# ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

*Выпуск*
XXVII

ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ XXVII

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ
И ТЕХНИКИ

# ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

*Выпуск*
XXVII

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1983

УДК 512(091)

**Историко-математические исследования. Вып. 27:** Сб. статей.— М.: Наука, 1983.

Сборник состоит из трех разделов. Первый содержит статьи, посвященные творчеству Л. Эйлера. Во втором разделе помещены статьи, относящиеся к различным вопросам истории математики (истории анализа, теории чисел, алгебры и т. д.). Третий раздел содержит материалы по ранней истории Московской школы теории функций.

Издание рассчитано на математиков и историков науки.



И $\frac{1702030000-368}{042(02)-83}$ 131-83-III 

# СОДЕРЖАНИЕ

## К ИСТОРИИ МОСКОВСКОЙ ШКОЛЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

## SOMMAIRE

## SUR l'HISTOIRE DE l'ECOLE DE LA THÉORIE DES FONCTIONS À MOSCOU

## ПРЕДИСЛОВИЕ

На 1982—1983 гг. приходятся важные юбилейные даты в истории мировой и отечественной математики: 275-летие со дня рождения и 200-летие со дня смерти Леонарда Эйлера (15.4.1707—18.9.1783), члена Петербургской Академии наук, и 100-летие со дня рождения академика Николая Николаевича Лузина (9.12.1883—28.2.1950), одного из основателей и руководителей Московской школы теории функций. Эти памятные даты определили значительную часть содержания настоящего выпуска «Историко-математических исследований».

Первый раздел целиком посвящен Л. Эйлеру, и в нем широко использованы материалы, хранящиеся в Ленинградском отделении Архива АН СССР; редакция сборника благодарит директора Архива Б. В. Лёвшина и его сотрудников за помощь, оказанную при отборе материалов. Конечно, публикуемые и анализируемые здесь рукописи знаменитого математика образуют лишь малую часть его письменного наследия. Из 11 помещенных в первом разделе статей и документов шесть имеют предметом неизданные рукописи Эйлера по теории чисел, дифференциальному исчислению, геометрии треугольника и астрономии. Кроме того, имеются статьи о некоторых исследованиях Эйлера по теории чисел и теории латинских квадратов. Раздел заканчивается двумя приветственными речами, произнесенными на Юбилейной сессии АН СССР в честь 250-летия со дня рождения Эйлера, состоявшейся в Ленинграде 15—18 апреля 1957 г. Первая речь была произнесена на русском языке членом Польской академии наук В. Серпинским (1882—1969), вторая — членом Академии наук Института Франции М. Фреше (1878—1973). Речь М. Фреше, переведенная с французского, как бы перебрасывает мост между двумя упомянутыми юбилейными датами:

оратор говорил в ней о научных контактах между математиками нашей страны и Франции, в частности о своих личных контактах с несколькими выдающимися представителями Московской математической школы: покойными П. С. Урысоном и академиком П. С. Александровым и ныне здравствующим А. Н. Колмогоровым. Оригиналы обеих речей сохранились у автора этих строк, принимавшего активное участие в организации упомянутой Юбилейной сессии 1957 г.

Восемь статей различного содержания, образующих второй раздел сборника, охватывают промежуток почти в полторы тысячи лет. В них идет речь об одной задаче ал-Караджи, алгебраическом трактате Дж. Валлиса и т. д. вплоть до разработки теории уравнений с частными производными в XIX в. в ее связях с теорией групп. Отметим особо только две работы: во-первых, перевод с немецкого текста доклада члена-корреспондента АН ГДР X. Коха о жизни и творчестве П. Лежен-Дирихле (1805—1859), сделанного в связи со 175-летием со дня рождения этого крупнейшего немецкого математика; особое внимание при этом уделено дальнейшему развитию нескольких основных идей и проблем Дирихле, а во-вторых,— обширное исследование по теории комплексного умножения, являющееся продолжением статьи, помещенной в XXVI выпуске.

Третий раздел, относящийся к истории Московской школы теории функций, содержит, прежде всего, неопубликованную рукопись академика П. С. Александрова «О вкладе Георга Кантора в математику». Далее следуют два неопубликованных письма Н. Н. Лузина. Одно к Ф. Клейну от 1923 г., положившее начало особенно плодотворному десятилетию научных контактов между московскими и геттингенскими математиками, другое — к М. Фреше. Публикуются также письма Ш. Ж. Валле-Пуссена к Лузину по поводу выхода книги последнего по теории аналитических множеств, личные воспоминания о годах учения и начале творческого пути члена-корреспондента АН СССР Д. Е. Меньшова, ныне старейшего представителя этой школы. Эти воспоминания подготовлены в форме беседы с нижеподписавшимся, почти 60 лет назад имевшим честь заниматься в семинаре по теории интегралов Лебега и Данжуа, руководимом Д. Е. Меньшовым, и полностью отредактированы их автором.

Когда данный выпуск уже был сдан в редакцию, скончался академик Павел Сергеевич Александров (7.05.1896—16.11.1982). П. С. Александров был человеком огромной культуры и широких интересов. Он внес вклад непреходящего значения в теорию функций и топологию, обогатил он и историю математики, которой посвящено немало его статей и публичных выступлений. Редакция «Историко-математических исследований» глубоко скорбит об уходе из жизни П. С. Александрова, который несколько раз помещал статьи и в наших сборниках, начиная с первого. Как сказано выше, и в данном выпуске публикуется посмертно небольшая рукопись П. С. Александрова.

*А. П. Юшкевич*

# ПАМЯТИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

## УДОБНЫЕ ЧИСЛА В РУКОПИСНОМ НАСЛЕДИИ ЭЙЛЕРА

**И. Г. Мельников** [1]

Изучением квадратичной формы $x^2 + y^2$ в мемуаре Е 228, напечатанном в 1758 г. [1, т. 2], Эйлер положил начало теории бинарных квадратичных форм. Здесь он впервые показал, как можно найти делители числа $4n + 1$, если известны его различные представления в виде суммы двух квадратов. Аналогичные задачи факторизации чисел, представимых формами $x^2 + 2y^2$ и $x^2 + 3y^2$, Эйлер рассмотрел в работах Е 256 (опубл. 1761, [1, т. 2]) и Е 272 (опубл. 1763, [1, т. 2]).

В публикуемых ниже записях Эйлер занимается квадратичной формой более общего вида: $\alpha x^2 + \beta y^2$, показывает, что число, представимое такое формой двумя способами, является составным, и разрабатывает метод факторизации таких чисел.

Эйлер не случайно занялся здесь факторизацией числа 1 000 009. Использовав удобное число $d = 25 \cdot 9 = 225$,

---

[1] Статья из архива историка математики Ильи Григорьевича Мельникова (Гомель, 14.1.1916—11.3.1979). По окончании школы И. Г. Мельников работал учителем, одновременно заочно учась сначала в Ленинградском учительском институте, затем в Ленинградском педагогическом институте. В 1939 г. был оставлен в аспирантуре у проф. Б. А. Венкова. Кандидатскую диссертацию «Приложение теории эллиптических функций к доказательству кубического и квадратичного законов взаимности и к некоторым арифметическим теоремам» он защитил в 1944 г. в Саратовском университете. С сентября 1943 г. он работал в Сталинградском пединституте, в августе 1945 г. вернулся в Ленинград и с 1945 по 1952 г. был деканом физико-математического факультета педагогического института, с 1952 до 1961 — доцентом того же института, а с 1961 по 1976 — доцентом Ленинградского института точной механики и оптики, с которым был связан до конца своей жизни. Основной темой его творчества, наряду с теорией чисел, была история математики. В основном он исследовал творчество П. Ферма и Л. Эйлера в области теории чисел.

Эйлер нашел два представления числа 1 000 009 формой $25x^2 + 9y^2$ и получил разложение $1\,000\,009 = 293 \cdot 3413$. Это составное число в мемуаре E 467, представленном Петербургской академии наук 22 августа 1774 г. (опубл. 1775, [1, т. 3]), было помещено в списке простых чисел. Свою ошибку Эйлер исправил в E 699, представленном 16 марта 1778 г. (опубл. 1797, [1, т. 4]). Показав, что $1000^2 + 3^2 = 972^2 + 235^2$, Эйлер получил приведенное выше разложение. О своей ошибке он сообщил Н. Беглену в письме, датированном маем 1778 г. (см. E 498) [1, т. 3]. В превосходном трехтомнике Л. Ю. Диксона «История теории чисел» [2, т. I, с. 361] сообщается, что Эйлер доказал в мемуаре E 699, что число $1000^2 + 3^2$ — простое, поскольку оно не может быть представлено еще одной суммой квадратов. Интересно отметить также, что непростота числа 1 000 009 была установлена Эйлером еще в упомянутом мемуаре E 228 [1, т. 2] (§ 48) [2], но Эйлер уже успел забыть об этом.

Удобные числа — одно из интереснейших открытий Эйлера в теории бинарных квадратичных форм. Обнаружив, начиная с 1745 г., удобные числа $d = 1$, 2 и 3, Эйлер завершил свои исследования в этом направлении в 1778 г. В результате было найдено 65 удобных чисел и построена приблизительная теория в E 498, а также E 708, а, E 708, E 715, E 719, E 725 [1, т. 4]. Позднее эти 65 удобных чисел были выявлены в 1801 г. Гауссом в связи с классификацией бинарных квадратичных форм. Натуральное число $d$ по Гауссу является удобным тогда и только тогда, когда в каждом роде чисто коренного порядка определителя $-d$ имеется лишь по одному классу форм.

Опираясь на гауссову теорию форм, Ф. Грубе [3] глубоко проанализировал эйлеровскую теорию удобных чисел.

В современной литературе большое распространение получило ошибочное определение удобного числа, приписываемое Эйлеру. А именно, натуральное число $d = \alpha\beta$ называют удобным, если квадратичная форма $\alpha x^2 + \beta y^2$ (или $x^2 + dy^2$) однозначно и собственным образом представляет только простые числа. По Эйлеру же (см. E 715) в этом определении под простыми числами следует понимать наряду с обычными простыми числами их квадраты, удвоенные простые числа и степени числа 2 [4].

---

Здесь и далее все параграфы и страницы указаны по изданию [1].

В. Серпинский хорошо продумал эйлеровское определение удобного числа и предложил такую формулировку: «Удобными числами мы называем числа $d$, обладающие следующим свойством: если нечетное число $d > 1$ имеет единственное представление формой $x^2 + dy^2$ (разумеется, если не обращать внимания на порядок слагаемых), где $x$ и $y$ — неотрицательные целые числа, причем в этом единственном представлении слагаемые взаимно просты, то $n$ — простое число» [5].

Это определение освобождает нас от необходимости относить четные числа $2p$ и $2^m$ к «простым» в эйлеровском смысле. Также не нужно считать «простым» число $p^2$, поскольку теперь оно имеет два представления.

В записных книжках Эйлера, хранящихся в Ленинградском отделении Архива АН СССР, удобным числам посвящены следующие страницы: ф. 136, оп. 1, ед. хр. 139, лл. 94 об.—103. Все эти записи сделаны рукой Н. И. Фусса. В них содержатся идеи и факты, которые Эйлер обстоятельно рассматривает в перечисленных выше печатных статьях. Записи представляют большой интерес при изучении приемов работы Эйлера. Немалую ценность представляют они также и потому, что содержат материал, не вошедший в перечисленные выше работы. Из-за небольшого объема статьи ниже приводятся лишь те записи Эйлера (в переводе с латинского), которые полностью или частично не вошли в опубликованные сочинения Эйлера. Тексты заметок Эйлера мы сопровождаем своими комментариями.

Фрагмент 1. Ф. 136, оп. 1, ед.хр. 139, л.94об.—96об.

Текст записей Эйлера мы не приводим, поскольку в расширенном виде этот фрагмент изложен в Е 715, представленном Петербургской академии наук 16 марта 1778 г. [1. т. 4], и в Е 708, представленном в тот же день [там же]. Разложения: $1\,000\,009 = 25 \cdot 200^2 + 9 \cdot 1^2$ и $1\,000\,009 = 25 \cdot 47^2 + 9 \cdot 324^2$ получены здесь при помощи удобного числа $d = 25 \cdot 9 = 225$. По существу, это те же самые суммы двух квадратов $1000^2 + 3^2$ и $235^2 + 972^2$, которые Эйлер в Е 228 и Е 699 положил в основу факторизации числа 1 000 009 уже при помощи формы $x^2 + y^2$.

Фрагмент 2. Ф. 136, оп. 1, № 139, л. 97.

«Если составное сколь угодно большое число содержится в форме $\lambda xx + yy$, то всегда в этой форме будет содержаться и другое, много меньшее составное число. Например, так как для $x = 2$ и $y = 31$ форма $75xx + yy$ дает $1261 = 13 \cdot 97$, то полагая $y = 31 \pm 13n$, видим, что полученное число всегда будет иметь делитель 13, а также, что для $y$ можно взять четное число, взаимно простое с 75, в качестве какового надлежит принять $y = 44$. Но $x$ и $y$, разделенные на 2, дают $x = 1$ и $y = 22$.

Теперь можно положить $y = 22 \pm 13n$, т. е. $y = 4$, откуда получается $91 = 13 \cdot 7$, меньше чем $4\lambda$.

Если по этому правилу изучить формулу $63xx + yy$ и давать $y$ частные значения, взаимно простые с 63, каковыми будут 2, 4, 8, 10, 16, 20 и т. д., получатся числа 67, 79, 127, 163, 319, каковые числа с числом 252 все будут простыми (кроме последнего). Число 319 не является простым, а есть произведение $11 \cdot 29$, но, однако, в такой форме содержится единственным образом; значит, число 63 из нашего рассмотрения должно быть исключено. Кроме того, вышеуказанное правило нуждается в исправлении, связанном с тем, что выше ошибочно исключаются все четные числа. Исправленное правило должно формулироваться так: Если предложена форма $\lambda xx + yy$, достаточно рассмотреть случай $x = 1$ или форму $\lambda + yy$, где $y$ последовательно придаются значения, взаимно-простые с $\lambda$ (откуда видно, что допустимы четные значения, поскольку $\lambda$ будет нечетным), до тех пор пока не достигнем предела $4\lambda$, чтобы судить о полученных таким образом числах, утверждается, что не только числа сами по себе простые, как например, $p$, но и их удвоения $2p$ должны быть рассматриваемы как простые, а также степени 2, а именно 4, 8, 16 также следует рассматривать как простые числа. Числа же $4p$, $8p$, $16p$ и т. д. должны рассматриваться как составные, а квадраты — как простые числа.

Отметив это, мы можем утверждать, что если до члена $4\lambda$ не встретится никакого составного числа, то значение $\lambda$ будет удобным. Если же встретится одно составное число, то значение $\lambda$ надо исключить (из дальнейшего рассмотрения). Итак, если изучим форму $63xx + yy$ по второму указанному правилу, то в выражении $63 + zz$ вместо $z$ надо будет писать все числа, взаимно простые с 63, пока не дойдем до члена $4 \cdot 63 = 252$; это вычисление следует производить так:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $63+1^2$ | $63+2^2$ | $63+4^2$ | $63+5^2$ | $63+8^2$ | $63+10^2$ | $63+11^2$ | $63+13^2$ |
| $=64$ | $=67$ | $=79$ | $=88$ | $=127$ | $=163$ | $=184$ | $=232$ |
| pr. | pr. | pr. | comp. | pr. | pr. | comp. | com. |

и поскольку здесь встречаются три составные числа, то число 63 должно быть исключено.

Если предложена форма $75xx + yy$, проведем вычисления для формы $75 + zz$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $75+1^2$ | $75+2^2$ | $75+4^2$ | $75+7^2$ |
| $=76=$ | $=79$ | $=91=$ | $=124=$ |
| $=4\cdot 19$ | | $=7\cdot 13$ | $=4\cdot 31$ |
| comp. | pr. | comp. | comp. и т. д. |

поэтому 75 надо исключить. Исследуя форму $57xx + yy$, вычисления надо проводить для $57 + zz$ следующим образом:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $57+1^2$ | $57+2^2$ | $57+4^2$ | $57+5^2$ | $57+7^2$ | $57\times+8^2$ |
| $=58=$ | $=61$ | $=73$ | $=82=$ | $=106=$ | $=121$ |
| $=2\cdot 29$ | | | $=2\cdot 41$ | $=2\cdot 53$ | |
| pr. | pr. | pr. | pr. | pr. | pr.; |

| | | |
|---|---|---|
| $57+10^2$ | $57+11^2$ | $57+13^2$ |
| $=157$ | $=178=$ | $=226=$ |
| | $=2\cdot 89$ | $=2\cdot 113$ |
| pr. | pr. | pr. |

Поскольку здесь все числа суть простые, или рассматриваемые как простые, 57 должно быть отнесено к удобным числам.

Так как число 357 является удобным и также все числа, содержащиеся в форме $357xx + yy$, суть простые, устанавливаем вычислением, что следующие числа суть простые:

1⁰ 3570 001, 2⁰ 3570 121, 3⁰ 3570 169, 4⁰ 14 280 001, 5⁰ 14 280 121, 6⁰ 32 130 121.

Следующие же числа являются удобными:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 28, 30, 33, 37, 40, 42, 45, 48, 57, 58, 60, 70, 72, 78, 85, 88, 93, 102, 105, 112, 120, 130, 133, 165, 168, 177, 190, 210, 232, 240, 253, 273, 280, 312, 330, 345, 357, 385, 408, 462, 520, 760, 840, 1320, 1848, 1365.

Такие числа были вычислены до числа 3045, исключая само число.

При продолжении вычислений до 7000 никакого нового удобного числа кроме этих не найдено».

К о м м е н т а р и й.

В приведенном фрагменте формулируется критерий, позволяющий ответить на вопрос, является ли натуральное число $\lambda$ удобным числом. Критерий подробно обсуждается в мемуарах Е 708 и Е 715 в двух лишь внешне различных формах и приводится в извлечениях из писем Эйлера и Н. И. Фусса в Е 498 и Е 708-а. Гаусс заметил, что этот критерий легко доказать [6, § 303].

К сожалению, никаких дальнейших указаний Гаусс не сделал. Ф. Грубе в упомянутой выше работе [3] сообщил, что ему не удалось доказать критерий Эйлера.

В оригинале последняя строка, в которой указывалось, что от 1000 до 1290 удобных чисел нет, вычеркнута. Из приписки видно, что Эйлер [3] быстро продвигался вперед. Уже в мемуаре Е 715 Эйлер сообщил, что до 10 000 он не обнаружил ни одного нового удобного числа сверх тех 65, которые приведены в этом фрагменте. Там же он высказал предположение, что «эта таблица содержит решительно все удобные числа».

Гипотеза о конечности множества удобных чисел была высказана Эйлером в Е 715 (§ 41), Е 719 (§ 79). Эйлер считал в высшей степени вероятным, что 1848 есть наибольшее удобное число, хотя и усматривал в этом «необыкновенный парадокс». Этот парадокс, состоящий в нарушении обычного представления о бесконечности множества чисел, обладающих каким-либо определенным свойством, Эйлер отметил в мемуаре Е 725, представленном 20 апреля 1778 г.

После Эйлера новые удобные числа безуспешно искали Каннингем и Каллен [7], которые довели вычисления до 101220, А. Ферье [8], исследовавший числа от 100000 до 200000. Изыскания Ферье продолжили аспиранты Варшавского университета (от 200000 до 700000). Вычисления эти, как сообщил автору комментария В. Серпинский в письме от 9 февраля 1961 г., хранятся в архиве деканата факультета математики и физики Варшавского университета. В 1934 г. С. Човла [9], использовав один результат Гейльброна, доказал справедливость гипотезы Эйлера о конечности множества удобных чисел. Вычисления Ферье и других оказались бесполезными, так как еще в 1948 г. Дж. Свифт [10] показал, что до 2500000 нет ни одного нового удобного числа. С. Човла и В. Бригс показали, что новых удобных чисел может оказаться не более одного, и, если оно существует, то должно превосходить $10^{65}$ [11].

Ф р а г м е н т 3. Ф. 136, оп. 1, № 139, л. 97 об.

---

[3] Записи сделаны рукой Н. И. Фусса.— *Примеч. И. М.*

«Многие удобные числа, которые удалось изучить, содержатся в форме $60n + (10, 12, 13, 18, 22, 25, 28, 30, 33, 37, 40, 42, 45, 48, 52, 57, 58, 60)$. Правда, такие вычисления имеют место только тогда, когда число $\lambda$ простое или квадрат простого...»

Комментарий.

Замечание Эйлера о том, что многие удобные числа имеют вид $60n + (10, 12, \ldots, 60)$, не получило дальнейшего развития, но представляет исторический интерес.

Фрагмент 4. Ф. 136, оп. 1, № 139, л. 98 об.

«Проблема. Если даны квадраты $aa$ и $bb$, найти числа $\alpha$ и $\beta$ так, чтобы форма $\alpha aa + \beta bb$ сделалась равной данному числу $N$.

Решение. Требуется найти дробь $f/g$, приближенно равную $aa/bb$, так чтобы $bbf - aag = 1$. Для этой цели берем $\alpha = bbk - gN$ и $\beta = fN - aak$, где $k$ — произвольное, откуда ясно, что $\alpha$ и $\beta$ должны быть взяты положительными, $k > gN/bb$ и однако $k < fN/aa$. Поскольку всегда между этими границами содержится одно или несколько целых чисел, то имеют место одно или несколько решений. Иначе решение невозможно.

Теорема. Удобное число 1848 получается из специальной теоремы, которая состоит в следующем: если нечетно четное число $4n + 2$ будет числом удобным, то и его учетверение $16n + 8$ будет числом удобным.

Доказательство. Поскольку число $4n + 2 = N$ — удобное, все числа $N + xx$, которые меньше, чем $4N$, будут простыми. Возьмем $N + xx > 4N$ и в то же время меньше $9N$. Это число будет или простым или составным. В первом случае оно содержится в форме $Naa + bb$ единственным образом. Во втором случае, если оно составное, оно содержится в этой форме двумя способами. Поэтому будет $= 4N + bb$.

Поскольку $a$ не может быть взято равным 3, то будет $N + xx = 4N + bb$ и будет также $3N = bb - xx$. Число $3N = 12n + b$ будет нечетно четным. Такие числа могут быть представлены в виде разности двух квадратов. Отсюда следует, что число $N + xx$ необходимо является простым, если только оно меньше, чем $9N$ и больше, чем $4N$. Таким образом, очевидно, что $4N + yy$ будет числом простым, откуда следует, что число $4N$ является числом удобным. Так как 462 — удобное число, его учетверение необходимо должно быть удобным.

Чтобы пояснить это, запишем такие числа, содержащиеся в следующих формах:

| | | |
|---|---|---|
| $3n+1$ | $29n+21$ | $61n+18$ |
| $5n+3$ | $31n+19$ | $67n+39$ |
| $7n+0$ | $37n+35$ | $71n+2$ |
| $11n+0$ | $41n+3$ | $73n+23$ |
| $13n+2$ | $43n+42$ | $79n+31$ |
| $17n+12$ | $47n+15$ | $83n+22$ |
| $19n+5$ | $53n+46$ | $89n+68$ |
| $23n+8$ | $59n+19$ | $97n+5$ |

Поскольку $\sqrt{4\cdot 1848} < 89$, достаточно рассматривать эти формулы до $83n+22$. Эти формулы составляются следующим образом. Из класса удобных чисел исключаются все числа видов:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3n+2$ | $7n+3$ | $11n+2$ | $13n+1,3,4,9,10,12$ |
| $5n+1$ | $7n+5$ | $11n+6$ | $17n+1,2,4,8,16,15,13,9$ |
| $5n+4$ | $7n+6$ | $11n+7$ | $19n+2,3,8,10,12,13,14,15,17,18$ |
| | | $11n+8$ | |
| | | $11n+10$ | |

и т. д.

Хотя здесь получается случай, который следовало бы исключить, но видно, что результирующая сумма является квадратом или же больше $4N$, и потому не должно быть исключения».

Комментарий.

Удобное число 1848 равно учетверенному удобному числу 462. Оно завершает эйлеровскую таблицу удобных чисел. Теорема изложена в мемуаре Е 708 (§ 40). См. также Е 719, § 76.

В таблицу форм исключения ошибочно помещена форма $19n+17$ (удобное число 93 — число такого вида). В работе Е 715 (§ 43) эта ошибка исправлена.

Список форм исключения Эйлер открывает формой $3n+2$. В мемуаре Е 715 (§ 43) перечень форм исключения начинается с чисел вида $4n+3$. Эти числа, как правило, не могут быть удобными, так как уже $(4n+3)+1^2 = 4(n+1)$, и, если $n+1$ не является степенью 2, то $4(n+1)$ по Эйлеру есть «составное» число. Исключение составляют лишь три числа: 3, 7, 15. Р. Фютер заметил: «Вообще должны быть включены все числа вида $2^{\alpha+2}-1$. Эйлер не приводит никакого доказательства, почему только три числа должны быть включены» [1, т. 4, с. 332]. Это замечание ошибочно. Например, числа 31, 63, 127, 255, 511 и 1023 нельзя считать удобными, так как прибавив к этим числам $2^2$ или $3^2$, получаем «составные» числа 35, 72, 136, 259, 515 и 1032, что, очевидно, Эйлер и имел в виду.

Фрагмент 5. Ф. 136, оп. 1, № 139, л. 98 об.

«Теорема. Если составное число $N = pq$, сколь угодно большое, единственным образом содержится в форме $\alpha xx + \beta yy$, то всегда много чисел, составных и меньших этого, может быть выражено в такой же форме.

Доказательство. Пусть $pq = \alpha\, aa + \beta\, bb$ и поскольку произведение $pq$ единственным образом представляется в предложенной форме, оба множителя $p$ и $q$ ни в такой форме, ни в форме $\alpha\beta xx + yy$ не могут быть представлены, поскольку их произведение двумя способами представимо в этой форме.

