками стихийно-материалистических взглядов на природу: в основе всякого рода изменений лежит преобразование материального субстрата, в основе всех явлений лежит единая, объективно существующая, вечно движущаяся материя. В качестве такой единой первоосновы вещей Фалес Милетский (род. в I четверти VII в.—ум. в середине VI в. до н. э.) признавал воду. Каждая материальная вещь, поскольку она движется или движет, обладает душой (например, магнит притягивает железо потому, что имеет душу). Правда, у Фалеса движущая сила не является внешним действующим началом; она внутренним, имманентным образом присуща материи (гилозоизм). Однако, с другой стороны, самое различение движущего (душа) и движимого (материальная вещь) уже содержало в зародыше возможность коренного противопоставления их в дальнейшем, а следовательно, возможность динамической интерпретации процессов движения[1]).

По учению Анаксимандра (род. в конце VII в.—ум. в I половине VI в. до н. э.), как и у Фалеса, природа—это материя, пребывающая в вечном движении. Все происходит из беспредельной первоосновы—чрезвычайно тонкой материи, называемой апейрон (бесконечное или неопределенное). Материи приписывается неуничтожимость и отсутствие сознания. В процессе вечного движения материи выделяются чисто механическим путем однородные элементы. Смешение элементов в том или другом отношении представляется как причина образования всех вещей. Таким образом, все многообразие вещей и их качества сводятся к чисто механическому сочетанию элементов единой субстанции. Развитие мира—это вечный, протекающий с необходимостью процесс видоизменения материи. Ничто, даже бог, не может нарушить, по мнению Анаксимандра, этот великий процесс смешения и разложения. Учение Анаксимандра принадлежит, следовательно, к кинетическому направлению, так как у него движущая причина не противопоставляется материи. Причиной всякого частного, местного движения является вечное движение «бесконечного».

Третий представитель милетской (ионийской) натурфилософии Анаксимен (VI в. до н. э.) приписывал первостихии (воздуху) вечное движение, разрежение и сгущение. Путем разрежения из воздуха образуется огонь, путем сгущения—ветер, облака, вода, камни. Таким образом, и здесь «самодвижение» материи (в виде сгущения и разрежения) является причиной возникновения всех вещей материального мира. Природа пребывает в вечном потоке разрушения и возникновения миров.

Наиболее яркое и определенное выражение идея вечности и универсальности движения нашла в Ионии у

[1]) Заметим, что культурно-исторически понятие о нематериальной силе-источнике движения, отличной от движущегося, восходит к очень древним временам, однако в истории греческой философии оно с полной определенностью появляется позже, чем кинетические (гилозоистические) представления ионийцев. Корни такого возврата к более архаическим представлениям следует искать в явлениях общественного (идеологического) порядка.

Гераклита Эфесского (род. между 540 и 530 гг.—ум. около 470 г. до н. э.). Гераклит учил, что все существующее в природе возникает из вечно движущегося огня. Огонь Гераклита нужно понимать не в смысле обычного пламени, но как некую огнеподобную первооснову всех вещей. Мир как совокупность всех вещей сотворен не каким-нибудь богом или человеком, но был, есть и будет вечно живым огнем, закономерно воспламеняющимся и закономерно угасающим. Об этом фрагменте Ленин замечает: «Очень хорошее изложение начал диалектического материализма»[1]).

С большой силой подчеркивал Гераклит универсальность движения в мировом бытии. Реальное бытие вещей можно понять лишь тогда, когда мы будем рассматривать его в процессе вечного движения, изменения. Процесс развития понимается как раздвоение единого на враждующие противоположности. Всякое развитие по своему существу внутренне противоречиво, и это противоречие состоит в отрицании одного и становлении другого качества.

Великой заслугой Гераклита перед наукой является его учение о природе как о вечном закономерном процессе изменения материи. В вечной смене вещей Гераклит сумел выделить постоянную, абсолютную основу всех изменений и усмотрел ее в единой материи и в закономерной связи явлений. Понятие «логоса» (слово, разум) пронизывает все его учение. По свидетельствам древних, Гераклит отрицал вмешательство богов в дела природы, утверждая, наоборот, господство в природе «логоса», т. е. абсолютного закона, необходимости, «судьбы», «рока».

«Когда мы подвергаем мысленному рассмотрению природу..., то перед нами сперва возникает картина бесконечного сплетения связей и взаимодействий, в которой ничто не остается неподвижным и неизменным, а все движется, изменяется, возникает и исчезает... Этот первоначальный, наивный, но по сути дела правильный взгляд на мир был присущ древнегреческой философии и впервые

---

[1]) В. И. Ленин, Философские тетради, Госполитиздат, М., 1947, стр. 294.

ясно выражен Гераклитом: все существует и в то же время не существует, так как все *течет*, все постоянно изменяется, все находится в постоянном процессе возникновения и исчезновения»[1]).

Реакцией на диалектику ионийцев явилась, как известно, философия элеатов. Элейским философам казалось, что учение Гераклита делает невозможным познание, в корне уничтожает всякую науку об «истинном», ибо о том, что меняется, о том, что возникает и уничтожается, ничего сказать нельзя. Элеаты не признавали объективность развития материи. Согласно их учению истинное бытие едино, абсолютно неподвижно, божественно и познаваемо лишь разумом. Для Ксенофана (род. около 570 г.— ум. около 470 г. до н. э.), одного из основоположников элейской философии, первоосновой всего сущего является неизменная природа, рассматриваемая в целом. Она же именуется богом[2]).

Дальнейшее свое развитие эта концепция получила у Парменида (род. в конце VI в.—время расцвета около 470 г. до н. э.). Парменид утверждал возможность и истинность лишь внечувственного умозрительного познания, и его учение сковывало развитие естественных наук, направленных на познание чувственно данного мира. Физические теории Парменид расценивал лишь как более или менее правдоподобные догадки, не имеющие характера непреложной истины. По физическому учению самого Парменида всякое чувственное, т. е. кажущееся, неистинное бытие состоит из двух противоположных элементов: все возникает из смешения и разложения этих элементов. Движущее начало противопоставляется косной, не способной к «самодвижению» материи, и представляется в виде начала, находящегося в центре вселенной и управляющего смешением и разложением элементов. Механическая концепция Парменида принадлежит, следова-

---

[1]) Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, Госполитиздат, М., 1951, стр. 20.

[2]) Аристотель, Метафизика, книга I, гл. 6, стр. 28: «воззревши на небо в его целости, он заявляет, что единое, вот что такое бог». Здесь и дальше «Метафизика» цитируется по переводу А. В. Кубицкого, М.—Л., Соцэкгиз, 1934.

тельно, к динамическому направлению: материи приписывается косность, а движущие начала целиком отделяются от движимой материи.

Учение Парменида о невозможности множественности бытия, учение о неистинности пространства, времени и движения вызвало резкие возражения со стороны многих ученых. С защитой основных положений Парменида выступил гениальный мастер древней диалектики Зенон (род. около 490 г.—ум. около 430 г. до н. э.). Зенон защищал правильность взглядов Парменида не прямым путем, а косвенным, обнаруживая те противоречия, которые возникают, если стать на точку зрения противников. Все усилия Зенона направлены на доказательство невозможности множественности бытия, невозможности движения, фиктивности времени, пространства и вообще чувственных элементов знания. Это—знаменитые «апории» (т. е. затруднения), которые, по мнению Зенона, неизбежно встают перед всякой мыслью, пытающейся овладеть природой движения. Зеноновы доказательства невозможности движения замечательны тем, что они впервые со всей отчетливостью раскрыли диалектику движения.

Зенон утверждал, что движущаяся стрела в каждый момент времени должна занимать некоторую часть пространства, но занимать определенную часть пространства это означает «быть» или покоиться в этом месте. Таким образом, в каждый момент времени летящая стрела занимает некоторое место, т. е. покоится в нем. А из совокупности состояний покоя не может возникнуть движение. Отсюда Зенон сделал вывод о невозможности движения и объявил весь мир чувств миражем, оболочкой единого и неподвижного «бытия». Зенон выдвинул и другие аргументы против реальности движения, на которых мы останавливаться не будем.

Дальнейшее развитие динамизма представляет собой философия Эмпедокла (род. около 490 г.—ум. около 430 г. до н. э.), которого в отличие от элеатов в большей мере привлекали физические вопросы реально существующего мира. Движущие силы Эмпедокл резко отделил от косной материи. Без движущих сил материя может находиться лишь в состоянии покоя.

Эмпедокл признавал два «начала» движения: «любовь» и «вражду». «Любовь» осуществляет гармонический порядок вещей, стройность, красоту. Напротив, «вражда» разъединяет вещи, вносит асимметрию, уродство. Все состоит из механического смешения четырех элементов: воды, воздуха, огня и земли. Количество материи извечно одно и то же. Все сводится к разложению на абсолютно неизменные элементы и к их сочетаниям. Важным пунктом в учении Эмпедокла является принцип закономерности развития природы; законы рассматриваются как результат устойчивых отношений, возникших в сложной игре первичных элементов.

Согласно Анаксагору (род. около 500 г.—ум. в 428 г. до н. э.) в основе вещей лежит бесконечное множество качественно отличных друг от друга «семян», или «гомойомерий» (подобочастных частиц, т. е. частиц, делящихся на части, которые подобны разделяемому целому). Семена существуют извечно, сплошь наполняя пространство. Материя сама по себе косна и неспособна к движению. Движущая причина есть владычественный и законодательный «ум» или «разум» (νοῦς). «„Разум" не подвержен воздействию и не смешан..., ибо таким только образом он может двигать, будучи неподвижным, и может владычествовать, будучи несмешанным»[1]). После возникновения первичного вихря семян последующее развитие мира протекает независимо от верховного ума. Идеалист Платон в диалоге «Федон» с горечью упрекал Анаксагора именно за то, что он по существу обходится без понятия верховного разума при объяснении конкретных физических явлений[2]).

Итак, в конечном итоге Анаксагор допускает возможность механического «самодвижения» материи и отчасти

---

[1]) Аристотель, Физика, книга VIII, гл. 5, стр. 182. Физика всюду цитируется по переводу В. П. Карпова, 2-е изд., М., Соцэкгиз, 1937.

[2]) Платон, Федон, 97 b—99 d. По словам Аристотеля (Метафизика, книга I, гл. 4, стр. 25—26), «Анаксагор использует ум как машину для создания мира, и когда у него явится затруднение, в силу какой причины то или другое имеет необходимое бытие, тогда он его привлекает, во всех же остальных случаях он все, что угодно, выставляет причиною происходящих вещей, но только не ум»

примыкает к кинетической концепции. Правда, «ум» не окончательно вычеркнут из природы, но сохраняется в качестве охранителя мирового порядка; однако и в этом случае термин νοῦς является по существу лишь другим названием для закономерности мирового развития. Вначале через движение из первобытного смешения выделяются вода, воздух, огонь и земля; но это еще очень сложные смешения гомойомерий, и дифференциация продолжается все дальше, идя от несовершенного ко все более совершенному.

Физическое мировоззрение Анаксагора можно назвать качественным атомизмом. Мир есть совокупность бесконечно малых и бесконечно разнообразных в качественном отношении вечно неизменных частиц; все возникает из перемены их внешних, чисто пространственных отношений. Такая концепция представляет ярко выраженную механическую картину мира, в которой нет места для мифологии; все сведено к механике сочетания и разъединения частиц.

Таков процесс постепенного преодоления элейской философии «единого и неподвижного, замкнутого в самом себе бытия» и возврат на более высокой основе к ионийской идее вечного движения.

Прежде чем перейти к наиболее законченному выражению античного кинетизма—к системе атомистов, скажем несколько слов о пифагорействе. Мы сознательно не говорили о нем ранее, так как хотя время жизни Пифагора (VI в. до н. э.) и относится к более раннему периоду, однако многие сведения о его жизни и деятельности недостоверны и разукрашены позднейшими легендами. Для истории механики во всяком случае представляет непосредственный интерес лишь позднейшая фаза развития пифагорейства.

К этому же более позднему времени относятся более углубленные занятия пифагорейцев математикой и астрономией. Не вдаваясь в сложный и до настоящего времени во многом спорный вопрос, каков был действительный диапазон научных знаний у пифагорейцев старших поколений и каковы нити исторической преемственности между ними и пифагорейцами IV века до н. э., ограничимся общими указаниями, достаточными для нашей темы.

Характеризуя воззрения пифагорейцев, Аристотель писал, что согласно их учению «числа занимали первое место в природе, элементы чисел они предположили элементами всех вещей и всю вселенную признали гармонией и числом». «У них, по-видимому, число принимается за начало и в качестве материи для вещей и в качестве выражения для их состояний и свойств»[1]).

Учение пифагорейцев о количественной определимости материи, о господстве в мире математической закономерности сыграло прогрессивную роль в развитии античной теоретической математики. Множество разрозненных сведений из области практической математики, добытых древними народами к V веку, должно было принять вид последовательной системы истин, выводимых из общих оснований. Без такой переработки математика не могла дальше успешно развиваться. В решение этой задачи внесли свой вклад пифагорейцы.

Известны также заслуги пифагорейцев в области приложения математических методов к естествознанию. Математические исследования пифагорейцев в области акустики (зависимость между длиной звучащей струны и высотой тона) являются прологом к созданию математической физики. Наконец, пифагорейцы учили о движении Земли вместе с Луною, Солнцем и планетами вокруг некоего «центрального огня», отказавшись от геоцентрических представлений, господствовавших в античную эпоху.

Ближайший интерес для истории механики представляет деятельность Архита Тарентского, расцвет которой приходится на 400—365 гг. до н. э. Диоген Лаэртский («Жизнеописания философов», книга VIII, § 83) сообщает, что он «первый изложил систематически механику (τὰ μηχανικὰ...μεθώδευσε), пользуясь математическими принципами». Древние авторы приписывали Архиту изобретение блока, винта и автомата (летающего голубя).

---

[1]) Аристотель, Метафизика, книга I, гл. 5, стр. 27.

3. Вопросы механики в произведениях античных атомистов

Атомистический материализм Демокрита является синтезом лучших достижений греческой науки. Примыкая к естественнонаучной материалистической системе Левкиппа, учение Демокрита вместе с тем отразило и положительную часть воззрений пифагорейцев на математические закономерности, господствующие во вселенной. Атом Демокрита наделен свойствами единого, неделимого и вечно существующего бытия элейцев. И, наконец, демокритовское учение в целом проникнуто кинетизмом ионийских материалистов. Вселенная рассматривается в вечном изменении; бесчисленное количество миров возникает и вновь уничтожается, чтобы уступить место все новым и новым образованиям[1]).

Демокрит (род. около 460 г.—ум. около 370 г. до н. э.), обнявший своим гением всю сумму знаний его времени, положил атомистическую гипотезу в основу самых разнообразных природных явлений. Маркс говорит о нем, что он был «эмпирическим естествоиспытателем и первым энциклопедическим умом среди греков»[2]).

Все вещи, по Демокриту, состоят из атомов и пустоты, «бытия» и «небытия». «Небытие» (пустота) в такой же мере реально существует, как и «бытие». Реальное существование пустого пространства Демокрит доказывал ссылкой на движение материальных тел, которые не могли бы двигаться в пространстве сплошь заполненном, ссылкой на явления сгущения и разрежения, роста и т. д. Атомы бесконечно разнообразны по форме и величине, они являются

---

[1]) Тексты Демокрита и свидетельства о нем напечатаны в русском переводе в изданиях: Демокрит в его фрагментах и свидетельствах древности, М., Соцэкгиз, 1935; А. О. Маковельский, Древнегреческие атомисты, Баку, 1946. Ср. рецензии об этих изданиях—Архив истории науки и техники, вып. 8, М.—Л., 1936, стр. 417—424 и в «Вестнике древней истории», 1948, № 3, стр. 79—99. Переводы некоторых текстов заимствованы из статьи С. Я. Лурье, Механика Демокрита.—Архив истории науки и техники, вып. 7, М.—Л., 1935, стр. 129—180.

[2]) К. Маркс и Ф. Энгельс, Сочинения, 2-е изд., т. III, М., 1955, стр. 126.

неделимыми, извечно существующими, неуничтожимыми и невозникающими элементами бытия. Качественного различия между атомами нет; существуют различия лишь в отношении формы, величины, порядка и положения. Движение атомов также извечно и в сумме своей неуничтожимо и несоздаваемо. Причиной местных изменений движения отдельных тел и атомов является столкновение других движущихся тел и атомов, но не особые силы или духовные, деятельные сущности. Пустота индифферентна к движению. Можно утверждать, что Демокрит был близок к открытию закона инерции, поскольку он приписывал атомам способность механического «самодвижения» и предполагал, что атомы сохраняют усвоенное движение сами по себе, без помощи внешних сил[1]). Коренное отличие атомистов от элеатов, привносивших в материю движение извне, состоит в признании всеобщности и вечности движения.

В этом положении атомистов уже содержится качественная сторона принципа сохранения движения.

Поскольку вещество атомов однородно, вес их следует принимать пропорциональным их объему; вес же доступных наблюдению сложных тел (комплексов атомов) определяется количеством атомов, содержащихся в объеме сложного тела. В сочинении «О небе» (книга IV, гл. 2) Аристотель, критикуя эту концепцию, указывал, что «многие тела, будучи меньшего объема, более тяжелы, как, например, медь тяжелее шерсти». «Ввиду этого некоторые,—продолжает он, имея в виду атомистов,—предполагают и выдвигают иную причину, а именно они говорят, что заключающаяся в сложных телах пустота придает телам легкость и делает иногда большие тела более легкими, поскольку они заключают в себе больше пустоты». В нашем мире нет легких тел, есть тела более или менее тяжелые. Даже та материя, которая всегда устремляется вверх, как, например, огонь, в сущности является весомой, движение же вверх объясняется тем, что эта материя выжимается снизу более тяжелыми элементами, подобно тому,

[1]) См. указанную выше статью С. Я. Лурье, Механика Демокрита, стр. 131.

как бревно выпирается водою из глубины на поверхность жидкости. Излагая взгляды древних атомистов, Аэтий (I, 4, 1 и сл.) говорит, что когда атомы стекались в одно место, тогда «те, которые были крупнее и тяжелее, так и осели внизу, а те, которые были мелкими, круглыми, гладкими и скользкими, были вытолкнуты скоплением атомов и подняты вверх». О том же свидетельствует Симпликий: «Школа Демокрита и впоследствии Эпикура утверждает, что все атомы, будучи однородны, имеют тяжесть, но так как среди них есть более тяжелые, то более легкие, выталкиваемые ими, остающимися внизу, уносятся вверх — оттого-то, по их словам, и кажется, будто одни тела (абсолютно) легкие, а другие (абсолютно) тяжелые». И далее: «Школа Демокрита считает, что все имеет тяжесть, но огонь, как имеющий меньшую тяжесть, выталкивается теми телами, которые уже раньше заняли места, и несется вверх, а потому кажется легким»[1]).

В первобытном своем состоянии (т. е. до возникновения упорядоченного космоса) атомы двигались во всевозможных направлениях и со всевозможными скоростями, однако равномерно. В результате взаимных столкновений атомы дают начало вихревым движениям. Дифференциация атомов, участвующих в вихревом движении, приводит к возникновению земли, планет и всех окружающих нас вещей.

Еще до Демокрита фундаментальную роль вихря (δῖνος) в мировом процессе отмечали Эмпедокл и Анаксагор. Однако лишь атомисты поставили вихрь в центре мироустраивающего процесса.

А вот как характеризовал воззрения Левкиппа (учителя Демокрита) Диоген Лаэртский («Жизнеописания философов», книга IX, § 31): «Левкипп говорит, что из стихий возникают беспредельные миры и снова на них распадаются. Возникают же миры следующим образом: благодаря своему отрыву от беспредельного множество

---

[1]) Симпликий, Комментарий к сочинению Аристотеля «О небе», III, I и IV, 4 (стр. 569 и 712, Heiberg). Цитаты заимствуются из статьи С. Я. Лурье, Механика Демокрита, стр. 145—146.