Так как всегда общая формула $\alpha\beta xx + yy$ в случае $x = a$ и $y = b$ имеет делителем $q$, то и в случае $x = na$ и $y = nb$ она имеет тот же делитель. В случае $x = \mu q \pm na$ и $y = \nu q \pm nb$ также будет иметь делителем $q$. Очевидно, числа $\mu$, $\nu$ и $n$ могут быть взяты таким образом, чтобы формы $\mu q - na$ и $\nu q - nb$ были меньше, чем $^1/_2\, q$. Таким образом, как $x$, так и $y$, могут быть меньше $^1/_2\, q$. Если полученная после этого форма равна $qr$, то будет $pq$, где $p > q$, теперь произведение, меньшее $qr$ и содержащееся в этой формуле и притом единственным образом, если $r$ в ней не содержится. Поскольку $r < q$, то таким же образом для меньшего произведения $rs$ получим $st$ и т. д., пока не дойдет до наименьшего произведения, содержащегося в форме $\alpha xx + \beta yy$. Это рассуждение можно пояснить примером...»

Комментарий.

Спуск от больших составных чисел, представимых единственным образом формой $\alpha x^2 + \beta y^2$, к меньшим составным числам, представимым единственным образом той же формой, Эйлер подробно рассмотрел в Е 715 (§ 22—33).

Фрагмент 6. Ф. 136, оп. 1, № 139, л. 99—99 об.

«Теорема. Если некоторое число двумя способами содержится в форме $\alpha xx + \beta yy$ так, что $N = \alpha aa + \beta bb$ и $N = \alpha A^2 + \beta B^2$, и если составить дробь в наименьших числах

$$\frac{p}{q} = \frac{A \pm a}{B \pm b},$$

а затем дробь $\frac{r}{s} = \frac{\alpha pp}{\beta qq}$,

то делитель предложенного числа будет $r + s$ или $(r + s)/2$.

Теорема. Если произведение $pq$ двумя способами содержится в форме $nxx + yy$, образуем другое произведение $pr$, вместо $y$ надо будет написать $\lambda p + y$, тогда это произведение будет содержаться в этой форме двумя способами.

Доказательство. Пусть $pq = nff + gg$ и $pq = nhh + kk$ и тогда оба сомножителя $p$ и $q$ содержатся в подобных формах. Пусть $p = naa + bb$ и $q = ncc + dd$; откуда следует $f = ad + bc$, $g = nac - bd$, тогда $h = ad - bc$ и $k = nac + bd$. Теперь в первой форме вместо $g$ напишем $\lambda p + g$, что дает произведение $pr = nff + (\lambda p + g)^2$, и следовательно, сделано разложение и вместо $nff + gg$ следует написать $pq$, что даст $pr = pq + \lambda\lambda pp + 2\lambda pg$, $r = q + \lambda\lambda p + 2\lambda g$, подставляя вместо $f$*, $g$, $p$ указанные выше значения, получим

$$r = ncc + dd + \lambda\lambda naa + \lambda\lambda bb + 2\lambda nac - 2\lambda bd.$$

Это выражение приводится к следующему

$$r = n(\lambda a + c)^2 + dd + \lambda\lambda bb - 2\lambda bd = n(\lambda a + c)^2 + (\lambda b - d)^2.$$

Поскольку $r$ содержится в такой форме, необходимо, чтобы произведение $pr$ двумя способами содержалось в этой форме. Если $n$ будет простым числом, доказательство проводится полностью. Если же $n$ будет составным числом, например, $n = \alpha\beta$, может случиться, что множители $p$ и $q$ будут аликвотными частями форм $naa + bb$ и $ncc + dd$.

Для этого случая возьмем

$$p = \frac{naa + bb}{\Delta} \quad \text{и} \quad q = \frac{ncc + dd}{\Delta},$$

где $\Delta$ обозначает множитель числа $n$, который равен $\alpha$ или его удвоению, так что будет $\Delta$ равным или $\alpha$, или $2\alpha$, и буквы $b$ и $d$ должны будут делиться на $\alpha$. Здесь будет

$$f = \frac{ad + bc}{\Delta}, \quad g = \frac{nac - bd}{\Delta}.$$

Если вместо $g$ положить $\lambda p + g$, то будет как прежде $pr = nff + (\lambda p + g)^2$ и $r = q + \lambda\lambda p + 2\lambda g$. Если под-

* Должно быть $q$.— *Примеч И. М.*

ставить эти значения, получится

$$r = \frac{ncc + dd + \lambda\lambda naa + \lambda\lambda bb + 2\lambda nac - 2\lambda bd}{\Delta} =$$

$$= \frac{n(\lambda a + c)^2 + (\lambda b - d)^2}{\Delta},$$

каковое число всегда будет целым по той причине, что $naa + bb$, так же как $ncc + dd$, а тогда и буквы $b$ и $d$ будут делиться на $\alpha$. Это не требует доказательства, так как получится $r = q + \lambda\lambda g + 2\lambda g$, отдельные части которого суть целые числа.

Следствие 1. Очевидно, что каким бы образом ни переходить от произведения $pq$ к произведению $pr$ и обратно от произведения $pr$ к произведению $pq$, то, если произведение [4] единственным образом содержится в форме $nxx + yy$, то и другое $pr$ должно содержаться в ней единственным образом».

Комментарий.

Задача нахождения делителей числа $N$, представимого двумя способами в форме $\alpha x^2 + \beta y^2$, подробно рассмотрена Эйлером в E 715 (§ 1—14). Вторая теорема, изложенная на л. 99—99 об., не опубликована.

Фрагмент 7. Ф. 136, оп. 1, № 139, л. 99 об.

«Общая теорема. Если произведение $pq$ двумя способами представляется в виде $nxx + yy$ и составим новое произведение $pr$, подставляя вместо $x$ и $y$ соответственно $\lambda x + \mu p$ и $\lambda y + \nu p$, то и это произведение будет представляться [в подобной форме] двумя способами.

Доказательство. Как и прежде, положим $pq = nff + gg = nhh + kk$, считая

$$p = \frac{naa + bb}{\Delta} \text{ и } q = \frac{ncc + dd}{\Delta},$$

тогда будет

$$f = \frac{ad + bc}{\Delta} \text{ и } g = \frac{nac - bd}{\Delta}.$$

Чтобы получить другое произведение $pr$, запишем вместо букв $f$ и $g$ $\lambda f + \mu p$ и $\lambda g + \nu p$. Тогда будет $pr = n(\lambda f + \mu p)^2 + (\lambda g + \nu p)^2$. Проделав вычисления и записав $pq$ вместо $nff + gg$, получим $pr = \lambda\lambda pq + 2n\lambda\mu fp + n\mu\mu pp + \nu\nu pp + 2\lambda\nu gp$ и $r = \lambda\lambda q + 2n\lambda\mu f + n\mu\mu p + \nu\nu p +$

[4] Здесь у Эйлера (вернее, Фусса) пропущено $pq$.— *Примеч. А. Ф. Лапко.*

$+ 2\lambda\nu g$. Подставляя значения, найдем

$$r = \frac{\lambda\lambda ncc + \lambda\lambda dd + 2n\lambda\mu ad + 2n\lambda\mu bc + 2\lambda\nu ac - 2\lambda\nu bd + {} + n\mu\mu naa + n\mu\mu bb + \nu\nu naa + \nu\nu bb}{\Delta},$$

или

$$r = \frac{n(\lambda c + \nu a)^2 + (\lambda d - \nu b)^2}{\Delta}$$

в случае $\mu = 0$.

Если же положим $\nu = 0$, получим

$$r = \frac{n(\lambda c + \mu b)^2 + (\lambda d + n\mu a)^2}{\Delta}.$$

В общем случае получается

$$r = \frac{n(\lambda c + \mu b + \nu a)^2 + (n\mu a + \lambda d - \nu b)^2}{\Delta},$$

каковое значение является целым. Так как число $r$ имеет форму $\frac{nxx + yy}{\Delta}$, то отсюда видно, что и $p$ очевидно есть произведение, которое двумя способами представляется в предложенной форме».

Комментарий.

Общая теорема не вошла в опубликованные работы Эйлера.

Фрагмент 8. Ф. 136, оп. 1, № 139, л. 100.

«Теорема. Если будет $p = \frac{naa + bb}{\pi}$ и $q = \frac{ncc + dd}{\pi}$, и существует знаменатель $\pi$, отличный от предыдущего $\Delta$, такой, что он не равен ни 1, ни 2, ни множителю $n$, ни его удвоению, тогда произведение $pq$ может содержаться в форме $nxx + yy$ более, чем одним способом.

Доказательство. Во-первых, попробуем считать как числа $a$ и $b$, так и $c$ и $d$ между собой простыми, откуда, если $\pi$ содержит множитель $\varphi$, не содержащийся в $n$, то никакие буквы $a$, $b$, $c$, $d$ не будут содержать $\varphi$. Тогда произведение $pq$ будет

$$pq = \frac{n(ad \pm bc)^2 + (nac \mp bd)^2}{\pi\pi}$$

или [5]

$$pq = n\left(\frac{ad \pm bc}{\pi}\right)^2 + (nac \mp bd)^2.$$

[5] Далее Эйлер (а возможно, Фусс) допускает описку. Должно быть

$$pq = n\left(\frac{ad \pm bc}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{nac \mp bd}{\pi}\right)^2. \text{— Примеч. И. М.}$$

Заметим, что если $(ad + bc)/\pi$ будет целым числом, то $(ad - bc)/\pi$ не может быть таковым, что следует из другой формы: $(nac \pm bd)/\pi$.

Чтобы как сумма двух чисел $A + B$, так и разность их $A - B$ делились на число $\pi$, необходимо, чтобы как $A$, так и $B$ допускали это деление, за исключением единственного случая, когда $\pi = 2$, каковой случай исключается. Поскольку ни одна из букв $a$, $b$, $c$, $d$ не делится ни на $\pi$, ни на $\varphi$, то ни $nad$, ни $bc$ и подобным же образом ни $nac$, ни $bd$ не будут делиться на $\pi$, откуда следует, что если верхние знаки дают целые числа, то нижние знаки не могут дать целых чисел. Отсюда не может следовать, чтобы произведение $pq$ двумя способами содержалось в форме $nxx + yy$».

Комментарий.

Теорема не была опубликована.

Фрагмент 9. Ф. 136, оп. 1, № 139, л. 102.

«Теорема. Если $8i$ или $16i$ будет удобным числом, то их учетверение: $32i$ или $64i$ не будет числом удобным.

Доказательство. Первая часть — относительно $8i$ — была доказана выше. Для второй части всегда можно сделать $16i + bb = pp$, а тогда берем $p + b = 2i$ и $p - b = 8$, откуда следует, что $b = i - 4$ и $p = i + 4$. Здесь будет $64i + 4bb = 4pp$, а дальше $64i + (2b - p)^2 = 5pp - 4bp = p(5p - 4b)$, каковое будет составным и меньшим, чем $4 \cdot 64i$, следовательно, $64i$ не может быть удобным числом».

«Теорема. Если $3n + 2$ будет удобным числом, то его произведение на 9 будет удобным числом.

Доказательство. Рассмотрим составное число[6] $c = (3n + 2)(aa + bb)$. Другим способом будет

$$c = (3n + 2)(cc + dd).$$

Пусть число $a$ делится на 3, или $a = 3f$. Должно быть доказано, что $c$ необходимо делится на 3. Если $c$ не делится на 3, то будет $cc = 3\alpha + 1$. Поскольку $a = 3f$ и $b$ взаимно просто с $a$, то будет $bb = 3\beta + 1$, откуда первая форма $(3n + 2)aa + bb$ будет вида $3n + 2$. Во второй форме левая часть $(3n + 2)cc + dd$ будет иметь вид $3n + 2$, $dd$ будет вида $3\gamma$ или $3\delta + 1$. В первом случае форма будет

[6] Должно быть: $c = (3n + 2)\,aa + bb$ и соответственно $c = (3n + 2)\,cc + dd$. Эта и другие описки заставляют предположить, что Н. Фусс писал под диктовку Л. Эйлера.— *Примеч. И. М.*

$3n + 2$. Во втором случае $3n$. Ни в каком случае первая форма не будет вида $3n + 1$. Отсюда следует, что этого не случится, если только $c$ не будет кратным 3: $c = 3g$. Отсюда следует, что составное число вида $9(3n + 2)ff + bb$ всегда приводится к виду $9(3n + 2)gg + dd$. Следовательно, число $9(3n + 2)$ является удобным. Это обстоятельство имеет место для удобных чисел 2, 5, 8. Следовательно, их удевятирение: 18, 45, 72 также даст удобные числа.

З а м е ч а н и е. В формуле $7xx + yy$ встречаются все степени двойки, а именно

$$\begin{array}{lll} 7\cdot 1^2+1^2=2^3, & 7\cdot 1^2+11^2=2^7, & 7\cdot 17^2+5^2=2^{11}, \\ 7\cdot 1^2+3^2=2^4, & 7\cdot 5^2+9^2=2^8, & 7\cdot 11^2+57^2=2^{12}, \\ 7\cdot 1^2+5^2=2^5, & 7\cdot 7^2+13^2=2^9, & 7\cdot 23^2+67^2=2^{13}, \\ 7\cdot 3^2+1^2=2^6, & 7\cdot 3^2+31^2=2^{10}, & 7\cdot 41^2+47^2=2^{14}.\text{[7]} \end{array}$$

Закон последовательности таков: если будет $7aa + bb = 2^n$, то будет[8] $7\left(\frac{a \pm b}{2}\right)^2 + \frac{(7a \mp b)^2}{2} = 2^{n-1}$. Поэтому значения $a$ и $b$ образуют рекуррентные последовательности со шкалой отношений 1, —2.

Первая последовательность дает для $a$ значения, 1, 1, —1, —3, —1, —5. Другая дает: —1, 3, 5, 1, 11, 9, 13.[9]

Т е о р е м а. Никакое число вида $25n$ не является удобным, кроме случая $n = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если бы это число было удобным, то $n$ должно было бы быть таким, чтобы удовлетворялось $naa + bb = ncc + dd$. Возьмем $a = 5f$ так, чтобы было $25nff + bb = ncc + dd$, и если $25n$ является удобным числом, то $c$ должно быть $= 5g$, и другие значения приводят к противоречиям. Это не годится.

Если же $c$ не будет $= 5g$, то $cc = 5\alpha + 1; 4$. Поскольку $a = 5f$, то будет $bb = 5\beta + 1; 4$, и первая форма будет $5\beta + 1; 4$. Для второго вида, если $c$ не делится на 5, может оказаться, что $d$ делится на 5, откуда будет $dd = 5\delta + 0; 1; 4$. Но первая часть $ncc$, где $n$ любое число,

---

[7] Должно быть $7\cdot 45^2 + 47^2 = 2^{14}$. — *Примеч. И. М.*

[8] Должно быть $7\left(\frac{a \pm b}{2}\right)^2 + \left(\frac{7a \mp b}{2}\right)^2 = 2^{n+1}$. — *Примеч. И. М.*

[9] Должно быть

$$\{a_n\}: 1, 1, -1, -3, -1, 5, 7, \ldots,$$
$$\{b_n\}: -1, 3, 5, -1, -11, -9, 13, \ldots$$

Обе последовательности рекуррентные со шкалой отношений: 1, —2, что означает наличие соотношений: $a_{k+2} = a_{k+1} - 2a_k$, $b_{k+2} = b_{k+1} - 2b_k$. — *Примеч. И. М.*

может принимать все формы, т. е.

$5n + 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

Этот случай имеет место всегда, $dd$ может быть взято так, что первая форма дает $5\beta + 1;\ 4$, так что представима следующим образом: $ncc = 5\gamma + 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$. Берем $dd = 5\delta + 1;\ 0;\ 4;\ 1;\ 0$. Таким же образом можно показать, что никакое число вида $49n$, $81n$, $121n$ не может быть удобным».

Комментарий.

Так как 7 — удобное число, то форма $7x^2 + y^2$ может представлять степени числа 2 только однозначно (в известном смысле). Оказывается, эта форма представляет все числа $2^n$ с $n \geqslant 3$. Интересную трактовку получил здесь переход от числа $2^n$ к $2^{n+1}$. Эта красивая миниатюра в публикациях Эйлера не встречается. С других позиций вопрос обсуждался в Е 683 (§ 3). Остальные две теоремы в публикациях не встречаются.

Дополнение Е. П. Ожиговой.

В Ленинградском отделении Архива АН СССР хранятся черновики писем Н. И. Фусса к Д. Бернулли. В одном из них содержится фрагмент, непосредственно относящийся к вопросу об удобных числах. Он позволяет полнее представить себе картину работы Эйлера и Н. Фусса над этими задачами.

Если учесть, что письмо Фусса к Д. Бернулли можно датировать февралем 1778 г., то видно, что именно в это время он занимался под руководством Эйлера исследованием удобных чисел. Результатом этих исследований явились статьи Е 715, Е 708, Е 719, представленные одновременно — 16 марта (ст. ст.) 1778 г. и неоднократно упоминаемые в статье И. Г. Мельникова.

Приведенный ниже фрагмент из письма Н. Фусса показывает, что главной целью исследования было отыскание нового метода испытания больших чисел на простоту (являются они простыми или составными). Способ, изложенный в письме Фусса, имеется и в записной книжке Эйлера и записан там также рукой Фусса [10]. Теперь эту

---

[10] ЛО ААН, ф. 136. оп. 1, № 139, л. 98 об. Частично приведен в настоящей публикации.— *Примеч. Е. П. Ожиговой.*

запись можно датировать более точно. Она относится к концу 1777 или началу 1778 г.

Из письма Н. Фусса к Д. Бернулли [11]:

«Так как моя голова полна идей о новом методе г. Эйлера для испытания больших чисел, являются они простыми или нет, то я не могу закончить письмо, не сообщив Вам о существе этого метода.

Пусть $N$, предложенное число, всегда приводимое к виду

$\alpha aa + \beta bb$.

Попробуем проверить, может ли это число быть приведено к другой подобной форме $\alpha xx \pm \beta yy$.

В этом случае $N$ всегда будет составным числом, наименьший делитель которого будет содержаться в форме $\alpha pp + \beta qq$, где $p = a \pm x$ и $q = b \pm y$, разделенной на $\alpha$, $\beta$ или 2, если это возможно. Но если окажется, что число $N$ только единственным образом содержится в форме $\alpha aa + \beta bb$, то уже нельзя всегда заключить отсюда, что число $N$ будет простым, так как имеются формы, которые содержат также и составные числа единственным образом. Поэтому следует делать ограничения и отличать эти формы от других. Для этой цели рассматривают такую формулу: $\alpha\beta + zz$ и дают $z$ последовательно все значения, взаимно простые с $\alpha\beta$ и если числа, которые при этом получаются (если продолжать до $4\alpha\beta$), будут простыми или квадратами, или удвоением простых, то форма $\alpha aa + \beta bb$ годится для изучения, но если, напротив, среди этих чисел $\alpha\beta + zz$ встретится хоть одно составное число, то форму $\alpha aa + \beta bb$ надо исключить. Значения $\alpha\beta$, которые производят простые числа, заключающиеся единственным образом в формуле $\alpha aa + \beta bb$ или, что сводится к тому же, в формуле $\alpha\beta aa + bb$ суть следующие... [12]

С их помощью мы в состоянии изучать огромные числа, являются ли они простыми или нет. И в последнем случае мы в состоянии легко определить множители. Таким образом, из единственной формы $1848aa + bb$ я получил не более, чем за два часа, свыше двадцати простых чисел, самые большие из которых превышают десять миллионов. Единственная трудность — привести предложенное чис-

[11] ЛО ААН. ф. 40, оп. 1, № 189, л. 8—8 об.— *Примеч. Е. П. Ожиговой.*

[12] Список удобных чисел в черновике не приводится. См., например, в настоящей статье, с. 14.— *Примеч. Е. О.*

ло к форме, пригодной для изучения, и к тому же такой, чтобы $\alpha\beta$ было как можно больше. Это обстоятельство бесконечно сокращает операции, к тому же очень простые, но лишает этот метод его преимуществ, каких можно было бы от него ожидать, имея в виду, что эти значения $\alpha\beta$, пригодные для изучения, все время уменьшаются. Однако можно начать таким образом, чтобы найти числа $\alpha$ и $\beta$ такие, что (квадраты $aa$ и $bb$ даны) форма $\alpha aa + \beta bb$ была равна числу $N$, предложенному для изучения.

Ищем дробь $f/g$, ближайшую к $aa/bb$, так чтобы $bbf - aag = 1$. Затем берем $\alpha = bbk - gN$ и $\beta = fN - aak$, где $k$ какое-нибудь произвольное число такое, что

$$k > \frac{gN}{bb} \text{ и } < \frac{fN}{aa}$$

— необходимое условие для того, чтобы $\alpha$ и $\beta$ были положительными. Сколько будет чисел, заключенных между этими границами, столько будет и решений. Если же нет ни одного, то решение невозможно».

Заметим, что Д. Бернулли, которого вопросы теории чисел очень мало интересовали, ответил Фуссу так:

«То, что Вы говорите мне от своего имени и от имени г. Эйлера, без сомнения, бесконечно более возвышенно. Я хочу сказать о прекрасной теореме г. Эйлера о простых числах и о его новом методе для исследования любого заданного сколь угодно большого числа, будет оно простым или нет.

То, что Вы дали себе труд рассказать мне об этом предмете, показалось мне очень тонким и достойным нашего великого учителя. Но не находите ли Вы, что это означает оказать уж слишком много чести простым числам, расточая на них столько богатств, и не обязано ли это в каком-то смысле изысканному вкусу нашего века?

Я не перестаю воздавать должное всему, что выходит из-под Вашего пера, и восхищаться Вашими большими возможностями для преодоления самых больших затруднений. Но это восхищение удваивается, когда предмет может привести к познаниям полезным» [12, с. 677].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Euler L.* Opera omnia. Series prima. 1911—1956. Vol. 1—29.
2. *Dickson L. E.* History of the theory of numbers. Wash., 1919—1923. Vol. I—III; II ed. N. Y., 1934.
3. *Grube F.* Über einige Euler'sche Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen.— Ztschr. Math., 1874, Bd. 19.

4. *Мельников И. Г.* Открытие Эйлером удобных чисел.— ИМИ, 1960, вып. 13, с. 187—216.
5. *Sierpinski W.* Elementary theory of numbers. W-wa, 1964, p. 214.
6. *Гаусс К. Ф.* Труды по теории чисел. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
7. *Cunningham A., Cullen J.* On idoneal numbers.— Rep. Brit. Assoc., 1901, p. 552.
8. *Ferrier A.* Nombres idoneis.— Mathesis, 1960, vol. 69, p. 34—36.
9. *Chowla S.* 1) Heilbronn's class-number theorem.— Proc. Ind. Acad. sci., vol. 1, 1934, N 2, p. 74—76; 2) An extension of Heilbronn's class-number theorem.— Quart. J. Math., 1934, vol. 5, p. 304—307.
10. *Swift J. D.* Note on discriminants of binary quadratic forms with a single class in each genus.— Bull. Amer. Math. Soc., 1948, vol. 54, p. 560—561.
11. *Chowla S., Briggs W. E.* On discriminants of binary quadratic forms with a single class in each genus.— Math. J., 1954, vol. 6, N 4, p. 463—470.
12. Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII[e] siècle/Publiée par P. H. Fuss. Pétersbourg, 1843. Vol. 2.

## ЗАМЕТКИ О МНОГОУГОЛЬНЫХ ЧИСЛАХ В ЗАПИСНЫХ КНИЖКАХ ЭЙЛЕРА

**Г. П. Матвиевская**

1. Исследователи математического творчества Эйлера настойчиво подчеркивают чрезвычайную сложность проблем, с которыми им приходится сталкиваться в процессе работы. Трудности связаны в первую очередь с колоссальным объемом материала, подлежащего изучению. По широте интересов, по количеству важнейших открытий в каждом из затронутых направлений математики, по богатству и разнообразию оригинальных идей Эйлер не имел себе равных.

Издание полного собрания трудов Эйлера намного облегчает работу над его научным наследием. Однако вопрос о генезисе идей Эйлера, столь важный для истории современной математики, все еще далек от сколько-нибудь удовлетворительного решения.

Важнейший материал для изучения истории научных открытий Эйлера содержится в его записных книжках, хранящихся в Архиве АН СССР, но их исследование сопряжено с особыми трудностями. Если в 1911 г. Ф. Рудио (в предисловии к 1 тому Полного собрания сочинений

Эйлера) счел возможным применить выражение «огромная неупорядоченная масса», говоря о его завершенных и опубликованных сочинениях [1, с. IX], то с гораздо большим основанием им можно воспользоваться для характеристики записных книжек. Исследователь сталкивается здесь с поистине необозримым хаосом самых разнородных научных заметок, набросков к письмам и статьям, формулировок и доказательств теорем, иногда нуждающихся в уточнении, чертежей, задач и выкладок, часто не доведенных до конца. Однако каждая запись отражает определенную стадию работы Эйлера над той или иной проблемой и между ними, несомненно, существуют внутренние связи. Можно с уверенностью сказать, что если удастся выявить эти связи, то окажутся выясненными многие важные стороны математического творчества Эйлера, которые невозможно осветить, исходя лишь из его опубликованных работ. Более того, результаты изучения записных книжек могут дать материал для интересных выводов относительно психологии научного творчества вообще.

Первый шаг при использовании записных книжек заключался в датировке и общем обзоре каждой из них [2—8]. Следующий, более сложный, этап работы требует классификации материала по отдельным дисциплинам и подробного ознакомления с содержанием соответствующих записей. До настоящего времени в той или иной мере затрагивались заметки по геометрии, механике, теории чисел, алгебре, физике, астрономии, но основную работу еще предстоит проделать.

Наши исследования, начатые в 1954 г. по инициативе и под руководством покойного академика В. И. Смирнова, были посвящены заметкам по теории чисел и, в частности, по диофантову анализу [5, 7, 8]. Эти заметки составляют значительную часть общего объема записных книжек (около 800 страниц). Был дан общий обзор материала, предложена его классификация и на основании анализа записей сделаны выводы о неопубликованных рукописях Эйлера теоретико-числового содержания. Однако текст заметок в основном до сих пор не опубликован, ни в латинском оригинале, ни в переводе (исключение составили записи о совершенных числах [9], о «постулате Бертрана» [10], о «partitio numerorum» [11]). В то же время не вызывает сомнения, что для истории математики была бы чрезвычайно важна публикация не только заметок из записных книжек, но и русского перевода опубликованных сочинений Эйлера по теории чисел.

Ниже предлагается комментированный перевод текста некоторых заметок, которые касаются теории многоугольных чисел, вызывавшей у Эйлера большой интерес.

**2.** Теория многоугольных чисел была разработана уже в глубокой древности, по-видимому, в школе Пифагора (VI—V вв. до н. э.). Многоугольные числа (треугольные, квадратные, пятиугольные и т. д.) получили свое название благодаря тому, что изображались при помощи плоских многоугольников, составленных из точек (рис. 1).

Общее определение многоугольного числа впервые дал Гипсикл Александрийский (начало II века до н. э.): $n$-м $m$-угольным числом $P_m^n$ называется сумма $n$ членов арифметической прогрессии, первый член которой есть единица, а разность равна $m-2$, т. е.

$$P_m^n = \frac{(m-2)\,n^2-(m-4)\,n}{2}.$$

В частности, треугольные числа получаются при суммировании прогрессии:

$$P_3^n = 1+2+3+\ldots+n=\frac{n\,(n+1)}{2},$$

квадратные:

$$P_4^n = 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n\,\frac{(2n-1)+1}{2}=n^2,$$

пятиугольные:

$$P_5^n = 1+4+7+\ldots+(3n-2)=n\,\frac{3n-1}{2}=\frac{3n^2-n}{2}.$$

Интерес к теории многоугольных чисел сохранился и позднее — прежде всего у неопифагорейца Никомаха из Теразы (I в. н. э.), который посвятил этой теории треть своего «Введения в арифметику», получившего в средние века большую популярность и неоднократно комментировавшегося как европейскими, так и арабскими математиками [12—13]. Никомах установил ряд взаимоотношений между различными многоугольными числами, например,

$$P_m^n = P_{m-1}^n + P_3^{n-1}.$$

Большое внимание уделил многоугольным числам Теон из Смирны (II в. н. э.) в арифметическом разделе сочине-

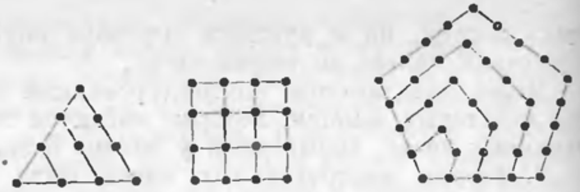

Рис. 1

ния «О математических познаниях, необходимых для чтения Платона»; он доказал, между прочим, что сумма двух последующих треугольных чисел есть квадрат.

Специальный трактат посвятил теории многоугольных чисел Диофант Александрийский (III в. н. э.). Ему принадлежит, в частности, формула

$$8\,(m-2)\,P_m^n + (m-4)^2 = [(m-2)(2n-1)+2]^2,$$

которая позволяет преобразовать любое многоугольное число в квадрат. Диофант предложил правила для нахождения многоугольного числа по данным стороне ($n$) и числу углов ($m$) и для нахождения стороны данного многоугольного числа, если известно число его углов. Кроме того, у Диофанта сформулирована задача [14]: сколькими способами заданное число может быть представлено в виде многоугольного числа?

В средние века многоугольными числами занимались многие европейские математики, часто вкладывая в эту теорию мистический смысл. Ей посвящен большой раздел сочинения Боэция (480—525) «О введении в арифметику» (оно представляет собой комментарий к труду Никомаха), сыгравшего важную роль в развитии математической науки в Европе и оказывавшего значительное влияние на авторов книг по арифметике вплоть до XVI в. [13, с. 50—60; 15].

Теория многоугольных чисел излагалась в трудах Фибоначчи, Пачоли, Штифеля, Кардано [16]. Однако существенное развитие она получила в XVI—XVII вв., благодаря работам Баше де Мезириака, Ферма, Декарта, Валлиса и др.

Баше де Мезириак в своем дополнении к трактату о многоугольных числах Диофанта дал целый ряд теорем относительно свойств этих чисел, например,

$$P_m^{n+k} = P_m^n + P_m^k + nk\,(m-2);$$
$$P_m^k = P_3^k + (m-3)\,P_3^{k-1};$$
$$(P_3^n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

Ему же принадлежит формулировка теоремы о представимости любого целого числа в виде суммы четырех квадратных чисел.

Наиболее интересные результаты в этой области получил Пьер Ферма [16]. Так, в 1637 г. он сформулировал обобщение упомянутой теоремы Баше о том, что каждое число есть сумма двух или трех треугольных; квадратное число, либо сумма двух, трех или четырех квадратных чисел; пятиугольное число, либо сумма двух, трех, четырех или пяти пятиугольных чисел и т. д. Он поставил также ряд других задач, касающихся многоугольных чисел: среди них, например, утверждение о том, что не существует треугольного числа, являющегося одновременно биквадратным.

Вслед за математиками XVII в. теорией многоугольных чисел занялся Эйлер. К вопросам, связанным с ней, он возвращался постоянно на протяжении всей своей жизни.

Задачи о многоугольных числах решаются в работах, имеющих следующие номера согласно списку Г. Энестрёма: E 29, E 98, E 256, E 394, E 445, E 542, E 558, E 566, E 586, E 739, E 806 [17—22].

Эйлер исследовал, например, многоугольные числа, одновременно являющиеся квадратами [23], доказал теоремы Ферма о том, что никакое треугольное число, кроме 1, не может быть кубом или биквадратом [24], вывел свою знаменитую формулу

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k x^{(3k^2+k)/2},$$

где $(3k^2+k)/2$ есть пятиугольное число [21]. Очень часто Эйлер обращается к задачам о многоугольных числах в переписке с Гольдбахом. В издании [22] они комментированы А. А. Киселевым и покойным И. Г. Мельниковым.

Естественно поэтому, что и в записных книжках Эйлера многоугольным числам посвящено немало заметок. Они встречаются главным образом в четырех книжках, хранящихся в Архиве АН СССР (ф. 136, оп. 1, №№ 131—133, 138) и датируемых 1736—1753 и 1767—1775 гг.

Эти заметки по содержанию мы классифицировали следующим образом:

1. Задача: найти, сколько раз данное число содержится среди всех многоугольных чисел.

2. Задача: найти треугольное число, которое будучи увеличено на данную величину становится квадратом целого числа.

3. Теорема Ферма: никакое треугольное число, кроме 1, не может быть кубом.

4. Теорема Ферма: никакое треугольное число, кроме 1, не может быть биквадратом.

5. Задача: найти пятиугольные числа, равные квадратам.

6. Теорема: число вида $4mn - m - n$, где $m$ и $n$ целые, не может быть треугольным числом. Следствие: число этого вида не может быть семиугольным числом.

7. Задача: найти все числа, которые могут быть представлены двумя способами в виде суммы двух треугольных чисел.

8. Теорема Ферма о представимости натуральных чисел в виде сумм многоугольных чисел. Частный случай (теорема Баше): о представимости всякого числа в виде суммы четырех квадратов.

Ниже мы приводим по каждому из названных выше разделов русский текст некоторых из этих заметок с нашими примечаниями. Мы полностью оставляем в стороне последний раздел, содержащий многочисленные записи, которые будут опубликованы отдельно.

1) *Записная книжка, числящаяся под № 131, лл. 21—21 об.*

«Задача Баше, решенная другим способом. Найти, сколько раз данное число содержится среди всех многоугольных чисел.

Р е ш е н и е. Ряды многоугольных чисел следующие:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Двуугольные | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10, |
| Треугольные | 1, | 3, | 6, | 10, | 15, | 21, | 28, | 36, | 45, | 55, |
| Четырехугольные [квадратные] | 1, | 4, | 9, | 16, | 25, | 36, | 49, | 64, | 81, | 100, |
| Пятиугольные | 1, | 5, | 12, | 22, | 35, | 51, | 70, | 92, | 117, | 145, |
| Шестиугольные | 1, | 6, | 15, | 28, | 45, | 66, | 91, | 120, | 153, | 190, |

и. т. д.

Если $m$ обозначает число сторон, а $n$ — саму сторону, то многоугольное число будет $\frac{(m-2)\,n^2-(m-4)\,n}{2}$. Вопрос, следовательно, сводится к тому, чтобы определить, сколькими способами можно подставить целые числа вместо $m$ и $n$, чтобы $\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$ было равно $A$. Составленное уравнение дает $m=2+\frac{2A-2n}{n^2-n}$. Чтобы дробь равнялась целому числу, $2A$ должно делиться на $n$, так как будет $m=2-\frac{2A}{n}+\frac{2A-2}{n-1}$. Следовательно, $2A-2$ должно делиться на $n-1$. Отсюда возникает такое правило. Выписываются в ряд делители $2A$, а та же делители $2A-2$ и рассматривается, сколько раз в этом ряду встречается число, которое на единицу больше, чем число из второго ряда; все эти числа дадут величину $n$, из которой получается величина самого $m$. Что и требовалось доказать.

Очевидно прежде всего, что, каким бы ни было число $A$, $n$ всегда может быть 2 и получится $m=A$; действительно, всякое число есть член ряда двуугольных чисел. Далее, всегда может быть $n=A$ и будет $m=2$.

Пример: сколько раз 105 содержится в рядах многоугольных [чисел]?

Делители

$$\begin{array}{l|l} 2A=210 & 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210. \\ 2A-2=208 & 1, 2, 4, (8), 13, (16), (26), (52), 104, (208). \end{array}$$

Следовательно, может быть

$$\begin{array}{ll} n=2, & m=105, \\ n=3, & m=36, \\ n=5, & m=12, \\ n=14, & m=3, \\ n=105. & m=2. \end{array}$$

Итак, данное число встречается пять раз» [1].

Примечание. Данная задача была сформулирована Диофантом [14, с. 168—179], однако его решение в сохранившемся тексте не доведено до конца.

Баше де Мезириак в примечаниях к изданным им в 1621 г. трудам Диофанта [25] дал решение, первая часть которого воспроизводится Эйлером. Из условия

$$A=\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$$

---

[1] Среди делителей у Эйлера пропущен делитель 30, кроме того, пропущено решение $n=5$, $m=12$. Поэтому дано неверное заключение: «данное число встречается четыре раза». Необходимые исправления внесены в текст.— *Примеч. А. Ф. Лапко.*

следует, что

$$\frac{2A}{n} = 4 + nm - m - 2n$$

и

$$m = 2 + \frac{2A - 2n}{n^2 - n},$$

откуда $2A/n$ и $(2A - 2n)/(n^2 - n)$ должны быть целыми числами. Но так как $m \geqslant 3$, то $(2A - 2n)/(n^2 - n) \geqslant 1$ и

$$n \leqslant \frac{-1 + \sqrt{1 + 8A}}{2}.$$

Полученные условия определяют решение задачи.

Эйлер предлагает другое решение, основанное на исследовании множителей чисел $2A$ и $2A - 2$. Оно было получено в 1736 или 1737 г., так как заметка находится в начале записной книжки, датированной 1736—1740 гг. [4, 5]. Однако Эйлер не опубликовал его и только много лет спустя сообщил основную идею в письме к Гольдбаху от 23 марта (3 апреля) 1753 г. [22, с. 369—370]. Здесь он не ссылается на Баше, не формулирует общего правила и приводит другой пример, число 225, которое является одновременно квадратным, 8-, 24- и 76-угольным числом.

*2) № 177, лл 1—4 об.*

«Найти треугольное число, которое, будучи увеличено на данную величину, становится квадратом целого числа.

Пусть корень треугольного числа есть $a$, данное число есть $d$; $\frac{aa + a}{2} + d$ должно быть квадратом. Пусть корень [его] есть $b$. Будет $aa + a + 2d = 2bb$, следовательно,

$$a = \frac{-1 + \sqrt{8bb - 8d + 1}}{2}.$$

Если сначала положим $d = 0$, треугольное число будет квадратом, корень которого есть $a = \frac{-1 + \sqrt{8bb + 1}}{2}$.

Если положить $\sqrt{8bb + 1} = 2b + c$, то $4bb = 4bc + cc - 1$ и $2b = c + \sqrt{2cc - 1}$, следовательно, $2b > 2c$.

Положим $b = c + e$; будет $4cc + 8ce + 4ee = 4cc + 4ce + cc - 1$, откуда $cc = 4ce + 4ee + 1$ и $c = 2e + \sqrt{8ee + 1}$.

Если корень некоторого треугольного числа $= t$ и оно [есть квадрат, корень которого $e$, будет $t = \frac{-1 + \sqrt{8ee + 1}}{2}$. Так как $b = c + e = 3e + \sqrt{8ee + 1}$

и

$$\sqrt{8bb+1} = 6e + 2\sqrt{8ee+1} + 2e + \sqrt{8ee+1},$$

то

$$a = \frac{-1+\sqrt{8bb+1}}{2} = \frac{-1+8e+3\sqrt{8ee+1}}{2}.$$

Поэтому если треугольное число, корень которого есть $\frac{-1+\sqrt{8ee+1}}{2}$, будет квадратом, то квадратом будет также то, сторона которого есть $\frac{-1+8e+3\sqrt{8ee+1}}{2}$. Если корень того $t$, то корнем этого будет $1+3t+4\sqrt{\frac{tt+t}{2}}$.

Следовательно, если треугольное число, корень которого есть $t$, будет квадратом, квадратом будет также то, корень которого есть $1+3t+4\sqrt{\frac{tt+t}{2}}$; и следующее [треугольное число] то, корень которого есть $8+17t+$ $+24\sqrt{\frac{tt+t}{2}}$.

**Таблица**

| квадратный корень | равен | треугольному числу, корень которого есть |
|---|---|---|
| $\sqrt{\frac{tt+t}{2}}$ | | $t$ |
| $1+2t+3\sqrt{\frac{tt+t}{2}}$ | | $1+3t+4\sqrt{\frac{tt+t}{2}}$ |
| $6+12t+17\sqrt{\frac{tt+t}{2}}$ | | $8+17t+24\sqrt{\frac{tt+t}{2}}$ |
| $\left(35+70t+99\sqrt{\frac{tt+t}{2}}\right)=A$ | | $B=\left(49+99t+140\sqrt{\frac{tt+t}{2}}\right)$ |
| $1+2B+3A$ | | $1+3B+4A$ |
| $6+12B+17A$ | | $8+17B+24A$ |
| $35+70B+99A$ | | $49+99B+140A$ |

Эта последовательность корней треугольных чисел, которые являются квадратами, $t$, $1+3t+4\sqrt{\frac{tt+t}{2}}$, $8+17t+$ $+24\sqrt{\frac{tt+t}{2}}$ и т. д., имеет то свойство, что любой $n$-й член $= 2+6$ $(n-1)$-й $-$ $(n-2)$-й.

Ряд этих чисел есть 0, 1, 8, 49, 288, 1681 и т. д.

Ряд квадратных корней, приписываемых им: 0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416 и т. д.

Ряд корней $\square$, $a$, $b$, $bb - a$.

Приступаем к общему [случаю], где

$$a = \frac{-1 + \sqrt{8bb - 8d + 1}}{2}.$$

Если положим $\sqrt{8bb - 8d + 1} = 2b + c$ и далее $b = c + e$, будет $c = 2e + \sqrt{8ee - 8d + 1}$. Следовательно, если $e$ есть корень квадрата, равного треугольному числу, увеличенному на $d$, то и $b$ будет корнем такого рода квадрата. Действительно, $b = 3e + \sqrt{8ee - 8d + 1}$.

Корень одного треугольного числа есть

$$\frac{-1 + \sqrt{8ee - 8d + 1}}{2},$$

другого же $\dfrac{-1 + 8e + 3\sqrt{8ee - 8d + 1}}{2}$.

**Таблица**

| корень квадратный | равен | треугольному числу $+ d$, корень которого |
|---|---|---|
| $\sqrt{\dfrac{tt + t + 2d}{2}}$ | | $t$ |
| $1 + 2t + 3\sqrt{\dfrac{tt + t + 2d}{2}}$ | | $1 + 3t + 4\sqrt{\dfrac{tt + t + 2d}{2}}$ |
| И т. д., как выше. | | |

Если $d = 4$, то корни треугольных чисел суть: $-10$, $-1$, 0, 6, 9, 39, 56, 230, 329;
корни квадратов: 7, 2, 2, 5, 7, 28, 40, 163, 233.

Общий член ряда 0, 1, 6, 35, 204 и т. д. есть

$$\frac{(3 + 2\sqrt{2})^{n-1} - (3 - 2\sqrt{2})^{n-1}}{4\sqrt{2}};$$

[общий член] их квадратов есть

$$\frac{(3 + \sqrt{2})^{2n-2} + (3 - \sqrt{2})^{2n-2} - 2}{32};$$

треугольное число $= \dfrac{xx + x}{2}$ и

$$x = \frac{(3+2\sqrt{2})^{n-1} + (3-2\sqrt{2})^{n-1} - 2}{4}.$$

Если дан один случай, когда $\alpha b^2 + \beta b + \gamma$ есть квадрат, определить бесконечное [их число].

Полагается

$$\sqrt{\alpha b^2 + \beta b + \gamma} = \delta + \varepsilon x + \xi\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma},$$

а также

$$b = \eta + \vartheta x + \lambda\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma};$$

будет

$$b^2 = \begin{matrix} \vartheta^2 x^2 + 2\eta\vartheta x + \eta^2 + 2\eta\lambda \\ +\alpha\lambda^2 x^2 + \beta\lambda^2 x + \gamma\lambda^2 + 2\vartheta\lambda x \end{matrix} \quad \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}.$$

Нужно подставить

$$\begin{array}{llll} +\alpha\vartheta^2 & +2\alpha\eta\vartheta & +\alpha\eta^2 & +2\alpha\eta\lambda \\ +\alpha\lambda^3 & +\alpha\beta\lambda^2 & +\alpha\gamma\lambda & +2\alpha\vartheta\lambda \\ & +\beta\vartheta & +\beta n & +\beta\lambda \\ & & +\gamma & \end{array} \quad x\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} =$$

$$= \begin{matrix} +\varepsilon^2 \\ +\alpha\xi^2 \end{matrix}\, x^2 \quad \begin{matrix} +2\delta\varepsilon \\ +\beta\xi^2 \end{matrix}\, x \quad \begin{matrix} +\delta^2 \\ +\gamma\xi^2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} +2\delta\xi \\ +2\varepsilon\xi \end{matrix} \quad x\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma},$$

$$\varepsilon\xi = \alpha\vartheta\lambda, \qquad 2\delta\xi = 2\alpha\eta\lambda + \beta\lambda,$$

$$\alpha\eta^2 + \alpha\gamma\lambda^2 + \beta\eta + \gamma = \delta^2 + \gamma\xi^2,$$

$$2\delta\varepsilon + \beta\xi^2 = 2\alpha\eta\vartheta + \alpha\beta\lambda^2 + \beta\vartheta, \qquad \varepsilon^2 + \alpha\xi^2 = \alpha\vartheta^2 + \alpha\lambda^2,$$

$$\delta = \frac{2\alpha\eta\lambda + \beta\lambda}{2\xi}, \qquad \varepsilon = \frac{\alpha\vartheta\lambda}{\xi},$$

$$\alpha^2\vartheta^2\lambda^2 + \alpha\xi^4 - \alpha\xi^2\vartheta^2 - \alpha^2\xi^2\lambda = 0.$$

Следовательно,

$$\xi = 0, \varepsilon = \alpha\lambda, \qquad \delta = \frac{2\alpha\eta\lambda + \beta\lambda}{2\vartheta},$$

$$2\alpha^2\eta\lambda^2 + \alpha\beta\lambda^2 + \beta\vartheta^3 - 2\alpha\eta\vartheta^2 - \alpha\beta\vartheta\lambda^2 - \beta\vartheta^2 = 0.$$

Это, будучи разделено на $\alpha\lambda^2 - \vartheta^2$, дает $2\alpha\eta + \beta - \beta\vartheta = 0$. Следовательно,

$$\vartheta = \frac{2\alpha\eta + \beta}{\beta}, \qquad \delta = \frac{\beta\lambda}{2}, \qquad \varepsilon = \alpha\lambda, \qquad \xi = \frac{2\alpha\eta + \beta}{\beta},$$

$$\alpha\eta^2 + \alpha\gamma\lambda^2 + \beta\eta + \gamma = \frac{\beta^2\lambda^2}{4} + \frac{4\alpha^2\eta^2\gamma^2}{\beta} + \frac{4\alpha\gamma\eta}{\beta} + \gamma,$$

$$\alpha\beta^2\eta^2 + \alpha\beta^2\gamma\lambda^2 + \beta^3\eta - \frac{\beta^4\lambda^2}{4} - 4\alpha^2\gamma\eta^2 - 4\alpha\beta\gamma\eta = 0.$$

Это, будучи разделено на $4\alpha\gamma - \beta^2$, дает $\alpha\eta^2 + \beta\eta = \beta^2\lambda^2/4$,

$$4\alpha\eta^2 + 4\beta\eta = \beta^2\lambda^2, \quad 4\eta^2 = \frac{-4\beta\eta + \beta^2\lambda^2}{4\alpha},$$

$$\eta = \frac{-2\beta + \sqrt{4\beta^2 + 4\alpha\beta^2\lambda^2}}{4\alpha} = \frac{-\beta + \beta\sqrt{1 + \alpha\lambda^2}}{2\alpha}.$$

Следовательно,

$$\delta = \frac{\beta\lambda}{2}, \quad \varepsilon = \alpha\lambda, \quad \xi = \sqrt{1 + \alpha\lambda^2},$$

$\eta = \dfrac{-\beta + \beta\sqrt{1 + \alpha\lambda^2}}{2\alpha}$, $\vartheta = \sqrt{1 + \alpha\lambda^2}$. Следует выбрать вместо $\lambda$ такое число, чтобы $1 + \alpha\lambda^2$ было квадратом. Тогда если $\alpha\beta^2 + \beta b + \gamma$ будет квадратом в случае $b = x$, оно также будет квадратом в случае

$$b = \frac{-\beta + \beta\sqrt{1 + \alpha\lambda^2}}{2\alpha} + x\sqrt{1 + \alpha\lambda^2} + \lambda\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}.$$

Корень же этого квадрата есть

$$\beta\lambda/2 + \alpha\lambda x + \sqrt{1 + \alpha\lambda^2} \cdot \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}.$$

Пусть $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$ и $\gamma = \gamma$. Чтобы $1 + 1/2\lambda^2$ было квадратом, пусть $\lambda = 4$; будет $\sqrt{1 + 1/2\lambda^2} = 3$. Следовательно, если $\sqrt{\dfrac{\beta^2 + \beta}{2} + \gamma}$ является квадратом в случае $\beta = x$, то также будет в случае $\beta = 1 + 3x + 4\sqrt{\dfrac{x^2 + x}{2} + \gamma}$. Корнем же его квадрата будет $1 + 2x + 3\sqrt{\dfrac{xx + x}{2} + \gamma}$.

Очевидно, что ничего нет между, имеется $\gamma$, или нет.

Если $\alpha$ само является квадратом, то выше следует вместо уравнения $2\alpha\eta + \beta - \beta\vartheta = 0$ взять другое:

$$\alpha\lambda^2 - \vartheta^2 = 0 \text{ и } \vartheta = \lambda\sqrt{\alpha}, \ \xi = \lambda\sqrt{\alpha}.$$

Общим членом этого [ряда] 0, 2, 12, 70, 408 и т. д., у которого квадрат члена, будучи дважды увеличен на единицу, станет квадратом, является

$$\frac{(3 + \sqrt{8})^{n-1} - (3 - \sqrt{8})^{n-1}}{\sqrt{8}}.$$

У этой последовательности, если какой-нибудь член можно разделить на $2^{\alpha+2}$, где $\alpha > 0$, это будет либо 0, либо 5, либо 9, либо 13-й; следовательно, будет $(4m + 1)$-й.

Примечания. Этот фрагмент относится к рукописям Эйлера, которые остались неопубликованными при его жизни и не вошли в сборник «Opera postuma» [23]. В тетради он объединен с копией, сделанной рукой П. Н. Фусса. Здесь же имеется пометка («Nicht zu drucken»), из которой следует, что издатели «Opera postuma» решили не публиковать данный фрагмент, считая его содержание известным по изданным работам Эйлера. Это мнение, как оказывается, было ошибочным, так как рассматриваемая здесь задача (если $d$ дано, найти $a$ так, что выполняется соотношение

$$\frac{a^2+a}{2}+d=b^2,$$

где $a$, $b$, $d$ — целые числа) в опубликованных мемуарах Е 29 (1732 г.) и Е 739 (1778 г.) решена лишь для частного случая $d=0$. В этих работах она приведена как пример, иллюстрирующий изложенные в них общие методы, в рукописи же рассматривается самостоятельно.

Рукопись, судя по почерку, относится к 1736—1738 гг.

Случай, когда $d=0$, Эйлер рассматривает в названных выше мемуарах Е 29 и Е 739, однако здесь он решает задачу несколько иным способом. Так как корень треугольного числа есть

$$a=\frac{-1+\sqrt{8b^2-8d+1}}{2},$$

то при $d$, равном $0$, $a=\frac{-1+\sqrt{8b^2+1}}{2}$. Полагая $\sqrt{8b^2+1}=$ $=2b+c$, а затем $b=c+e$, Эйлер получает $c=2e+$ $+\sqrt{8e^2+1}$.

Вводя некоторое треугольное число с корнем $t$ так, что $\frac{t^2+t}{2}=e^2$, т. е. $t=\frac{-1+\sqrt{8e^2+1}}{2}$, он приходит к выводу, что если треугольное число, корень которого есть $t$ является квадратом, то квадратом будет и треугольное число с корнем $1+3t+4\sqrt{(t^2+t)/2}$.

Рассуждая далее аналогично, Эйлер получает ряд корней треугольных чисел $t$;

$$1+3t+4\sqrt{\frac{t^2+t}{2}};$$

$$8+17t+24\sqrt{\frac{t^2+t}{2}};\qquad 49+99t+140\sqrt{\frac{t^2+t}{2}};\ \ldots$$

с общим членом $a_n=2+6a_{n-1}-a_{n-2}$.

Для этого ряда справедливо утверждение: если треугольное число, корень которого есть $a_{n-1}$, является квадратом, то квадратом будет и треугольное число, корень которого есть $a_n$.]