тел всевозможных форм уносится в великую пустоту. Собираясь вместе, они образуют единый вихрь, в котором испытывают столкновения, причем при своем многообразном вращении они разъединяются и сходные тела отходят к сходным. Поскольку же из-за своего множества они не могут вращаться, сохраняя равновесие, постольку наиболее тонкие направляются во внешнюю пустоту, как при просеивании через сито. Остальные же остаются вместе и, переплетаясь, соединяются друг с другом и сначала образуют некую шаровидную систему». Тот же Диоген Лаэртский (IX, 45) сообщает о вихревой теории атомистов следующее: «все происходит в силу необходимости и причина происхождения всего—вихрь, который Демокрит называет необходимостью». В сочинении «О небе» (книга II, гл. 13) Аристотель пишет так о вихревой теории предшественников: «Земля остается на своем месте под влиянием насильственного воздействия, в центр же она переместилась под влиянием вихря. Эту причину все они приводят, ссылаясь на (вихревые) явления, наблюдаемые в жидкостях и воздухе. В самом деле, при этих явлениях более крупные и тяжелые предметы всегда перемещаются к центру вихря. Вот почему все те, кто полагает, что небо возникло (с течением времени), утверждают, что земля оказалась в центре не сразу».

Указание Аристотеля, что теория мирового вихря возникла на основе наблюдений над вихревыми явлениями в жидкостях[1]), конкретизируется и дополняется в следующем фрагменте Демокрита: «И животные соединяются в стаи с животными того же самого рода, как, например, голуби с голубями, журавли с журавлями; то же наблюдается и у других неразумных существ. Также обстоит и с неодушевленными предметами, как можно видеть при просеивании зерен и на примере камешков, выбрасываемых морским прибоем: в первом случае при вращении

[1]) Симпликий в комментарии к только что приведенному месту аристотелевского сочинения «О небе» (II, 13, стр. 527, Heiberg) поясняет: «исходя из круговоротов, происходящих в воде». Самый термин δῖνος, вихрь, в узком смысле означает «водоворот», «водяной смерч», например, у Эпикура в «Письма к Пифоклу», § 105. См. С. Я. Лурье, Механика Демокрита, стр. 141.

сита распределяются отдельно чечевица с чечевицей, ячмень с ячменем, пшеница с пшеницей; во втором случае, благодаря движению волн, продолговатые камешки бывают толкаемы в то же самое место, куда и другие продолговатые, круглые—куда круглые, как если бы в их подобии друг другу заключалось нечто, понуждающее их взаимно сближаться (συναγωγόν τι)»[1]).

Космический вихрь атомов является, согласно мнению атомистов, причиной вращения небесных тел. Почему же в таком случае небесные тела не падают к центру этого вихря?

Симпликий пишет: «Иные считают причиной того, что небо не падает вниз, природную необходимость—вихрь, который пересиливает присущее небу стремление к падению, поскольку оно слабее. Так говорят Эмпедокл и Анаксагор».

Далее, не соглашаясь с этим мнением Симпликий указывает, что нельзя говорить, будто круговое движение неба и неподвижное положение земли в центре остается вечным «вследствие быстрого вихревого движения эфирных тел как, по-видимому, утверждал Эмпедокл и как думали Анаксагор и Демокрит». «Ведь хотя и эфирное тело, и земля имеют тяжесть, но поскольку круговращение происходит с большей скоростью, чем стремление к падению вниз, и оно берет верх над этим стремлением, постольку остаются на тех же местах и земля, расположенная в центре, и небо, вращающееся по шаровой поверхности. Это происходит, по их словам, так же, как с водой в чаше, которая не выливается при круговом движении чаши, если вращение происходит быстрее, чем стремление воды к падению вниз»[2]).

Ко взгляду Демокрита примыкает и Лукреций, согласно которому космический вихрь атомов является причиной образования земли и прочих небесных тел. Этот вихрь,

---

[1]) Фрагмент заимствован из сочинения Секста Эмпирика «Против математиков», книга VII, § 117. Ср. «Фрагменты» Демокрита, стр. 66—67; С. Я. Лурье, цит. соч., стр. 137.

[2]) Симпликий, Комментарий к сочинению Аристотеля «О небе», II, I (стр. 375, Heiberg). Ср. С. Я. Лурье, цит. соч., стр. 148.

«как полагает о том Демокрита священное мнение»[1]), является также причиной круговращения небесных тел.

Физика Демокрита является последовательно-кинетической системой древнего материализма: мир есть развивающаяся на основе механического «самодвижения» материя. Такая концепция изгоняет из научного обращения всякий элемент антропоморфизации природы. Цементом, скрепляющим величественную систему Демокрита, является учение о закономерности.

Атомистическая теория древних была гениальной физической гипотезой, в течение многих веков направлявшей естественнонаучное мышление.

Идея атомистов о существовании скрытой материи (отдельные атомы не могут быть предметом ощущения) и скрытых движений не была плодом оторванного от природы философствования; она выросла из стремления научно познать естественные факты, самым тесным образом связана с наблюдением естественных явлений. Уже древние атомисты пытались применить свою гипотезу о скрытых движениях к естественнонаучному объяснению целого ряда сложных физических явлений. Новая физика, опираясь на учение древних атомистов, нашла здесь надежную базу для своего успешного развития.

Помимо физического аспекта, демокритовский атомизм, как известно, имел еще и аспект математический. Как убедительно показал ван дер Варден[2]), демокритовская теория «неделимых» явилась ответом на трудности, выдвинутые Зеноном. Демокрит постарался обойти зеноновские апории, возникающие при допущении, что деление может быть продолжаемо до бесконечности. По Демокриту, при делении тела не может получиться бесконечно большое число непротяженных частиц, а лишь получится чрезвычайно большое число очень малых частиц. Мысленно разлагая тело на тончайшие листочки (плоскости), плоскости—на тончайшие нити (линии), а линии—на мельчайшие зернышки (точки), Демокрит решил ряд геометриче-

---

[1]) Лукреций. книга VI, стих 622.

[2]) B. L. van der Waerden, Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik.—Mathematische Annalen, Bd 117 (1940), Heft 2, стр. 141—161.

ских задач. Так, рассекая конус и пирамиду на тончайшие пластинки посредством сечений, параллельных основанию, Демокрит пришел к заключению, что объем конуса равняется трети объема цилиндра с тем же основанием и высотой, а объем приамиды соответственно трети призмы. Сходными приемами определял Демокрит объем шара и площадь круга[1]). Позднее Аристотель утверждал, что подобное признание дискретного строения пространства должно неизбежно привести к признанию аналогичной дискретности времени и движения: время состоит из мельчайших «мгновений», или «теперь» (τὰ νῦν), движение — из мельчайших «продвинутостей» или «кинем» (Аристотель обозначал их перфектом от глагола двигаться τὸ κεκινῆσθαι). Сделал ли такой вывод сам Демокрит, нельзя утверждать категорически. С. Я. Лурье, полагающий, что это действительно было так, должен был вместе с тем признать, что у нас нет «ни одного прямого свидетельства, доказывающего, что Демокрит стоял на изложенной точке зрения»[2]).

Несколько нарушая хронологическую последовательность ради цельности изложения, мы рассмотрим теперь вкратце атомистические взгляды Эпикура (род. в 341 г., ум. в 270 г. до н. э.) и Лукреция (I в. до н. э.)[3]).

Основные положения эпикурейской физики сводятся к следующему: все существующее материально или телесно. В основе вселенной, как и у Демокрита, лежат атомы и пустота. Ничто не возникает из ничего и, наобо-

---

[1]) Ср. С. Я. Лурье, Теория бесконечно малых у древних атомистов, М.—Л., Изд. АН СССР, 1935; его же, Очерки по истории античной науки, М.—Л., Изд. АН СССР, 1947, ч. 2, гл. 3, «Атомистическая математика», стр. 165—182; Г. Вилейтнер, Хрестоматия по истории математики (Исчисления бесконечно малых), перевод П. С. Юшкевича, М., 1932, стр. 44.

[2]) С. Я. Лурье, Очерки по истории античной науки, М.—Л., 1947, стр. 181. Ср. В. П. Зубов, К вопросу о математическом атомизме Демокрита.— Вестник древней истории, 1951, № 4, стр. 204—208.

[3]) В дальнейшем тексты Эпикура, как и отрывки из поэмы Лукреция, цитируются по вышеуказанному двухтомному изданию: Лукреций, О природе вещей, М.—Л., Изд. АН СССР, 1945—1947. Перевод отрывков Эпикура, помещенных во втором томе этого издания, принадлежит С. И. Соболевскому.

рот, ничто из того, что существует, не может исчезнуть[1]). Все закономерно возникает из вечного движения атомов, и все разлагается на атомы[2]). В природе нет никаких нематериальных сил, целей. Атомы Эпикур рассматривает как чрезвычайно малые, реально существующие тельца. В беспредельном пространстве существует бесконечное число миров, беспрерывно возникающих и разрушающихся[3]).

По свидетельству Аэтия[4]) Демокрит приписывал атомам только два свойства: величину и форму, а Эпикур добавил к ним еще третье: тяжесть (τὸ βάρος), «ибо необходимо,—говорил он,—чтобы тела двигались гонимые тяжестью (τῇ τοῦ βάρους πληγῇ)». Другое существенное отличие Эпикура от Демокрита—гипотеза о первоначальном «ливне» атомов, движущихся в мировом пространстве «сверху вниз». Мы видели, что у Демокрита первоначальное движение атомов происходило беспорядочно по всем направлениям мирового пространства («великой пустоты»). Эпикур отступил от этой концепции, различив в мировой пустоте верх и низ. Для объяснения взаимных встреч падающих атомов он вынужден был поэтому признать, что атомам свойственны чрезвычайно малые самопроизвольные отклонения от линии падения. В результате таких малых и случайных отклонений атомы сталкиваются и переплетаются в вихревых движениях, которые и являются причиной образования небесных тел[5]).

Несмотря на указанное различие, нельзя рассматривать эпикурову «тяжесть», как некую особую силу, как нечто внешнее по отношению к материи; скорее она является просто символом извечного движения в опреде-

---

1) Эпикур, Письмо к Геродоту, § 38 (стр. 528—529).

2) Там же, § 54 (стр. 540—541).

3) Там же, § 45 (стр. 532—535).

4) Аэтий 1, 3, 18=«Фрагменты» Демокрита, 196а, стр. 96.

5) Эпикур. Письмо к Пифоклу, § 90 (стр. 568—569): «Солнце и Луна и остальные светила не возникли сами по себе и не были лишь впоследствии приняты миром, но сразу же стали образовываться [внутри самого мира] и увеличиваться, благодаря присоединению и вращению неких природ, имеющих мелкие части, либо воздушных (πνευματικῶν), либо огнеобразных, либо состоящих из того и другого».

ленном направлении. Вот почему его механическая концепция остается по существу кинетической и в этом сходится с концепцией Демокрита[1]). Что «тяжесть» в учении Эпикура не является ближайшей причиной первоначального движения тел сверху вниз, явствует из того, что разница в тяжести, по Эпикуру, не влияет сама по себе на это движение: и тяжелые, и легкие атомы движутся в мировой пустоте с одинаковой скоростью (см. ниже).

Несмотря на признание произвольных и случайных отклонений атомов, механическая концепция Эпикура не содержит идеи беспричинных связей. Обогащая философию фундаментальным понятием случайности, подобная концепция не подрывает естественнонаучных основ демокритовой атомистики. Благодаря идее о малых самопроизвольных отклонениях атомов от линии падения Эпикур (а позднее вслед за ним и Лукреций) признает в качестве объективной формы закономерности наряду с необходимостью случайность. Рассматривая случайность как объективную форму взаимосвязи явлений, Эпикур и Лукреций освобождали науку о природе от элементов фатализма.

Если, как было сказано выше, у нас нет достаточных данных для утверждения, что Демокрит признавал дискретность времени и движения, то Эпикур совершенно определенным образом мыслил и пространство, и время, и движение дискретными; в мельчайшую неделимую единицу времени атом может проходить только мельчайшую неделимую единицу пути. Отсюда, по Эпикуру, вытекает «равноскоростность» («исотахия») всех движений атомов: ведь если допустить, что атомы обладают разной скоростью, то можно себе представить, что более быстрый атом будет проходить неделимую единицу пути в часть

[1]) Здесь можно, пожалуй, согласиться с Пьером Гассенди, понимавшим под «тяжестью» (pondus) у древних атомистов «устремление (impetus), посредством которого каждый свободный атом, не входящий в состав скопления других, увлекается быстрейшим движением, превосходящим всякую мысль». «Вот почему,— заключал Гассенди,— они не считали материю косной, а самодвижущейся и во всех отношениях действенной» (P. Gassendi, De apparente magnitudine Solis humilis et sublimis.—Opera, t. III, Lugduni, 1658, стр. 466).

«атома времени», а менее быстрый атом должен проходить за неделимую единицу времени часть неделимой единицы пути; ни то, ни другое невозможно, ибо относительно мельчайших единиц пути и времени было допущено, что они неделимы[1]).

Разница в скоростях воспринимаемых (так сказать, макроскопических) движений объяснялась у Эпикура различным сочетанием атомов и различным распределением «кинем» (неделимых движений) в составе сложного тела: не меняя скорости своих движений, атомы, всегда подчиненные закону «исотахии», способны менять ту конфигурацию, в которой скопление их предстает перед чувственным ощущением. Позднее Лукреций иллюстрировал мысль Эпикура ссылкой на стадо движущихся овец, которое издали может казаться «белым пятном, неподвижным на склоне зеленом»[2]).

Нельзя не остановиться здесь особо на некоторых образных и поэтических формулировках, которые дал Лукреций основным положениям античного материализма.

Принцип сохранения материи выдвигается как основной и незыблемый закон природы.

«... вещам невозможно
Из ничего возникать и, родившись, в ничто обращаться»
(I, 265—266).

Атомы рассматриваются как абсолютно твердые материальные тельца, неразрушимые и несоздаваемые:

Эти тела ни от внешних толчков разлагаться не могут,
Ни, изнутри чем-нибудь пораженные, врозь распадаться,
Ни от воздействия силы иной уничтожиться вовсе (I, 528—530).

Противоположность атомов и пустоты очерчена в следующих поэтических строках:

Ибо наличное все непременно быть чем-нибудь должно,
Будь оно иль велико, или самых ничтожных размеров:
Коль осязанью оно хоть несколько будет доступно,

[1]) «Атомы движутся с равной быстротою, когда они несутся через пустоту, если им ничто не противодействует. Ибо ни тяжелые атомы не будут нестись быстрее малых и легких, когда, конечно, ничто не встречается им» (Эпикур, Письмо к Геродоту, 61, стр. 547).

[2]) Лукреций, О природе вещей, книга II, стих 322.

Тел совокупность умножит собой и к итогу причтется;
Если же будет совсем недоступно оно осязанью
И не поставит преград прохожденью любого предмета,
Полостью будет оно, что мы пустотой называем[1]).
Кроме того, все то, что само по себе существует,
Действует или само, иль подвержено действию будет,
Иль будет тем, где вещам находиться и двигаться можно.
Действовать иль подвергаться воздействию тело лишь может,
Быть же вместилищем тел может только пустое пространство (I, 433—444).

Движение извечно присуще материи. Оно неотделимо от материи и в такой же мере несоздаваемо и неуничтожимо, как и сама материя. Атомы находятся в вечном и беспрерывном движении в бесконечном пространстве. Все вещи возникают из взаимного сцепления и устойчивых сочетаний атомов:

Если же думаешь ты, что стать неподвижно способны
Первоначала вещей и затем возродить в них движенье,
Бродишь от истины ты далеко в заблужденьи глубоком,
Ведь, в пустоте находясь и витая по ней, неизбежно
Первоначала вещей уносятся собственным весом
Или толчками других. И часть, в движеньи столкнувшись
Вместе, одни от других они в сторону прядают сразу.
И удивляться нельзя: ведь они в высшей степени крепки,
Плотны и вески, и вспять отскочить им ничто не мешает.
Дабы ты лучше постиг, что тела основные мятутся
В вечном движеньи всегда, припомни, что дна никакого
Нет у вселенной нигде, и телам изначальным остаться
Негде на месте, раз нет ни конца ни предела пространству.
Если безмерно оно и простерто во всех направленьях
(II, 80—93).

Известно, что механика Галилея—Ньютона во многом примкнула к физике Демокрита—Эпикура. В основе ньютонианского понятия массы лежит атомистическое представление материи. Атомисты рассматривали тела как совокупность элементарных, однородных и неизменяемых частиц материи. Атомы неуничтожимы и несоздаваемы, они лишены всяких внутренних состояний и обладают единственным свойством—подвижностью. В этом учении уже содержалось по существу классическое представление о массе, которое нашло выражение у Ньютона (масса

[1]) В подлиннике—два близких по значению слова: vacuum и inane («vacuum quod inane vocamus»).

как мера количества материи, определяется через плотность распределения частиц материи, заполняющих данный объем)[1], и в несколько иной формулировке у Герца (масса определяется как относительное число атомов, содержащихся в данном объеме в данный момент времени)[2].

Атомистический взгляд на строение материи Ньютон выразил следующим образом: «Бог вначале дал материи форму твердых, массивных, непроницаемых, подвижных частиц таких размеров и фигур и с такими свойствами и пропорциями в отношении к пространству, которые более всего подходили бы к той цели, для которой он создал их... Природа их должна быть постоянной, изменения телесных вещей должны проявляться только в различных разделениях и новых сочетаниях и движениях таких постоянных частиц»[3].

Постоянство массы вытекает из постоянства атомов: так как атомы однородны и тождественны, то их массы пропорциональны объему. Удельные же веса или плотности сложных тел, представляющих собою комплексы одинаковых атомов, могут различаться, так как не все объемы заполнены атомами равномерно. Поэтому Ньютон и определяет массу сложных тел как меру количества материи, устанавливаемую пропорционально плотности ее и объему. Это определение массы, данное Ньютоном в его «Началах», представлялось многим критикам бессодержательным, ибо, по их мнению, само понятие плотности должно определяться через готовое понятие массы. Однако критика эта теряет основание, если согласиться, что в соответствии с атомистической концепцией Ньютон в приведенном выше определении имеет в виду не плотность массы, а плотность распределения атомов. Именно такое понимание

---

[1]) См. И. Ньютон, Математические начала натуральной философии, перевод А. Н. Крылова, определение 1. В книге: А. Н. Крылов, Собрание трудов, т. 7, М.—Л., Изд. АН СССР, 1936, стр. 23.

[2]) H. Hertz, Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig, 1894, §§ 3, 4.

[3]) И. Ньютон, Оптика, перевод С. И. Вавилова, 2-е изд., М., Гостехиздат, 1954, стр. 303—304.

массы, принятое с нашей точки зрения Ньютоном, выражено точным образом в определении Герца.

К учению атомистов примыкают в значительной мере также классические представления времени, пространства и движения. Понятия пространства и времени атомисты совершенно отделяли от понятия материи: время и пространство существуют сами по себе, к материальным процессам, протекающим в них, они имеют чисто внешнее отношение. Эту концепцию целиком разделял Ньютон, выразивший ее следующим образом:

«*Абсолютное, истинное математическое время* само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью».

«*Абсолютное пространство* по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным».

«*Место* есть часть пространства, занимаемая телом»...

«*Абсолютное движение* есть перемещение тела из одного его места в другое»...

«Как неизменен порядок частей времени, так неизменен и порядок частей пространства. Если бы они переместились из мест своих, то они продвинулись бы (так сказать) в самих себя, ибо время и пространство составляют как бы вместилища самих себя и всего существующего. Во времени все располагается в смысле порядка последовательности, в пространстве—в смысле порядка положения»[1]).

Нельзя, впрочем, забывать, что конкретно-исторический генезис идей Ньютона был значительно сложнее, и наряду с отражением идей древних атомистов в ньютонианском учении об абсолютном пространстве можно найти отголоски позднеантичных концепций, которые дошли до Ньютона через посредство кембриджских платоников.