Полагая $d \neq 0$, Эйлер рассуждает, как и в предыдущем случае, и получает ряд

$$t;\ 1 + 3t + 4\sqrt{\frac{t^2 + t + 2d}{2}};\ \ldots,$$

члены которого связаны такой же зависимостью. Для $d = 4$ приводятся последовательности числовых значений $a_n$ и $b_n$.

Далее Эйлер приводит в общем виде решение данной задачи для случая $d = 0$, т. е. если $\frac{a^2 + a}{2} = b^2$, то

$$a_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^{n-1} - (3 - 2\sqrt{2})^{n-1}}{4\sqrt{2}},$$

$$b_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^{n-1} + (3 - 2\sqrt{2})^{n-1} - 2}{4}.$$

Это решение фигурирует также в письме к Гольдбаху от 10 августа 1730 г. [22, с. 39] и мемуаре Е 739, где оно было строго доказано.

В последней части рукописи, которую мы опускаем, Эйлер повторяет рассуждения из мемуара Е 29, рассматривая данную задачу, как частный случай более общей: $\alpha b^2 + \beta b + \gamma = \square$.

*3) № 131, л. 176 об.*

«Т е о р е м а. Никакое треугольное число не может быть кубом, кроме единицы, и даже в дробях.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим, что $\frac{x(x+1)}{2} = y^3$; будет $4x^2xx + 4x + 1 = 8y^3 + 1$. Следовательно, квадратом было бы $8y^3 + 1$, что не может случиться даже в дробях, кроме случая $y = 1$, так как никакой куб, увеличенный на единицу, не производит квадрата. Ч. и т. д.

К о р о л л а р и й. Отсюда следует, что ни $2a^3 + b^3$, ни $2a^3 - b^3$ не может быть кубом. Если $x = 2a^3/b^3$, то будет $\frac{x(x \pm 1)}{2} = \frac{a^3}{b^3}\,\frac{(2a^3 \pm b^3)}{b^3}$. Но так как $\frac{x(x \pm 1)}{2}$ не может быть кубом, то, следовательно, $2a^3 \pm b^3$ не может произвести куб».

П р и м е ч а н и е. Эта заметка является, видимо, подготовительной к мемуару Е 98 [20], опубликованному в 1758 г. Доказательство рассматриваемой теоремы Ферма здесь также вытекает из предварительно доказанного утверждения о том, что выражение $a^3 \pm 1$ не может стать квадратом ни для целых, ни для дробных значений $a$, кроме случаев $a = 0$ и $a = 2$.

4а). *№ 131, лл. 152 об.—153.*

«Теорема Ферма: никакое целое треугольное число не может быть биквадратом.

Пусть всякое целое треугольное число содержится в форме $n(2n \pm 1)$, если $n$ полагается целым числом. Так как сомножители $n$ и $2n \pm 1$ взаимно просты, и тот и другой должны быть биквадратами: следовательно, если $n = m^4$, то и $2m^4 \pm 1$ должен быть биквадратом.

Сначала очевидно, что $2m^4 + 1$ не может быть биквадратом, так как $2x^2 + 1$ не может быть биквадратом. Остается, следовательно, доказать, что $2m^4 - 1$ не может быть биквадратом. Между тем, однако, установлено, что никакое треугольное число формы $n(2n + 1)$ не является биквадратом; такими являются числа 3, 10, 21, 36, 55, 78, 105 и т. д., но $n$ не может быть отрицательным числом.

Я утверждаю далее, что $2m^4 - 1$ не может быть биквадратом, так как если положить $2m^4 - 1 = n^4$, будет $\frac{n^4+1}{2} = m^4$. Но я докажу, что $\frac{n^4+1}{2}$ не может быть квадратом, если не считать случая $n = \pm 1$. Прежде всего легко обнаружить, что $n$ должно быть нечетным числом; следовательно, если полагается $n = 2i + 1$, то $8i^4 + 16i^3 + 12i^2 + 4i + 1$ должно быть квадратом. Положим корень $= 1 + 2i + 4pi^2/q$; если $p$ и $q$ — взаимно простые числа, будет

$$8i^2 + 16i + 12 = 4 + \frac{8p}{q} + \frac{16p}{q}i + \frac{16pp}{qq}i^2,$$

откуда, разделив на 8 и умножив на $q^2$, получим

$$i^2q^2 + 2iq^2 + q^2 = pq + 2pqi + 2ppi^2;$$

и будет

$$i^2 = \frac{i(2qq - 2pq) + qq - pq}{2pp - qq},$$

откуда

$$i = \frac{qq - pq \pm \sqrt{pq(p-q)(q-2p)}}{2pp - qq}.$$

Следовательно, $pq(p-q)(q-2p)$ должно быть квадратом, что прежде всего может случиться, если какой-либо сомножитель будет $=0$: во-первых, если $p=0$, будет $i=-1$ и $n=-1$; во-вторых, если $q=0$, то $i=0$ и $n=+1$; в-третьих, если $p=q$, то $i=0$ и $n=+1$; в-четвертых, если $q=2p$, будет $i=-1$ и $n=-1$.

Кроме этих случаев, $pq(p-q)(q-2p)$ не может быть квадратом, если отдельные сомножители не будут квадратами, ибо они взаимно просты. Следовательно, если $p=r^2$ и $q=s^2$, то $ss-rr$ и $2rr-ss$ должны быть квадратами. Верно это ли неверно, определить трудно. Однако обычными способами нельзя найти другой случай, когда $8i^4+16i^3+12i^2+4i+1$ является квадратом, если $i$ не есть либо 0, либо $-1$; действительно, если положить, согласно правилам, корень $1+2i+4ii$, то получится $i=0$».

*4б). № 131, л. 173 об.*

«Т е о р е м а  Ф е р м а. Никакое треугольное число не может быть биквадратом в целых числах.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Треугольные числа выражаются такой формой $x(x+1)/2$, и они являются целыми, если она есть целое число. Из сомножителей же $x$ и $x+1$ один будет четным, другой нечетным, и они взаимно просты.

Пусть в первом случае $x$ четное число: каждый из $x/2$ и $x+1$ должен быть биквадратом. Если $x+1=m^4$, $m$ нечетное, то $(m^4-1)/2$ должен быть биквадратом. Следовательно, $\frac{(m-1)(m+1)(mm+1)}{2}$ должно быть биквадратом, или $\frac{(mm+1)}{2}(mm-1)$, сомножители которого взаимно просты; [сомножитель] $mm-1$ должен быть биквадратом, что не может произойти, если не будет $m=1$ и $x=0$. Отсюда получится треугольное число 0.

Пусть $x$ — нечетное число; чтобы $x(x+1)/2$ было биквадратом, $x$ и $(x+1)/2$ порознь должны быть биквадратами. Если, следовательно, $x=m^4$, то $(m^4+1)/2$ должно быть биквадратом. Но так как $2m^4+2$, где $m$ — нечетное, не может быть квадратом, согласно предыдущему, то и $(m^4+1)/2$ не будет квадратом, а тем более биквадратом за исключением случая $m=1$, откуда $x=1$ и полученное отсюда треугольное число есть 1. Ч. и т. д.»

*4в) № 131, л. 176.*

«З а д а ч а. Найти, по крайней мере в дробях, треугольные числа, которые были бы биквадратами.

Р е ш е н и е. Если $x(x+1)/2 = y^4$, то будет $2x + 1 = \sqrt{8y^4+1}$.

Первый случай: $y = 1/1$. Если $x = 1$, $x(x+1)/2 = 1$ и $\sqrt{8y^4+1} = 3/1$; $y = 6/7$, $\sqrt{8y^4+1} = 113/49$,

$$\frac{x(x+1)}{2} = \frac{2^4 \cdot 3^4}{7^4}, \quad x = \frac{2\cdot 2^4}{7^2}; \quad y = \frac{9492}{7967} =$$

$$= \frac{2\cdot 6\cdot 7\cdot 113}{8\cdot 6^4 - 7^4};$$

$$\sqrt{8y^4+1} = \frac{262\,621\,633}{63\,473\,089}; \quad \frac{x}{2}(x+1) = \frac{84^4\cdot 113^4}{7967^4}.$$

И так последующее должно привести к $x = \frac{2\cdot 84^4}{7967^2}$ ».

П р и м е ч а н и я. Теорема, о которой идет речь в трех приведенных выше заметках, была сформулирована Ферма в письме, датированном июнем 1658 г. [21, т. 2, с. 406]. Свое доказательство Эйлер опубликовал в мемуаре Е 98 [20] в 1738 г. Оно основано на доказанном в этой работе факте, что выражение $A^4 + B^4$ не может стать квадратом ни при каких значениях $A$ и $B$, отличных от 0.

В записной книжке, относящейся к 1736—1740 гг., Эйлер сначала (лл. 152 об.—153) пытается доказать теорему Ферма непосредственно. Несколькими листами позднее он начинает заниматься выражениями вида $A^4 \pm B^4$ и, установив, что они не могут быть квадратами, кроме случая $A = B$ или $B = 0$ для $A^4 - B^4$, доказывает теорему Ферма на л. 173 об., основываясь на этом факте, как и в опубликованном мемуаре. Эта заметка является, по всей видимости, черновой к указанному сочинению.

В третьей записи (л. 176) Эйлер возвращается к обобщению теоремы Ферма, которое он рассматривал в письме к Гольдбаху от 25 июня 1730 г. [22, с. 35]: он показал, что существует бесконечно много дробных треугольных чисел, удовлетворяющих поставленному условию, т. е. условию $(x^2 + x)/2 = y^4$.

В данной заметке, кроме решения $x = 32/49$, $y = 6/7$, сообщенного ранее Гольдбаху, Эйлер получает новое: $x = 2\cdot 84^4/7967^2$, $y = 9492/7967$. Для этого он применяет другое рассуждение: если $(x^2 + x)/2 = y^4$, то $2x + 1 = \sqrt{8y^4+1}$ (см. Е98, [20, с. 31]) откуда, подставляя $y = 6/7$ и $y = 9492/7967$, приходит к обоим указанным выше решениям.

*5) Задача; найти пятиугольные числа, равные квадратам. № 132, лл. 109—109 об.—110.*

«З а д а ч а. Найти целые числа, которые должны быть подставлены вместо $x$, чтобы $\alpha xx + \beta x + \gamma$ стало квадратом.

Р е ш е н и е. По наитию отыскивается один случай для $x$, при котором $\alpha xx + \beta x + \gamma$ станет квадратом, когда будет: если $x = a$, то $\sqrt{\alpha a^2 + \beta a + \gamma} = A$. Отсюда ищется другой случай $x = b$, чтобы было $\sqrt{\alpha b^2 + \beta b + \gamma} = B$. Если положить $b = a + my$ и будет $B = A + ny$, то отсюда получается

$$y = \frac{2An - 2\alpha ma - \beta m}{\alpha m^2 - n^2},$$

и будет

$$b = \frac{2mnA - \alpha m^2 a - n^2 a - \beta m^2}{\alpha m^2 - n^2}$$

и

$$B = \frac{(\alpha m^2 + n^2)\, A - 2\alpha mna - \beta mn}{\alpha m^2 - n^2}.$$

Следовательно, из найденного в этом случае $b$ подобным образом определяется другой новый $x = c$, а из него далее новый $x = d$ и т. д.

Если имеются последовательные величины

| $x$ | $\sqrt{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}$ |
|---|---|
| $a$ | $A = \sqrt{(\alpha a^2 + \beta a + \gamma)}$ |
| $b$ | $B = \sqrt{(\alpha l^2 + \beta b + \gamma)}$ |
| $c$ | $C = \sqrt{(\alpha c^2 + \beta c + \gamma)}$ |
| $d$ | $D = \sqrt{(\alpha d^2 + \beta d + \gamma)}$ |
| $e$ | $E = \sqrt{(\alpha e^2 + \beta e + \gamma)}$ |

и т. д., в которых

$$b = \frac{2mnA - (\alpha m^2 + n^2)\, a - \beta m^2}{\alpha m^2 - n^2},$$

$$B = \frac{(\alpha m^2 + n^2)\, A - 2\alpha mna - \beta mn}{\alpha m^2 - n^2}$$

подобным образом будет

$$c = \frac{2mnB - (\alpha m^2 + n^2)\, b - \beta m^2}{\alpha m^2 - n^2},$$

$$C = \frac{(\alpha m^2 + n)\, B - 2\alpha mnb - \beta mn}{\alpha m^2 - n^2}.$$

Следовательно,

$$c = \frac{2mn(\alpha m^2 + n^2)A - 4\alpha m^2 n^2 a - 2\beta m^2 n^2}{(\alpha m^2 - n^2)^2} -$$

$$- \frac{(\alpha m^2 + n^2)b + \beta m^2}{\alpha m^2 - n^2}.$$

Но $2mnA = (\alpha m^2 - n^2)b + (\alpha m^2 + n^2)a + \beta m^2$;

следовательно,

$$c = \frac{(\alpha m^2 + n^2)b}{\alpha m^2 - n^2} + \frac{(\alpha m^2 + n^2)^2 a}{(\alpha m^2 - n^2)^2} + \frac{\beta m^2(\alpha m^2 + n^2)}{(\alpha m^2 - n^2)^2} -$$

$$- \frac{4\alpha m^2 n^2 a}{(\alpha m^2 - n^2)^2} - \frac{2\beta m^2 n^2}{(\alpha m^2 - n^2)^2} - \frac{(\alpha m^2 + n^2)b}{\alpha m^2 - n^2} -$$

$$- \frac{\beta m^2}{\alpha m^2 - n^2};$$

следовательно, $c = a$. Но поскольку $A$ может быть взято отрицательным, будет $2mnA = -(\alpha m^2 - n^2)b - (\alpha m^2 + n^2)a - \beta m^2$, откуда

$$c = \frac{-(2m^2 + n^2)b}{\alpha m^2 - n^2} - \frac{(\alpha m^2 + n^2)^2 a}{(\alpha m^2 - n^2)^2} - \frac{\beta m^2(\alpha m^2 + n^2)}{(\alpha m^2 - n^2)^2} -$$

$$- \frac{(\alpha m^2 + n^2)b}{\alpha m^2 - n^2} - \frac{4\alpha m^2 n^2 a}{(\alpha m^2 - n^2)^2} - \frac{\beta m^2(\alpha m^2 + n^2)}{(\alpha m^2 - n^2)^2}.$$

И будет

$$c = \frac{-2(\alpha m^2 + n^2)b}{\alpha m^2 - n^2} - \frac{(\alpha^2 m^4 + 6\alpha m^2 n^2 + n^4)a}{(\alpha m^2 - n^2)^2} -$$

$$- \frac{2\beta m^2(\alpha m^2 + n^2)}{(\alpha m^2 - n^2)^2}.$$

I. Чтобы получить целые числа, допустим $\alpha m^2 - n^2 = 1$, или $n = \sqrt{\alpha m^2 - 1}$. Из данного случая $x = a$, в котором будет $\sqrt{\alpha a^2 + \beta a + \gamma} = A$, узнаем

$b = 2mnA - (\alpha m^2 + n^2)a - \beta m^2$ и

$B = (\alpha m^2 + n^2)A - 2\alpha mna - \beta mn.$

II. С той же целью можем допустить $\alpha m^2 - n^2 = -1$, или $n = \sqrt{\alpha m^2 + 1}$. Будет

$b = (\alpha m^2 + n^2)a + \beta m^2 - 2mnA$ и

$B = 2\alpha mna + \beta mn - (\alpha m^2 + n^2)A.$

III. Часто также получаются целые числа, если положить $\alpha m^2 - n^2 = 2$, или $n = \sqrt{\alpha m^2 - 2}$.

Будет

$$b = mnA - (1 + nn)\, a - \beta m^2/2,$$
$$B = (1 + nn)\, A - \alpha mna - \beta mn/2.$$

IV. Подобным же образом, если $+n^2 - \alpha m^2 = 2$, или $n = \sqrt{\alpha m^2 + 2}$, то будет

$$b = -mnA + (nn - 1)\, a + \beta m^2/2,$$

и

$$B = -(nn - 1)\, A + \alpha mna + \beta mn/2,$$

где следует заметить, что $A$ может быть взято как положительным, так и отрицательным, ибо оно является квадратным корнем.

З а д а ч а. Найти пятиугольные числа, которые были бы квадратами.

Пятиугольное число есть $(3xx - x)/2$, следовательно, $6xx - 2x$ должно быть квадратом, откуда $\alpha = 6$, $\beta = -2$ и $\gamma = 0$.

Пусть в случае, когда $x = a$, $\sqrt{6aa - 2a} = A$, и по первому правилу будет $n = \sqrt{6mm - 1}$, что невозможно.

По второму правилу будет $n = \sqrt{6m^2 + 1}$, откуда $m = 2$, $n = 5$. Следовательно, $b = 49a - 8 - 20A$ и $B = 120a - 20 - 49A$.

По III правилу $n = \sqrt{6m^2 - 2}$, откуда $m = 1$, $n = 2$. Отсюда будет $b = 2A - 5a + 1$, $B = 5A - 12a + 2$.

Четвертое правило не дает ничего.

Отсюда величины $x$ и $\sqrt{6xx - 2x}$ будут следующими:

| $x = a$ | $\sqrt{(6xx - 2x)} = A$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 81 | 198 |
| 7921 | 19 402 |
| $a$ | $A$ |
| $b$ | $B$ |
| $c = 98b - a - 16$ | $C = 98B - A$ |

$$b = (\alpha m^2 + n^2)\alpha + \beta m^2 + 2\, mnA, \quad n = \sqrt{\alpha m^2 + 1}$$
$$B = 2\alpha mn\, a + \beta mn + (\alpha m^2 + n^2)\, A,$$
$$c = (\alpha m^2 + n^2)\, b + \beta m^2 + 2\, mn\, B,$$
$$C = 2\alpha\, mn\, b + \beta\, mn + (\alpha m^2 + n^2)\, B,$$

откуда

$$c = 2(2n^2 - 1)b - a + 2\cdot 3m^2, \quad C = 2(2n^2 - 1)B - A.»$$

П р и м е ч а н и е. Задачу о нахождении пятиугольных чисел, одновременно являющихся квадратами, Эйлер решил в «Алгебре» (1770) [24]. В данной заметке она рассматривается, как частный случай задачи $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \square$, которая решена вначале. Так как пятиугольное число по условию должно быть квадратом, т. е. $(3x^2 - x)/2 = \square$, то должно также выполняться условие $6x^2 - 2x = \square$. Для решения уравнения $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = y^2$ Эйлер исходит из одного известного решения и получает рекуррентные формулы для определения последующих решений. Применяя этот метод, разъясненный на предыдущих страницах записной книжки, к уравнению $6x^2 - 2x = y^2$, Эйлер получает три частных решения $x = 1$; $81$; $7921$; $y = 2$; $198$; $19402$ и общее, которое, как и решение $x = 7921$, $y = 19402$, в «Алгебре» отсутствует.

*б) № 132, л. 149 об.*

«Т е о р е м а. Такая форма $4mn - m - n$ не может быть треугольным числом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $4mn - m - n = (pp - p)/2$; будет $32mn - 8m - 8n = 4pp - 4p$ и по этой причине $32mn - 8m - 8n + 1 = (2p - 1)^2$. Следовательно, $32mn - 8m - 8n + 2 = 2(4m - 1)(4n - 1) = 1 + (2p - 1)^2$. Но сумма двух квадратов не делится на $4m - 1$, а поэтому такое уравнение невозможно и отсюда $4mn - m - n$ не может быть треугольным числом. Ч. и т. д.

К о р о л л а р и й 1. Так как $k(4m - 1)(4n - 1)$ не будет $= pp + qq$, то в более общем случае уравнение $4mn - m - n = (pp + qq - k)/4k$ невозможно. Отсюда также $4mn - m - n \neq (kpp + kqq - 1)/4$ и таким же образом будет

$$4mn - m - n \neq \frac{(\alpha^2 + \beta^2)r^2 \pm (\alpha + \beta)r}{2} \text{ и}$$

$$4mn - m - n \neq \frac{(\alpha^2 + \beta^2)rr \pm 2\alpha r}{4} \text{ и}$$

$$4mn - m - n \neq ff + gg + g.$$

К о р о л л а р и й 2. Так как форма семиугольных чисел есть $(5xx - 3x)/2$, то отсюда следует, что $4mn - m - n$ не может быть семиугольным числом».

П р и м е ч а н и е. В заметке рассматривается выражение $4mn - m - n$, часто фигурирующее в переписке Эйлера с Гольдбахом. Здесь утверждается, что оно не может быть треугольным числом. В письме Гольдбаха к Эйлеру от 12 апреля 1742 г. [22, с. 99] сформулирована более общая теорема: выражение $4mn - m - n^{\alpha}$ не может быть треугольным числом.

В ответном письме от 8 мая 1742 г. [22, с. 101] Эйлер говорит, что не заметил того, что $4mn - m - n$ не может быть треугольным числом, но теперь, исходя из этого утверждения, он нашел, что рассматриваемое выражение не может быть и семиугольным числом.

Данная заметка является, видимо, подготовительной к этому письму и содержит доказательство сформулированного утверждения.

Относительно теоремы

$$4mn - m - n \neq \frac{(\alpha^2 + \beta^2)\, r^2 \pm (\alpha + \beta)\, r}{2}$$

см. примечание А. А. Киселева к письму Гольдбаха к Эйлеру от 7 июня 1742 г. [22, с. 105].

7) *№ 133, л.* 19.

«З а д а ч а. Найти все числа, которые могут быть представлены в виде двух треугольных.

Р е ш е н и е. Если $A$ есть сумма двух неравных треугольных чисел, то число $nn + (1 + 4nn)A$ является представимым двумя способами в виде двух треугольных чисел. Следовательно, числа такого рода при $A = 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13$ и т. д., суть:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1 + 5nn$; | $3 + 13nn$; | $4 + 17nn$; | $6 + 25nn$; | $7 + 29nn$; | $9 + 37nn$; |
| 6 | 16 | 21 | 31 | 36 | 46 |
| 21 | 55 | 72 | 106 | | |
| 46 | 120 | 157 | | | |
| 81 | | | | | |
| 126 | | | | | |
| 181 | | | | | |
| $10 + 41nn$; | $11 + 45nn$; | $13 + 53nn$; | $15 + 61nn$; | $16 + 65nn$; | $18 + 73nn$; |
| 51 | 56 | 66 | 76 | 81 | 91 |
| $21 + 85nn$; | $22 + 89nn$. | | | | |
| 106 | 111 | | | | |

Но тремя способами:

$$81 = 78 + 3 = 66 + 15 = 45 + 36$$

$$106 = 105 + 1 = 91 + 15 = 78 + 28».$$

П р и м е ч а н и е. Помимо решения сформулированной задачи, Эйлер дает в этой заметке также два решения (81 и 106) другой задачи: найти числа, представимые тремя способами в виде суммы двух треугольных чисел.

1. *Euler L.* Opera omnia. Ser. I. Leipzig, 1911. Vol. 1 (I).
2. *Eneström G.* Bericht an die Eulerkomission der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft über die Eulerschen Manuscripte der Petersburger Akademie.—Jahresber. Dt. Math.— Verein, Bd. 22, 1913, N 11/12, S. 191—205.
3. *Михайлов Г. К., Смирнов В. И.* Неопубликованные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР.— В кн.: Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 47—49.
4. *Михайлов Г. К.* Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР: (Общее описание и заметки по механике).— ИМИ. М.: Гостехиздат, 1957, вып. X, с. 67—94.
5. *Матвиевская Г. П.* О неопубликованных рукописях Леонарда Эйлера по диофантову анализу.— ИМИ. М.: Физматгиз, 1960, вып. XIII, с. 107—186.
6. *Michailov G. K.* Notizen über die unveröffentlichen Manuskripte von Leonhard Euler.— In: Leonhard Euler. Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen. B., 1959, S. 256—280.
7. *Матвиевская Г. П.* Неопубликованные рукописи Леонарда Эйлера по теории чисел. Автореф. канд. дис. ... Л., 1958.
8. *Матвиевская Г. П.* Неопубликованные рукописи Л. Эйлера по диофантову анализу.— Тр. Ин-та истории естествозн. и техники. М., 1959, т. 22, с. 240—250.
9. *Матвиевская Г. П.* Заметки о совершенных числах в записных книжках Эйлера.— Тр. Ин-та истории естествозн. и техники. М.: Изд-во АН СССР, 1960, т. 34, с. 415—427.
10. *Матвиевская Г. П.* Постулат Бертрана в записях Эйлера.— ИМИ. М.: Физматгиз, 1961, вып. XIV, с. 285—288.
11. *Киселев А. А., Матвиевская Г. П.* Неопубликованные записи Эйлера по partitio numerorum.— ИМИ. М.: Наука, 1965, вып. XIV, с. 145—180.
12. *Матвиевская Г. П.* Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке.— Ташкент: ФАН, 1967.
13. *Матвиевская Г. П.* Развитие учения о числе в Европе до XVII века.— Ташкент: ФАН, 1971.
14. *Диофант Александрийский.* Арифметика и книга о многоугольниках. Пер. с древнегр. И. Н. Веселовского, ред. и комментарии И. Г. Башмаковой.— М.: Наука, 1974.
15. *Dickson L. E.* History of the theory of numbers. Wash., 1919. Vol. II.
16. *Fermat P.* Oeuvres de Fermat/Publiées par les soins de P. Tannery et Ch. Henry. P., 1891—1922. Vol. 1—4.
17. Рукописные материалы Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962, т. 1, с. 353—386.
18. *Euler L.* De solutione problematum Diophantaeorum per numeros integros. E 29; Commentationes arithmeticae collectae. 1849, vol. I, p. 4—10; Opera omnia, $I_2$, 1915, p. 6—17.
19. *Euler L.* Regula facilis problemata Diophantea per numeros integris expedite resolvendi. E 739; Comm. arithm. coll., 1849, vol. II, p. 263—269; Opera omnia, $I_4$, p. 406—417.
20. *Euler L.* Theorematum quorundam arithmeticorum demonstra-

tiones. E 98; Comm. arithm. coll., 1849 vol. I, p. 24—34; Opera omnia, $I_2$, p. 38—58.
21. *Euler L.* Introductio in analysin infinitorum. Opera omnia, $I_9$.
22. *Euler L., Goldbach Ch.* Briefwechsel 1729—1764/Herausg. und eingeleitet von A. P. Juskevic und E. Winter. Zum Druck vorbereitet von P. Hoffmann, T. N. Klado und Ju. Ch. Kopelevic. B., 1965.
23. *Euleri L.* Opera postuma mathematica et physica. Petropoli, 1862, vol. 1—2.
24. *Euler L.* Vollständige Anleitung zur Algebra. St-Petersburg, 1770; Opera omnia, $I_1$.
25. Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus.— Parisii, 1621.

# ФУНКЦИЯ ЭЙЛЕРА В ЕГО ЗАПИСНЫХ КНИЖКАХ

**Е. П. Ожигова**

Как известно, функция, выражающая количество натуральных чисел, меньших данного числа $n$ и взаимно простых с ним, называется функцией Эйлера и обозначается обычно $\varphi(n)$,— это обозначение ввел Гаусс в 1801 г. Печатных работ Эйлера, связанных с функцией $\varphi(n)$, три, именно E271, E 564, E 792 [1]; кроме того, были опубликованы некоторые отрывки из его записной книжки № 140, хранящейся в Ленинградском отделении Архива АН СССР (ЛО ААН СССР). Все они издавались на языке оригинала — латыни. Ссылки на печатные тексты статей даны по изданию [1]; отрывки помещены в книге [2, т. 2, с. 15—17, 491—493].

Но кроме опубликованных работ и фрагментов записей Эйлера есть еще несколько рукописных отрывков в записных книжках, также относящихся к функции $\varphi(n)$; эти записные книжки хранятся в ЛО ААН. Изучение этих записей позволяет дополнить то, что уже известно об исследованиях Эйлера, касающихся функции $\varphi(n)$ и ее применения [2].

---

[1] Мы приводим, как это принято, номера по списку Г. Энестрёма. См., например: Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. М.: Изд-во АН СССР, 1962, т. 1, с. 352—386.

[2] См. предисловие Ф. Рудио в [1, т. 2, с. XXXII], а также книгу [4, т. I, с. 113—114].

Сначала кратко коснемся печатных работ Эйлера. Первой публикацией Эйлера по этому вопросу была статья Е 271 «Арифметические теоремы, доказанные новым методом», представленная в 1758 г., и напечатанная в 1763 г. [1, т. 2, с. 531—555]. Здесь рассматривается количество чисел, меньших данного числа $n$ и взаимно простых с ним [там же, с. 537—538]. Если $n$ простое, то количество чисел, взаимно простых с $n$ и меньших его, равно $n-1$ (Эйлер включает в число чисел, меньших $n$ и взаимно простых с ним, 1). Затем изучаются случаи, когда $n$ равно степени простого числа, произведению двух различных простых, трех различных простых, наконец, произведению степеней различных простых чисел:

$$n = p^\lambda q^\mu r^\nu s^\xi.$$

Эйлер приводит таблицу значений функции $\varphi(n)$ для всех рассмотренных случаев [1, т. 2, с. 544], затем использует функцию $\varphi(n)$ в «теореме Эйлера» [1, т. 2, с. 554—555].

В статье Е 564 «Размышления о некоторых важных свойствах чисел», представленной в 1775 г., а опубликованной в 1784 г. [1, т. 4, с. 105—115]. Эйлер вводит обозначение для этой функции: $\pi n$ и использует ее для подсчета количества дробей, числители которых меньше знаменателей и с ними взаимно просты. Для данного знаменателя $D$ количество таких числителей определяется функцией Эйлера. Снова он начинает со случая, когда $D$ простое число и числителей будет $D-1$. Для разных видов составных знаменателей приводится таблица соответствующих числителей [там же, с. 106].

Далее Эйлер подсчитывает количество дробей для каждого данного знаменателя $D$, для максимального знаменателя. Для данного знаменателя $D$ подбирают функцию $\pi D$. Затем Эйлер устанавливает свойство мультипликативности функции $\pi D$, показывая, что если $n = p^\alpha q^\beta r^\nu s^\delta$, где $p$, $q$, $r$, $s$ простые числа, то

$$\pi p^\alpha q^\beta r^\nu s^\delta = \pi p^\alpha \cdot \pi q^\beta \cdot \pi r^\nu \cdot \pi s^\delta$$

и

$$\pi PQRS = \pi P \cdot \pi Q \cdot \pi R \cdot \pi S,$$

если $P$, $Q$, $R$, $S$ какие-то взаимно простые числа. Он замечает, что если рассматривать числа (значения функции $\pi n$):

$$\pi 1 = 0,\ \pi 2 = 1,\ \pi 3 = 2,\ \pi 4 = 2,\ \pi 5 = 4,$$

$$\pi 6 = 2,\ \pi 7 = 6,\ \pi 8 = 4,\ \pi 9 = 6,\ \pi 10 = 4,$$

то незаметно никакого определенного закона их образования. Но можно записать ряд, коэффициенты которого являются суммами делителей натуральных чисел:

$$1x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 2x^6 + 6x^7 + 4x^8 + \ldots$$

с общим членом $\pi n \cdot x^n$. Этот ряд можно записать в виде

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \pi n \cdot x^n.$$

Значения функции $\pi n$ являются коэффициентами членов этого ряда. Эйлер ставит далее задачу: найти формулу для функции $\pi n$. Вначале он находит отношение $\pi n/n$ или, если $n = pqr\ldots s$, где $p, q, r, \ldots, s$ — простые числа:

$$\frac{\pi n}{n} = \frac{(p-1)(q-1)\ldots(s-1)}{pq\ldots s},$$

затем и $\pi n$:

$$\pi n = \frac{n(p-1)(q-1)\ldots(s-1)}{pq\ldots s}.$$

Наконец, он составляет таблицу, в первой строчке которой находятся последовательные натуральные числа от 1 до 12, во второй строчке: соответствующие значения функции $\pi n$. С помощью этой таблицы он составляет ряд $S$, коэффициентами членов которого служат значения $\pi n$, а показателями степеней — числа натурального ряда (первая строчка таблицы). С помощью деления на $x$ и последующего интегрирования ряда $S(x)/x$, из него получается ряд $\sigma$:

$$\sigma = \int \frac{S\,dx}{x} = \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{4x^5}{5} + \\ + \frac{x^6}{3} + \frac{6x^7}{7} + \frac{x^8}{2} + \ldots$$

Его коэффициенты равны $\pi n/n$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Эйлер рассматривает еще несколько рядов, коэффициенты которых зависят от функции $\pi n$ [3].

Третья печатная работа Эйлера, касающаяся $\varphi(n)$, E 792 «XVI сохранившихся глав трактата по теории чисел» [1, т. 5, с. 182—293], была впервые опубликована в 1849 г. по рукописи Эйлера, относящейся предположительно

---

[3] Об этой статье Эйлера см. также [5].

к 1748—1749 гг. [там же, с. XX]. Формула для $\varphi(n)$ выведена здесь тем же способом, что и в Е 271. Функция $\varphi(n)$ использована в теореме, где доказывается существование делителя $d$ функции $\varphi(n)$ такого, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$, т. е. при делении $a^d$ на $n$ получается в остатке 1. Функция Эйлера в «Трактате» рассмотрена в [1, т. 5, с. 199—203]. Кроме того, на с. 214 функция Эйлера использована при формулировке теоремы Эйлера о том, что если $a$ и $n$ взаимно просты, то $a^{\varphi(n)}$ при делении на $n$ дает в остатке 1.

Теперь перейдем к записным книжкам Эйлера [3].

Первая запись в записной книжке № 133, касающаяся функции $\varphi(n)$, относится примерно к 1749 г. В отличие от установившегося мнения, что Эйлер ввел функцию $\varphi(n)$ в связи с обобщением малой теоремы Ферма («теоремой Эйлера»), оказывается, что она появилась у Эйлера при решении задачи определения наименьшей степени числа, дающей при делении на данное простое число $n$ в остатке единицу, т. е. при нахождении первообразного корня.

Следующая запись в той же записной книжке относится, по-видимому, также к 1749 или 1750 г. Она удалена от первой более чем на 150 страниц. Эйлер подсчитывает количество чисел в ряде $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, A$, оставшихся после выбрасывания из этого ряда всех чисел, имеющих с $A$ общий делитель, отличный от 1. Подобного рода задача опубликована в Е 271 для случая, когда $n$ равно степени простого числа: $n = p^m$. Эйлер приводит несколько частных случаев определения функции $\varphi(n)$, а потом дает доказательство.

На той же странице имеется теорема, в которой Эйлер применяет введенную им функцию $\varphi(n)$ к вычислению количества членов арифметической прогрессии

$$\alpha, \quad \alpha + d, \quad \alpha + 2d, \quad \alpha + 3d, \ldots, \alpha + (A - 1)\, d,$$

разность которой $d$ взаимно проста с $A$.

К тому же периоду, что и записная книжка № 133, относится и № 134 (1749—1750 гг.). В ней приведено вычисление значений функции $\varphi(n)$ для нескольких частных случаев, а в конце записи дан числовой пример; вычислено значение $\varphi(120)$.

Дальнейшие записи, относящиеся к функции $\varphi(n)$, находятся в книжке № 140, хронологические рамки которой 1779—1783 гг. Записи сделаны рукой Н. И. Фусса, ученика Эйлера, впоследствии академика.

Введено обозначение функции $\pi n$, вычислены сначала ее частные значения для случаев, когда $n = p, p^m, pq, p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$. Затем подсчитывается количество остатков, получающихся при делении всех членов арифметической прогрессии, разность которой взаимно проста с заданным числом $A$, на это число $A$. Доказательство этого утверждения отлично от того, которое было дано Эйлером в записной книжке № 133, л. 170. Использовано свойство вычетов, теория которых была к этому времени разработана Эйлером. Затем находятся значения функции $\pi n$ для последовательных степеней простого числа $p$. В подготовительной части доказательства Эйлер использует лемму. В качестве следствия он получает формулу для $\pi a^m$. Затем он находит

$$\pi ab = \pi a \cdot \pi b, \quad \pi abcd = \pi a \cdot \pi b \cdot \pi c \cdot \pi a,$$

$$\pi n = a^{\alpha-1}\pi a \cdot b^{\beta-1}\pi b \cdot c^{\gamma-1}\pi c \cdot d^{\delta-1}\pi d \quad (n = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta),$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ не имеют общих делителей.

Кроме указанных записей имеются еще две. В одной из них (№ 140, л. 87 об.) вводится знак для обозначения делимости одного числа на другое: $a :: b$ означает, что $a$ делится на $b$. Формулируется фундаментальная теорема, ранее доказанная Эйлером: если дано число $P$, то среди чисел от 1 до $P$ будет заключено $\pi P$ чисел, взаимно простых с $P$ и меньших $P$. При этом всегда будет $a^\pi - 1 :: P$ (т. е. $a^\pi \equiv 1 \pmod P$). Это «теорема Эйлера». Не указано только, что $(a, P) = 1$. Из этой теоремы следуют новые теоремы (1—4).

Другая запись (№ 134, л. 65) посвящена вычислению самих чисел, меньших $n$ и взаимно простых с ним. Впоследствии подобными вопросами занимались А. Дюпре [6], Э. Дормуа [7], П. С. Порецкий [8]; см., например, [4, т. 3, с. 415—437]. Им принадлежит несколько формул, значения которых являются числами, меньшими данного числа и взаимно простыми с ним. В печатных работах Эйлера этот вопрос не встречается.

Дальше приведены некоторые фрагменты из записных книжек Эйлера, хранящихся в ЛО ААН (ф. 136, оп. 1), относящиеся к функции $\varphi(n)$.

*1) Ф. 136, оп. 1, № 133, л. 18 об.*

«Т е о р е м а. Пусть $n$ простое число, $a$ взаимно просто с $n$ и $a^\lambda$ наименьшая степень $a$, которая при делении на $n$ дает в остатке единицу. Пусть $m$ количество всех чисел, меньших чем $n$, которые взаимно просты с $n$. Тогда $\lambda$ будет делителем числа $m$.

Каким образом из данного числа $n$ найти число $m$, ясно из следующих формул.

Пусть $p$, $q$, $r$, $s$ — простые числа:

1. Если $n = p$, то будет $m = p - 1$,
$n = p^2, \ldots,$
$m = p(p-1)$
$n = p^3, \ldots,$
$m = p^2(p-1)$
. . . . . . . . . .
$n = p^\nu, \ldots,$
$m = p^{\nu-1}(p-1)$

Если $n = pq$, будет $m = (p-1)(q-1)$.
$n = p^2 q, \ldots, m = p(p-1)(q-1)$
$n = p^3 q, \ldots, m = p^2(p-1)(q-1)$
$n = p^2 q^2, \ldots, m = p(p-1)q(q-1)$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
$n = p^\mu q^\nu, \ldots, m = p^{\mu-1}(p-1)q^{\nu-1}(q-1)$
$n = p^\alpha q^\beta z^\gamma s^\delta, \ldots, m = p^{\alpha-1}(p-1)q^{\beta-1}(q-1)\cdot$
$\cdot r^{\gamma-1}(r-1)s^{\delta-1}(s-1)$».

Примечания. Первая запись, относящаяся к функции $\varphi(n)$. Ее можно датировать примерно 1749 г., ибо тетрадь начата в это время. Функция $\varphi(n)$ обозначается буквой $m$ и появляется в связи с теоремой о наименьшей степени $a^\lambda$, дающей в остатке 1 при делении на $n$. Диксон считал, что функция $\varphi(n)$ была впервые введена Эйлером в связи с обобщением малой теоремы Ферма [4, т. 1, с. 413—414]. Действительно, в Е 271 Эйлер доказывает «теорему Эйлера» на основании теоремы, которая впервые появляется в его рукописных тетрадях именно здесь. Теорема Эйлера находится в Е 271 [1, т. 2, с. 552—553], теорема 10. Но первая заметка, связанная с функцией $\varphi(n)$ в тетрадях Эйлера, относится, как мы видим, к отысканию наименьшей степени $\lambda$ числа взаимно простого с простым числом $n$, которая при делении на $n$ дает в остатке 1.

*2) Ф. 136, оп. 1, № 133, л. 170.*

Здесь решается вопрос о количестве чисел в ряде 1, 2, 3, 4, 5, . . ., $A$, которые останутся после вычеркивания всех чисел, имеющих с $A$ общий делитель. Подобная задача решена Эйлером в Е 271 [1, т. 2, с. 539]: доказательство теоремы 3 для случая $A = p^m$, $p$ — простое.

Полученную функцию $\varphi(A)$ Эйлер применяет к вычислению количества членов арифметической прогрессии, разность которой $d$ взаимно проста с $A$, взаимно простых или не взаимно простых с $A$. При делении членов арифметической прогрессии на $A$ получаются различные остатки (вычеты) от 1 до $A - 1$. Это — все числа от 1 до $A - 1$, взаимно простые с $A$. Это исследовано в Е 271 (см. теорему в [1, т. 2, с. 536—537]). Расположение материала в Е 271 несколько иное, чем в рукописи. Сначала в Е 271 рассмотрен случай $n = p^m$, а потом частные случаи $n = p$, $n = p^2$, $n = p^3$, затем $n = pq$ и т. д.

*3) Ф. 136, оп. 1, № 134, л. 64 об.*

Содержание фрагмента отражено в печатных работах Е 271 [1, т. 2, с. 538—544], Е 564 [1, т. 4, с. 106—114], Е 792 [1, т. 5, с. 199—203].

*4) Ф. 136, оп. 1, № 134, л. 65.*

«Числами, меньшими чем 120, и взаимно простыми с этим числом, являются:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 7, | 11, | 13, | 17, | 19, | 23, | 29, | 31, | 37, | 41, | 43, | 47, | 49, | 53, |
| $A$ | | $D$ | $C$ | $B$ | | $B$ | $D$ | $A$ | $C$ | | $C$ | $B$ | $A$ | |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 59, | 61, | 67, | 71, | 73, | 77, | 79, | 83, | 89, | 91, | 97, | 101, | 103, | 107, |
| $D$ | $C$ | | | | | $A$ | | | | | $D$ | | |

| | | |
|---|---|---|
| 109, | 113, | 119 |
| | $B$ | |

60; $aa + 15bb = A$, $3aa + 5bb = B$,

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 7, | 11, | 13, | 17, | 19, | 23, | 29, | 31 |
| $A$ | | | | $B$ | $A$ | $B$ | | $A$ |

$5bb + 19$ может быть квадратом, если $b = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{27}{2}$, $b = 9$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 37, | 41, | 43, | 47, | 49, | 53, | 59 |
| | | | $B$ | $A$ | $B$ | |

8:

$aa + 2bb = A$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1, | 3, | 5, | 7 |
| $A$ | $A$ | | |

4:

$aa + bb = A$

| | |
|---|---|
| 1, | 3 |
| $A$ | |

12:

$aa + 3bb = A$
$2aa + 3bb = B$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1, | 5, | 7, | 11 |
| $A$ | $B$ | $A$ | $B$ |

20:

$aa + 5\ bb = A$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 3, | 7, | 9, | 11, | 13, | 17, | 19 |
| $A$ | | | $A$ | | | | |
| | $B$ | | $C$ | $B$ | | | $C$ |

$A = 20n + (1, 9)$
$aa - 5bb = B$
$5aa - bb = C$ $\qquad \frac{aa + 5bb}{2} = 20n + (3, 7)$

28:
$aa + 7bb = A$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 3, | 5, | 9, | 11, | 13, | 15, | 17, | 19, | 23, | 25, | 27 |
| $A$ | | | $A$ | $A$ | | $A$ | | | $A$ | $A$ | |

44: $aa + 11bb = A$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 3, | 5, | 7, | 9, | 13, | 15, | 17, | 19, | 21, | 23, | 25, | 27, | 29, | 31, | 35, | 37, | 39, | 41, | 43 |
| $A$ | $A$ | $A$ | | $A$ | | $A$ | | | | $A$ | $A$ | $A$ | | $A$ | | $A$ | | | |

Ф. 136. оп.1, № 134, л. 65

52:

$aa + 13bb = A$

$\dfrac{aa + 13bb}{2} = B$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 3, | 5, | 7, | 9, | 11[4], | 15, | 17, | 19, | 21, | 23, | 25 |
| A | | | B | A | A | B | A | B | | | A |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27, | 29, | 31, | 33, | 35, | 37, | 41, | 43, | 45, | 47, |
| | A | B | | | | | | | B |
| 49, | 51 | | | | | | | | |
| A | | | | | | | | | |

24:

$aa + 6bb = A$

$2aa + 3bb = B$

$\dfrac{aa + 6bb}{2}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 5, | 7, | 11, | 13, | 17, | 19, | 23 |
| A | B | A | B | | | | |

40:

$aa + 10bb = A$

$2aa + 5bb = B$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 3, | 7, | 9, | 11, | 13, | 17, | 19, | 21, | 23, | 27, |
| A | | B | A | A | B | | A | | B | |
| 29, | 31, | 33, | 37, | 39 | | | | | | |
| | | | B | | | | | | | |

68:

$aa + 17bb = A$

$\dfrac{aa + 17bb}{6} = B$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 3, | 5, | 7, | 9, | 11, | 13, | 15, | 19, | 21, | 23, | 25, |
| A | B | | B | A | B | A | | | A | B | A |
| 27, | 29, | 31, | 33, | 35, | 37, | 39, | 41, | 43, | 45, | | |
| B | | B | A | | | B | | | | | |
| 47, | 49, | 53, | 55, | 57, | 59, | 61, | 63, | 65, | 67 | | |
| | A | A | | | | | B | | | | |

56:

$aa + 14bb = A$

$2aa + 7bb = B$

$A = B,\quad \dfrac{aa + 14bb}{3} = C$

$\dfrac{aa + 14bb}{5} = D$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 3, | 5, | 9, | 11, | 13, | 15, | 17, | 19, | 23, | 25, |
| A | D | C | A | | C | A | | D | A | A |
| 27, | 29, | 31, | 33, | 37, | 39, | 41, | 43, | 45, | 47, | |
| D | | | | | A | | | C | | |
| 51, | 53, | 55 | | | | | | | | |

16:

$aa + 4bb = A$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 3, | 5, | 7, | 7, | 9, | 11, | 13, | 15 |
| A | | A | | | A | | A | |

Ф. 136, оп. 1, № 134, л. 65

60:

$aa + 15bb = A$

$3aa + 5bb = B$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 7, | 11, | 13, | 17, | 19, | 23, | 29, | 31, | 37, |
| A | | | | B | A | B | | A | |
| 41, | 43, | 47, | 49, | 53, | 59 | | | | |
| | | B | A | B | | | | | |

---

[4] Здесь должно быть не $A$, а $B$:
$a = 3 \quad (9 + 13)/2 = 11 = B$.— *Примеч. Е. О.*
$b = 1$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 76: | 1, | 3, | 5, | 7, | 9, | 11, | 13, | 15, | 17, | 21, | 23 |
| | $A$ | | $A$ | $A$ | $A$ | $A$ | | | $A$ | | $A$ |
| $aa + 19bb = A$ | 25, | 27, | 29, | 31, | 33, | 35, | 37, | 39, | 41, | 43, | |
| | $A$ | | | | | $A$ | | $A$ | | $A$ | |
| | 45, | 47, | 49, | 51, | 53, | 55, | 59, | 61, | 63, | 65, | |
| | $A$ | $A$ | $A$ | | | $A$ | | $A$ | $A$ | | |
| | 67, | 71, | 73, | 75 | | | | | | | |
| | | | $A$ | | | | | | | | |

Примечания. Тетрадь № 134 относится к 1749—1750 гг. Наряду с вычислением количества чисел, меньших данного числа и взаимно простых с ним, Эйлер решает и другую задачу: определения самих этих чисел. Он делает это для чисел $n = 120$, 60, 8, 12, 4, 20, 28, 44, 52, 24, 40, 68, 56, 16, 60 (второй раз), 76. Среди этих чисел: степени двойки и степени двойки, умноженные на простые числа и на произведение простых.

Кроме этих задач Эйлера интересует вопрос о представимости взятых им чисел (взаимно простых с $n$ и меньших $n$) квадратичными формами.

Вопросы о связи теории вычетов и теории квадратичных форм рассматривались Эйлером во многих работах. Содержание этого фрагмента в печатных работах Эйлера не отражено.

5) *Ф. 136, оп. 1, № 140, л. 87 об.*

Этот фрагмент написан рукой Н. И. Фусса и был опубликован в 1862 г. [2, т. 1, с. 109]. Приведем его в русском переводе:

«Пусть знак :: означает делимое (делящееся.— *Е. О.*), так что $a :: p$ будет означать, что число $a$ делится на $p$. Фундаментальная теорема, когда-то мною доказанная. Предложено какое-то число $P$. Тогда имеется $\pi$ чисел между 1 и $P$, взаимно простых с $P$, а именно такие, которые с ним не имеют никакого общего делителя кроме единицы; тогда всегда имеем

$$a^{\pi} - 1 :: P.$$

Отсюда вытекают теоремы:

1. Если будет $p$ простым числом, то поскольку всегда будет $a^p - a :: p$, то для $a = b^p$, будет $a^p - a :: p^2$. И если будет $a = b^{pp}$, то будет $a^p - a :: p^3$.

И вообще, если $a = b^{p^n}$, то будет $a^p - a :: p^{n+1}$.

2. Если $p, q, r, s$, etc. простые числа, различные между собой, то для $a = b^{q-1}$ будет $a^p - a :: pq$. Далее, если $a = b^{(q-1)(r-1)}$, то будет $a^p - a :: pqr$ и т. д.

3. Если будет как $x^m - y^n :: P$, так и $x^n - y^n :: P$ и $m > n$, то будет также и

$$x^{m-n} - y^{m-n} :: P,$$

где $x$ и $y$ предполагаются взаимно простыми [5].

Доказательство. Вторая формула, умноженная на $x^{m-n}$, вычитается из первой и получается остаток $x^{m-n}y^n - y^m = y^n (x^{m-n} - y^{m-n})$, который, следовательно, будет делиться на $P$, и поскольку $y^n$ не делится (на $P$), то необходимо будет

$$x^{m-n} - y^{m-n} :: P.$$

4. Если, как и прежде, как $x^{m-n} - y^{m-n} :: P$, так и $x^n - y^n :: P$ и наибольший общий делитель $m$ и $n$ будет $\Delta$, то

$$x^\Delta - y^\Delta :: P».$$

Продолжение фрагмента: Ф. 136, оп. 1, № 140, л. 88: «Доказательство. Положим $m = \mu\Delta$ и $n = \nu\Delta$ и поскольку $\Delta$ есть наибольший общий делитель, то будут $\mu$ и $\nu$ взаимно простыми. Поэтому найдутся такие числа $\alpha$ и $\beta$, что $\alpha\mu - \beta\nu = 1$. Отсюда будет также $x^{\alpha m} - y^{\alpha m} :: P$ и подобным же образом $x^{\beta n} - y^{\beta n} :: P$, откуда по предыдущей теореме $x^{\alpha m-\beta n} - y^{\alpha m-\beta n} :: P$. А так как показатель $\alpha m - \beta n = \alpha\mu\Delta - \beta\nu\Delta = \Delta$, то будет

$$x^\Delta - y^\Delta :: P».$$

Примечания. Тетрадь относится к 1779—1783 гг. Эйлер вводит обозначение — символ, обозначающий делимость одного (первого) числа на другое. Формулируется фундаментальная теорема («теорема Эйлера»), «ранее мною доказанная»: если рассмотреть числа между 1 и некоторым заданным числом $P$, взаимно простые с $P$, обозначить их количество $\pi$, то всегда $a^\pi - 1 :: P$, иначе говоря $a^{\varphi(P)} \equiv 1 \pmod P$. Эйлер формулирует четыре следствия из этой теоремы (1, 2, 3, 4). В работах, опубликованных при жизни Эйлера, этот фрагмент не был отражен.

*6) Ф. 136, оп. 1, № 140, л. 91об. — 92 об.*

Этот фрагмент также был напечатан в 1862 г. [2, т. 1, с. 492—493]. Он записан рукой Н. И. Фусса. Здесь приводится в переводе.