К фундаментальным завоеваниям древних атомистов относятся учение о закономерности и установление в общем

[1]) И. Ньютон, Математические начала... Поучения. В книге: А. Н. Крылов, Собрание трудов, т. 7, М.—Л., Изд. АН СССР, 1936, стр. 30—32

абрисе принципов сохранения материи и движения. Принцип сохранения материи в ньютоновой механике выражен законом сохранения массы; принцип сохранения движения выражен был галилеевским законом инерции и декартовским законом сохранения количества движения.

Таким образом, атомисты разработали первые важнейшие положения и основания современной динамики. Они формулировали первые научные представления о времени, пространстве, материи и движении, создали идеальные, абстрактные образы этих понятий и тем самым создавали предпосылки научной механики.

4. Вопросы механики в трудах Аристотеля

Фундаментальное место в аристотелевской натурфилософии занимает учение о движении. И это понятно. Философия Аристотеля направляет главное внимание на процесс возникновения вещей. Ведь «действительность» осуществляется из «возможности» путем движения (изменения). В «Физике» Аристотель писал: «Так как природа есть начало движения и изменения, а предметом нашего исследования является природа, то нельзя оставлять невыясненным, что такое движение: ведь незнание движения необходимо влечет за собой незнание природы»[1]). Со всей резкостью отвергается учение элеатов об абсолютной неподвижности «истинного бытия»: «утверждать, что все покоится, и подыскивать обоснования этому, оставив в стороне свидетельства чувств, будет какой-то немощью мысли и спором... не только против физики, но против всех наук, так как все они пользуются движением»[2]).

Необходимо, однако, помнить, что «движение» Аристотель понимал широко, в смысле изменения вообще. Движение механическое, или перемещение в пространстве (φορά), являлось в глазах Аристотеля лишь одним из видов «движения» в широком смысле слова. Другими видами этого последнего являются качественное изменение (ἀλλοίωσις) и рост (αὔξησις). Соответственно и «Физика»

[1]) Физика, книга III, гл. 1, стр. 49.
[2]) Там же, книга VIII, гл. 3, стр. 173.

Аристотеля трактует не только о механических процессах, но и о явлениях химических, где главную роль играет качественное изменение, далее, о явлениях биологических («рост» и т. д.) и даже о явлениях психологических и социальных—там, где речь идет, например, об усвоении технических знаний человеком или о технической обработке материала (неоднократно повторяющийся у Аристотеля пример с ваятелем и статуей). В этом одновременно и сильная, и слабая сторона «Физики» Аристотеля. С одной стороны, беря в широком философском смысле категорию «движения» как изменения вообще, Аристотель сумел уловить некоторые принципиальные особенности того или иного вида изменений (например, скачки при изменении качественном), с другой стороны, Аристотель недостаточно и в ряде случаев неверно осветил соотношение между различными видами «движения». Так, категорию «цели», отличительную для технической деятельности человека, он перенес в самый космос, говоря об объективной целесообразности биологических процессов и даже о целенаправленных процессах в механике и физике.

Соответственно, не удовлетворяясь учением о механической причинности, развивавшимся древними атомистами, Аристотель различал четыре вида причин: материальную, действующую (или причину движения), формальную и финальную («цель», или «ради чего»). В первой книге «Метафизики»[1]). Аристотель отмечает, что до него ученые указывали на причину материальную (ионийские натурфилософы), затем добавили причину движения (элеаты, Эмпедокл и Анаксагор), и, наконец, некоторые учили о «причинах формальных», признавая идеи за «начала вещей» (школа Платона), но лишь он, Аристотель, впервые указал на «цель», или «ради чего», как на четвертую причину образования вещей. Эти телеологические моменты физического учения Аристотеля были раздуты впоследствии средневековой схоластикой.

На основе различения четырех причин строится и представление об «источнике движения». Материя, по Аристотелю, сама по себе является началом пассивным

---

[1]) Аристотель, Метафизика, I, гл. 3—10, стр. 23—38.

и низшим по отношению к форме: как таковой, ей чуждо «самодвижение». Согласно учению атомистов в пустоте тела могут сохранять наличное движение сами по себе, без внешних импульсов. Напротив, в учении Аристотеля центральным пунктом является идея косности, пассивности материи. На первый план выдвигается различие между движимым и двигателем. Даже в телах «самодвижущихся» («одушевленных») Аристотель различал «движимое» и «движущее». Они также требуют наличия «двигателя», разница лишь в том, что неодушевленные имеют источник движения вовне, в то время как тело «самодвижущееся» имеет «двигатель» в самом себе.

Для обозначения силы Аристотель пользовался многозначным термином δύναμις. Слово это одновременно означает «способность» и «возможность». В первом значении δύναμις «прежде всего есть начало движения или изменения, которое находится в другом или поскольку оно—другое»[1]). Аристотель подчеркивает, что это основное значение слова δύναμις. Под силой Аристотель понимает всякую «способность», поскольку последняя может быть «причиной» или «началом» действия, либо противодействия.

Таково широкое, общефилософское определение силы δύναμις. Конкретизируя его применительно к явлениям механики, Аристотель приходит к выводу, что всякое движение предполагает наличие движущей силы. Следовательно, закон инерции был известен ему лишь в первой своей части: тело пребывает в покое до тех пор, пока оно не будет выведено из этого состояния какой-либо силой. Сила для Аристотеля—причина движения и должна непрерывно поддерживать движение. Но тогда возникает вопрос: чем же поддерживается движение в телах, оторвавшихся от своего «двигателя», т. е. силы, которая сообщила им движение?

В «Физике» читаем: «Раз все движущиеся предметы, которые не движут сами себя, приводятся в движение чем-нибудь иным, то спрашивается, как некоторые из них движутся без соприкосновения с движущим, например

[1]) Аристотель, Метафизика, книга V, гл. 12, стр. 91.

тела брошенные». Ответ дается следующий[1]). Когда мы толкаем тело, например шар на столе, то мы одновременно приводим в движение окружающий его воздух. В образующуюся за движущимся шаром пустоту устремляется воздух и как бы подталкивает шар. По этой причине шар не мгновенно останавливается после того, как мы перестали толкать его, а некоторое время движется вследствие воздействия окружающей среды. Воздушная среда в данном случае является активным началом движения, ибо, не будь ее, тело должно было бы мгновенно придти в состояние покоя.

В этом аспекте следует понимать и аристотелевское учение о вечности движения. Аристотель ставит вопрос: «Возникло ли когда-нибудь движение, не будучи раньше, и исчезнет ли снова так, что ничто не будет двигаться? Или оно не возникло и не исчезнет, но всегда было и всегда будет, бессмертное и непрекращающееся?»[2]). На этот вопрос Аристотель дает совершенно определенный ответ: «Невозможно допустить, чтобы не было движения... Движение необходимо существует всегда»[3]). Таким образом, Аристотель резко расходится в этом пункте с элеатами. Но, как мы только что сказали, он расходится и с древними атомистами: материя не «самодвижна». Различая «движущее» и «движимое», Аристотель утверждает, что «одни из существующих предметов неподвижны, другие всегда движутся, третьи причастны покою и движению»[4]). Итак, по Аристотелю, «все движущееся должно приводиться в движение чем-нибудь», причем «во всем, что движется само собой, движимое и движущее находятся вместе». Что касается характера действия двигателя, то этот двигатель может сообщать движение либо посредством собственного движения, либо без того, чтобы самому при этом находиться в движении. Предположим, что движение тела A_1 обусловлено движением тела A_2, движение тела A_2, в свою очередь, обусловлено движением тела A_3 и т. д. Чтобы не продолжать без конца этот процесс, полагал

[1]) Аристотель, Физика, книга VIII, гл. 10, стр. 205.
[2]) Там же, гл. 1, стр. 166.
[3]) Там же, гл. 5, стр. 181.
[4]) Там же, гл. 3, стр. 173.

Аристотель, мы должны признать существование «первого двигателя»[1]). Теперь ясно, что «первый двигатель» должен быть либо неподвижным, либо самодвижущимся. В последнем случае нужно различить в нем часть «движимую» и часть «движущую». А так как «двигатель» в самодвижущемся уже ничем не приводится в движение, то сам он необходимо должен быть неподвижным, ибо «таким только образом возможно для какого-нибудь предмета самодвижение»[2]). Следовательно, если рассматривать цепь, в которой всякое последующее звено представляет «движимое», то первое звено этой цепи, по мысли Аристотеля, должно быть извечным «первичным неподвижным двигателем»[3]).

«Первый неподвижный двигатель» представлялся у Аристотеля как некоторого рода нематериальное, разумное, божественное начало, порождающее простые, однородные, непрерывные и бесконечные движения[4]). Круговые движения «небесных сфер» являются примером таких вечных, непрерывных и совершенных движений. Божественных первых двигателей столько, сколько «небесных сфер»[5]). Существование «неподвижных вечных двигателей» аргументируется также ссылкой на вечность движения: если бы не существовало «первых начал» движения, неподвижных и вечных по своей природе, то движение не могло бы быть вечным. «Однако невозможно, чтобы движение либо возникло, либо уничтожилось, ибо оно существовало всегда»[6]).

Таким образом, в известном условном смысле можно говорить об инерционном характере движения у Аристотеля; однако не следует забывать при этом двух существенных обстоятельств: во-первых, таким характером обладает, по Аристотелю, лишь вечное вращательное дви-

---

[1]) Аристотель, Физика, книга VIII, гл. 5, стр. 180.

[2]) Там же, гл. 5, стр. 185.

[3]) Там же, гл. 6, стр. 186.

[4]) Аристотель, Метафизика, книга XII, гл. 7, стр. 211.

[5]) Там же, гл. 8, стр. 212. В сочинении «О небе» Аристотель подробнее показывает, как движение небесных сфер определяет прочие виды ограниченных движений.

[6]) Там же, гл. 6, стр. 208.

жение сферической вселенной и, во-вторых, оно невозможно без наличия вечного неподвижного «первого двигателя».

Интересны мысли Аристотеля, которые можно рассматривать как первую попытку количественного определения механической силы. В этих попытках нет, правда, и намека на возможность технического употребления понятия силы, нет также сколько-нибудь широких обобщений или формулировки общего закона, и все же было бы неправильным обойти эти исследования Аристотеля. Сила определяется как величина, пропорциональная скорости и весу (массе) движимого груза. Для того чтобы лучше разобраться в сути дела, введем некоторые современные термины и обозначения. То, что Аристотель называет «движущим», мы будем называть «силой» и обозначать буквой f. Величину «движимого» мы будем называть «весом движимого» тела и обозначать буквой p. Тогда приводимые ниже рассуждения Аристотеля сведутся к следующему: «сила» равна произведению скорости тела v на его вес, т. е.

$$f = pv = p\frac{s}{t}, \tag{1}$$

где s—пройденный путь, а t—соответствующее время. Текст самого Аристотеля (с заменой его обозначений только что указанными) примет такой вид: «В равное время сила, равная f, продвинет половину p на двойную длину s, а на целое s в половину времени t. Такова будет пропорция. И если одна и та же сила движет одно и то же тело в определенное время на определенную длину, а половину— в половинное время, то половинная сила продвинет половину движимого тела и в то же время на равную длину». Далее: «Пусть половина силы f будет f' и половина p будет p': отношение силы к тяжести будет здесь сходно и пропорционально, так что и в равное время они будут двигать на равную длину»[1]).

[1]) Ср. Аристотель, Физика, книга VII, гл. 5, стр. 164.

Аналогичное рассуждение можно найти в том же сочинении (книга IV, гл. 8, стр. 86) применительно к сопротивлению, которое оказывает среда разной плотности. Пусть, например, тело α проходит путь β в одной среде за время γ и в более редкой среде путь δ

В последней цитате утверждается, что движение (скорость) двух тел будет одинаковое, если у них будет одинаковым отношение движущей силы к весу движимого, т. е. если $f : p = \text{const}$, и, следовательно, формула (1) опять подтверждается. Однако нельзя думать, что соотношение (1) выражает у Аристотеля общий закон механических движений и применимо для всех случаев движения. Сам Аристотель вводит в него существенные ограничения. Так, например, если бы соотношение (1) являлось общим законом, то было бы ясно, что половина силы $(f : 2)$ продвинула бы данное тело (p) за время t на половину полного пути $(s : 2)$. Однако Аристотель эту возможность отрицает, несмотря на то, что она укладывается в указанную им пропорцию. Он ссылается при этом на практику. В самом деле, если сила ста человек передвинет каменную глыбу за время t на расстояние s, то один человек $(f : 100)$ уже не сумеет передвинуть ту же глыбу на расстояние $s : 100$; может оказаться, что он вообще не сдвинет ее с места. Вот слова самого Аристотеля: «Но если $(f : 2)$ передвигает $(p : 2)$ во время t на длину s, нет необходимости для $(f : 2)$ в одинаковое время двигать (p) на половину длины $(s : 2)$. Именно, если f продвинет (p) за время t на длину s, половина f, т. е. $(f : 2)$, не продвинет (p) за время t или в какую-нибудь часть t на длину s или на часть s, соответственно отношению f к p; и вообще может случиться, что никакого движения не произойдет. Ведь если целая сила произвела определенное движение, половина ее не произведет такого движения в какое бы то ни было время; иначе один человек мог бы двигать судно, если только силу гребцов и длину, на которую они все двигали его, разделить на их число»[1]).

за время ε. Если длина β равна длине δ, то движение пропорционально сопротивлению среды. Примем, что β есть путь, пройденный в воде, и δ — в воздухе: чем легче и чем менее телесен воздух по сравнению с водой, тем быстрее α пройдет путь δ. Одна скорость будет, по Аристотелю, находиться к другой в таком же отношении, как воздух к воде; если принять, что воздух вдвое легче воды, то тело пройдет в воде путь β за время, вдвое большее, нежели то, за которое оно проходит путь δ в воздухе, и время γ будет вдвое больше времени ε.

[1]) Аристотель, Физика, книга VII, гл. 5, стр. 164. Как и ранее, в текст введены наши обозначения взамен аристотелевских.

Таким образом, закон, выраженный соотношением (1), обязателен лишь для того случая, когда при сохранении движущейся силы мы дробим движимое тело. Напротив, он может не иметь места, если при сохранении движущей силы увеличивать движимый груз. Соотношение (1) не всегда удовлетворяется и тогда, когда одновременно дробить и движущие силы и массы движимых тел. С этой точки зрения Аристотель критиковал парадокс Зенона, утверждавшего, что поскольку ничтожная часть пшенного зерна неспособна привести в движение воздух и произвести шум, постольку не может произвести такой шум и целая мера («медимн») зерна. По Аристотелю, в результате своего дробления сила может утратить способность производить какой-бы то ни было эффект, и наоборот, суммирование мельчайших элементов силы может привести к иному, большему эффекту, нежели это можно было бы ожидать, исходя из величины таких мельчайших элементов.

Аристотель говорит: «Поэтому-то неправильно рассуждение Зенона, что любая часть пшеничного зерна произведет шум, так как вполне возможно, что в какое угодно время она не приведет в движение воздух, который привел в движение при своем падении медимн. И даже той частички воздуха, которую она двинула бы находясь в составе целого, она не приведет в движение, если будет падать сама по себе, ибо в целом она существует только в потенции»[1]). Таким образом, соотношение (1) выполняется, если одновременно делят и движимые массы и движущие силы, только в том случае, если заведомо известно, что элементы суммы обладают ощутительным действием. Как говорит Аристотель: «Если же имеются два предмета, и каждый из них движет определенное количество в определенное время, то силы их, сложенные вместе, будут двигать сложенные тяжести на одинаковую длину и в то же время, согласно аналогии»[2]).

Итак, все эти рассуждения Аристотеля о движимых телах и силах носили еще ограниченный конкретными

---

[1]) А р и с т о т е л ь, Физика, книга VII, гл. 5, стр. 164.
[2]) Там же.

условиями характер: их нельзя обобщить в виде широкого закона. Аристотелю можно приписать лишь первые попытки подхода к установлению меры силы, но не больше.

С попыткой дать более широкое толкование аристотелевскому закону и распространить его на случаи, когда сила делится до бесконечности, мы встречаемся позднее у Герона.

Вот что он пишет: «Некоторые люди думают, что тяжести, лежащие на земле, могут быть сдвинуты с места только путем приложения эквивалентной им силы. Этот взгляд ложен. Итак, докажем, что тяжести, лежащие так, как было сказано, могут быть сдвинуты с места посредством силы, меньшей, чем любая известная, и раскроем причину, почему подобное явление не оказывается сразу приметным. Представим себе, стало быть, что груз лежит на земле и что этот груз равномерный, гладкий и плотный. Пусть плоскость, на которой груз лежит, может быть наклоняема в обе стороны, а именно вправо и влево. Пусть сначала она будет наклонена вправо. Тогда оказывается, что данный груз скатывается вправо, ибо естественным для грузов является стремление двигаться вниз, если их ничто не подпирает, препятствуя их движению. Если, далее, наклоненная сторона опять поднимется до горизонтальной плоскости и вся плоскость [как таковая] придет в состояние равновесия, то тогда груз пребудет в этом положении. А если она наклонится в другую сторону, т. е. в левую, то и груз будет клонить в ту же сторону, даже при самом незначительном наклоне. Следовательно, груз нуждается не в силе, которая его движет, а в силе, которая его подпирает, препятствуя его движению. Допустим теперь, что груз опять приходит в положение равновесия и не склоняется в какую-либо сторону,—тогда он остается в том же положении и пребывает в покое, пока плоскость не наклонится в какую-нибудь сторону,—в последнем случае и он клонит в ту же сторону. Итак, груз, готовый обратиться к любому направлению, не нуждается ли он лишь в незначительной силе, чтобы придти в движение, и притом в соответствии с силой, которая придает ему наклон. Выходит, что груз может быть приведен в движение любой самой малой силой»[1]).

Глубокие соображения высказал Аристотель по поводу взаимоотношения движения, пространства и времени. Понятия пространства и времени, приближающиеся к представлениям классической механики, сформировались еще до Аристотеля и в этой своей форме нашли особенно яркое выражение в школе атомистов. Удары элейской критики были направлены как против учения об объективности движения, так и против объективности пространства и времени. Элеаты считали, что пространство и время не имеют сами по себе реального бытия, ибо чувства наши не относятся к источникам объективного знания. Напротив, Аристотель, как и атомисты, утверждал объективность времени и пространства, впервые подвергнув эти понятия всестороннему и детальному анализу.

Вместе с тем Аристотель отверг учение атомистов о существовании абсолютно пустого пространства, независимого от находящихся в нем тел и индифферентного ко всякого рода их взаимодействиям. Пространство, понимаемое как чистое протяжение и являющееся пассивным вместилищем тел, несовместимо, по мнению Аристотеля, с понятием движения[2]).

Аристотель исходил из понятия физического пространства, т. е. такого, свойства и даже сущность которого находятся в известной связи с физическим бытием материи. Он определяет «место» (τόπος) не как объем, занимаемый телом в абсолютном пространстве, а как «границу объемлю-

---

[1]) Г е р о н, Механика, книга I, гл. 20. «Механика» Герона (за исключением некоторых фрагментов) дошла до нас только в арабском переводе. Русский перевод сделан с немецкого по изданию: Heronis Alexandrini opera, vol. II, fasciculus 1, Lipsiae, 1900, стр. 54—56.

Трудно согласиться с истолкованием приведенного отрывка в статье С. Я. Лурье (Механика Демокрита..., стр. 136). Автор видит в нем предвосхищение закона инерции, восходящее в конечном итоге к Демокриту. Такое впечатление создается лишь потому, что проф. Лурье цитирует текст Герона с большими пропусками, а в последней фразе вводит произвольно от себя (в скобках) слова «по горизонтальной плоскости», которые никак не вяжутся со всем контекстом и отсутствуют в оригинале.

[2]) А р и с т о т е л ь, Физика, книга IV, гл. 6—8, стр. 80—89.

щего тела», т. е. тела, соприкасающегося с телом объемлемым. «Место», по Аристотелю, не может быть чем-то принадлежащим предмету. Оно не может быть ни его материей, ни формой, ибо и материя, и форма неотделимы от предмета, в то время как «место» меняется в процессе движения. «Поскольку место отделимо от предмета, постольку оно не есть форма, поскольку же объемлет его, оно отличается от материи»[1]). Хотя границы объемлющего и объемлемого тела совпадают, однако «местом» является именно граница объемлющего тела, в то время как граница объемлемого предмета является формой этого предмета. Таким образом, о «месте» в строгом смысле можно говорить лишь при наличии двух тел: объемлющего и объемлемого. Пространство, рассматриваемое как совокупность «мест», является необходимо наполненным; там, где есть «место», необходимо должно быть наполненное пространство, ибо «место» и есть не что иное, как граница объемлющей материальной среды. К пустоте понятие «места» вообще неприменимо. «Тело, снаружи которого находится какое-нибудь другое объемлющее его тело, находится в известном месте. Тело, у которого этого нет, не находится». Поэтому Земля и небесные тела, отдельно взятые, находятся в известных местах, ибо все они окружены мировым эфиром, но мир в целом, т. е. сферическая вселенная, «не находится в месте», так как за пределами этой вселенной нет больше ничего.

Аргумент атомистов в защиту пустоты Аристотель отводил следующим образом: «Они [атомисты] утверждают, во-первых, что иначе движения по отношению к месту, т. е. перемещения и увеличения, не было бы: нельзя предполагать движения, если не будет пустоты, так как наполненное не имеет возможности воспринять что-нибудь»[2]). «Но нет никакой необходимости,—отвечает Аристотель,—если существует движение, признавать пустоту..., так как тела могут уступать друг другу место одновременно при отсутствии какого-либо отдельного промежутка наряду с ними. Это очевидно в вихревых

[1]) Аристотель, Физика, книга IV, гл. 2, стр. 72.
[2]) Там же, гл. 6, стр. 81.

движениях сплошных тел и в движениях жидкостей»[1]).

Атомисты выводили необходимость пустоты, считая ее необходимой для движения; Аристотель, наоборот, из наличия естественных движений, происходящих по различным направлениям, делает вывод об анизотропности пространства и невозможности пустоты. В самом деле, полагал он, если бы пространство было совершенно пустым, то в нем исчезли бы всякие физические различия, ибо в пустоте все места тождественны по своей природе, и, следовательно, тело, окруженное пустотой, не имело бы оснований двигаться в одну сторону предпочтительно перед другими возможными направлениями. Напротив, в физическом или наполненном пространстве однородность мест и изотропность направлений, вообще говоря, отсутствует, и, следовательно, здесь имеются условия для движения в одном направлении по сравнению с другими. «В пустоте,—писал Аристотель,—нет основания двигаться сюда больше, сюда меньше: поскольку это пустота— в ней нет различий... Каким же образом может быть движение по природе, если нет никакого различия в пустоте... Ведь, как „ничто" не заключает в себе никаких различий, так и несуществующее. Пустота представляется чем-то „несуществующим" и лишенностью, а перемещение, согласное с природой, различно... Итак, или ни один предмет никуда не будет перемещаться по природе, или, если это происходит, не будет пустоты»[2]).

Таким образом, Аристотель наделяет пространство физическими характеристиками; оно рассматривается не только как среда, но и как действительное основание для всех происходящих действий и процессов. Пустое пространство атомистов, с точки зрения Аристотеля, является лишь абстракцией чисто геометрических свойств реального физического пространства. Интересно указание, что если стать на позицию Демокрита, то это с необходимостью повлечет признание неприемлемой для аристотелизма инерции движения. Аристотель пишет: «Далее, никто

---

[1]) Аристотель, Физика, книга IV, гл. 7, стр. 83.
[2]) Там же, гл. 8, стр. 83.

не может сказать, почему тело, приведенное в движение [в пустоте], где-нибудь остановится, или почему оно скорее остановится здесь, а не там. Следовательно, ему необходимо или покоиться, или бесконечно двигаться, если только не помешает что-нибудь более сильное»[1]).

Пространство к телам (как и тела к пространству) не индифферентно. Различным телам, по учению Аристотеля, свойственно двигаться естественным образом в определенные места и по определенным направлениям. Тела бывают удаляемы из своих «естественных» мест посредством насильственных движений; напротив, движение к естественному своему «месту» является движением «естественным», т. е. происходит без приложения внешней силы. Движения «естественные» протекают сами собой, в силу свойств самих вещей (свободное падение тяжелых тел, течение воды в реке, устремление воздуха и огня вверх и т. п.); движения «насильственные» противоположны «естественным» и обычно возникают вследствие практической деятельности человека.

По мнению Аристотеля, всякое тело может пребывать в состоянии «естественного» покоя лишь в определенном месте, «естественном» для данного тела. Таковым является однородная с этим телом материальная среда. Воздух, окруженный воздухом, не имеет поводов двигаться ни вверх, ни вниз. То же справедливо относительно других элементов: земли, воды, огня. Окруженный более плотной средой (например, водой) воздух будет стремиться вверх, а окруженный средой менее плотной (огнем)—вниз, т. е. в одном случае от центра сферической вселенной, а в другом случае к ее центру. Следовательно, согласно Аристотелю, воздух обладает лишь относительной «легкостью», так же как вода обладает лишь относительной «тяжестью». Что же касается двух других стихий—огня и земли, то, поскольку не существует еще более разреженной стихии, чем огонь, этот последний, будучи окружен одной из трех остальных стихий, всегда будет двигаться, «всплывать» вверх, точно так же, как и самая тяжелая стихия—земля, окруженная огнем, воздухом или водой, устремляться вниз. Огонь

---

[1]) Аристотель, Физика, книга IV, гл. 8, стр. 85.

обладает, следовательно, только «легкостью», земля—только «тяжестью»[1]).

Четыре стихии, или элемента, по представлению Аристотеля, концентрическими слоями облегают «центр мира» в следующей последовательности, считая от центра: земля, вода, воздух, огонь. Следовательно, движение от центра есть движение вверх, движение к центру—вниз. «Верх находится не где придется, а куда несутся огонь и легкое тело; равным образом не где придется находится низ, а куда двигаются тела тяжелые и землистые, как если бы эти определения различались не положением только, но и известной силой»[2]). «Место есть не только нечто, но оно имеет и какую-то силу»[3]). В одни «места», находящиеся ближе к периферии сферической вселенной, устремляются «легкие» тела, в другие же, т. е. к центру вселенной, направляются тела «тяжелые». Иначе говоря, в сплошь наполненном физическом пространстве Аристотеля «место», помимо чистого протяжения, приобретает некоторые динамические свойства. Поскольку в пустом пространстве атомистов нет никакого различия «мест», постольку оно не может определить различия между естественными движениями. Но если в пустоте не может быть «естественных» движений, то тем самым устраняется также возможность и движений «насильственных», ибо последние противоположны первым. Таковы мотивы, не позволявшие Аристотелю принять концепцию пустого пространства атомистов.

Итак, нахождение тела в инородной среде является причиной его устремления «вверх» или «вниз». Мы видели, что атомисты объясняли механизм подобного устремления «выталкиванием» менее тяжелых тел вверх и «оттеснением» более тяжелых тел вниз. Для атомистов все тела тяжелы в большей или в меньшей степени. Аристотель, верный

---

[1]) Отсюда явствует, что представление об «абсолютной легкости» огня было у Аристотеля теснейшим образом связано с представлением о конечности мира в пространстве.

[2]) Аристотель, Физика, книга IV, гл. 1, стр. 70.

[3]) Там же. Ср. Аристотель, О небе, IV, 4: «Абсолютно тяжелое есть то, что располагается ниже всего другого, абсолютно же легкое—то, что всплывает поверх всего».

общим принципам своей физики, не хочет подниматься до такой ступени абстракции и ограничивается констатацией, что в материальных средах одни тела «всплывают», другие «тонут». Что касается причин такого различия, то он в них либо не вдается, либо вводит мотив финальности, впоследствии до чрезвычайности раздутый в средневековом схоластическом аристотелизме.

Послушаем самого Аристотеля. В одной из глав своей «Физики» он дает следующий уклончивый ответ на вопрос, почему тела движутся в свойственные им места: «В противоположные места они движутся силой, а в свойственные им—легкое тело вверх, тяжелое вниз—по своей природе, а чем они приводятся в движение, это еще не так ясно, как в том случае, когда они движутся против природы»[1]). В другом месте «Физики» Аристотель опять ставит вопрос, «почему легкие и тяжелые движутся в свои места». «Причина этому,—отвечает он здесь,—заключается в том, что они по природе назначены „куда-нибудь", и в том именно и состоит различие легкого и тяжелого, что одно стремится кверху, другое—книзу»[2]). Аристотель замечает при этом, что легкие и тяжелые тела не могут двигаться вследствие препятствий, но когда препятствие устраняется, они проявляют свою энергию и все время движутся в свои места.

Прямолинейные движения вверх и вниз свойственны телам, состоящим из четырех стихий «подлунного мира». Они неизбежно должны иметь конец в пределах этого мира: огонь должен придти в состояние покоя, достигнув своей стихии, так же как и земля «успокоиться», достигнув «центра мира». Но каким же образом объяснить вечное круговое движение небесных тел? Если оно естественно, а потому и не может прекратиться, то тела, которым оно присуще, полагал Аристотель, должны состоять из особого вещества—пятой стихии, или эфира, которому круговое движение может быть присуще «по природе». Критикуя теорию мирового вихря, развивавшуюся древними атомистами, Аристотель исходил из мысли, что для «тяжелых» тел круговое движение противоестественно, а потому

[1]) Аристотель, Физика, книга VIII, гл. 4, стр. 177.
[2]) Там же, гл. 4, стр. 179.

не может продолжаться долгое время. Вот что пишет об этом его комментатор Симпликий: «Аристотель считает неправдоподобным, что такое положение вещей могло бы сохраняться столь долгое время, будучи противоестественным. Надобно ожидать, что такое движение, которое одолевает стремление падать вниз, может продержаться лишь короткое время, но вечно продолжаться ему невозможно, ибо всему, имеющему тяжесть, присуще стремление падать вниз»[1]).

Таким образом, «небесная механика» у Аристотеля резко отграничивается от физики земных движений.

Посмотрим теперь, как конкретизированы только что изложенные положения у самого Аристотеля. В сочинении «О небе» (IV, 4) читаем: «Дерево весом в 1 талант [60 мин] будет тяжелее в воздухе, нежели свинец весом в 1 мину, а в воде будет легче. Причина заключается в том, что все имеет тяжесть за исключением огня и все имеет легкость за исключением земли. Земля же и те тела, которые содержат много земли, по необходимости должны иметь тяжесть везде, тогда как вода должна иметь ее везде, за исключением случая, когда она находится в земле, а воздух—за исключением тех случаев, когда он находится в воде или в земле. Ибо в [естественном] своем месте все имеет тяжесть, за исключением огня,—даже воздух. Указанием служит то, что надутый бурдюк тянет больше, чем пустой. Таким образом, если что-либо содержит больше воздуха, нежели земли и воды, то оно может оказаться в воде более легким по сравнению с другим каким-нибудь телом, а в воздухе—более тяжелым, ибо в воздухе оно не всплывает, а в воде всплывает».

Исходя из своей концепции «тяжелого» и «легкого», Аристотель в том же трактате («О небе», IV, 6) критиковал взгляд, согласно которому тела движутся вверх или вниз вследствие различия своей формы. Различие формы, по его словам, может обусловить лишь бóльшую или меньшую быстроту передвижения, но не самое передвижение. «Можно поставить теперь вопрос, почему широкие тела

---

[1]) Симпликий, Комментарий к сочинению Аристотеля «О небе», II, 1 (стр. 375—376, Heiberg).

из железа и свинца способны плавать на воде, тогда как менее крупные и менее тяжелые, если они округлые или длинные, как, например, игла, перемещаются вниз, и почему некоторые тела, благодаря своей мелкости, всплывают, как, например, золотые пылинки и прочие землистые и порошкообразные вещества в воздухе. Приписывать всему этому причину, которую приводит Демокрит, будет неправильно. В самом деле, он говорит, что те теплые частицы, которые испаряются из воды, поддерживают тяжелые тела, имеющие широкую поверхность, а в узкие не попадают, поскольку им противостоит небольшая поверхность. Но тогда в воздухе это должно было бы происходить в еще большей мере, как утверждает и сам Демокрит; однако, принимая это, он дает слабое решение вопроса: ведь он утверждает, будто устремление вверх не является единым по своему направлению, понимая под этим движение тел, перемещающихся вверх». Вслед за этим Аристотель приводит собственное объяснение: «Поскольку же из непрерывных тел одни поддаются разделению труднее, нежели другие, и точно так же одни способны разделять легче, другие—труднее, постольку в этом и следует усматривать искомые причины. Ведь то, что способно хорошо очерчиваться границами, является хорошо разделяющимся, и тем лучше, чем оно лучше очерчивается; воздух же в этом отношении совершеннее воды, а вода—земли. И более мелкое тело любого рода легче поддается разделению и рассечению. Стало быть, тела широкие, благодаря своему большому охвату, пребывают наверху, ибо при большом своем протяжении не быстро рассекают среду, тогда как тела, противоположные по форме, вследствие своего малого охвата, движутся книзу, ибо быстро рассекают ее. И в воздухе делают это гораздо лучше, поскольку он поддается разделению легче, чем вода. А так как тяжелое тело обладает способностью сопротивляться своему рассечению, то и другое нужно сравнивать друг с другом: если перевешивает сила тяжелого тела по сравнению с силой непрерывной среды, сопротивляющейся рассечению и разделению, то такое тело понуждается скорее двигаться книзу, а если эта слабее, то тогда тело всплывает».

Таким образом, скорость падения тяжелого тела (или подъема легкого тела) зависит (в материальной среде,— пустоты, как мы знаем, Аристотель не признает) как от формы, так и от веса (или легкости) тела, последние же (т. е. вес или легкость) варьируют в зависимости от различия сред, в которых тела находятся: «тяжесть» и «легкость» для Аристотеля величины переменные, зависящие от нахождения в той или другой среде.

Приведем аргументацию Аристотеля: «Мы видим, что тела, имеющие бо́льшую силу тяжести или легкости, если в остальном они имеют одинаковую фигуру, скорее проходят равное пространство в том пропорциональном отношении, в каком указанные величины относятся друг к другу». Почему же более тяжелые тела падают быстрее? «В среде наполненной это происходит в силу необходимости, т. е. большее скорее будет разделять ее своей силой. Ведь разделение производится фигурой или импульсом, который имеет движущееся или брошенное тело»[1]).

Отвергая существование пустого пространства, Аристотель отвергал и существование «чистого» или «пустого» времени. Вместе с тем он проводил тонкие различия между временем и движением.

Анализируя понятие времени, Аристотель замечает, что некоторые неправильно принимали «круговращение неба» за само время; в действительности это круговращение служит средством измерять время, но еще не является самим временем как таковым. Если движение не может

[1]) Аристотель, Физика, книга IV, гл. 8, стр. 87. Любопытна аргументация Александра Афродизийского, сохраненная в комментарии Симпликия к «Физике» (IV, 8, стр. 679, Diels): если тяжесть не влияет на скорость движения, то тела различной тяжести двигались бы одинаково быстро, а это невозможно. Александр говорит: «Если кто-нибудь спросит, почему невозможно, чтобы более тяжелое и менее тяжелое тело двигались одинаково быстро, то легко ответить на этот вопрос. Если прибавка тяжести не делает движение более быстрым, то тогда тяжесть вообще не будет причиной движения вниз в пустоте: ведь то, что при своем прибавлении не способствует ни напряженности, ни возрастанию движения, вообще не может быть началом, вызывающим движение... Большее количество огня и большее количество земли всегда несется к своему месту быстрее».

быть без времени, то и время не существует без движения. «Время не есть движение, но и не существует без движения»[1]). Если бы не было изменений, не было бы и времени. При отсутствии изменений все «теперь» были бы тождественны, и, следовательно, все пребывало бы в едином и нераздельном «теперь»[2]). Что же такое время? Так как «мы вместе ощущаем и время и движение», то «время есть или движение, или нечто, связанное с движением». Но время отлично от движения, так как движения могут иметь различную степень скорости, и следовательно, они должны измеряться временем. Время же есть «число движения» или «мера движения»[3]).

Поскольку представление о времени возникает из чувственного восприятия «предыдущего» и «последующего» в процессе движения, постольку можно сказать, что время есть число движения по отношению к «предыдущему» и «последующему». Можно также сказать, что время является движением в той мере, в какой движение есть число. Далее: «время есть число непрерывного движения вообще, а не какого-нибудь определенного вида». В этих словах Аристотель распространяет категорию времени на все виды изменений: перемещение в пространстве, качественное изменение, рост. Ведь время одно и то же для различных движений, заканчивающихся вместе, даже если одно движение было перемещением, а другое—качественным изменением. Время везде одинаково подобно тому, как везде одинаково число, рассматриваемое само по себе[4]). Далее: непрерывность и делимость времени до бесконечности вытекают из непрерывности и бесконечной делимости пространства и движения. Вследствие непрерывности пространства непрерывно и движение, а благодаря движению непрерывно и время. Ведь «мы не только движение измеряем временем, но и время измеряем движением»[5]). Но если изменение чего-либо может совер-

---

[1]) Аристотель, Физика, книга IV, гл. 11, стр. 94.
[2]) Там же.
[3]) Там же, гл. 11, стр. 95; гл.12, стр. 98.
[4]) Там же, гл. 11, стр. 95.
[5]) Там же, гл. 12, стр. 97.

шаться быстрей или медленней, то время всегда и везде одинаково и протекает равномерно. Если бы оно протекало не равномерно, то скорость такого его изменения должна была бы измеряться временем, а следовательно, существовало бы «время времени».

Так как время является мерой движения, то оно является также и мерой покоя, ибо как движение, так и покой существуют во времени[1]). Ведь то, что существует во времени, не должно непременно двигаться, поскольку время есть не движение, а число движения. Практически время измеряется «круговым равномерным движением сферы». Перемещение является простейшей формой движения, а равномерное круговое движение является наиболее простым и наиболее известным из перемещений. Поэтому «временем отмеренного кругового равномерного движения мы измеряем и время, и движения»[2]).

Таковы основные положения учения Аристотеля о пространстве и времени. Учение это имеет явно материалистический характер[3]).

Глубокие соображения о природе времени, пространства и движения высказаны Аристотелем в связи с апориями Зенона[4]). В апории со стрелой суть дела, по мнению Аристотеля, состоит в том, что Зенон желает свести определение движения, являющегося по своей природе вре-

---

[1]) Под покоем тел Аристотель разумел не абсолютное отсутствие движения, но условное. Покой представляется у него как потенция или возможность движения: в покое может пребывать лишь то, что способно двигаться, неподвижным же является то, что вообще неспособно к движению. Покоиться—это значит находиться некоторое время в одном и том же состоянии, ибо подобно движению покой всегда существует во времени. См. «Физика», книга VI, гл. 8, стр. 142.

[2]) Аристотель, Физика, книга IV, гл. 14, стр. 104.

[3]) В «Физике» (книга IV, гл. 14, стр. 103) Аристотель пишет: «Может возникнуть сомнение, будет ли в отсутствие души существовать время или нет», и отвечает на этот вопрос в материалистическом смысле. Без считающего субъекта, понятно, не может быть и счета времени. Но «если существует независимо от души движение, а с движением связано „прежде“ и „после“, время же и есть это само», то тем самым и время как нечто неотделимое от движения существует независимо от разума. Итак, от «души» зависит счет времени, но не время само по себе.

[4]) Аристотель, Физика, книга VI, гл. 9, стр. 143—146.

менным процессом, к пунктуальным характеристикам. Зенон требует, чтобы сторонники объективности движения указали ему необходимые и достаточные признаки, отличающие мгновенное состояние действительного движения от мгновенного состояния действительного покоя.