---

[5] Здесь предполагается, что $x$ и $y$ не делятся на $P$.— *Примеч. Е. О.*

«Определение. Предложено какое-нибудь целое число $a$. Обозначим $\pi a$ количество чисел меньших, чем $a$, и с ним взаимно простых. Тогда будет

$$\pi 1 = 1,\ \pi 2 = 1,\ \pi 3 = 2,\ \pi 4 = 2,\ \pi 5 = 4,\ \pi 6 = 2 \text{ etc.}$$

Откуда очевидно, если $a$ будет простым, то $\pi a = a - 1$. Если же число $a$ будет составным, то число меньших его чисел будет $\pi a$. Каким образом для любого числа $a$ можно найти значение $\pi a$, указывает данное ранее правило, более простое доказательство которого будет здесь дано.

Лемма. Предложено некоторое число $a$. Если образовать арифметическую прогрессию из стольких же членов, разность которой взаимно проста с $a$, то при делении каждого члена на $a$, все остатки (вычеты) будут различны и среди них встретятся все числа, меньшие $a$: 0, 1, 2, 3, 4, . . .

Доказательство. Пусть $p$ простое число и $q$ разность взаимно простая с $a$; арифметическая прогрессия будет

$$p,\ p+q,\ p+2q,\ \ldots,\ p+(a-1)\,q;$$

если разделить каждый член на $a$, легко видеть, что все остатки должны быть неравными. Если же эти члены $p + \mu q$ и $p + \nu q$, где $\mu$ и $\nu$ меньше, чем $a$, будут давать равные остатки при делении на $a$, то разность их, равная $(\mu - \nu)\,q$ будет делиться на $a$. И поскольку $q$ взаимно простое с $a$ число, то должно $\mu - \nu$, являющееся числом, меньшим $a$, делиться на него.

Так как все остатки должны быть различными, их число равно $a$, и потому необходимо среди них окажутся все числа 0, 1, 2, 3, . . ., $a - 1$. Следовательно, всегда одно из этих чисел будет делиться на $a$. Подготовка к доказательству. Пусть 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, . . ., $a - 1$ — все числа, меньшие, чем $a$, и с ним взаимно простые. Количество их по предположению равно $\pi a$. Первым среди них будет 1. Последним $a - 1$. Затем составляется следующий ряд рядов

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | ... | $a-1$ | $a$ |
| $a+1$ | $a+\alpha$ | $a+\beta$ | $a+\gamma$ | ... | $2a-1$ | $2a$ |
| $2a+1$ | $2a+\alpha$ | $2a+\beta$ | $2a+\gamma$ | ... | $3a-1$ | $3a$ |
| $3a+1$ | $3a+\alpha$ | $3a+\beta$ | $3a+\gamma$ | ... | $4a-1$ | $4a$ |
| ...... | ...... | ...... | ......... | ... | ...... | ... |
| $(n-1)a+1$ | $(n-1)\,a+\alpha$ | $(n-1)\,a+\beta$ | $(n-1)\,a+\gamma$ | ... | $na-1$ | $na$ |

Таким образом, его первый горизонтальный ряд содержит все числа, взаимно простые с $a$, от 0 до $a$, второй ряд содержит все числа, взаимно простые с $a$, от $a$ до $2a$, третий — все числа, взаимно простые с $a$, от $2a$ до $3a$, и таким же образом эти ряды содержат числа до последнего $[(n-1)a+1]$-го ряда. Все вместе представляют все числа, взаимно простые с $a$ от 0 до $na$; количество этих чисел есть $n\pi a$. Отдельные же вертикальные ряды будут арифметическими прогрессиями с разностью $a$, расположенными в порядке возрастания. Они позволяют легко решить следующие задачи:

Задача. Предложено какое-либо число $a$. Найти значение формул $\pi a^2$, $\pi a^3$, $\pi a^4$ etc. и вообще $\pi a^m$.

Решение. В вышеуказанной таблице возьмем $n = a$, чтобы найти $\pi aa$. Очевидно, что все члены этих рядов, поскольку они взаимно просты с $a$, будут также взаимно просты с $aa$. Вследствие этого, так как число таких рядов есть $n = a$, и число членов в каждом равно $\pi a$, то всего получим $a \cdot \pi a$, что равно $\pi aa$, так что будет $\pi aa = a \cdot \pi a$. Затем положим $n = aa$, так что $na = a^3$. Поскольку снова все члены будут взаимно просты с $a^3$, их количество будет $aa \cdot \pi a$ и также $\pi a^3 = aa \cdot \pi a$.

В общем случае, если положить $n = a^{m-1}$, что дает $na = a^m$, получим, что количество всех чисел, взаимно простых с $a^m$, будет $a^{m-1} \cdot \pi a$.

Следствие. Если $a$ простое число, так что $\pi a = a - 1$, то будет

$$\pi a^2 = a(a-1),\quad \pi a^3 = a^2(a-1) \text{ etc.},\quad \pi a^m = a^{m-1}(a-1).$$

Задача. Предложены два числа $a$ и $b$, взаимно простые между собой, для которых имеем формулы $\pi a$ и $\pi b$. Найти количество всех чисел, взаимно простых с произведением $ab$ и меньших его, или найти значение $\pi ab$.

Решение. В вышеуказанной таблице положим $n = b$, что дает $na = nb$, и поскольку горизонтальный ряд содержит все числа, взаимно простые с $a$, от 1 до $ab$, число их, следовательно, есть $b\pi a$.

$$1,\ a+1,\ 2a+1,\ \ldots,\ (b-1)a+1,$$

который, поскольку представляет собой арифметическую прогрессию с разностью $a$, взаимно простой с $b$, имеет число членов, взаимно простых с $b$, равное $\pi b$. То же самое будет и с остальными вертикальными рядами, любой из которых содержит $\pi b$ членов, взаимно простых с $b$. Таким образом, количество всех членов, одновременно взаимно простых и с $a$, и с $b$, так как число вертикальных рядов равно $\pi a$, будет $\pi a \cdot \pi b$, так что будет $\pi ab = \pi a \cdot \pi b$».

Продолжение фрагмента: *Ф. 136, оп. 1, № 140, л. 92 об.*

«Теперь, наконец, может быть составлена таблица для всех чисел такого рода [6].

Отсюда ясно далее, что если будем иметь $a$, $b$, $c$, $d$ — взаимно простые между собой числа, то будет $\pi abcd = \pi a \cdot \pi b \cdot \pi c \cdot \pi d$. Затем, если будет предложено число $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} = n$, то будет $\pi n = a^{\alpha-1}\pi a \cdot b^{\beta-1}\pi b \cdot c^{\gamma-1}\pi c \cdot d^{\delta-1}\pi d$».

Примечания. Здесь Эйлер вводит обозначение для функции $\varphi(a) : \pi a$ и вычисляет сначала ее значения для различных $a : \pi 1, \pi 2, \pi 3, \ldots$ для $a$ простого. Затем в лемме говорится о том, что при делении всех членов арифметической прогрессии, разность которой взаимно проста с заданным числом $a$, на это число $a$, получаются остатки, которые все различны между собой и представляют все числа, меньшие $a$ и взаимно простые с ним. Доказательство этого утверждения здесь отлично от того, какое было дано Эйлером в тетради № 133, л. 170. Использовано свойство вычетов.

Далее Эйлер переходит к определению значений функции $\pi a$ для последовательных степеней простого числа: $a = p^m$. В подготовительной части доказательства он использует указанную лемму. В качестве следствий он получает формулу для $n = a^{\nu}$, $ab$, $abcd$, $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta}$, где $a$, $b$, $c$, $d$ взаимно просты.

В этом фрагменте Эйлер полагает $\varphi(1) = 1$. Диксон считал, что Эйлер всегда полагал $\varphi(1) = 0$ (как в Е 271). См. [4, т. 1, с. 113, прим. 3].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Euler L.* Opera omnia, Series prima. 1911—1956. Vol. 1—29.
2. *Euler L.* Opera postuma mathematica et physica. Petropoli, 1862. T. 1—2.
3. *Эйлер Л.* Отрывки из записных книжек. ЛО АН СССР, ф. 136, оп. 1, № 133, л. 18 об., 170; ф. 136, оп. 1, № 134, л. 64, об., 65; ф. 136, оп. 1, № 140, л. 91 об., 92, 92 об., 87 об., 88.

[6] $\pi 1 = 1$, $\pi 2 = 1$, $\pi 3 = 2$, $\pi 4 = 2$, $\pi 5 = 4$, $\pi 6 = 2$, $\pi 7 = 6$, $\pi 8 = 4$, $\pi 9 = 6$, $\pi 10 = 4$, $\pi 11 = 10$, $\pi 12 = 4$, $\pi 13 = 12$, $\pi 14 = 6$, $\pi 15 = 8$, $\pi 16 = 7$. Это примечание Эйлера (или Н. Фусса).— *Примеч. Е. О.*

Тск

4. *Dikson L. E.* History of the theory of numbers. Wash., 1919—1923. Vol. I—III; II ed. N. Y., 1934.
5. *Дорофеева А. В.* Метод Эйлера для пересчета рациональных чисел, расположенных в интервале (0, 1).— Материалы годичн. конф. Лен. отд. Советск. нац. объединения истории и философии естествозн. и техн., 1970, с. 78—79.
6. *Dupré A.* Examen d'une proposition de Legendre relative à la théorie des nombres. P., 1859.
7. *Dormoy E.* Formule générale des nombres premiers.— C. R. Paris, 1886, vol. 63, p. 178—181.
8. *Порецкий П. С.* К учению о простых числах.— Сообщ. и протоколы секции физ.-мат. наук. Казань, 1888, т. 6, вып. 1—2, с. 52—142.

## О ПРОСТЫХ ЗНАЧЕНИЯХ МНОГОЧЛЕНА $x^2+x+41$

Л. Е. Майстров *

Изучением простых чисел занимались еще в древней Греции. Но больших успехов достигнуто не было в течение длительного времени.

Ферма считал одной из важнейших задач теории чисел отыскание простых чисел, бо́льших, чем любое заданное натуральное число $n$. С этим были связаны попытки Ферма найти выражения, значения которых являются простыми числами. Ферма предполагал, что все числа вида $F_k = 2^{2^k} + 1$ являются простыми. Для $k = 0, 1, 2, 3, 4$ это утверждение справедливо; $F_k$ принимает при этом значения 3, 5, 17, 257, 65537, являющиеся простыми числами. Но Эйлер в 1732 г. установил, что $F_5 = 2^{2^5} + 1$ является составным: $F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$. Простые числа вида $2^{2^n} + 1$ называют теперь простыми числами Ферма. В настоящее время известно 37 составных чисел вида $2^{2^n} + 1$. Остается невыясненным вопрос о том, конечно или бесконечно число простых чисел Ферма.

В дальнейшем внимание математиков привлекло отыскание многочленов, все значения которых являются простыми числами.

* Когда выпуск находился в печати, скончался Леонид Ефимович Майстров (1920—1982), многие статьи которого неоднократно публиковались в выпусках «Историко-математических исследований».— *Примеч. ред.*

Но уже 28 сентября 1743 г. Гольдбах в письме к Эйлеру писал, что легко доказать теорему, согласно которой ни один многочлен с целыми коэффициентами $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ $(n \geqslant 1)$ не может при всех целых значениях $x$ принимать значения, равные простым числам [1, с. 181].

Хотя Гольдбах и владел доказательством этой теоремы, но в письме его не привел. Тут же он заметил, что многочлен $x^2 + 19x - 19$ для первых 47 натуральных значений $x$ только в четырех случаях не дает простых чисел. Действительно, для $x \leqslant 47$ данный многочлен дает составные числа только при $x = 19$; 25; 36; 38. В письме от 28 октября 1752 г. Эйлер, видимо, забыв об этом письме Гольдбаха, сообщил ему доказательство упомянутой теоремы. В письме от 18 ноября 1752 г. Гольдбах привел свое доказательство, которым владел уже с 1743 г. [1, с. 361]. Доказательство теоремы впервые опубликовал Эйлер в статье Е 283 [2]. Доказательства Гольдбаха и Эйлера по своей структуре идентичны.

После публикации доказательства Эйлера поиски многочленов, дающих при всех целых значениях $x$ простые числа, естественно, прекратились, но сохранился интерес к поиску многочленов, которые дают довольно большое число простых чисел при подстановке вместо $x$ подряд натуральных чисел.

Этим много занимался Эйлер. Он поставил, например, вопрос о том, существует ли бесконечное число простых чисел вида $x^2 + 1$; $x^4 + 1$ и $x + 1$. Двучлен $x^2 + 1$ дает простые числа для $x = 1, 2, 4, 6, 10$. Для $x \leqslant 10000$ есть 842 простых числа вида $x^2 + 1$, где $x$ — натуральное число; для $x \leqslant 180000$ таких чисел 11223. Высказано предположение, что для каждого натурального числа $k$ существует бесконечно много простых чисел вида $x^2 + k$, где $x$ есть натуральное число.

Эйлер предложил многочлен $x^2 - x + 41$, который дает простые числа при $x = 0, 1, 2, \ldots, 40$, и многочлен $x^2 + x + 17$ с простыми числами при $x = 0, 1, 2, \ldots, 15$.

Но наибольший интерес представляет многочлен $x^2 + x + 41$, предложенный Эйлером в результате замены $x$ на $x + 1$ в выражении $x^2 - x + 41$. Сам Эйлер показал только, что $x^2 + x + 41$ дает простые числа при $x = 0, 1, 2, \ldots, 13$. Лежандр проверил все значения $x$, при которых этот многочлен дает подряд простые числа $(x = 0, 1, 2, \ldots, 39)$. Кроме того, Лежандр предложил выражение $2x^2 + 29$, дающее простые числа при $x = 0, 1, 2, \ldots, 28$. Ч. Беббидж также обращался к нахождению простых чисел, получаемых при помощи $x^2 + x + 41$. Это обращение не было у него случайным. Интерес к вопросам теории чисел у Беббиджа был устойчивым. Так, еще в 1819 г. он опубликовал работу по теории чисел [3].

Как известно, основная заслуга Беббиджа состоит в создании так называемой аналитической машины, ставшей прообразом первых ЭВМ, построенных через сто лет. Но аналитической машине предшествовала менее известная разностная машина Беббиджа, которая была частично закончена в 1822 г. и могла выполнять некоторые вычисления [4].

В основу работы разностной машины Беббидж положил известное свойство многочленов степени $n$, состоящее в том, что их конечные разности порядка $n$ постоянны. Разностная машина создавалась Беббиджем прежде всего для составления различных таблиц и проверки уже существующих: навигационных, логарифмических, тригонометрических и др. Но первой работой, выполненной на машине, был подсчет значений функции $y = x^2 + x + 41$ при различных значениях $x$. Для этого (табл. 1) вначале подсчитывается несколько значений $y$ при $x =$

**Таблица**

**Значение функции $y = x^2 + x + 41$ и конечных разностей**

| $x$ | $y$ | Конечные разности | |
|---|---|---|---|
| | | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ |
| 0 | 41 | | |
| | | 2 | |
| 1 | 43 | | 2 |
| | | 4 | |
| 2 | 47 | | 2 |
| | | 6 | |
| 3 | 53 | | 2 |
| | | 8 | |
| 4 | 61 | | 2 |
| | | 10 | |
| 5 | 71 | | 2 |
| | | 12 | |
| 6 | 83 | | |

$= 0, 1, 2, 3$, затем конечные разности первого порядка $\Delta_1$ и второго $\Delta_2$, которые все равны между собой. Складывая на машине значение функции с соответствующими разностями, мы получаем все последующие значения нашего квадратного трехчлена. Так $53 + 6 + 2 = 61$; $61 + 8 + 2 = 71$ и т. д. Беббидж на своей машине за 2,5 мин. при помощи многочлена $x^2 + x + 41$ получил 30 простых чисел для $x = 1, 2, 3, \ldots, 30$.

Расчетами Беббиджка история изучения выражения $x^2 + x + 41$ не закончилась. Эскот в 1899 г., заменив в $x^2 + x + 41$ $x$ на $x - 40$, получил выражение $x^2 - 79x + 1601$, которое дает простые числа при $x = 0, 1, 2, \ldots, 79$, но они не все разные, среди них есть и совпадающие [5].

Трост в 1953 г. при помощи ЭВМ составил таблицу значений $x^2 + x + 41$ для всех целых $x$ от 0 до 11000 и установил, что в этой таблице содержится 4506 простых чисел, конечно, не подряд [6]. Было высказано предположение, что существует бесконечно много натуральных чисел $x$, для которых $x^2 + x + 41$ есть простое число. Дело в том, что такие многочлены первой степени существуют: $2x + 1$; $4x + 3$; $8x + 1$ и др. Высказано также предположение, что для каждого натурального числа $k$ существует бесконечно много простых чисел вида $x^2 + k$, где $x$ — натуральное число.

В связи со свойствами $x^2 + x + 41$ поставлен вопрос: существует ли такое натуральное число $a > 41$, чтобы каждое из чисел $x^2 + x + a$ для $x = 0, 1, 2, \ldots, a - 2$ было простым? Доказано только, что таких чисел $a \leqslant 10^9$ не существует.

Мы выше назвали только некоторые нерешенные вопросы, связанные с функцией $f(x) = x^2 + x + 41$. Изучение свойств этой функции в наши дни еще далеко не закончено. В своей «Истории теории чисел» Диксон подчеркивает необычность квадратного трехчлена $x^2 + x + 41$ [7, с. 420].

На арифметические особенности трехчлена $x^2 + x + 41$ и историю его изучения мое внимание обратил кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики сельскохозяйственной академии Эстонской ССР (г. Тарту) Я. А. Габович.

Автор благодарит Л. А. Киселева за полезные указания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Euler L., Goldbach C.* Briefwechsel 1729—1764/Herausg. und engeleitet von A. P. Juškevič und E. Winter. B.: Akad.-Verl., 1965.
2. *Euler L.* De numeris primis valde magnis.— Novi Comm. Ac. Petropab. 1764 (Opera omnia, Ser. I, vol. 3).
3. *Babbage Ch.* Demonstration of a theorem relating to prime numbers.— Edinburgh Philosophical Journal, 1819, vol. 1.
4. *Майстров Л. Е., Эдлин И. С.* Разностная машина Ч. Бэбиджа.— История и методология естественных наук. Изд. МГУ, 1978.
5. *Escot E. B.* L'intermédiaire des Mathématiques. 1899. Vol. 6.
6. *Trost E.* Primzahlen. Basel; Stuttgart, 1953.
7. *Dickson L. E.* History of the theory of numbers. Wash., 1919. Vol. 1.

# РЕШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ 3-Й И 4-Й СТЕПЕНИ В ПОЗДНИХ РАБОТАХ ЭЙЛЕРА

**Т. А. Лаврененко**

Среди математиков XVIII в., занимавшихся неопределенным анализом, самой крупной фигурой был, несомненно, Л. Эйлер. В своей «Алгебре» [1] он систематизировал и изложил в общем виде известные к тому времени результаты, касающиеся вопроса о решении в рациональных числах уравнений с двумя неизвестными первых четырех степеней. На геометрическом языке, который мы будем употреблять и в дальнейшем, этот вопрос формулируется как задача нахождения рациональных точек плоской кривой, задаваемой соответствующим уравнением. При отыскании рациональных точек кривой 3-го порядка в [1] Эйлер, оставаясь в тех же рамках, что и Диофант, использует (в чисто алгебраической трактовке) метод секущей для случая, когда одна из рациональных точек является бесконечно удаленной, и метод касательной (см. [2, 3]). Причем он, как и математики до него, итерирует только метод касательной.

В 1780 г. Эйлер представил в Петербургскую Академию наук работы [4]—[10], впервые опубликованные: [4] в 1826 г., [5] — в 1824 г., [6] — [10] — в 1830 г. В них был дан новый способ получения последовательности решений неопределенных уравнений 3-й и 4-й степени. В [4]—[8]

этот метод формируется при решении частных задач, а в [9] излагается в общем виде. В [10] новый способ применяется к решению уравнения $z^2 = f_3(x)$, где $f_3(x)$ — многочлен 3-й степени с рациональными коэффициентами. Наиболее существенным является то, что этот способ приводит Эйлера, во-первых, к использованию метода секущей для конечных рациональных точек [10] и, во-вторых, к отражению рациональных точек относительно оси симметрии кривой [7], [8], [10]. Такое отражение позволило Эйлеру итерировать метод секущей [7], [10]. Впоследствии методы касательной и секущей, а также идея их неограниченного применения легли в основу описания структуры множества всех рациональных точек эллиптической кривой. Поэтому работы [4]—[10], рассмотрению которых посвящена настоящая статья, представляют большой интерес для истории неопределенного анализа. До сих пор они оставались вне поля зрения историков математики, и лишь работа [10] была рассмотрена И. Э. Гофманом [11], о чем будет сказано ниже.

**1.** Дадим краткий обзор работ [4] — [8]. Исследуя задачу Ферма о двух целых числах, сумма которых была бы квадратом, а сумма квадратов — биквадратом [4], Эйлер сводит ее к решению в целых числах неопределенного уравнения

$$(r^2 + 2rs - s^2)^2 - 8r^2s^2 = \square, \tag{1}$$

где $r$, $s$ — неизвестные. От этого уравнения Эйлер с помощью некоторой подстановки переходит к уравнению 4-й степени, квадратному по каждой неизвестной

$$t^2u^2 - t^2 - 2u^2 - 2tu - 1 = 0, \tag{2}$$

для которого Эйлер и развивает свой новый метод получения последовательности рациональных решений, исходя из одного известного решения. Этот метод мы изложим ниже при анализе работы [9].

В работе [5] рассматривается задача, которая сводится к решению в целых числах уравнения

$$(Ax^2 + Cxy + By^2)^2 + \Delta x^2y^2 = \square, \tag{3}$$

где $x$, $y$ — неизвестные, $\Delta$ — целое число, $A$, $B$, $C$ — коэффициенты специального вида, выражающиеся некоторым образом через два целых параметра. Точно так же, как в [4], указанное уравнение сводится к уравнению

$$A\lambda^2p^2q^2 + C\lambda pq - \lambda mp^2 - \lambda nq^2 + B = 0, \qquad (4)$$

где $p$, $q$ — неизвестные, $\lambda$ — некоторый параметр. Отметим, что (3) имеет тот же вид, что и (1), а (4) — тот же вид, что и (2). Уравнение (4) решается аналогично (2).

Одновременно с [5] Эйлер представляет работу [6], в которой излагает метод решения в целых числах уравнения (3) уже без связи с какой-то конкретной задачей. Как и в [5], он сводит уравнение (3) к уравнению (4). Подчеркнем, что в отличие от [5] в [6] коэффициенты $A$, $B$, $C$ и $\Delta$ считаются произвольными целыми числами.

Идея перехода к уравнению, квадратному по обеим неизвестным, вновь используется Эйлером в работе [7]. Рассматриваемая там задача сводится к уравнению 3-й степени

$$v^3 - n = w^2 (v - n), \qquad (5)$$

где $v$ и $w$ — неизвестные, а $n$ — произвольное рациональное число. С помощью подстановки $w = v - z$ уравнение (5) сводится к уравнению 3-й степени, квадратному по обеим неизвестным

$$(n + 2z) v^2 - z (2n + z) v + n (z^2 - 1) = 0, \qquad (6)$$

которое решается так же, как и (2) и (4).

Та же идея применяется Эйлером в работе [8], где он решает задачу, сводящуюся к уравнению

$$(t + 7)(t + 3)(t^2 + 1) = w^2.$$

Осуществляя подстановку $w = t^2 + 5t + v$, Эйлер получает уравнение 3-й степени относительно $t$ и $v$:

$$2vt^2 + 3t^2 + v^2 + 10vt - 10t - 21 = 0,$$

которое решается так же, как (2), (4) и (6).

2. Анализ конкретных уравнений в работах [4] — [8] приводит Эйлера к рассмотрению в работе [9] общего уравнения 4-й степени, квадратного по обоим неизвестным:

$$f_4 (x, y) \equiv a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + ix^2y^2 = 0, \qquad (7)$$

где $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$, $i$ — произвольные рациональные коэффициенты. Отметим, что (2), (4) и (6) — частные случаи уравнения (7). Эйлер записывает (7) в виде

$$P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x) = 0, \tag{8}$$

где $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ — многочлены 2-степени относительно $x$, и в виде

$$S(y)\,x^2 + T(y)\,x + U(y) = 0, \tag{9}$$

где $S(y)$, $T(y)$, $U(y)$ — многочлены 2-й степени относительно $y$. Метод Эйлера получения последовательности рациональных решений уравнения (7), исходя из некоторого известного, состоит в следующем. Пусть $(x_k, y_k)$ — известное решение уравнения (7). Положив в (8) $x = x_k$, получим квадратное уравнение с рациональными коэффициентами относительно $y$. Оно имеет два корня: $y_k$ и $\bar{y}$. В силу рациональности $y_k$ корень $\bar{y}$ также рационален. Новое решение $(x_{k+1}, y_{k+1})$ уравнения (7) получается, если взять $x_{k+1} = x_k$ и $y_{k+1} = \bar{y}$. Подобным же образом, фиксируя в (9) $y = y_{k+1}$, находим $x_{k+2}$ и пару $(x_{k+2}, y_{k+2})$, где $y_{k+2} = y_{k+1}$. Так, рассматривая то уравнение (8) при фиксированном $y$, то уравнение (9) при фиксированном $x$, на каждом шаге получаем еще одно рациональное решение уравнения (7).

В работе [9] Эйлер отмечает, что, получая последовательность решений уравнения (7) или, что то же самое, (8), мы одновременно получаем и последовательность решений уравнения

$$Q^2(x) - 4P(x)\,R(x) = \square, \tag{10}$$

так как левая часть уравнения (10) есть дискриминант квадратного уравнения (8). В самом деле, $x = x_k$ удовлетворяет (10), поскольку при $x = x_k$ дискриминант уравнения (8), имеющего рациональные корни $y_k$ и $y_{k+1}$, должен равняться квадрату рационального числа. Аналогично можно обратиться к уравнению

$$T^2(y) - 4S(y)\,U(y) = \square,$$

левая часть которого является дискриминантом квадратного уравнения (9).