Итак, существуют ли признаки, отличающие в каждый данный момент времени покой от движения? На этот вопрос Аристотель отвечает следующим образом. Сама постановка вопроса недействительна. В мышлении движение может быть представляемо только как временной процесс, ибо таковым оно и является по своей природе. Зенон же хочет рассматривать движение состоящим из невременных элементов и, следовательно, он спрашивает о том, что противоречит самому понятию движения и несвойственно движению по природе. Истинное движение, как и время, есть нечто непрерывное и, следовательно, не является простой совокупностью замкнутых в себе, первичных элементов. Аристотель замечает, что понятия покоя и движения неприменимы к понятию мгновения, или неделимого «теперь», ибо как движение, так и покой существуют во времени. И вообще все противоречия апории со стрелой проистекают, по мнению Аристотеля, из того обстоятельства, что Зенон неправильно полагает, будто истинное время слагается из отдельных «теперь», а движение слагается из отдельных невременных, мгновенных состояний. Согласно взгляду Аристотеля, и пространство, и время, и движение потенциально делимы до бесконечности и не слагаются из актуального множества первичных элементов («точек», «мгновений» и «продвинутостей», или «кинем»). С этой точки зрения и рассматриваются апории Зенона.

Обстоятельному разбору подвергнута, в частности, зеноновская апория «дихотомии». У Зенона проблема ставилась следующим образом: перемещение AB делится пополам, оставшаяся половина вновь разделяется в средней точке и т. д. до бесконечности. Если представить таким образом конечное перемещение AB состоящим из бесконечного множества частичных перемещений, возникает вопрос: можно ли бесконечное множество подобных частичных перемещений осуществить в течение конечного промежутка времени? Аристотель отвечает: да, можно. Ведь при произвольном делении перемещения время перемещения так же разделяется в определенном отношении и, следовательно, бесконечной совокупности частичных перемещений соответствует бесконечная же совокупность элементарных времен. «Путь непрерывный, если время непрерывно, раз в половинное время проходится половинный путь и вообще в меньшее время—меньший, ибо одни и те же деления будут и для времени и для перемещения. И если одно из них бесконечно, то бесконечно и другое, и в каком смысле бесконечно одно, в таком и другое... Поэтому ошибочно рассуждение Зенона, что невозможно пройти бесконечное, т. е. коснуться бесконечного множества отдельных частей в ограниченное время... Бесконечного в количественном отношении нельзя коснуться в ограниченное время, бесконечного же согласно делению [т. е. потенциально делимого до бесконечности]—возможно, так как и само время в этом же смысле бесконечно. Следовательно, приходится проходить бесконечное в бесконечное, а не в ограниченное время и касаться бесконечного множества частей бесконечным, а не ограниченным множеством»[1]).

Такое рассмотрение проблемы дает ответ на вопрос: можно ли в ограниченное время пройти или сосчитать бесконечно многое? Сущность же апории состоит в другом: разделяя определенным образом в мышлении непрерывное движение и исследуя полученные отношения, можем ли мы затем эти результаты отождествлять с реальными свойствами действительных движений? Аристотель отрицает эту возможность. Действительное время и движение непрерывны, и поэтому делить их можно лишь мысленно, но не актуально. В непрерывной линии точки различаются лишь по положению, в то время как в разделенной линии точки деления отличаются от прочих точек не только положением, но и формой бытия. Точки деления мы дважды считаем, с одной стороны, как конец предыдущего отрезка и, с другой стороны, как начало последующего. Таким образом, после разделения единый и простой образ непрерывной линии исчезает и заменяется образом кусочной

---

[1]) Аристотель, Физика, книга VI, гл. 2, стр. 128—129.

линии, в которой точки деления существенно отличаются от всех прочих. Если бы действительное движение возможно было разделить на актуально бесконечное число частей, то их «нельзя было бы пройти»; если же движение разделено потенциально, то это возможно, так как предмет, движущийся непрерывно, «проходит бесконечное по совпадению, а не прямо; ибо бесконечное число половин в линии есть нечто для нее акцидентальное, а сущность и бытие ее иные»[1]).

Апория Зенона «Ахилл и черепаха», по справедливому замечанию Аристотеля, аналогична только что разобранной апории. Разница лишь в том, что граница, которой должен достичь предмет, не неподвижна, как в случае «дихотомии», а перемещается. И там и здесь предел не достигается по причине самого способа деления. Воображая идеальный процесс деления непрерывного уходящим в бесконечность, наше мышление оказывается неспособным завершить такую последовательность частичных перемещений, которая незавершима по своему существу, в силу самого закона деления. Однако указанный абстрактно-математический процесс бесконечного и, следовательно, никогда незавершаемого деления отрезка конечного перемещения имеет, по Аристотелю, место лишь в нашей мысли, реальное же движение обладает иной природой. Выводы Зенона неправильны, по Аристотелю, прежде всего потому, что он отождествляет бытие математического с бытием физического, потенциальное—с актуальным. Расстояние до места встречи Ахилла и черепахи, представляемое в виде бесконечной последовательности элементарных перемещений, не может быть пройдено лишь в нашей мысли. К реальному движению оно не относится. Такое движение лишь потенциально делимо до бесконечности. Другими словами, Аристотель желает отметить существенную разницу между математически мыслимым и физически реальным.

Утверждение, что не все допустимое в мысли существует в природе, является лейтмотивом борьбы Аристотеля против учения элеатов. Аристотель признает объектив-

---

[1]) Аристотель, Физика, книга VIII, гл. 8, стр. 197 и 198.

ность лишь за теми понятиями, которые не противоречат действительным вещам.

Подведем некоторые итоги. Аристотель трактовал «движение» более широко, чем древние атомисты, включив в него наряду с механическим перемещением и другие виды изменения, в том числе качественного. Аристотель решительно отверг возможность существования пустого пространства, не желая пользоваться этим понятием даже в порядке предварительного абстрактного исследования вопроса; тела движутся в определенной материальной среде, а на скорость такого движения влияют как форма тела, так и соотношение между ним и данной средой («тяжесть» есть величина изменчивая и относительная). Точно так же отвергает Аристотель и существование «пустого времени».

Бросив взгляд в будущее, мы могли бы увидеть, что средневековая схоластика во многих пунктах огрубила аристотелевские идеи, а в ряде случаев раздула и догматизировала идеалистические стороны аристотелевской статики и динамики. «Тяжесть» и «легкость» стали рассматриваться как некие противоположные друг другу и абсолютные качества, служащие для объяснения явлений; например, тела движутся вверх *потому*, что обладают каким-то особым таинственным свойством легкости (чего, как мы видели, не было у самого Аристотеля). Схоластическая физика подняла на щит идею финальности, менее резко выраженную у самого Аристотеля: тела стремятся к своим «естественным местам» как к некоей цели. Незачем напоминать, что идеи косности материи, неподвижного «первого двигателя» стали центральными идеями схоластической натурфилософии, так же как и резкое противопоставление «небесной материи» стихиям «подлунного мира»[1]).

С этим догматизированным, искаженным и омертвленным аристотелизмом повела борьбу механика Возрожде-

---

[1]) Говоря о схоластической натурфилософии, мы, разумеется, имеем в виду господствующие, типические для того времени формы мышления, к которым, однако, отнюдь не сводится все разнообразие средневековой мысли, в особенности же не сводятся произведения, более тесно связанные с техникой, с одной стороны, и с «еретическими», свободомыслящими кругами,—с другой.

ния. Это не помешало, однако, тому, что многие проблемы, живые искания самого Аристотеля продолжали на протяжении веков будить мысль ученых, размышлявших об основных принципах механики, так же как аристотелевская концепция бесконечной делимости, ставшая философской подосновой «метода исчерпывания», на протяжении столетий противостояла атомистической концепции «неделимых».

5. «Механические проблемы» псевдо-Аристотеля

Мы рассмотрели эволюцию некоторых общих понятий механики в связи с важнейшими направлениями античной философской мысли. Нам предстоит рассмотреть теперь некоторые античные произведения, ближе подходившие к решению отдельных задач теоретической механики, а именно: сочинение «Механические проблемы», долгое время приписывавшееся Аристотелю, и классические труды Архимеда[1]).

«Механические проблемы» замечательны в том отношении, что в них содержится как бы предыстория теоретической механики. К этому времени техника достигла такого уровня развития, когда уже стали возможными научное обоснование и обобщение многообразных, разрозненных фактов.

В «Механических проблемах» перечислены как хорошо известные следующие механические средства: рычаг, колодезный журавль с противовесом, равноплечие весы, безмен, клещи, клин, топор, кривошип, вал, колесо, каток, полиспаст, гончарный круг, руль и т. д. Не только самые проблемы, но нередко и ответы на них даются в «Механических проблемах» в форме вопросов, т. е. лишь нащупываются, намечаются вчерне и в предположительном смысле.

[1]) «Механические проблемы» на самом деле были написаны в начале III века до н. э. в эллинистическом Египте: на это указывает, например, упоминание о приводящих одно другое в движение бронзовых или железных колесах в святилищах. Такие колеса находились в египетских храмах, как подтверждается другими источниками. См. P. Tannery, Sur les problèmes mécaniques attribués à Aristote.—Mémoires scientifiques de P. Tannery, т. III, Toulouse—Paris, 1915, стр. 33.

Иногда вопросы как бы повисают в воздухе. Так, например, мы уже раньше говорили о трудностях, с которыми встречалась аристотелевская теория при объяснении движения брошенных тел: что поддерживает косные, не способные к «самодвижению» тела при их насильственном перемещении после того, как они разобщились с «двигателем», т. е. с тем, что привело их в движение? Что замедляет это насильственное движение? Почему в конце концов оно должно прекратиться? Аналогичные вопросы ставит автор «Механических проблем» (§ 33), оставляя их без положительного ответа. В указанном месте читаем: «Почему брошенные тела перестают перемещаться? Не оттого ли, что тогда прекращается выбрасывающая сила, или от противодействия, или от тяжести (ῥοπή), когда эта тяжесть одолевает мечущую силу? Или же вообще бессмысленно ставить вопрос об этом, не считаясь с причиной»?

Центральной проблемой сочинения является принцип рычага. Закон рычага был давно известен в смутно-интуитивной форме древним техникам, и это совершенно понятно, имея в виду давнее применение рычага и его фундаментальное значение как основного элемента в самых разнообразных механических приспособлениях. Сравнительно давнюю историю имела также практика взвешивания грузов, и этот факт имел особенно важное значение, так как именно практика взвешивания придает закону рычага количественную определенность. У автора «Механических проблем» этот закон приобретает характер универсального принципа статики, и к нему сводятся многие технические приспособления. Так, например: «Почему два человека, неся одинаковую тяжесть на шесте или на чем-либо подобном, испытывают одинаковую нагрузку только тогда, когда груз находится посредине, и испытывают нагрузку тем бо́льшую, чем ближе груз к одному из несущих? Не потому ли, что шест при этих условиях становится рычагом, груз—точкой опоры и из носильщиков тот, кто находится ближе к грузу, становится грузом, приводимым в движение, а второй—грузом, приводящим в движение? Ведь чем дальше этот второй находится от переносимого груза, тем легче он движет и тем более давит книзу на другого, как если бы налегающая тяжесть давила в противоположном направлении и стала точкой опоры. А если груз помещается в середине, то один не оказывается тяжестью для другого и не движет другого, и тот и другой уравновешиваются»[1]). Здесь же встречаем следующий вопрос: «Почему малый руль, привешенный на корме корабля, имеет столь большую силу?.. Быть может потому, что руль есть рычаг, а рулевой есть то, что приводит его в действие? Стало быть, место, где он прикреплен к кораблю, становится точкой опоры, руль в целом—рычагом, море—грузом, а рулевой—движущей силой»[2]).

Попытка наиболее широких обобщений сделана уже на первой странице сочинения. «Механические проблемы» начинаются словами: «Удивление вызывают из происходящих сообразно природе те явления, причина которых остается неизвестной, а из происходящих вопреки природе те, которые производятся искусством на благо людям... Таковы случаи, когда меньшее одолевает большее и обладающее малой силой (ῥοπή) приводит в движение большие тяжести, и вообще почти все те проблемы, которые мы называем механическими». И несколько далее: «К затруднениям подобного рода относятся и вопросы о рычаге, ибо кажется несообразным, что большая тяжесть приводится в движение малой силой, и это при еще большей тяжести. Ведь без рычага привести в движение такую тяжесть нельзя, а прибавив тяжесть рычага, можно привести в движение быстрее. Начало причины всего этого заключено в круге и недаром: ибо вполне оправдано, если что-либо удивительное происходит от чего-то еще более удивительного. Но наиболее удивительно совместное возникновение противоположностей, а круг слагается из таковых. Ведь он сразу же возник из движущегося и покоящегося, чьи природы противоположны друг другу»[3]).

Из дальнейшего изложения явствует, каково именно соотношение между кругом, весами и рычагом. Автор продолжает: «Вот почему, как было уже сказано, нет ничего

---

[1]) «Механические проблемы», § 27 (цит. по переводу в книге: В. П. Зубов и Ф. А. Петровский, Архитектура античного мира, М., 1940, стр. 273—274).

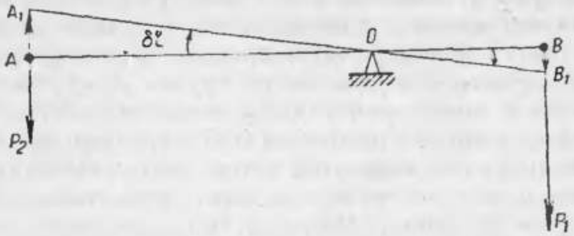
[2]) Там же, § 6.

[3]) Там же, § 1.

несообразного в том, что круг есть начало всей математики. А происходящее в весах возводится к кругу, происходящее в рычаге—к весам, тогда как почти все остальное, происходящее при механических движениях,—к рычагу. Кроме того, многое удивительное происходит с движениями кругов оттого, что на одной и той же линии, проведенной из центра, ни одна точка не движется с равной скоростью, как и другая, но всегда более далекая от неподвижного конца движется быстрее, что станет ясным в последующих проблемах». Из этой цитаты следует, что древние уже установили связь между простыми механическими машинами и заметили, что в основе этой связи лежит общий закон рычага; древние обратили внимание и на тот факт, что равновесие грузов p_1, p_2 на рычаге находится в некоторой связи с теми скоростями v_1, v_2, которые они могут приобрести при перемещении рычага. Если конкретного вида этой связи автор «Механических проблем» и не дает, то все же факт существования такой связи уже нащупан. Наконец, то обстоятельство, что свойства рычага сводятся к свойству коромысла весов, подтверждает наше предположение, что закон рычага по всей вероятности был практически осознан прежде всего при взвешивании грузов на коромысловых весах (безменах).

Дальше читаем: «Почему малые силы, как уже было сказано в начале, движут при помощи рычага большие грузы, несмотря на прибавление веса рычага? Ведь легче двигать меньшую тяжесть, а она меньше без рычага. Не оттого ли, что причиной является рычаг, который представляет собой коромысло весов, имеющее веревку [точку опоры] снизу и разделенное на неравные части? В самом деле, точка опоры рычага становится здесь заменой веревки, поскольку и та и другая остаются неподвижными, в качестве центра. А так как под действием равных тяжестей быстрее движется бо́льшая линия, проведенная из центра, в рычаге же имеется три вещи: точка опоры, веревка и центр, во-первых, и, во-вторых и в-третьих, две тяжести—движущая и движимая, то поэтому приводимая в движение тяжесть так относится к приводящей в движение, как одна длина к другой, но в обратном отношении; ведь всегда, чем дальше она отходит от точки опоры, тем быстрее движется. Причина же заключается в сказанном раньше: дальше уходящая из центра описывает бóльший круг. Таким образом, при одной и той же силе движущая тяжесть, дальше отстоящая от точки опоры, пройдет больше»[1]).

Следовательно, здесь устанавливается, что интенсивность вращающего усилия груза, прикрепленного к рычагу, тем больше, чем больше плечо рычага. Если груз A закреплен на конце рычага, то вращать этот груз тем легче, чем дальше мы прилагаем от точки опоры «движущий» груз B (черт. 1). И этот факт автор «Механических



Черт. 1.

проблем» хочет связать с тем обстоятельством, что «движущий» груз, укрепленный на большом плече, будет иметь пропорционально бóльшую скорость v по отношению к грузу «движимому», а следовательно, и бóльший путь.

Формулировка закона рычага, данная автором «Механических проблем», привлекала большой интерес и внимание ученых последующего времени (Галилей, Лагранж, Дюгэм и др.).

Все согласны, что безымянный автор знал закон рычага, хотя он и не мог дать теоретического обоснования этому давно известному факту технической практики; разногласия относятся к вопросу: в какой мере он знал закон обратно пропорциональной зависимости уравновешенных грузов и их возможных (виртуальных) скоростей? В «Рассуждении о телах, пребывающих в воде»[2]) Галилей, говоря

[1]) «Механические проблемы», § 4.

[2]) Галилей, Рассуждение о телах, пребывающих в воде.— Сборник «Начала гидростатики». Архимед, Стэвин, Галилей, Пас-

об отношении возможных скоростей и грузов, уравновешенных любым образом, писал: «Такое соотношение между тяжестью и скоростью существует у всех механических инструментов и принимается Аристотелем как принцип в его „Проблемах механики"[1]), почему мы можем принять за достоверное то положение, что не равные по абсолютной величине грузы могут взаимно уравновешиваться и приобретать равные моменты всякий раз, когда их вес будет обратно пропорциональным скорости их движения, т. е. когда один груз будет во столько раз легче другого, во сколько раз скорость его движения будет больше скорости другого». Итак, с совершенной ясностью и определенностью Галилей приписывает Аристотелю первое знакомство с элементарной формой принципа возможных перемещений. Другое мнение высказал Лагранж. В «Аналитической механике» он пишет: «Уже при поверхностном рассмотрении условий равновесия на рычаге и на других машинах легко установить тот закон, что груз и сила всегда находятся между собою в отношении, обратном отношению пространств, проходимых ими в течение одного и того же времени. Тем не менее древние, по-видимому, не знали этого закона»[2]). Факты говорят скорее в пользу мнения Галилея, чем Лагранжа. Во всяком случае, если Галилей и не прав, приписывая автору «Механических проблем» первоначальное и всеобщее утверждение принципа возможных перемещений для «всех механических инструментов», то тем более не прав Лагранж, сомневающийся в знакомстве древних с принципом возможных перемещений. Лагранж делает правильное замечание, что «уже при поверхностном рассмотрении условий равновесия на рычаге и на других машинах легко установить тот закон, что груз и сила всегда находятся между собою в отношении, обратном отношению пространств, проходимых ими в течение одного и того же времени». Если учесть, что

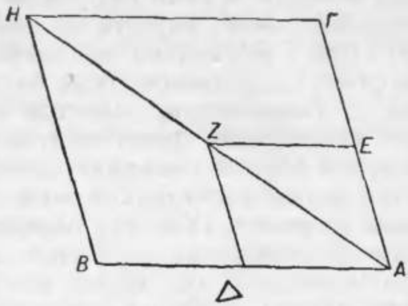
каль. Перевод и примечания А. Н. Долгова, М.—Л., ГТТИ, 1932, стр. 149.

[1]) Во времена Галилея «Механические проблемы» считались произведением Аристотеля.

[2]) Ж. Лагранж, Аналитическая механика, перевод В. С. Гохмана, 2-е изд., т. I, М.—Л., Гостехиздат, 1950, стр. 39.

древняя статическая техника имела значительный стаж, есть веские основания утверждать, что уже древние могли подметить некоторые черты указанного закона равновесия.

Интересны соображения автора «Механических проблем» о сложении движений. Нужно думать, что принцип параллелограмма скоростей и перемещений как в форме сложения, так и в форме разложения движений был изве-



Черт. 2.

стен древним ученым в достаточно развитом виде. В «Механических проблемах» читаем: «Бóльшая линия в равное время описывает больший круг, ибо наружный круг больше внутреннего. Причина этого заключается в том, что линия, описывающая круг, перемещается двумя движениями. Итак, когда она перемещается при определенном соотношении [между обоими], она движется необходимо по прямой, и эта прямая становится диагональю той фигуры, которая образуется из линий, сочетаемых в указанном соотношении. В самом деле, пусть соотношение, при котором движется перемещаемое, равно отношению линии AB к $A\Gamma$ (черт. 2), и пусть A перемещается к B, тогда как AB передвигается в положение $H\Gamma$. Пусть A продвинулось в $\triangle$, а AB дошло до E. Поскольку соотношение движений было равно отношению AB к $A\Gamma$, необходимо, чтобы и $A\triangle$ стояло в том же отношении к AE. Следовательно, малый четырехугольник подобен большому; таким образом, диагональ у них та же, и A очутится в Z. Аналогичным образом будет вестись доказательство, где бы ни остановить движение, ибо всегда оно будет на диагонали. Отсюда ясно, что перемещающееся по диагонали двумя движениями необходимо перемещается в отношении сторон, ибо если бы оно перемещалось в каком-нибудь другом отношении, то не двигалось бы по диагонали. А если бы оно перемещалось двумя движениями, не стоящими ни в каком отношении ни в какое время, перемещение не могло бы совершаться по прямой»[1]). Описывая круговое движение груза, находящегося на конце рычага, автор говорит: «Если из двух перемещающихся под действием одной и той же силы одно отклоняется более, а другое—менее, естественно заключить, что более отклоняющееся движется медленнее, чем менее отклоняющееся, что, по-видимому, имеет место в отношении большей и меньшей линий, проведенных из центра и описывающих круги. Ведь конец меньшей ближе к неподвижной точке, чем конец большей, а оттого, если этот последний отходит в противоположную сторону, к середине, то он перемещается медленнее, чем конец меньшей. Стало быть, это случается с любой линией, описывающей круг, и сообразно природе она движется по дуге, а вопреки природе—в сторону и к центру. Но меньшая всегда перемещается вопреки природе больше, ибо по причине своей большей близости к оттягивающему центру она более одолевается»[2]). Здесь, очевидно, принимается во внимание то обстоятельство, что при меньшем радиусе движимый груз в большей степени уклоняется от естественного движения вдоль касательной.

6. Статика и гидростатика Архимеда

С другим направлением теоретической мысли мы встречаемся в трудах великого греческого ученого Архимеда (287—212 гг. до н. э.)—подлинного основателя теоретической статики и гидростатики. Помимо теоретических исследований в области математики, физики и механики, Архимед занимался также вопросами прикладной механики, в частности в связи с потребностями обороны его

[1]) «Механические проблемы», § 2.
[2]) Там же.

родного города Сиракуз. Он обогатил античную технику большим количеством замечательных изобретений. Древние авторы приписывали Архимеду изобретение так называемой «улитки»,—водяного винта, служившего для поливки полей в Египте (правильнее говорить в этом случае об его усовершенствовании). Рассказывают также, что при помощи механических приспособлений Архимед передвигал по суше тяжело нагруженный корабль сиракузского тирана Гиерона. Свидетельства древних расходятся относительно того, каковы были эти приспособления, одни говорят о рычаге, другие—о полиспасте, третьи—о зубчатых колесах, четвертые—о колесах, т. е. указывают почти все так называемые «простые машины». Во время осады Сиракуз римлянами, по рассказу Плутарха, жители города применяли для обороны военные машины, сооруженные по указаниям Архимеда, а именно: орудия, метавшие снаряды на любое желаемое расстояние; поворотные краны («клювы»), которые низвергали огромные камни на вражеские корабли; привязанные к цепям железные лапы, которые захватывали нос корабля, ставя его вертикально на корму, и т. д.[1]).

В настоящее время показана полная несостоятельность легенды Плутарха[2]), утверждавшего, будто Архимед не придавал большой цены своим техническим изобретениям, считая их чем-то несерьезным[3]). Сочетание практических и теоретических знаний как раз и составляло силу его гения.

В своем произведении «О равновесии плоских фигур» Архимед заложил основы теоретической статики, построенной на системе аксиом. Несмотря на то, что в указанном сочинении изложена теория равновесия рычага, этот труд, в сущности говоря, можно рассматривать как основоположение общей теории равновесия. Знаменитое изречение Архимеда: «Дай мне точку опоры, и я сдвину землю» подчеркивает общий и фундаментальный характер принципа действия рычага.

Архимед пытается выяснить простейшие механические

---

[1]) Ср. Плутарх, Биография Марцелла, § 15.

[2]) Там же, § 14.

[3]) См. С. Я. Лурье, Архимед, М.—Л., 1945, стр. 174—183

факты, лежащие в основе принципа действия рычага, и тем самым найти его механическое обоснование. Что же касается методов точного и строгого доказательства, то Архимед мог воспользоваться уже готовыми образцами («Начала» Евклида, «Оптика» его же).

Исходя из действительных и простейших фактов опыта и воспользовавшись математическим методом, Архимед сумел обобщить эмпирический материал техники, привести его в научную систему и указать механике ее истинные методы и пути прогресса. В этом и состоит заслуга Архимеда.

Теория рычага основана на следующих предпосылках, которые Архимед считает непосредственно очевидными.

«1. Равные грузы, приложенные к равным плечам рычага, уравновешиваются.

2. Равные грузы, приложенные к неравным плечам рычага, не находятся в равновесии. И тот груз, который приложен к более длинному плечу, падает вниз.

3. Если грузы, подвешенные на каких-нибудь плечах рычага, находятся в равновесии, то если к одному из грузов что-либо добавить, равновесие нарушится, и груз, к которому прибавлено, опускается вниз.

4. Точно так же, если от одного груза отнять что-либо, равновесие нарушится, и груз, от которого не было отнято, опускается вниз.

5. Если две плоские, равные и подобные фигуры положить друг на друга, то и центры тяжести их будут один под другим.

6. Центры тяжести подобных, но неравных фигур расположены подобно.

7. Если к грузам, подвешенным к каким-либо плечам рычага и находящимся в равновесии, добавить поровну, равновесие не нарушится»[1]).

Заметим, что когда Архимед говорит о действии на рычаг подвешенных грузов, то он основывается на свойствах центра тяжести, понятие о котором предполагается известным. В частности, предполагается, что центр

---

[1]) Цитируется по переводу Г. Н. Попова; см. Архимед, Исчисление песчинок (Псаммит), М.—Л., ГТТИ, 1932, стр. 53.

тяжести тела, свободно висящего на нити, располагается на линии нити. Затем предполагается, что подвешенные тела действуют на рычаг в точке подвеса полным своим весом, сосредоточенным в центре тяжести. Ясно также, что в последующих доказательствах Архимед имеет дело лишь с весами тел и их центрами тяжести.

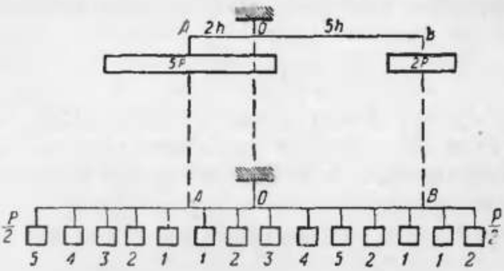
Помимо этих принципов, Архимед пользуется в ходе доказательств еще одним, который, однако, не фигурирует явно в числе исходных предпосылок. Принцип этот можно формулировать следующим образом: равновесие рычага не нарушится, если груз, подвешенный в точке *A* рычага, заменить двумя равными грузами половинного веса, точки подвеса которых симметрично расположены относительно точки подвеса замещаемого груза. Положение это мы будем называть «принципом замещения». Хотя в ходе доказательств принцип замещения применяется Архимедом с достаточной отчетливостью, однако он оградил бы свое сочинение от упреков самых требовательных критиков, если бы выставил принцип замещения в числе своих исходных предпосылок.

Заметим также, что аксиомы Архимеда являются первым существенным шагом в развитии понятия «момента силы». Во всяком случае Архимед в своих аксиомах с достаточной ясностью выставляет тот факт, что действие на рычаг подвешенного груза пропорционально его весу и расстоянию точки подвеса от точки опоры рычага. Оставалось лишь найти форму этой зависимости, и Архимед решил эту задачу. Он доказал, что действие на рычаг подвешенного груза прямо пропорционально величине груза и расстоянию точки его приложения от неподвижной опоры рычага.

«Вникнув в сущность архимедовых аксиом,—писал академик А. Н. Крылов,—мы видим, что он ввел здесь новый элемент, производящий движение, именно произведение силы на ее расстояние до точки опоры,—то, что было впоследствии названо моментом силы и что производит вращательное движение тела»[1]).

[1]) А. Н. Крылов, Мысли и материалы о преподавании механики в высших технических учебных заведениях СССР, М.—Л., Изд. АН СССР, 1943, стр. 6.

Основной закон рычага в формулировке Архимеда гласит: «Соизмеримые величины остаются в равновесии, если расстояния их [от точки опоры] обратно им пропорциональны». Доказательство распространяется затем и на случай несоизмеримых грузов с помощью метода исчерпывания. Мы ограничимся лишь случаем соизмеримых грузов, поскольку он вполне выявляет существо доказательства. Формулировав теорему, Архимед вслед затем показывает, что если условия ее выполняются, то рычаг



Черт. 3.

будет находиться в равновесии. Предположим, что в точках A и B невесомого рычага прикреплены грузы: один, равный пяти, и другой—двум единицам веса. Если отметить на рычаге точку O, делящую отрезок AB в отношении, обратно пропорциональном подвешенным грузам, то рычаг оказывается в равновесии, когда точку O делают точкой опоры. В самом деле, отложим на продолженной линии AB от точки опоры в каждом направлении по семи равных отрезков; разложим далее грузы на четырнадцать равных частей и распределим их так, как указано на черт. 3. Тогда сложный рычаг будет сведен к простому рычагу и, следовательно, средняя точка этого простого рычага в соответствии с аксиомой первой является точкой опоры, что и требовалось доказать.

Многие пытались усовершенствовать доказательство закона рычага, однако Лагранж считает, что, «нарушив простоту доказательства Архимеда, они почти ничего не выиграли с точки зрения точности». Даже доказательство Гюйгенса, которое Лагранж считал наиболее интересным, «не дает полностью того, чего действительно не хватает в доказательстве Архимеда»[1]).

Сомнения в безупречности архимедовского доказательства касаются факта, который имеет решающее значение: именно факта сложения и разложения грузов. Утверждают, что из аксиом Архимеда возможность такого разложения не вытекает. Очевидно, возможность эта основана на предпосылке, что действие груза на рычаг (момент силы) измеряется произведением из величины подвешенного груза на плечо:

$$M = Pd. \tag{1}$$

Напротив, указанное разложение оказалось бы невозможным, если бы природа механических явлений была такова, что величина M имела бы более сложную форму зависимости:

$$M = \varphi(P)\,\psi(d).$$

Таким образом, признавая разложение грузов (без изменения положений общего центра тяжести) допустимой операцией, мы тем самым явно или в скрытом виде принимаем линейную форму зависимости момента ($M = Pd$). Заметим, наконец, что общий закон рычага и заключается как раз в установлении зависимости (1), поскольку по сути дела он выражает равенство «моментов»:

$$P_1 d_1 = P_2 d_2. \tag{2}$$

Мах не был доволен доказательством Архимеда потому, что Архимед при выводе соотношений (2) якобы уже неявно пользовался этим соотношением, ибо, не предполагая заранее соотношения (1), нельзя без нарушения равновесия производить указанное разложение грузов. «Если же груз,—пишет Мах,—лежащий сбоку от точки вращения [рычага], разделяется на две равные части, перемещаемые симметрически относительно первоначаль-

---

[1]) Ж. Лагранж, Аналитическая механика, 2-е изд., т. I, М.—Л., Гостехиздат, 1950, стр. 19—20.

ной точки привеса, то один груз настолько приближается к точке вращения, насколько другой от нее удаляется. Если же принимают, что действие при этом остается тем же самым, то этим уже решается вопрос о форме зависимости момента от d, ибо это возможно только при форме Pd, при пропорциональности к d. Но тогда всякий дальнейший вывод излишен. Весь вывод содержит в себе, хотя и в неясно выраженной форме, в виде допущения, именно то положение, которое нужно доказать»[1]).

Эта критика Маха, отличающаяся исключительным формализмом, затемняет истинную сущность доказательства Архимеда. Понятно, что если бы в природе существовала какая-либо зависимость $\varphi(P)\psi(d)$, отличная от Pd, то Архимед не имел бы права делать указанное разложение груза. Однако Архимед делает это разложение не потому, что заранее убежден в определенной форме связи P и d (древним вообще было неизвестно само понятие момента силы), но потому, что элементарный опыт убеждает в возможности такого разложения. Архимед идет от опыта к математическому соотношению, которое содержится в этом опыте. Заслуга Архимеда и состоит в том, что он сумел выделить те опытные факты, которые позволили наиболее естественным путем извлечь из них искомое соотношение.

Итак, допустимость метода «замещения» одних грузов другими совершенно очевидна; можно спорить лишь, в каком отношении принцип «замещения» находится к исходным аксиомам. Прежде чем ответить на этот вопрос, обратимся к некоторым другим доказательствам закона рычага, примыкающим к системе воззрений Архимеда.

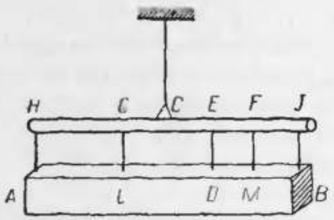
Стэвин и Галилей упростили доказательство Архимеда[2]). За исходную предпосылку Галилей принял положение, что «равные грузы, действующие на равные плечи весов, остаются в равновесии». Представим себе (черт. 4) «призму или цилиндр AB, подвешенный за концы на двух нитях HA и JB к стержню HJ. Ясно, что если я подвешу целое в сере-

---

[1]) Э. Мах, Механика, СПб., 1909, стр. 22.

[2]) Доказательство Стэвина изложено у Лагранжа, цит. соч., т. I, стр. 25—26.

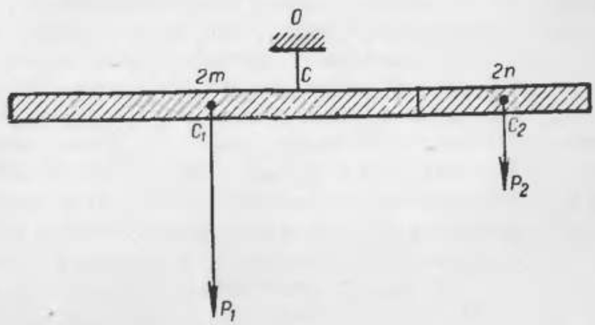
дине C коромысла HJ, то призма AB, согласно принятому нами принципу, останется в равновесии, так как половина ее веса останется по одну сторону, а половина—по другую сторону от точки C. Представим себе теперь, что призма разделена плоскостью по линии D на две неравные части, из которых DA пусть будет большей, а DB—меньшей; чтобы и после этого разделения части призмы оставались в таком же положении по отношению к линии HJ, как и раньше, протянем новую нить ED, которая, будучи прикреплена к точке E, поддержит части призмы AD и DB. Нельзя сомневаться, что и в этом случае, благодаря отсутствию какого-либо местного перемещения призмы относительно коромысла HJ, таковая по-прежнему останется в равновесии. Но то же самое положение будет иметь место и в том случае, если часть призмы, поддерживаемая двумя нитями AH и DE, будет подвешена посредине к одной нити GL, а другая часть призмы DB будет подвешена также посередине к одной нити FM. Удалим теперь нити HA, ED и JB и оставим только две: GL и FM; равновесие коромысла, имеющего точку опоры в C, сохранится по-прежнему. Но если вы теперь всмотритесь, то увидите, что мы имеем два тяжелых тела AD и DB, подвешенных к концам G и F коромысла, которое находится в равновесии, имея точку опоры в C». Далее, говорит Галилей, остается лишь доказать, что отношение плеч рычага ($CG : CF$) будет обратно пропорциональным отношением весов уравновешенных призм ($P_e : P_m$). «Превратим ли мы теперь обе призмы AD и DB в два куба или два шара или в какие-либо иные фигуры (сохраняя неизменно точки подвеса в G и F), равновесие около точки C сохранится; не думаю, чтобы нашелся кто-либо, сомневающийся в том очевидном факте, что форма не изменяет веса тел, если последние содержат одно и то же количество материи. Но отсюда мы можем вывести общее заключение, что два груза, расположен-



Черт. 4.

ных от точки опоры на расстояниях, обратно пропорциональных их весу, находятся в равновесии»[1]).

Метод Галилея был несколько упрощен Лагранжем. Представим себе (черт. 5) однородный стержень, подвешенный в средней точке C. На основании первой аксиомы Архимеда стержень должен находиться в равновесии. Разделим мысленно этот стержень на две части, одна из которых равна по длине $2m$ и другая—$2n$. Центры тяжести этих частей удалены от точки опоры C на расстояния m и n.



Черт. 5.

Итак, сосредоточив веса этих частей или их массы в точках C_1 и C_2, мы находим, что слева и справа на неравноплечий рычаг действуют тяжести

$$P_1 = 2\rho m \quad \text{и} \quad P_2 = 2\rho n,$$

откуда

$$P_1 n = P_2 m,$$

что и требовалось доказать[2]).

Прежде всего, очевидно, что все разнообразные способы вывода закона рычага (Архимед, Стэвин, Галилей, Лагранж) основаны на приведении общей задачи к случаю

---

[1]) Галилео Галилей, Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, перевод С. Н. Долгова, Соч., т. I, М.—Л., ГТТИ, 1934, стр. 219—222.

[2]) Лагранж, цит. соч., т. I, стр. 22—23.

симметричного рычага. Это приведение осуществляется у всех авторов путем надлежащего и более или менее очевидного способа распределения первоначально заданных грузов. Различаются же все эти методы способом распределения грузов. Метод Лагранжа, как это неоднократно отмечалось в литературе, отличается особенным изяществом и простотой. Однако если исходить из предпочтительности тех методов, в которых употребляемые принципы выставляются с большей отчетливостью, то в этом смысле Архимед остается непревзойденным.

Ближайшее рассмотрение обнаруживает, что авторы упомянутых доказательств в явной форме пользуются единственным принципом симметричного рычага. Не может быть сомнения, что этот принцип, как и прочие приведенные выше аксиомы Архимеда, имеет своим основанием практику многообразного применения весовых инструментов и прежде всего равноплечих весов. Принцип симметричного рычага является простейшим, непосредственным и каждый раз проверяемым результатом этой практики. Но так как из одного лишь этого принципа, основанного на частной форме равновесия рычага, невозможно извлечь какое-либо положительное знание об остальных более сложных случаях, то можно быть уверенным, что в ходе доказательства авторы с большей или меньшей отчетливостью пользуются другими принципами, которые явно не выставляются в исходных предпосылках. К таким употребляемым, но явно не оговариваемым принципам относятся следующие положения:

1. Центр тяжести есть такая точка, в которой сосредоточен совокупный вес тела.

2. Центр тяжести тела, подвешенного на нити, располагается на продолжении нити и действует посредством натяжения нити на точку подвеса силой, равной совокупному весу тела.

3. Действие на плечо рычага не изменится, если уравновешенный груз заменить половинными грузами, точки подвеса которых равноудалены от точки подвеса заменяемого груза, или, что то же самое, две параллельные силы, действующие на плечо рычага, имеют равнодействующую, равноотстоящую от обеих сил и равную их сумме.

Из первых двух принципов следует, что равновесие рычага определяется весом и точкой подвеса, но не формой подвешенного тела. Другими словами, первые два принципа позволяют совершенно отвлечься от физического представления о телах, заменив их чисто математическими образами сил, пропорциональных весу тел и расположенных вдоль нитей, посредством которых тела прикрепляются к рычагу. Из третьего принципа проистекает возможность преобразования точек подвеса (принцип замещения).

Несомненно, что все три принципа имеют чисто эмпирическое происхождение, достоверность и очевидность которых основываются на опыте взвешивания тел при помощи равноплечих весов, безменов и прочих рычажных приспособлений.