3. В работе [10] Эйлер рассматривает неопределенное уравнение 4-й степени вида

$$f_4(x) \equiv Q_1^2(x) + P_1(x)\,R_1(x) = z^2, \tag{11}$$

где $Q_1(x)$, $P_1(x)$, $R_1(x)$ — квадратные многочлены с рациональными коэффициентами. Легко установить связь этого уравнения с работой [9]. Действительно, замена обозначений

$$P(x) = {}^1/_2 P_1(x),\ R(x) = -{}^1/_2 R_1(x),\ Q(x) = Q_1(x) \quad (12)$$

приводит уравнение (11) к уравнению (10), решения которого получаются из решений уравнения (7). Эйлер находит подстановку

$$z = P_1(x)\, y + Q_1(x), \quad (13)$$

которая уравнение (11) сводит к

$$P_1(x)(P_1(x)\, y^2 + 2Q_1(x)\, y - R_1(x)) = 0, \quad (14)$$

и далее рассматривает уравнение

$$P_1(x)\, y^2 + 2Q_1(x)\, y - R_1(x) = 0. \quad (15)$$

И. Э. Гофман отмечает, что это — некоторое обобщение того, что было изложено еще в «Алгебре» [1] для случая $f_2(x) \equiv q^2(x) + p(x)\, r(x) = z^2$, где $q(x)$, $p(x)$, $r(x)$ — линейны (см. [11, с. 144]). С помощью подстановки $z = q(x) + p(x)\, y$ уравнение $f_2(x) = z^2$ сводилось в [1] к уравнению 1-й степени относительно $x$. Нам кажется более вероятным, что Эйлер пришел к методу решения уравнения (11) не путем указанной аналогии, а непосредственно из рассмотрений работы [9]. Заметим, что работа [10] была представлена в Петербургскую Академию наук 16.10.1780 г., ровно через неделю после представления работы [9]. Мы уже видели, что уравнение (11), изучаемое в [10], фактически совпадает с (10), систематически рассмотренным в [9]. Покажем, что и подстановка (13) вытекает из рассмотрений работы [9]. Сделаем замену (12). Подстановка (13) примет вид

$$z = 2P(x)\, y + Q(x),$$

а уравнение (15) совпадет с (8). В работе [9] Эйлер в явном виде выписывает формулу решения уравнения (8):

$$y = (-Q(x) \pm \sqrt{Q^2(x) - 4P(x)\, R(x)})/2P(x). \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что

$$Q^2(x) - 4P(x)\, R(x) = Q_1^2(x) + P_1(x)\, R_1(x) = \\ = f_4(x) = z^2,$$

Подставляя это в (16), находим, что

$$y = (-Q(x) \pm z)/2P(x).$$

Отсюда немедленно следует равенство

$$z = \pm(2P(x)\,y + Q(x)).$$

По-видимому, на этом пути Эйлер и нашел свою подстановку.

Далее Эйлер отмечает, что $x$ и $y$ входят в уравнение (15) не выше, чем во второй степени и поэтому его можно привести к

$$S_1(y)\,x^2 + T_1(y)\,x + U_1(y) = 0, \tag{17}$$

где $S_1(y)$, $T_1(y)$, $U_1(y)$ — многочлены 2-й степени с рациональными коэффициентами. Уравнение (17) отличается от (15) лишь группировкой членов. К уравнениям (15), (17) Эйлер применяет тот же метод получения последовательности решений, исходя из некоторого известного, что и к уравнениям (8), (9) в работе [9]. На самом деле после замены (12) уравнения (15) и (17) совпадают с (8) и (9) соответственно.

Очевидно, процессу получения рациональных решений $(x_k, y_k)$ уравнения (15) (или (17)) соответствует процесс получения рациональных решений $(x_k, z_k)$ уравнения (11), где $z_k$ определяется по формуле $z_k = P_1(x_k)\,y_k + Q_1(x_k)$. Дадим геометрическую интерпретацию процесса получения последовательности $(x_k, z_k)$. Пусть $(x_k, y_k)$ — известное решение уравнения (15). Если на данном шаге в (17) фиксируется $y = y_k$ и оттуда находятся рациональные корни $x_k$ и $x_{k+1}$, то этот шаг процесса дает новое рациональное решение $(x_{k+1}, y_k)$ уравнения (15) (или (17)). Решениям $(x_k, y_k)$ и $(x_{k+1}, y_k)$ соответствуют решения $(x_k, z_k)$ и $(x_{k+1}, z_{k+1})$, где $z_k = P_1(x_k)\,y_k + Q_1(x_k)$, $z_{k+1} = P_1(x_{k+1})\,y_k + Q_1(x_{k+1})$. Таким образом, рациональные точки $(x_k, z_k)$ и $(x_{k+1}, z_{k+1})$ принадлежат с одной стороны кривой $L$, задаваемой уравнением (11), с другой стороны кривой, задаваемой уравнением

$$z = P_1(x)\,y_k + Q_1(x). \tag{18}$$

Если оба многочлена $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ линейны, то (18) есть уравнение прямой (в координатах $x$, $z$). Если же хотя бы один из них — 2-й степени, то (18) задает параболу. Заметим, что в случае линейности $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ многочлен $Q_1^2(x) + P_1(x)\,R_1(x)$ имеет третью степень. Мы рассмотрим пока случай параболы, так как случай прямой встретится позже. Парабола (18) проходит через рациональную бесконечно удаленную особую точку кривой $L$ с однородными координатами (0, 1, 0) и имеет с $L$ еще четыре конечных точки пересечения. Их абсциссы определяются из (14). Три из этих точек имеют координаты $(x', Q(x'))$, $(x'', Q(x''))$, $(x_k, z_k)$, где $x'$, $x''$ — корни многочлена $P_1(x)$, четвертая — $(x_{k+1}, z_{k+1})$. Первые две точки не обязаны быть рациональными, однако они образуют рациональную пару, поскольку $x'$, $x''$ — корни многочлена с рациональными коэффициентами. А так как третья точка $(x_k, z_k)$ рациональна, то и четвертая точка, определяемая на $(k+1)$-м шаге рассматриваемого процесса, необходимо будет рациональной. Если же на $(k+1)$-м шаге уравнение (15) решается при фиксированном $x = x_k$ и оттуда определяются рациональные корни $y_k$ и $y_{k+1}$, то это дает новое рациональное решение $(x_k, y_{k+1})$. Ему соответствует решение уравнения (11) $(x_k, z_{k+1})$, где $z_{k+1} = P_1(x_k)\, y_{k+1} + Q_1(x_k)$. Будем считать, что дискриминант $Q_1^2(x_k) + P_1(x_k)\, R_1(x_k)$ квадратного уравнения, полученного из (15) при фиксированном $x = x_k$, не равен нулю и, следовательно, $y_{k+1} \neq y_k$ (в противном случае процесс получения последовательности $(x_n, y_n)$ обрывается). Тогда $z_{k+1} \neq z_k$. Поскольку $(x_k, z_k)$, $(x_k, z_{k+1})$ — решения уравнения (11), т. е. $z_k^2 = f_3(x_k)$ и $z_{k+1}^2 = f_3(x_k)$, то $z_{k+1} = -z_k$. Мы видим, что на этом шаге процесса определяется точка $(x_k, -z_k)$ кривой $L$, симметричная точке $(x_k, z_k)$ относительно оси $x$.

Таким образом, геометрическое содержание процесса получения решений $(x_n, z_n)$ уравнения (11) состоит в том, что через три известные точки кривой $L$, одна из которых рациональна, а две другие образуют рациональную пару, проводится парабола, имеющая 4 конечные точки пересечения с $L$. Легко найти 4-ю точку, которая будет рациональной и которая затем отражается относительно оси $x$. Через полученную в результате отражения точку и известную рациональную пару точек снова проводится парабола и т. д.

**4.** В работе [10] рассматриваются также и следующие два вопроса:

1) Каким образом находить исходное решение $(x_0, y_0)$ уравнения (15), знание которого необходимо для применения метода?

2) Насколько широк класс уравнений вида

$$f_4(x) = z^2, \tag{19}$$

где $f_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ — многочлен 4-й степени с рациональными коэффициентами, к которым применим этот метод?

По поводу первого вопроса Эйлер замечает, что имеет смысл рассмотреть корни уравнений

$$P_1(x) = 0, \ R_1(x) = 0, \quad S_1(y) = 0, \ U_1(y) = 0.$$

Если хотя бы один из них будет рациональным, то соответствующее значение второй неизвестной, определяемое из (15) (или (17)), тоже будет рациональным. Это дает некоторое достаточное условие существование рационального решения уравнения (15).

Относительно второго вопроса Эйлер устанавливает следующий общий факт: если уравнение (19) имеет хотя бы одно рациональное решение, то к нему всегда применим описанный метод. Вначале это доказывается для случая $a = 0$, т. е. для уравнения третьей степени

$$f_3(x) = z^2, \tag{20}$$

где $f_3(x) = bx^3 + cx^2 + dx + e$ — многочлен с рациональными коэффициентами. В самом деле, если $(\bar{x}, \bar{z})$ — рациональное решение уравнения (20), то для представления многочлена $f_3(x)$ в виде $Q_1^2(x) + P_1(x) R_1(x)$, можно положить

$$\begin{aligned} &Q_1(x) = \bar{z}, \ P_1(x) = x - \bar{x}, \\ &R_1(x) = (f_3(x) - Q_1^2(x))/P_1(x) = (f_3(x) - \bar{z}^2)/(x - \bar{x}) = \\ &= (bx^3 + cx^2 + dx + e - (b\bar{x}^3 + c\bar{x}^2 + d\bar{x} + e))/(x - \bar{x}) = \\ &= b(x^2 + x\bar{x} + \bar{x}^2) + c(x + \bar{x}) + d. \end{aligned}$$

Тогда замена (13) имеет вид

$$z = \bar{z} + (x - \bar{x}) y.$$

Решение $(x_0, y_0)$ уравнения (15) в этом случае Эйлер находит из системы

$$P_1(x) = 0, \quad P_1(x) y^2 + 2Q_1(x) y - R_1(x) = 0,$$

откуда получается $x_0 = \bar{x}$, $y_0 = R_1(\bar{x})/2Q_1(\bar{x}) = (3b\bar{x}^2 + 2c\bar{x} + d)/2\bar{z}$. Рассмотрим, прибегая к геометрическому языку, что означает процесс получения последовательности решений уравнения (20) при таком выборе $Q_1(x)$,

$P_1(x)$ и $R_1(x)$. Геометрическая интерпретация этого процесса была дана выше для произвольных многочленов 2-й степени $Q_1(x)$, $P_1(x)$. В данном же случае многочлены $Q_1(x)$ и $P_1(x)$ линейны, и уравнение (18) имеет вид

$$z = (x - \bar{x})\, y_k + \bar{z}. \tag{21}$$

Оно задает прямую, проходящую через три рациональные точки кривой (20): $(\bar{x}, \bar{z})$, $(x_k, z_k)$ и $(x_{k+1}, z_{k+1})$. Значит, точка $(x_{k+1}, z_{k+1})$, определяемая на $(k+1)$-м шаге, когда решается уравнение (17) при фиксированном $y = y_k$, есть третья точка пересечения кривой (20) и прямой, проходящей через две известные рациональные точки $(\bar{x}, \bar{z})$ и $(x_k, z_k)$ этой кривой. Таким образом, $(x_{k+1}, z_{k+1})$ определяется по методу секущей, причем обе известные рациональные точки конечны.

Решению же уравнения (15) при фиксированном $x = x_k$ соответствует, как было установлено выше, получение точки $(x_k, -z_k)$, симметричной известной рациональной точке $(x_k, z_k)$.

Рассмотрим еще первый шаг процесса, на котором решается уравнение (17) при $y = y_0$ и определяется пара $(x_1, y_0)$ и соответствующая ей пара $(x_1, z_1)$. Значение, полученное выше для $y_0$, представляет угловой коэффициент касательной к кривой (20) в точке $(\bar{x}, \bar{z})$. Этой касательной принадлежит и точка $(x_1, z_1)$ кривой (20). Таким образом, первый шаг процесса есть метод касательной.

Обозначим точку $(x_0, z_0)$ через $A$, а точку $(x_k, z_k)$, получающуюся на $k$-м шаге,— через $A_k$. Итак, процесс получения рациональных решений уравнения (20) по одному известному, описанный Эйлером, фактически состоит в том, что на $k$-м шаге определяется точка пересечения кривой (20) и секущей $AA_{k-1}$, если $k > 1$ нечетно, и точка, являющаяся отражением $A_{k-1}$ относительно оси $x$, если $k$ четно. Точка $A_1$, определяемая на первом шаге, является точкой пересечения кривой и касательной к ней в точке $A$.

Эйлер предложил также другой способ выбора многочленов $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $R_1(x)$, если известны два рациональных решения $(\bar{x}, \bar{z})$ и $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{z}})$ уравнения (20). А именно

$$Q_1(x) = \bar{z} + \frac{\bar{\bar{z}} - \bar{z}}{\bar{\bar{x}} - \bar{x}}(x - \bar{x}), \quad P_1(x) = (x - \bar{x})(x - \bar{\bar{x}}),$$
$$R_1(x) = \alpha x + \beta,$$

где $\alpha$, $\beta$ однозначно определяются по коэффициентам многочлена $f_3(x)$ после такого выбора $Q_1(x)$ и $P_1(x)$. В данном случае замена (13) имеет вид:

$$z = \bar{z} + \frac{\bar{\bar{z}} - \bar{z}}{\bar{\bar{x}} - \bar{x}}(x - \bar{x}) + (x - \bar{x})(x - \bar{\bar{x}})\, y. \tag{22}$$

Если решение $(x_0, y_0)$ уравнения (15) находить из системы

$$R_1(x) = 0, \qquad P_1(x)\, y^2 + 2Q_1(x)\, y - R_1(x) = 0,$$

то получим $x_0 = x^*$, $y_0 = 0$, где $x^*$ — корень линейного уравнения $R_1(x) = 0$. Тогда (22) при $y = y_0$ определяет прямую, проходящую через точки $(\bar{x}, \bar{z})$ и $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{z}})$. Значит, первый шаг, которому соответствует решение уравнения (17) при $y = y_0$ и нахождение пары $(x_1, z_1)$ с $z_1 = P_1(x_1)\, y_0 + Q_1(x_1) \equiv \bar{z} + (\bar{\bar{z}} - \bar{z})(x_1 - \bar{x})/(\bar{\bar{x}} - \bar{x})$, состоит в применении метода секущей. На каждом последующем нечетном шаге новое решение $(x_{k+1}, z_{k+1})$ определяется как точка пересечения кривой (17) и параболы, имеющей с этой кривой четыре конечные точки пересечения, три из которых известны и рациональны: $(\bar{x}, \bar{z})$, $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{z}})$ и $(x_k, z_k)$.

Итак, в работе [10] метод секущей для решения уравнения $z^2 = f_3(x)$ впервые применяется в ситуации, когда обе известные рациональные точки кривой конечны. Кроме того, здесь используется итерирование этого метода, основанное на отражении известных рациональных точек относительно оси $x$. В самом деле, зная две рациональные точки $A$ и $B$ плоской кривой 3-го порядка, с помощью метода секущей можно найти еще одну рациональную точку $C$. Повторное применение этого метода к любым двум из этих точек дает третью точку. Отражая же точку $C$ относительно оси симметрии кривой и применяя метод секущей к паре $A$, $\bar{C}$ или паре $B$, $\bar{C}$, где $\bar{C}$ — отражение точки $C$, получим новую рациональную точку кривой. По-видимому, впервые такое итерирование используется Эйлером в работе [7] для получения последовательности решений неопределенного уравнения (5), где метод секущей применяется в ситуации, когда одна из известных рациональных точек бесконечно удаленная.

Отметим, что подход Эйлера к уравнению (20) и в [10] остается чисто алгебраическим, и геометрический смысл метода секущей остается нераскрытым. Оказывается завуалированной и операция отражения рациональной точки относительно оси $x$. Эйлер даже нигде не отмечает, что уравнение (15) при фиксированном $x = x_k$ дает для уравнения (11) решение $(x_{k}, -z_{k})$, если $(x_{k}, z_{k})$ — решение уравнения (11), полученное на предыдущем шаге.

От уравнения (20) Эйлер возвращается к уравнению (19) и показывает, как применить его процедуру, если известно одно рациональное решение $(\bar{x}, \bar{z})$ уравнения (19). Прежде всего в (19) осуществляется замена $x = \bar{x} + t$, в результате чего уравнение принимает вид

$$z^2 = f(t) \equiv At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + \bar{z}^2.$$

Эйлер дает два способа представления многочлена $f(t)$ в виде $Q_1^2(t) + P_1(t) R_1(t)$. Во-первых, можно положить: $Q_1(t) = \bar{z} + \alpha t$, $P_1(t) = t^2$, $R_1(t) = At^2 + Bt + (C - \alpha^2)$, где $\alpha = D/2\bar{z}$. Во-вторых, можно положить $Q_1(t) = \bar{z} + \alpha_1 t + \beta_1 t^2$, $P_1(t) = t^2$, $R_1(t) = t(ft + g)$, где $\alpha_1 = D/2\bar{z}$, $\beta_1 = (c - \alpha_1^2)/2\bar{z}$, $f$ и $g$ однозначно определяются по коэффициентам многочлена $f(t)$.

Далее Эйлер дает способы представления многочлена $f_4(x)$ в виде $Q_1^2(x) + P_1(x) R_1(x)$, когда известно три или два рациональных решения уравнения (19). Подробно останавливаться на этом мы не будем.

Свой метод Эйлер иллюстрирует большим количеством числовых примеров. В частности, приводит примеры, в которых цепь решений, получаемая с помощью его процедуры, может оборваться. Среди них — уравнение $z^2 = x^3 + 1$, которое Эйлер уже рассматривал в своей «Алгебре» [1]. Впоследствии методом бесконечного спуска он доказал, что это уравнение имеет конечное число рациональных решений.

5. И. Э. Гофман, рассматривая в [11] содержание работы [10], отмечает, что Эйлер, по-существу, уже имел здесь все составные части общей теории решения уравнения $z^2 = f_4(x)$, но не увидел этого. В подтверждение своего тезиса Гофман переходит от уравнения $z^2 = f_4(x)$ при условии, что одно рациональное решение этого уравнения известно, к уравнению вида

$$x^2\xi^2 + 2(a_1x^2 + 2b_1x + c_1)\xi + a_2x^2 + 2b_2x + c_2 \equiv \equiv (\xi^2 + 2a_1\xi + a_2)x^2 + 2(2b_1\xi + b_2)x + (2c_1\xi + + c_2) = 0, \tag{23}$$

а от него с помощью подстановки $\pm\eta = (\xi^2 + 2a_1\xi + a_2)x + 2b_1\xi + b_2$ к уравнению 3-й степени

$$\eta^2 = (2b_1\xi + b_2)^2 - (2c_1\xi + c_2)(\xi^2 + 2a_1\xi + a_2). \tag{24}$$

Гофман пишет, что Эйлер уже пользовался переходом к уравнению (23), но не совершал перехода к уравнению (24). Далее он показывает, как можно было бы придти к методам касательной и секущей для уравнения (24). Однако в [11] не проанализирован процесс получения последовательности решений уравнения $z^2 = f_3(x)$ по одному известному решению, который был разработан Эйлером в [10]. Выше мы установили, что в этом процессе Эйлером были использованы методы касательной и секущей, а также итерирование метода секущей в алгебраической форме.

В заключение автор благодарит проф. И. Г. Башмакову за постоянное внимание и руководство работой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Euler L.* Vollständige Anleitung zur Algebra. Petersburg, 1770. (EO1 — N 1) *.
2. *Башмакова И. Г.* Арифметика алгебраических кривых (от Диофанта до Пуанкаре).— ИМИ. М.: Наука, 1975, вып. 20, с. 104—124.
3. *Каучикас А.* Диофант и неопределенный анализ в трудах европейских математиков XIII—XIV вв. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1979.
4. *Euler L.* Solutio problematis Fermatiani de duobus numeris, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum ad mentem illustris La Grange adornata.— Mém. Acad. sci. St-Pétersbourg. 1826, vol. 10, p. 3—6 (EO 1—N 5).
5. *Euler L.* Resolutio facilis quaestionis difficillimae, qua haec formula maxime generalis $v^2z^2(ax^2 + by^2)^2 + \Delta x^2y^2 (av^2 + bz^2)^2$ ad quadratum reduci postulatur.— Mém. Acad. sci. St-Pétersbourg, 1824, vol. 9, p. 14—19. (EO1 — N 5).
6. *Euler L.* De insigni promotione Analysis Diophanteae.— Mém. Acad. sci. St-Pétersbourg, 1830, vol. 11, p. 1—11. (EO1 — N 5).
7. *Euler L.* Solutio problematis difficillimi, quo hae duae formulae $a^2x^2 + b^2y^2$ et $a^2y^2 + b^2x^2$ quadrata reddi debent.— Mém. Acad. sci. St-Pétersbourg, 1830, vol. 11, p. 12—30. (EO1 — N5).
8. *Euler L.* Investigatio binorum numerorum formae $xy\ (x^4 - y^4)$, quorum productum sive quotus sit quadratum.— Mém. Acad. sci. St-Pétersbourg, 1830, vol. 11, p. 31—45. (EO1 — N5).
9. *Euler L.* De resolutione huius aequationis $0 = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + ix^2y^2$ per numeros rationales.— Mém. Acad. sci. St.-Pétersbourg, 1830, vol. 11, p. 69—91. (EO 1 — N 5).
10. *Euler L.* Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadra-

* В скобках указаны соответствующие тома полного собрания сочинений Эйлера. Сокращение EO1 — N5 означает L. Euleri. Opera omnia, Ser. 1, vol. 5.

ticas ad quadratum reducendi.— Mém. Acad. sci. St-Pétersbourg, 1830, vol. 11, p. 69—91. (E01 — N 5).
11. *Hoffmann J. E.* Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Eulers...— Archive for History of Exact Sciences, 1961, vol. 1, N 2, p. 122—159.

# О НЕОПУБЛИКОВАННОЙ РУКОПИСИ Л. ЭЙЛЕРА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

**А. П. Юшкевич**

В Ленинградском отделении Архива АН СССР хранится латинская рукопись Л. Эйлера «Дифференциальное исчисление» — Calculus differentialis (фонд 136, оп. 1, № 183, лл. 1—15). Рукопись переписана набело и весьма аккуратно на обеих сторонах всех 15 листов. В ней 4 главы: 1 гл. «Об исчислении конечных разностей» (§ 1—16), 2 гл. «О дифференциальном исчислении вообще» (§ 1—12), 3 гл. «О дифференцировании алгебраических функций» (§ 1—20) и 4 гл. «О дифференцировании логарифмических и показательных количеств» (§ 1—12). Составители описания научных рукописей Эйлера, находящихся в названном архиве, относят ее к 30-м годам XVIII в. [1, с. 41]. Судя по содержанию, терминологии и обозначениям, рукопись скорее всего относится к несколько более раннему времени, примерно к 1727 г. Возможно, что она предназначалась для учебных целей, например для студентов университета при Петербургской академии наук. Основная идея, которая проводится в рукописи, была затем реализована в классическом «Дифференциальном исчислении», которое Эйлер начал писать еще до времени переезда в Берлин в 1741 г., закончил к 1750 г. и опубликовал на средства Петербургской академии наук в Берлине в 1755 г. [2, с. 437—438] [1]. Имеются также некоторые связи с не менее классическим «Введением в анализ бесконечных», т. 1, завершенным к 1744 г. и изданным в Швейцарии в 1748 г. [2] Но в целом содержание рукописи неиз-

---

[1] *Euler L.* Institutiones calculi differentialis (= Opera omnia, ser. 1, vol. 10). Имеется русский перевод [3].
[2] *Euler L.* Introductio in analysin infinitorum, t. 1 (=Opera omnia, ser. 1, vol. 8). Имеется русский перевод [4].

меримо беднее, чем «Дифференциальное исчисление» 1755 г. и отличается от него в некоторых принципиальных установках.

Рукопись начинается с введения понятия функции: «Количество, каким-либо образом составленное из одного или большего числа количеств, называется его или их функцией» (л. 1) [3]. Это определение, восходящее к Иог. I Бернулли (1718), отличается тем, что в нем не говорится о переменном характере аргумента или аргументов. Примерами функций служат $\sqrt[3]{(xx+yy)}$ и $ab^c+\sqrt{ac+db}$. Различие между переменными, обозначаемыми последними буквами алфавита, и постоянными количествами, для которых служат первые буквы, вводится только в гл. 2, где первые характеризуются тем, что могут иметь приращения, а вторые как «остающиеся в своем состоянии» (л. 5 об.). Таким образом, Эйлер сразу вводит функции многих аргументов. Вслед за этим поясняется, что функции можно составлять посредством сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и логарифмирования. Входящие в состав функции количества называются «радикальными количествами» (quantitates radicales) (л. 1). Кажется, такой термин — в этом смысле — не встречается у других ученых.

Впоследствии, во «Введении в анализ бесконечных», Эйлер сразу проведет различие между постоянными и переменными количествами, функцию — сперва одного переменного — определит как «аналитическое выражение», составленное каким-либо образом из этого переменного и чисел или постоянных количеств. При этом под аналитическими понимается более широкий класс алгебраических и элементарных трансцендентных функций, а также трансцендентных, доставляемых интегральным исчислением [2, с. 24—25]; к этому присоединяются функции, заданные неразрешенными уравнениями, неявные (там же, с. 26). Позднее в «Дифференциальном исчислении» 1755 г. Эйлер высказал более широкую концепцию понятия функции [1, с. 38], предвосхищающую определения ряда более поздних авторов и обычно связываемую с именами Н. И. Лобачевского и П. Лежен-Дирихле.

Впрочем, хотя различение переменных и постоянных количеств формулируется только во 2 главе рукописи,

---

[3] При цитировании в тексте статьи даны ссылки на соответствующие листы рукописи Эйлера.

уже в 1 главе вслед за сказанным вводится понятие о приращении функции, которое она получает, если все или некоторые радикальные количества увеличиваются или уменьшаются; отысканию этих приращений учит исчисление разностей — calculus differentiarum, которое можно также называть исчислением приращений — calculus incrementorum (л. 1); для обозначения приращений количеств $a$, $b$, $c$, . . ., $x$ вводятся соответствующие греческие буквы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, . . ., $\xi$ (лл. 2, 4 об.) — у других авторов того времени такие обозначения не встречаются. К общепринятому обозначению постоянных и переменных Эйлер переходит, как сказано, в гл. 2.