Анализируя каждый из трех принципов, можно заметить, что если первые два имеют значение для развития исходных представлений, то лишь третий (принцип замещения) скрывает в себе то, что составляет существенное содержание закона рычага.

Мы уже отмечали, что в основе принципа «замещения» лежит линейный закон усилий, действующих на плечи рычага, или, что то же самое, линейный закон сложения и разложения параллельных сил. Но так как эта зависимость эквивалентна по своему смыслу искомому закону рычага, то именно в принципе «замещения» и нужно искать решающий пункт в ходе доказательств закона рычага.

Перейдем к сравнительному анализу методов Архимеда, Стэвина—Галилея, Лагранжа. У Архимеда все три принципа применяются в чистом и вполне отчетливом виде. Из всей системы его воззрений следует, что понятие о центре тяжести предполагается известным (первый принцип). Грузы прикрепляются к рычагу посредством нитей, на продолжении которых находятся их центры тяжести. Грузы действуют на рычаг в точках подвеса полным своим весом посредством натяжения поддерживающих нитей (второй принцип). Наконец, первоначальные грузы последовательно разлагаются на пары равных, симметрично расположенных грузов (третий принцип).

В доказательстве Галилея фигурирует меньшее число вновь вводимых точек подвеса, но зато и применение третьего принципа менее отчетливо. Перераспределение сил, действующих на рычаг, производится путем трансформации связей. Сначала устраняется связь между частичными призмами посредством разреза и затем вводятся новые связи между призмами и рычагами (подвешивание частичных призм). Если до разреза на рычаг действовали в точках H и J силы, равные половине веса всей призмы, то после разреза на рычаг действуют следующие силы: в точке H половина веса призмы AD, в точке J половина веса призмы BD, а в точке E половина веса обеих призм, взятых вместе. Ясно, что галилеевская трансформация сил (посредством разреза призмы и введения новых связей) сопряжена с более сложными механическими представлениями, чем симметричное разложение грузов у Архимеда.

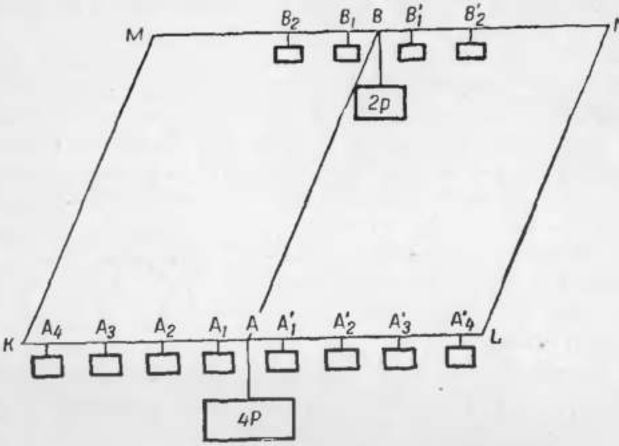
После описанной трансформации связей Галилей заменяет поддерживающие нити в точках H, E, J нитями LG, MF, применяя, таким образом, второй и третий принципы. Первый принцип применяется на последнем этапе доказательства, когда частичные призмы заменяются любыми телами равного с ними веса. В итоге простота галилеевского метода сопряжена с меньшим числом делений первоначального груза, но преимущество отчетливости применения принципов находится на стороне Архимеда.

Наконец, видимая простота метода Лагранжа состоит не только в сведéнии к минимуму операций, производимых над грузами, но и над их точками подвеса. Больше того, в методе Лагранжа мы как будто вовсе освобождаемся от применения «принципа замещения», поскольку грузы здесь не подвешиваются к рычагу, но сами составляют тело рычага. По существу же мы имеем здесь дело с бесконечным множеством «точек подвеса», ибо дискретный характер распределения грузов у Архимеда заменен в лагранжевом способе непрерывным распределением. В методах Архимеда и Галилея на рычаг передается действие совокупного веса подвешенного тела, но не каждого весомого элемента отдельно взятого. Напротив, в методе Лагранжа каждый весомый элемент уравновешенного тела непосредственно действует на рычаг. Мы можем указать на рычаге точку приложения силы тяжести любого сколь угодно малого элемента уравновешенного тела. Теперь должно быть ясным, что приведение частичных призм к их центрам тяжести сопряжено с применением третьего принципа (принцип замещения), но не с первыми двумя. Иначе говоря, в преобразовании Лагранжа мы имеем дело не с формой тела, но с точками «подвеса» элементарных грузов, расположенных справа и слева от сечения. Непрерывная последовательность точек «подвеса» заменяется, соответственно, одной точкой «подвеса» (центр тяжести частичных призм), в которой предполагается сосредоточенным полный вес соответствующей призмы. Эта трансформация точек приложения параллельных сил тяжести элементов уравновешенных призм осуществляется в доказательстве Лагранжа как «самоочевидная», на самом же деле она сопряжена не только с довольно сложными механическими представлениями (сложение непрерывно распределяемой системы параллельных сил), но в основе ее лежит молчаливо допускаемый и неотчетливо применяемый «принцип замещения».

В самом деле, вышеупомянутая операция замены частичных призм весами этих призм, сосредоточенными в их центрах тяжести, возможна лишь при линейной форме зависимости момента от силы и плеча. С другой стороны, возможность такой трансформации сил, приложенных к рычагу, вытекает из принципа замещения, и раз мы эту трансформацию употребляем как «самоочевидную», в то время как в ней содержится решающий пункт всего доказательства (линейный закон момента), то следует признать, что принцип замещения в методе Лагранжа применяется в недостаточно отчетливом виде.

В пользу метода Архимеда говорит также то, что симметричное разложение дискретных точек подвеса и самих грузов обладает не только достоинством отчетливости и наипростейшего применения исходных принципов, но и достоинством эмпирической ясности, поскольку в массовой практике рычажных приспособлений мы сталкиваемся именно с дискретным характером распределения уравновешенных грузов.

По-видимому, Лагранж ясно представлял, что метод его является лишь несущественной модификацией метода Стэвина—Галилея и, следовательно, в отношении его метода сохраняют значение слова, высказанные им самим по поводу метода Галилея—Стэвина: «Нарушив простоту доказательств Архимеда, они почти ничего не выиграли с точки зрения точности». И мы знаем, что Лагранж действительно предпринял дальнейшие попытки усовер-



Черт. 6

шенствовать вывод закона рычага, примкнув на этот раз к воззрениям Гюйгенса.

Нетрудно показать, однако, что и эти попытки Лагранжа не дали полностью «того, чего действительно не хватает в доказательстве Архимеда», а потому работы греческого ученого по обоснованию закона рычага остаются лучшими, чем все то, что было предложено взамен их.

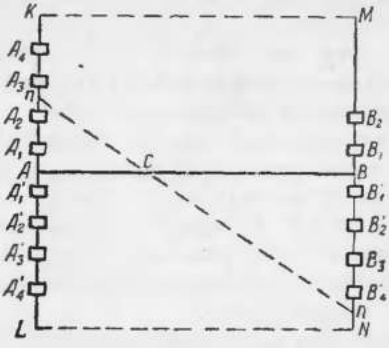
Обратимся к работам Гюйгенса, относящимися к той же теме. Гюйгенс считал не вполне очевидным архимедово разложение грузов вдоль стержня рычага (см. черт. 3), однако сам он, желая усовершенствовать архимедово доказательство, применил подобное же разложение первоначальных грузов, только не вдоль, а поперек рычага (черт. 6), допуская при этом, что действие на рычаг остается прежним. Но в таком случае уже в самом начале попытка Гюйгенса не достигает цели. Гюйгенсово разложение первоначальных грузов может быть и более очевидно, чем архимедово, но ведь правомерность этой операции вытекает не из степени очевидности того или иного способа разложения грузов, а из обоснованности того факта, что при любом способе разложения рычаг испытывает в точках A и B такое же действие, как и от первоначальной системы грузов.

Лагранж сразу же заметил этот промах Гюйгенса. Стремясь усовершенствовать метод Гюйгенса в этом пункте, Лагранж специально доказывает, что симметричный рычаг оказывает на точку подвеса (или опоры) давление, равное сумме весов уравновешенных тел. Если это положение доказано с необходимой строгостью (мы дальше покажем, что такой строгости Лагранжу не удалось достичь), то после этого уже нетрудно доказать возможность симметричного разложения первоначальных грузов вдоль любого направления.

Возвратимся теперь к доказательству Гюйгенса. В результате симметричного разложения первоначальных грузов мы получаем по сути дела плоскость $KLMN$, нагруженную в точках A_i и B_i грузами $\frac{P}{2}$. Очевидно, что эта плоскость будет находиться в равновесии, если ее подпереть вдоль оси AB (принцип симметричного рычага).

Представим себе теперь картину, изображенную на черт. 7. Приняв расстояние между точками подвеса за единицу длины, отложим от точки A вверх отрезок A_n, численно равный совокупному весу грузов, расположенных справа, а от точки B вниз отложим отрезок B_n, численно равный весу грузов, расположенных слева. Перенесем на правый поперечный стержень грузы, расположенные слева и выше точки n. Осуществляя такой перенос параллельно прямой nn, мы получим вместо прежней системы грузов $(A_4A_3A_2A_1A'_1A'_2A'_3A'_4—B_2B_1B'_1B'_2)$ новую систему грузов $(A_2A_1A'_1A'_2A'_3A'_4—B_2B_1B'_1B'_2B'_3B'_4)$. Так как последняя система грузов симметрична относительно прямой nn, то по отношению к ней плоскость

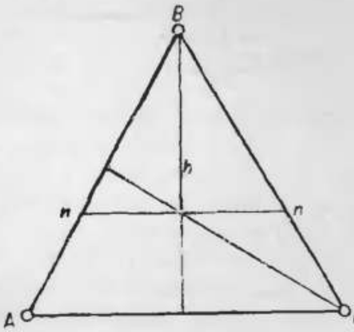
$KLMN$ должна находиться в равновесии (принцип симметричного рычага). Но если это так, то и первоначальная система грузов ($A_1'A_2'A_3'A_4'$—$B_2B_1B_1'B_2'$) должна уравновешиваться около оси nn, поскольку перенос любого груза параллельно оси симметрии nn не может нарушить равновесия плоскости около этой оси. При таком переносе сохраняются как действующие силы, так и расстояния от оси nn точек их приложения. Далее Гюйгенс утверждает:



Черт. 7.

поскольку плоскость $KLMN$, обремененная грузами ($A_4A_3A_2A_1A_1'A_2'A_3'A_4'$—$B_1B_2B_1'B_2'$), уравновешивается около осей AB и nn, она будет уравновешиваться и около любой третьей оси, проходящей через точку C, в которой пересекаются оси AB и nn. Итак, плоскость, опертая в точке C, окажется в равновесии, а потому и исходный рычаг AB будет уравновешиваться около этой точки. Остается лишь доказать, что в точке C рычаг AB делится на части, обратно пропорциональные уравновешенным грузам. Но это уже непосредственно следует из подобия треугольников AnC и BnC и пропорциональности катетов An и Bn весам уравновешенных тел.

Доказательство Гюйгенса в конструктивном отношении более сложно, нежели доказательство Архимеда. Далее, если Архимед пользуется неоговоренным принципом замещения один раз, то Гюйгенс это делает дважды: во-первых, когда производится симметричное разложение грузов, и, во-вторых, когда предполагается, что если плоскость уравновешивается около двух осей, то и любая третья ось, проходящая через точку их пересечения, также будет осью равновесия. Однако Гюйгенс (как и Лагранж) не обратил внимания на то обстоятельство, что обе эти предпосылки справедливы лишь при линейной форме зависимости момента от плеча и силы. Поскольку же в этом содержится корень закона рычага, то понятно, что Гюйгенс, желая усовершенствовать доказательство Архимеда, должен был либо обосновать с надлежащей строгостью обе предпосылки, либо ясно выставить их в качестве аксиом опыта.

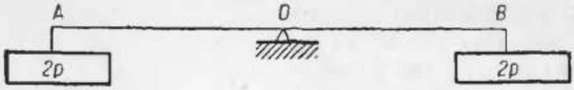


Черт. 8.

Для большей убедительности покажем на простейшем примере, что принцип Гюйгенса, касающийся осей равновесия плоскости, теряет свое значение для нелинейной зависимости момента. Предположим, что имеется система равных грузов, подвешенных к вершинам равностороннего треугольника (черт. 8). При линейной зависимости момента мы сразу же убеждаемся, что сумма моментов подвешенных грузов относительно любой прямой, проходящей через точку пересечения медиан, равна нулю.

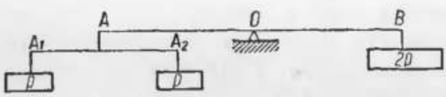
Представим теперь такие условия, в силу которых закон момента имел бы более сложную зависимость, например типа $M=Fh^2$. В этом случае мы убедились бы в равновесии треугольника около любой оси симметрии (медианы), однако отсюда не следовало бы, что плоскость будет уравновешиваться и около любой оси, проходящей через точку пересечения медиан. Так, например, для оси nn момент груза B равен $\frac{4}{9}\,Ph^2$, в то время как общий момент грузов A и C равен $\frac{2}{9}\,Ph^2$. Ось равновесия, параллельная стороне AC, пройдет, таким образом, несколько выше точки пересечения медиан.

Уже было отмечено, что Лагранж не удовлетворялся доказательством Гюйгенса. Суть дела состоит в том, по мнению Лагранжа, что у Гюйгенса, равно как и у Архимеда, остается необоснованным симметричное разложение



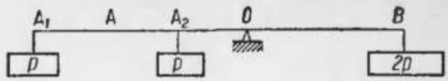
Черт. 9.

грузов. В этом именно пункте Лагранж желает усовершенствовать их доказательство. С этой целью, исходя из принципа симметричного рычага, он пытается доказать следующую лемму: точка опоры симметричного рычага испытывает давление, равное сумме уравновешенных грузов. Если это положение обосновано, то, по мнению Лагранжа, уже нетрудно доказать и возможность симметричного разложения грузов, т. е. принцип замещения, играющий в доказательстве Архимеда и Гюйгенса решающую роль. Действительно, на основании указанной леммы равновесие основного рычага (черт. 9) не нарушается, если вместо груза $2P$ в точке A подвесить симметричный рычаг (черт. 10) с грузами P и P. После этого можно представить себе вспомогательный рычаг, как угодно близко расположенный к основному рычагу, и таким образом получить вместо исходного рычага (черт. 9) с точкой подвеса A производный рычаг (черт. 11) с грузами P в точках подвеса A_1 и A_2, расположенных симметрично относительно первоначальной точки подвеса A.



Черт. 10.

Таково содержание первого варианта доказательства возможности симметричного разложения грузов, уравновешенных на рычаге. Однако Лагранж, по-видимому, был

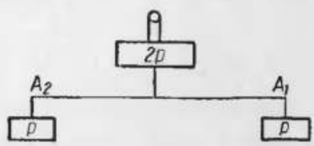


Черт. 11.

недоволен этим доказательством и сейчас же приводит второй вариант.

Первый вариант Лагранж заканчивает словами: «Нет никаких препятствий к тому, чтобы последний рычаг

Черт. 12.



Черт. 13.

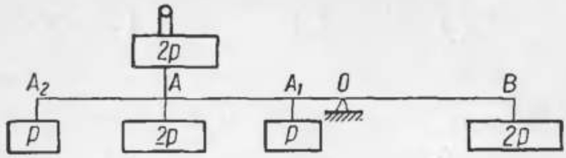
(т. е. вспомогательный) настолько приблизить к первому (основному), чтобы он составил его часть»[1]). И сейчас же добавляет: «или, что, пожалуй, будет еще строже...», начиная этими словами второй вариант своего доказательства.

Мы возвратимся к анализу обоих доказательств несколько дальше, а сейчас проследим за ходом развития второго варианта. Представим себе с самого начала основной рычаг (черт. 12) и вспомогательный рычаг, уравновешенный в соответствии с основной леммой грузом веса $2P$ (черт. 13).

Лагранж считает очевидным, что равновесие основного рычага не нарушится, если сначала добавить к нему уравновешенный вспомогательный рычаг (черт. 14), а затем освободить основной рычаг от грузов $2P$, уравновешенных в точке A. В результате получится вместо основного рычага производный (черт. 15), в котором первоначальный груз

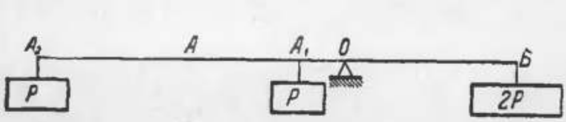
[1]) Лагранж, т. I, стр. 22.

$2P$ с точкой подвеса A будет замещен грузами с точками подвеса A_1 и A_2, симметрично расположенными относительно A. Таково содержание второго варианта, признанного Лагранжем вполне строгим.



Черт. 14.

Из приведенных доказательств видно, что, постулируя содержание основной леммы, можно было бы сделать первый вариант вполне строгим, если бы ясно оговорить употребление стэвиновского «принципа затвердения». В самом деле, когда Лагранж неограниченно приближает



Черт. 15.

вспомогательный рычаг к основному, так что они, в конце концов, представляются слитыми, то в действительности вспомогательный рычаг остается все время связанным с основным рычагом лишь в точке подвеса A. Таким образом, как в начале, так и в конце доказательства основной рычаг испытывает воздействие лишь в точке A, равное $2P$. Для того чтобы вместо точки A возникли реальные точки приложения грузов P в точках A_1 и A_2 основного рычага, надо считать вспомогательный рычаг не просто приближенным вплотную к основному рычагу, но считать их жестко связанными. Здесь мы неизбежно сталкиваемся с применением принципа Стэвина, но так как Лагранж обходит его и в то же время чувствует необходимость чего-то большего, нежели то, что дано в первом варианте, то с этой целью и предлагается второй вариант. Строго говоря, в первом варианте доказывается лишь возможность изменения формы уравновешенного тела при условии сохранения совокупного веса и точки подвеса. Но это обстоятельство не имеет существенного значения в доказательстве Архимеда, ибо независимость равновесия рычага от формы подвешенного тела постулируется уже в начальных формулировках Архимеда, равно как и независимость от окраски, температуры, вещества и т. п.

Имея в виду содержание основной леммы, Лагранж писал: «По-видимому, все механики рассматривали это допущение (что нагрузка на точку опоры симметричного рычага равна сумме подвешенных грузов) как результат повседневного наблюдения, которое учит нас, что тяжесть тела зависит только от его массы, но ни в какой мере не зависит от его формы»[1]).

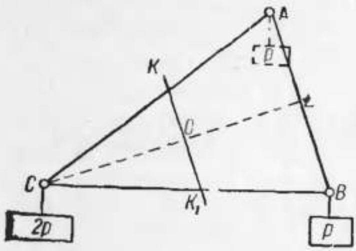
Итак, в первом варианте строго доказана лишь возможность преобразования формы, но не точек подвеса. Однако нетрудно видеть, что и второй вариант не достигает главной цели: усовершенствовать метод Архимеда. В нем также не доказана строго возможность преобразования точек подвеса. В самом деле, если в основе второго варианта лежит представление об обычных реальных телах, то применение принципа Стэвина неизбежно, ибо только так и можно осуществить жесткую связь между рычагами. Если же пользуются математической схемой усилий, развиваемых подвешенными телами, то получается еще хуже, не говоря уже о том, что при таком абстрактном представлении механических систем мы далеко выходим за пределы представлений, доступных древним, и, следовательно, подобная критика лежит за пределами исторического исследования; мы вынуждены во втором варианте применять предпосылки общей теории равновесия твердого тела, в частности аксиому об эквивалентных системах сил. Следовательно, второй вариант доказательства Лагранжа нельзя признать строгим выводом архимедовского принципа замещения по причине неявного применения других принципов.

---

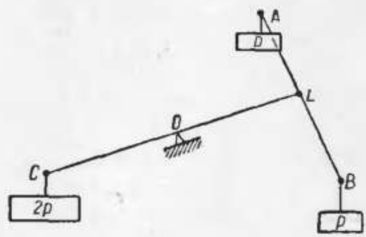
[1]) Лагранж, т. I, стр. 20.

В заключение заметим, что как в первом, так и во втором варианте фундаментальную роль играет основная лемма. Однако обоснование этой леммы также не может быть признано удовлетворительным, поскольку и здесь молчаливо применяются принципы, необходимые для доказательства.

Основную лемму Лагранж доказывает способом, примыкающим к доказательству Гюйгенса. Рассмотрим плоский треугольник, нагруженный в вершинах грузами P, P



Черт. 16.



Черт. 17.

и $2P$ (черт. 16). Ясно, что эта система будет уравновешена, если ее опереть вдоль оси KK_1 (средняя линия треугольника), ибо каждую из сторон AC и BC можно рассматривать как симметричный рычаг. Представим себе далее рычаг AB и поперечный рычаг CL (черт. 17). Поперечный рычаг, нагруженный в точке L простым рычагом AB, имеет точку опоры в O, ибо в этой точке поперечный рычаг пересекается осью равновесия KK_1. Так как точка O делит CL пополам, то ясно, что точка L должна испытывать давление, равное $2P$ (согласно первой аксиоме Архимеда). Итак, точка L, являющаяся точкой опоры простого рычага AB, испытывает давление, равное сумме уравновешенных грузов, что и требовалось доказать.

В доказательстве этой леммы Лагранж подобно Гюйгенсу молча допускает, что если плоскость (треугольник) имеет две оси равновесия (KK_1 и CL), то и любая третья ось, проходящая через точку их пересечения (точка O), будет являться осью равновесия, т. е. точка O является точкой опоры нагруженной плоскости. Однако в этой неявной предпосылке кроется истинная природа закона рычага (мы показали это при разборе доказательства Гюйгенса), и ее надлежало либо надежно обосновать, либо выставить как аксиому опыта. И так как это обстоятельство прошло мимо внимания Гюйгенса и Лагранжа, а в нем содержится решающий момент доказательства, то оба доказательства и не могут быть признаны достаточно строгими.

Как уже было отмечено нами, в целом можно присоединиться к мнению Лагранжа, утверждавшего, что некоторые ученые, пытавшиеся усовершенствовать доказательство Архимеда и видоизменявшие его различным образом с тем, чтобы придать ему бо́льшую строгость, нарушив простоту этого доказательства, почти ничего не выиграли с точки зрения точности. К этому следует добавить, что разобранные здесь методы в одинаковой степени базируются на надежных и достоверных фактах механической практики; все они в том или другом отношении являются модификацией метода Архимеда, освещая его всякий раз с какой-либо новой специальной точки зрения и тем углубляя понимание механической природы закона рычага; вместе с тем, все эти методы покоятся не недостаточном аксиоматическом фундаменте, поскольку в их основании лежат либо недоказанные предпосылки, либо недостаточно отчетливо выраженные аксиомы опыта. Наконец, среди всех этих доказательств метод Архимеда отличается наибольшей простотой и очевидностью механических фактов, а также наибольшей отчетливостью употребляемых принципов.

Вторым замечательным трудом Архимеда по механике является трактат «О плавающих телах». Согласно легенде, Архимед пришел к открытию своего основного гидростатического закона случайным образом, решая задачу о составе короны, которую царь Гиерон заказал сделать из золота, но подрядчик изготовил из сплава золота и серебра[1]).

---

[1]) Подробное изложение легенды см. в книге: Витрувий, Десять книг об архитектуре, книга IX, вступление, §§ 9—10, перевод Ф. А. Петровского, М., 1936, стр. 171.

История этого открытия в античной легенде была примитивно сведена к повелению Гиерона и к случайному наблюдению Архимеда, принимающего ванну. В действительности же открытие основного закона гидростатики было итогом вековых эмпирических наблюдений, доставляемых техникой, и целой цепи теоретических размышлений, отдельные звенья которых мы уже имели возможность проследить раньше.

В основу всех выводов Архимеда положена следующая гипотеза: «Предполагается, что жидкость по природе своей такова, что при равномерном и непрерывном расположении ее частиц менее сдавленная частица вытесняется более сдавленной и что отдельные частицы этой жидкости испытывают давление отвесно расположенной над ними жидкости, поскольку эта жидкость не замкнута в чем-либо или не испытывает давления со стороны какого-либо другого предмета»[1]). Таким образом, как указывает Лагранж[2]), аксиома Архимеда устанавливает: «1) Природа жидкостей такова, что менее сжатые части их выталкиваются более сжатыми, и каждая часть жидкости всегда сжимается весом соответствующего ей вертикального столба жидкости; 2) все, что выталкивается жидкостью вверх, всегда выталкивается по вертикальному направлению, проходящему через центр тяжести».

Опираясь на эти опытные предпосылки, Архимед доказывает следующие положения:

1. «Твердые тела, имеющие при равном объеме и равный с жидкостью вес, будучи опущены в жидкость, погружаются в нее настолько, что совершенно не выступают над ее поверхностью, но и не опускаются в ней сколько-нибудь глубже» (предложение III).

2. «Твердое тело, которое легче жидкости, будучи опущено в жидкость, не погружается сполна и некоторая часть его выступает над поверхностью жидкости» (предложение IV).

3. «Твердое тело, которое легче жидкости, будучи опущено в жидкость, погружается настолько, что объем

[1]) Архимед, О плавающих телах. — Сборник «Начала гидростатики...», стр. 57.

[2]) Лагранж, Аналитическая механика, т. I, стр. 235.

жидкости, равный объему погруженной части тела, имеет тот же вес, как и все тело» (предложение V).

4. «Твердые тела, которые легче жидкости, будучи погружены в жидкость, стремятся кверху с силой, равной превышению веса жидкости, взятой в объеме этих тел, над весом самых тел» (предложение VI).

5. «Тела, которые тяжелее жидкости, будучи опущены в жидкость, погружаются все глубже, пока не достигают дна, и, наоборот, пребывая в жидкости, теряют в своем весе столько, сколько весит жидкость, взятая в объеме этих тел» (предложение VII, основной закон Архимеда)[1].

Далее исследуются вопросы равновесия и устойчивости плавающих тел. Основным методом исследования устойчивости является способ возмущения состояния равновесия. Равновесие устойчиво, если при отклонении тела от положения равновесия тело стремится возвратиться в это положение. Во второй книге Архимед рассматривает вопросы равновесия и устойчивости некоторых плавающих тел, образованных вращением конических сечений. «Эта книга,—писал Лагранж,—является одним из прекраснейших памятников гения Архимеда, она содержит в себе теорию устойчивости плавающих тел, к которой современные ученые прибавили лишь очень немного»[2]).

Несмотря на замечательные исследования Архимеда по гидростатике, древние и после Архимеда имели весьма смутные, а нередко и ложные представления об истинном характере гидростатических явлений. Так, например, Герон не знал, что частичная потеря веса тел, погруженных в жидкость, объясняется давлением жидкости на тело, но считал эту потерю абсолютной. Герону были известны законы Архимеда, но остались неизвестными физические причины кажущейся потери веса погруженных тел[3]).

---

[1]) Архимед, *О плавающих телах ...*; см. «Начала гидростатики», стр. 59—63.

[2]) Ж. Лагранж, *Аналитическая механика*, т. I, 2-е изд., М.—Л., 1950, стр. 236. Анализ второй книги трактата Архимеда дала И. Г. Башмакова в статье: «Трактат Архимеда „О плавающих телах"».—Историко-математические исследования, вып. IX, М., 1956.

[3]) Герон, *Пневматика*, книга I, введение (Heronis Alexandrini, Opera, vol. I, Lipsiae, 1899, стр. 22—25).

Правильные представления о давлении внутри жидкости были достигнуты лишь в XVI веке на основе работ Галилея, Паскаля и Стэвина.

Открытие и формулировка основного закона гидростатики у Архимеда были не случайным «озарением», как о том повествовал Витрувий, а были теснейшим образом связаны с практически накопленным опытом и вместе с тем продолжали линию длительного развития теоретической мысли древних. Представление о частицах жидкости, выталкиваемых более плотными телами, заставляет вспомнить о теориях древних атомистов. С другой стороны, у Архимеда находят более правильную и точную формулировку аристотелевские искания, связанные с вопросами о равновесии и перемещении тел в различных материальных средах [1]).

* * *

Дальнейшее рассмотрение послеархимедовской механики завело бы нас слишком далеко. Мы ограничимся здесь тем, что отметим лишь некоторые отдельные черты, характеризующие ее развитие у греков и римлян. Если, как было показано, в более ранний период можно было различить два до некоторой степени независимых друг от друга русла эволюции общих понятий механики: одно, более тесно связанное с философией, и другое, более тесно связанное с практикой, то в эллинистически-римский период стало заметным известное сочетание обоих течений. С одной стороны, мы имеем литературу, возникшую в среде практиков,—сочинения, посвященные «искусству осады» (полиоркетике), и в частности военным машинам. С другой же стороны, именно в подобную техническую литературу проникают мотивы, ранее являв-

---

[1]) Ряд интересных соображений об истории открытия закона Архимеда содержится в статье Ch. T u r o t, Recherches historiques sur le principe d'Archimède.—Revue archéologique, nouvelle série, vol. XVIII (1868), стр. 389—406; vol. XIX (1869), стр. 42—49, 111—123, 284—289, 345—360; vol. XX (1869), стр. 14—33. См. в особенности § 1 «От Аристотеля до Архимеда»

шиеся почти исключительным достоянием философской литературы.

Достаточно напомнить имена изобретателя водяного органа Ктесибия (III в. до н. э.)[1]), который, по словам Витрувия[2]), не только был изобретателем, но и писал о машинах, а также Герона Александрийского[3]). Характерно в этом отношении, что своему сочинению «Пневматика» Герон предпослал философско-теоретическое введение, в котором говорит: «Занятия пневматикой удостоились внимания прежних философов и механиков, причем одни преподавали существо ее чисто теоретически, а другие и посредством чувственно-наглядных результатов». Далее, переходя к вопросу о пустоте, занимавшему древних атомистов, Герон писал: «Прежде чем говорить о том, что мы имеем в виду, следует рассмотреть вопрос о пустоте. Одни утверждают, что вообще нет никакой пустоты, другие же, что по природе не существует сплошной пустоты, однако в воздухе, во влаге, в огне и в других телах существует пустота, рассеянная по мельчайшим частицам. Взгляду этих последних следует отдать предпочтение, ибо из явлений и из того, что доступно чувствам, в дальнейшем показывается, что это действительно так. В самом деле, сосуды, которые большинству кажутся пустыми, не пусты, как это предполагают, а наполнены воздухом. Воздух же, по мнению естествоиспытателей, состоит из тонких и мелких корпускул, по большей части нам невидимых»[4]). Для объяснения упругости тел Герон пользуется следующей гипотезой: частицы, составляющие упругое тело,

---

[1]) Этого Ктесибия (старшего) еще в древности часто смешивали с другим, жившим во II веке до н. э. (Ктесибием—брадобреем, или младшим). См. Г. Д и л ь с, Античная техника, М.—Л., ОНТИ, 1934, стр. 172 и 176.

[2]) В и т р у в и й, кн. VII, вступление, § 14, стр. 134.

[3]) Вопрос о времени, когда жил Герон (так называемый «геронов вопрос»), породил целую литературу: различные исследователи определяли это время в пределах, начиная с III века до н. э. и кончая II веком н. э. Имеются основания сузить эти пределы до I века до н. э.—I века н. э., но не далее; более точная датировка все еще остается гадательной.

[4]) Г е р о н, Пневматика, книга I, введение (H e r o n i s Alexandrini Opera, vol. I, Lipsiae, 1899, стр. 2—29).

должны находиться на определенном расстоянии друг от друга. Сближение или удаление частиц (деформация) может быть произведено лишь с помощью внешних воздействий, причем когда внешнее воздействие прекращается, частицы возвращаются в равновесное положение. Помимо механических фактов, для доказательства существования небольших пустот в телах привлекаются также такие факты, как прохождение света через воздух, воду и распространение тепла через твердые тела.

Однако далее Герон дает чисто техническое описание различных типов сифонов и приборов, основанных на принципе сифона, пневматических игрушек, приспособленных для автоматического налива определенного количества жидкости, так называемого «геронова фонтана», «геронова шара», прыгающего шарика и т. п. При этом теоретические положения Герона далеко не всюду «работают» в полной мере.

Черт. 18.

Точно так же в «Механике» Герона можно заметить довольно внешне соединенные отрывки, посвященные то теоретическим вопросам, то чисто практическим указаниям и техническим описаниям.

Рассматривая рычаг и полиспаст и исследуя при этом отношения путей и времен подымаемых грузов в зависимости от выигрыша в движущей силе, Герон приходит к положению, которое позже называли «золотым правилом механики»: отношение времен равно обратному отношению движущих сил [1]).

В дошедшем до нас фрагменте «Катоптрики» Герон указывает, что проходящий через точку A луч, отражаясь от плоскости, приходит в точку B кратчайшим путем (черт. 18). Из этого условия получается, что угол падения светового луча равен углу отражения [2]). Принцип Герона является первой формой принципа наименьшего действия.

[1]) Heronis Alexandrini, Opera, vol. II, fasc. 1, Lipsiae, 1900, стр. 114—115.

[2]) Там же, стр. 368—373.

Но подобные общие положения не объединены в стройную систему и часто не ставятся в связь с конкретно-техническими описаниями и замечаниями. Две линии развития как бы продолжают сосуществовать, объединяясь лишь внешним, пестро-эклектическим образом.

Та же картина наблюдается в сочинении римлянина Витрувия, использовавшего в конце I века до н. э. множество греческих источников, преимущественно эллинистического времени. Так, нетрудно провести параллели между книгой X его сочинения «Об архитектуре» и рассмотренными выше «Механическими проблемами». И здесь общие положения о круге, весах и рычаге, приводимые у автора «Проблем», повторяются Витрувием без достаточной органической связи с целым [1]).

Требование всестороннего синтеза теории и практики остается скорее желательной нормой, чем осуществляется в работе механика. Витрувий требует от мастера (в частности, архитектора) не только практического уменья, но и теоретической подготовки. Архитекторы, говорил Витрувий, пытавшиеся набить руку без научной подготовки, не могли добиться признания, соответствующего их трудам; опиравшиеся же только на теоретические рассуждения и научную подготовку преследовали, очевидно, тень, а не сущность. Тогда как изучившие и то и другое и потому оказавшиеся во всеоружии, скорее добились своей цели, а вместе с тем и признания. Необходимыми знаниями для архитектора являлись: графика, арифметика, геометрия, оптика, астрономия, история, философия, музыка и правоведение.

В значительной мере лишь требованием, далеко не всегда осуществлявшимся на деле, остались правительственные распоряжения в последние века римской империи. Так, император Константин писал своему наместнику в 334 г.: «Нужно как можно больше архитекторов. Но так как их нет, пусть твое высочество побудит к этим занятиям юношей лет восемнадцати, уже вкусивших свободные науки. Дабы приохотить их к этому, мы желаем, чтобы и они сами, и родители были освобождены от повин-

---

[1]) Ср., например, Витрувий, книга X, гл. 3, стр. 195—198.

ностей, налагаемых на отдельных лиц, и чтобы самим учащимся было положено должное вознаграждение»[1]).

Если обратиться к «Математическому сборнику» Паппа Александрийского, жившего в период времени от конца III века до середины IV века н. э., то и здесь заметна та же двойственность [2]).

Предисловие к 8-й книге «Математического сборника», специально посвященной механике, начинается словами: «Механическая теория, применяемая в жизни ко многому и важному, по справедливости очень высоко ценится философами и с величайшим усердием изучается всеми математиками, потому что она едва ли не первая приходит в соприкосновение с физическим учением о веществе мировых стихий. Рассматривая покой, передвижение и перемещение тел в целом, она не только исследует причины естественных движений, но и понуждает покоящиеся тела приходить в движение, противное их природе, покидая свои естественные места, для чего прибегает к теоремам, которые подсказывает сама материя». Механика разделяется Паппом на рациональную и прикладную.

Из всех механических искусств самыми важными Папп считает следующие: «искусство манганариев [мастеров, делающих машины], которых в древности называли также механиками (ибо они посредством механизмов поднимают на высоту большие тяжести вопреки их природе, причем приводят их в движение посредством небольшой силы). Затем идет искусство тех, кто строит метательные орудия, необходимые для войны,—их также называют механиками, потому что каменные, железные и тому подобные снаряды они выбрасывают на далекие расстояния при помощи изготовляемых ими орудий. Наконец, после указанных идет искусство тех, кого собственно и называют строителями

---

[1]) Феодосиев кодекс, XIII, 4, 1; цит. по книге: В. П. Зубов и Ф. А. Петровский, Архитектура античного мира, М., 1940, стр. 316.

[2]) Греческий текст сочинения Паппа издан с латинским переводом Ф. Гульчем: Pappus Alexandrinus, Collectionis quae supersunt... ed. F. Hultsch, vol. 1—3, Berolini, 1876—1878. Французский перевод с комментариями P. van der Eeke, t. 1—2, Paris—Bruges, 1933.

машин (μηχανοποιοί), ибо при помощи водочерпательных машин, которые они строят, можно легко достать воду с большой глубины». Далее Папп упоминает «строителей диковинных механизмов» (θαυμασιουργοί), т. е. аппаратов, приводимых в движение водой или воздухом (наподобие «автоматов» Герона), и мастеров, изготовляющих подвижные небесные сферы (σφαιροποιοί)[1].

Труды Герона, Витрувия, Паппа, разумеется, заслуживают более подробного и систематического рассмотрения. Но это не входит в задачи настоящей статьи. Ее целью было рассмотреть лишь основные русла, по которым развивались основные понятия античной механики, и наметить взаимоотношения между разнообразными факторами, способствовавшими их развитию.

---

[1]) P a p p u s, ed. Hultsch, стр. 1024—1025 (по изд. van der Ecke), t. II, стр. 810—811.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ «ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ»

В статье «О развитии математики на Украине», напечатанной в IX выпуске «Историко-математических исследований» (1956, стр. 403—426), по нашей вине оказался пропущенным следующий абзац, который должен быть помещен на стр. 426 после второй строки сверху:

«В рассматриваемый период алгебра на Украине уже не играла роли ведущего направления исследований. Тем не менее и в этой области можно отметить ряд значительных работ и имена крупных исследователей. В первую очередь мы должны сказать, что в Одесском университете до конца 20-х годов продолжал свою блестящую научную деятельность Н. Г. Чеботарев. Позднее, после переезда в Казань, он сохранил тесные связи с Украиной, деятельно участвуя в работах Научно-исследовательского института математики и механики при Харьковском университете и сотрудничая с харьковскими математиками. Позднее в Одессе в области алгебры работали М. Г. Крейн и Ф. Р. Гантмахер. В Харькове А. К. Сушкевич в ряде исследований начал разработку важного направления—теории полугрупп. Кроме него, алгебраическими вопросами там занимались и другие математики, среди которых мы отметили безвременно погибшего в период Великой Отечественной войны А. М. Данилевского. В Киеве продолжал работать Д. А. Граве. В теории матриц, а также в других разделах алгебры получил интересные результаты М. Ф. Кравчук. Мы отметим также молодого алгебраиста А. В. Товбина, погибшего в борьбе с фашистскими оккупантами».

Мы благодарим А. Г. Куроша, указавшего нам на наш недосмотр.

2. VIII 1956 г. *Б. Гнеденко, И. Погребысский*

УКАЗАТЕЛИ

УКАЗАТЕЛЬ АВТОРОВ И НАЗВАНИЙ СТАТЕЙ ПЕРВЫХ ДЕВЯТИ ВЫПУСКОВ

(Римские цифры указывают выпуск, арабские—страницы)

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

к первым девяти выпускам «Историко-математических исследований»

Номер выпуска указан римскими цифрами, страницы—арабскими. Те иностранные имена, которые не приведены в русском переводе ни в одном выпуске, даны по алфавиту в конце указателя в иностранной транскрипции.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН К ВЫПУСКУ X

X
Выпуск

ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