Третий параграф 1 главы представляет особый интерес и его следует процитировать полностью. «Если радикальные количества увеличиваются на конечные количества, это исчисление может называться *исчислением конечных разностей* или *конечных приращений*. С ним не следует смешивать то исчисление, в котором радикальные количества могут получать бесконечно малые приращения (augmenta). О нем речь пойдет в дальнейшем, после изложения исчисления конечных разностей. Это же исчисление, насколько мне известно, никем до сих пор разработано не было, так что может показаться излишним применить его при обучении правилам дифференциального исчисления. Однако, когда я увидел, что весьма многие, и притом не лишенные опыта в этом высшем анализе, имеют о нем не очень правильное и даже вовсе превратное понятие, то счел неподходящим опустить исчисление конечных разностей и решил изложить его прежде, чем перейду к дифференциальному исчислению» (л. 1 об.).

Замечание Эйлера, что исчисление конечных разностей не было ранее никем разработано (excultus), не следует понимать в том смысле, что он не знал своих предшественников, как И. Ньютон (1711), Б. Тейлор (1715), Ф. Николь, П. де Монмор (1720) и др. Уже в годы обучения в Базеле, где его занятиями руководил Иог. I Бернулли, Эйлер привык внимательно следить за всей доступной математической литературой, и труды названных авторов должны были ему быть знакомы. Но в этих трудах метод конечных разностей нашел применение в теории интерполирования, вычислении разностей и сумм обобщенной степени $x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(n-1)h)$ и обратной ей величины, затем к рекуррентным рядам, введенным в ту же пору А. Муавром, и т. д. Между тем, в рукописи

Эйлер желал изложить алгоритм исчисления конечных разностей для простейших классов функций, перечисленных им в начале рукописи. Об отсутствии в наличной литературе такой системы правил и говорится в приведенной цитате. В последующих параграфах 1 главы Эйлер выводит правила вычисления конечной разности для суммы и разности нескольких радикальных количеств, их произведений, взятых в любом числе[4], и частного, степеней с любым показателем (тут применяется и общая биномиальная теорема Ньютона), а также показательной и логарифмической функций, в двух последних случаях Эйлер, впрочем, ограничивается записью разности, например, $l(a+\alpha) - la$, ибо, как он выражается, «для нахождения их приращений кратного приема (compendium) не имеется» (л. 4 об.). В конце 1 главы приведен пример функции, являющейся «корнем» какого-либо неразрешенного уравнения, именно $x^3 = a^2x - b^3$. Из этого уравнения и уравнения $(x+\xi)^3 = (a+\alpha)^2(x+\xi) - (b+\beta)^3$ можно, исключая $x$, выразить $\xi$ через $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$ (л. 4 об.). Подчеркнем, что в данной рукописи Эйлер ограничивается исключительно разностями первого порядка.

По замыслу Эйлера исчисление конечных разностей должно служить основой дифференциального исчисления. Реализация замысла начинается во 2 главе, где говорится: «Дифференциальное исчисление учит находить приращение любой функции по данным бесконечно малым приращениям составляющих ее количество. Эти бесконечно малые приращения называются дифференциалами. Дифференцировать количества значит находить их дифференциалы» (л. 5). «Ясно,— сказано несколько далее,— что дифференциальное исчисление является специальным случаем исчисления, которое я изложил ранее, ибо то, что раньше принималось произвольным, теперь полагается бесконечно малым» (л. 5). Поэтому предыдущие правила здесь надлежит сочетать со специфическими свойствами, присущими бесконечно малым. Подчеркнем, что дифференцирование для Эйлера, так же как и для Лейбница и его первых последователей Як. и Иог. I Бернул-

[4] Эйлер выводит разности для произведений 2, 3 и 4 сомножителей. Общее правило формулируется по аналогии (л. 3). Также он поступит в трактате по дифференциальному исчислению 1755 г. [1, с. 120—121].

ли, есть вычисление дифференциалов (а не производных — «флюксий», как у Ньютона).

В трактате по дифференциальному исчислению 1755 г. сохраняется тот же подход к предмету. 1 глава I части трактата, как и рукописи, имеет своим предметом исчисление конечных разностей. По содержанию она гораздо богаче: здесь вводятся разности высших порядков, в качестве общего приема выражения разности функций применяется разложение в ряды по степеням разности аргумента (в том числе для $\ln x$, $a^x$, $\sin x$ и $\cos x$)[5], наряду с вычислением разностей рассматривается операция суммирования и т. д. Приращение аргумента обозначается часто $\omega$; систематически применяются введенные здесь самим Эйлером знаки разностей $\Delta y$, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ и т. д., а также знак суммы $\Sigma$. Во 2 главе I части, непосредственно примыкающей к первой главе, конечные разности применены к суммированию арифметических рядов различных порядков, а также некоторых других рядов с заданным рациональным общим членом[6].

Указанная трактовка связи между исчислением конечных разностей и дифференциальным исчислением, характерная для рассматриваемой рукописи, с полной ясностью высказана и в трактате 1755 г.. в 4 главе I части «О природе дифференциалов любого порядка» говорится: «Таким образом, анализ бесконечно малых, к изложению которого мы здесь приступаем, есть не что иное как частный случай метода разностей, изложенного в 1-й главе, который наступает тогда, когда разности, которые мы считали конечными, полагаются бесконечно малыми. Чтобы отличать этот случай, содержащий весь анализ бесконечно малых, от метода разностей, целесообразно воспользоваться для обозначения бесконечно малых разностей как особыми наименованиями, так и особыми символами» [3, с. 102—103]. После этого разъясняются терминология и обозначения Лейбница, которые затем сравниваются с ньютоновскими.

---

[5] При этом используются соответствующие разложения в степенные ряды, имеющиеся в 1 т. «Введения в анализ бесконечных».

[6] На содержании 2 главы I части трактата 1755 г. отчетливо отразилось знакомство Эйлера с двумя статьями Х. Гольдбаха о суммировании рядов (1720) и об общих членах рядов (1728, опубл. 1732). Подробнее об этом см. в 7 главе кн.: *А. П. Юшкевич* и *Ю. Х. Копелевич*. Христиан Гольдбах. М.: Наука, 1982.

Таким образом, говорится в рукописи, правила дифференциального исчисления можно получить из соответствующих правил исчисления конечных разностей «...с присоединением вдобавок того, что следует из свойств бесконечно малых приращений... Общее же начало, проистекающее из бесконечной малости, таково. Всякое количество при прибавлении или вычитании количества в сравнении с ним бесконечно малого не увеличивается и не уменьшается. Ибо, если бы эти количества увеличивались или уменьшались, то те, которые добавляются или отнимаются, имели бы к ним значащее, т. е. конечное отношение (rationem assignabilem..., adeoque finitam), в противоположность допущению. Отсюда следует, что бесконечно малые количества можно в сравнении с конечными отбрасывать. Значит, если $o$ бесконечно мало в сравнении с $x$, то $x \mp o = x$ (л. 6). Тут же Эйлер предостерегает от ошибок, которые могут возникнуть, если дифференциалы или бесконечно малые отбрасываются прежде, чем рассматриваемое «выражение будет полностью подготовлено» (л. 6), разъясняет правила отбрасывания бесконечно малых высших порядков в суммах, содержащих бесконечно малое количество низшего порядка, затем вводит бесконечно большие количества различных порядков, как обратные соответствующим бесконечно малым. Все это сопровождается многочисленными примерами.

Во 2-й главе рукописи Эйлер выступает как прямой ученик Иог. I Бернулли [7]. Основной принцип пренебрежения бесконечно малыми слагаемыми сформулирован в рукописи почти в таких же выражениях, как в курсе дифференциального исчисления, который Иог. I Бернулли читал в частном порядке маркизу Г. Ф. де Лопиталю в 1691—1692 г. и который сохранился в записи, сделанной Николаем I Бернулли — вероятно, в 1705 г.— с недошедшего до нас оригинала [8]. Этот курс начинается с формулировки трех постулатов, из которых первый гла-

---

[7] Любопытно отметить, что в заключительной формулировке основного принципа дифференциального исчисления Эйлер воспользовался для обозначения бесконечно малого количества знаком $o$, постоянно применявшимся Ньютоном и его последователями, но не Лейбницем и его последователями.

[8] Оригинальный латинский текст Lectiones de calculo differentialium П. Шафхайтлин опубликовал в Verhandl. d. Naturforsch. Gesellschaft in Basel, 1922, Bd. 34. Существует его немецкий перевод [5].

сит: «Количество, которое уменьшается или увеличивается на бесконечно меньшее количество, ни уменьшается, ни увеличивается» [5, с. 11].

Принцип отбрасывания бесконечно малых слагаемых, постоянно применявшийся аналистами (и в уточненных формулировках применяемый поныне) формулируется и в трактате Эйлера по дифференциальному исчислению 1755 г., где в 3 главе I части говорится: «Бесконечно малые уничтожаются относительно конечных и могут быть отбрасываемы в сравнении с последними» [3, с. 92]. Этот принцип затем регулярно используется при выводе всех правил дифференцирования различных функций. Однако в трактате 1755 г. исследованию понятия бесконечно малых или дифференциала Эйлер уделил гораздо больше внимания, чем в рассматриваемой рукописи. Как известно, дифференциальное исчисление Лейбница и метод флюксий Ньютона вскоре после их обнародования вызвали критику со стороны ряда ученых, указавших на логические трудности, присущие формулировке понятий бесконечно малого и принципа отбрасывания бесконечно малых слагаемых. Особенно сильное впечатление произвели возражения, выдвинутые в остроумном полемическом сочинении «Аналист» (The Analyst, 1734) Дж. Беркли, которое вызвало весьма оживленную полемику. В предисловии к трактату 1755 г. Эйлер высказывает свои соображения по поводу этой полемики и проблем основания анализа. Для решения всех трудностей он предложил трактовать бесконечно малые, а также дифференциалы, как абсолютные нули, прибавление или вычитание которых не меняет конечных слагаемых, но которые могут принимать вполне определенные геометрические отношения. Это «исчисление нулей» Эйлера, распространяемое также на бесконечно малые и дифференциалы высших порядков, может быть истолковано вполне рационально в свете теории пределов, но, понимаемое буквально, оно не встретило сочувствия большинства математиков [9]. В рассматриваемой рукописи об «исчислении нулей» нет и речи.

Вторая глава рукописи заканчивается указанием, что правила дифференцирования различных функций различны и здесь снова все функции разделены на два больших класса — алгебраических и трансцендентных, причем к последним отнесены только показательные и логарифмиче-

---

[9] Об «исчислении нулей» Эйлера см. [6, с. 265—272].

ские функции. К этому добавлено, что функции иногда задаются не непосредственно (absolute, л. 7 об.), но уравнениями, которые опять-таки подразделяются на алгебраические и трансцендентные,— впоследствии, во «Введении в анализ бесконечных» Эйлер применит названия «явные» и «неявные» функции [4, с. 26]. Как сказано в начале этой статьи, 3 глава рукописи посвящена дифференцированию алгебраических, а 4 глава — трансцендентных функций. В трактате 1755 г. им соответствуют 5 и 6 главы I части.

Ограничение области трансцендентных функций в рукописи объясняется, скорее всего, педагогическими соображениями. Нельзя представить себе, что при ее написании Эйлер не умел дифференцировать, например, тригонометрические функции. Между прочим, в упомянутых лекциях Иог. I Бернулли даны только правила дифференцирования алгебраических функций. Возможно, что Эйлер последовал до некоторой степени примеру своего учителя.

Рассмотрение вывода правил дифференцирования в 3 и 4 главах рукописи не представляет особого интереса. Заслуживают внимания только некоторые частности. Так, правило дифференцирования частного получается из формулы $\frac{x+dx}{y+dy}-\frac{x}{y}=\frac{ydx-xdy}{yy+ydy}$, в знаменателе которой отбрасывается слагаемое $y\,dy$ (л. 9 об.). В трактате 1755 г., в котором широко используются разложения в ряды, дифференциал $p/q$ выводится, в сущности, сложнее: сначала $(p+dp)/(q+dq)$ представляется в виде

$$(p+dp)\left(\frac{1}{q}-\frac{dq}{q^2}\right)=\frac{p}{q}-\frac{pdq}{q^2}+\frac{dp}{q}-\frac{dp\,dq}{q^2},$$

где «член $\frac{dp\,dq}{q^2}$ исчезает» [3, с. 123]. Такой вывод обусловлен, быть может, тем, что в 1 главе не приведена формула конечной разности частного $p/q$.

Большое место в рукописи занимает дифференцирование функций вроде $x^z$ или $x^{y^z}$ (лл. 15—15 об.). В трактате 1755 г. этот вопрос рассмотрен в 7 главе I части о дифференцировании функций двух и большего числа переменных [3, с. 159]. Своеобразен в рукописи вывод правила дифференцирования логарифмической функции. Само понятие логарифма вводится здесь по традиции путем сравнения соответствующих членов геометрической и арифметической прогрессий, а гиперболические (натуральные) логарифмы определяются как такие, для которых $l1 = 0$ и при бесконечно малом $\omega$ имеет место равенство $l(1 + \omega) = \omega$. После этого вывод дифференциала функции $y = lx$ получается немедленно $dy = l(1 + dx/x) = dx/x$ (л. 13—13 об.). Во «Введении в анализ бесконечных» логарифмическая функция вводится уже как обратная показательной [4, с. 89—90], а равенство $l(1 + \omega) = \omega$ получается из (нестрого) обоснованного равенства $a^{\omega} = 1 + k\omega$ при $k = 1$ [4, с. 101, 105]. Дифференциал гиперболического логарифма выведен в трактате 1755 г. с помощью разложения $l(1 + z)$ в бесконечный степенной ряд [3, с. 132—133] со ссылкой на «Введение в анализ бесконечных» [4, с. 105—106].

На этом разбор данной рукописи Эйлера можно закончить. Главного внимания в ней заслуживает то, что она содержит некоторые основные идеи, которые были использованы Эйлером много позднее при написании «Дифференциального исчисления» 1755 г. Вопрос о том, почему рукопись осталась незавершенной, остается открытым.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Рукописные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР. Научное описание/Сост. Ю. Х. Копелевич, М. В. Крутикова, Г. К. Михайлов и Н. М. Раскин. М.; Л.: Изд-во АН СССР, т. 1, 1962.
2. *Юшкевич А. П., Винтер Э.* О переписке Леонарда Эйлера с Петербургской Академией наук в 1741—1757 гг.— Тр. Института истории естествознания и техники. М.: Изд-во АН СССР, 1960, т. 34.
3. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. Перевод, статья и примечания М. Я. Выгодского. М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
4. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных/Пер. Е. Л. Пацановского, под ред. И. Б. Погребысского. 2-е изд. М.: Физматгиз, т. 1, 1961.
5. *Bernoulli Joh.* Die Differentialrechnung. Ostwalds Klassiker. N. 211. Leipzig, 1924.
6. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: Математика XVIII века/Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1972, т. 3.

# ГЕОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА В НЕОПУБЛИКОВАННЫХ МАТЕРИАЛАХ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

**Ю. А. Белый**

Трудно назвать какую-либо узкую отрасль математических знаний, которая столь же продолжительно привлекала внимание Эйлера, как геометрия треугольника. Начиная с первой записной книжки 1725—1727 годов и кончая записями последних лет его жизни, можно обнаружить отчетливые следы многократно возобновлявшихся поисков свойств этой простой, но во многих отношениях замечательной фигуры. Далеко не все эти поиски нашли впоследствии отражение в его публикациях, многие свойства, как мы увидим, были позже переоткрыты другими учеными.

Это неудивительно: известно, что публикация работ Эйлера продолжалась многие десятилетия после его смерти. Ниже будет рассмотрен случай, когда Эйлер, весьма основательно занявшись решением одной интересной задачи еще около 1740 г., посвященные ей статьи представляет Петербургской академии только через 40 лет (1779), после чего эти статьи еще 30 лет ждут своей очереди на публикацию! Известно и то, что часть работ Эйлера осталась неопубликованной до наших дней.

Важные результаты, относящиеся к геометрии треугольника, зафиксированы Эйлером уже в первой из дошедших до нас его записных книжек, относящейся к 1725—1727 гг. Ставится следующая задача [1, № 129, л. 55]: В треугольнике $ABC$ проведены две прямые $AE$ и $CD$, которые пересекаются между собой в точке $O$; через третью вершину $B$ и $O$ проведена прямая $BF$, пересекающая $AC$ и $F$. Найти отношение отрезков $AF$ и $CF$ и сами отрезки, если $AD = a$, $BD = b$, $BE = c$, $CE = d$.

После несложных преобразований Эйлер приходит к выводу: $CF : AF = bd : ac$. Если переписать это выражение в виде $ac \cdot CF = bd \cdot AF$ или $\frac{a \cdot c \cdot CF}{b \cdot d \cdot AF} = 1$, то получаем обычное аналитическое выражение теоремы Чевы. Итальянец Дж. Чева опубликовал свой результат еще в 1678 г. [2], но, как свидетельствует М. Шаль [3], теорема Чевы почти до середины XIX в. была забыта.

Эйлер, считая этот результат представляющим значительный интерес, включил его в свой, также оставшийся неопубликованным, учебник элементарной геометрии [4] [1]. Там в доказательстве Эйлер использует соотношение $\frac{\sin \angle FBC}{\sin \angle ABF} = \frac{FC}{BC} : \frac{AF}{AB}$, которое предварительно доказывает [4, § 188].

Обращают на себя внимание употребляемые здесь Эйлером выражения для определения длин отрезков $AE$, $CD$, $FB$:

$$AE = \sqrt{\frac{AC^2 \cdot BE}{BC} + \frac{AB^2 \cdot CE}{BC} - BE \cdot CE}$$

(аналогично выражаются и длины двух других отрезков).

Эти выражения определяют длины чевиан, т. е. отрезков, проходящих через вершины треугольника и пересекающихся в одной точке. Но этот результат известен в новой геометрии треугольника под названием теоремы Стюарта. Шотландец М. Стюарт опубликовал эту теорему в форме: если три точки $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой и точка $C$ между $A$ и $B$, а $D$ — любая другая точка, то всегда

$$AD^2 \cdot BC + BD^2 \cdot AC = AB \cdot AC \cdot BC + CD^2 \cdot AB$$

в 1746 г. [5]. Свое доказательство этой важной в геометрии треугольника теоремы Эйлер записал в первой записной книжке [1, № 129, л. 171—172], когда Стюарту не было еще и 10 лет. Теорему Эйлер вводит в свой учебник элементарной геометрии и там же применяет ее для определения длин медиан, биссектрис и высот треугольника [4, § 183, 184—187], а теоремы Чевы — для доказательства того, что медианы (биссектрисы и высоты) треугольника пересекаются в одной точке [4, § 190—192]. Теорему Стюарта Эйлер неоднократно использует также при доказательстве других предложений, например, о зависимости между сторонами и диагоналями четырехугольника (в мемуаре [1, № 105, л. 1], относящемся к 1730 г. и оставшемся неопубликованным, а также в статье Е 543, опубликованной в 1783 [6] [2].

Далее на л. 62 записной книжки [1] Эйлер снова возвращается к той же проблеме чевиан (рис. 1): если в не-

---

[1] Об этом учебнике см. [4].

[2] Мы всюду указываем номера сочинений Эйлера по известному указателю Энестрёма.

Неопределенному анализу Эйлер посвятил немало времени и сил, и то, что имеет отношение к нашей теме, составляет лишь незначительную долю исследований в этом направлении. Но и эти вопросы привлекали внимание Эйлера в течение всей его творческой деятельности.

На л. 94 той же первой записной книжки Эйлер формулирует следующую теорему: «Если в треугольнике $ABC$ возьмем какую-либо точку $O$ и из нее опустим на стороны $AB$, $AC$ и $BC$ перпендикуляры $OD$, $OE$, $OF$, будет $AD^2 + BF^2 + CE^2 = BD^2 + CF^2 + AE^2$. Это свойство, замечает далее Эйлер, имеет место для любого многоугольника [1, л. 94].

Доказательство этой теоремы, называемой во многих источниках «теоремой Карно» [10, с. 10], по-видимому, представляется Эйлеру настолько очевидным, что не приводится.

В самом деле это соотношение легко получить, если соединить точку $O$ с вершинами многоугольника и применить к образовавшимся при этом прямоугольным треугольникам теорему Пифагора.

Далее поставлена и решена задача следующего содержания: Пусть в некотором треугольнике $ABC$ угол $A$ разделен на две части, синусы которых находятся в данном отношении, следует найти длины отрезков основания $CD$, $BD$ и отрезок $AD$. Положив $BC = a$, $AB = b$, $AC = c$ и $\sin CAD/\sin BAD = m/n$ и проведя $DH \perp AB$, $DG \perp AC$, Эйлер после несложных преобразований получает

$$CD = \frac{amc}{mc + nb}, \quad BD = \frac{anb}{mc + nb};$$

$$AD^2 = \frac{m^2b^2c^2 + n^2b^2c^2 - mna^2bc + mnb^3c + mnbc^3}{(mc + nb)^2}.$$

Положив затем $CD$-$p$, $BD$-$q$, Эйлер приходит к соотношению

$$AD = \sqrt{\frac{bbp}{a} + \frac{ccq}{a} - pq}.$$

Именно в этой записи Эйлер впервые приводит доказательство теоремы Стюарта, опередив последнего на 20 лет, но соотношение это использовалось Эйлером, как уж упоминалось, еще раньше, при выводе теоремы Чевы.

В следующей, небольшой по размерам записной книжке [1, № 130], содержащей, в частности, дневник, который Эйлер вел при переезде из Швейцарии в Петербург (1727), записям математического характера отведено немного места. На л. 79 находим вывод соотношения $abc = 4SR$ (для треугольника, вписанного в окружность), а на л. 78 об.: $p \cdot r = S$, $r = S/p$ ($r$ — радиус окружности, вписанной в треугольник). Эти результаты были опубликованы в Е 135 в 1750 г. [11]. На л. 44 приводится решение косоугольного треугольника по трем сторонам.

Следующая сохранившаяся записная книжка 1, № 131] начата 12 февраля 1736 г. На л. 7 решается задача следующего содержания: «Пусть отрезки $BO$ и $CO$ соединяющие вершины $B$ и $C$ данного треугольника $ABC$ с некоторой точкой $O$ внутри него, известны. Найти длину отрезка $AO$».

Запись на л. 8 озаглавлена: «Теоремы о треугольниках». Приведем ее в обозначениях Эйлера. (Во всех случаях $S = \sin$.)

I. $SA : SB : SC = BC : AC : AB$, sinus totum $I$ [3],

$$BC^2 = AC\sqrt{(BC^2 - AB^2 \cdot (SA)^2)} + AB\sqrt{(BC^2 - AC^2 \cdot (SA)^2)},$$

$$BC^2 = AC \cdot BC \cdot \cos C + AB \cdot BC \cdot \cos B,$$

$$SC = \frac{AB \cdot SA}{BC},$$

$$SB = \frac{AC \cdot SA}{BC}, \quad BC = AC \cdot \cos C + AB \cdot \cos B,$$

$$\cos C = \sqrt{(BC^2 - AB^2 \cdot (SA)^2)}/BC,$$

$$AB = AC \cdot \cos A + BC \cdot \cos B,$$

$$\cos B = \sqrt{(BC^2 - AC^2 \cdot (SA)^2}/BC.$$

II. Площадь треугольника $ABC$ равна синусу какого-либо угла, умноженному на половину прямоугольника (т. е. половину произведения) из прилежащих сторон.

Следовательно,

$$\text{Area } ABC = \frac{AB \cdot AC \cdot SA}{2}, \quad SA = \frac{2\text{Area } ABC}{AB \cdot AC}.$$

III. В треугольнике $ABC$

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}.$$

[3] Т. е. «полный синус» — как долгое время называли синус 90°, принимается равным 1.— *Примеч. ред.*

IV. Площадь $ABC = {}^1/_4 \sqrt{(2AB^2 \cdot BC^2 + 2AC^2 \cdot BC^2 - \ldots}$ →
← … $\overline{- AB^4 - AC^4 - BC^4)}$

или площадь $ABC = {}^1/_4 \sqrt{(AB + AC + BC)(AB + AC - \ldots}$ →
← … $\overline{- BC)(AB - AC + BC)(AC + BC - AB)}$.

В конце этой записи замечание: «Эти теоремы содержат все природные свойства, заключающиеся в треугольниках» [1, № 131, л. 8].

Представляют интерес записи и на следующей странице (рис. 2) [там же, л. 9]: «Если в данном треугольнике

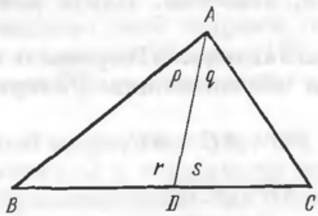


Рис. 2

$ABC$ прямая, проведенная через $A$, рассекает его на две части, возникают следующие вопросы:

I. По данным отрезкам основания $BD$ и $CD$ найти остальное, а именно $AD$, углы при $A$ и при $D$.

Р е ш е н и е:

$$AD^2 = \frac{AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD - BC \cdot BD \cdot CD}{BC}$$

(снова теорема Стюарта!)

$$SA : Sp : Sq = BC \cdot AD : AC \cdot BD : AB \cdot CD,$$

а также

$$Sr = Ss = \frac{AB \cdot AC \cdot SA}{BC \cdot AD} = \frac{AB \cdot SB}{AD} = \frac{AC \cdot SC}{AD} =$$

$$= \frac{2\text{Area } ABC}{BC \cdot AD},$$

$$\cos q = \frac{AB^2 \cdot CD + AC^2 (BC + BD) - BC^2 \cdot CD}{2BC \cdot AC \cdot AD},$$

$$\cos p = \frac{AC^2 \cdot BD + AB^2 (BC + CD) - BC^2 \cdot BD}{2BC \cdot AB \cdot AD},$$

$$AC \cdot \cos q - AB \cdot \cos p = \frac{BC (AC^2 - AB^2) + BC^2 (BD - CD)}{2BC \cdot AD}.$$

II. По данным угла $p$ и $q$ найти остальное.

Решение:

$$AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{AB \cdot \sin p + AC \cdot \sin q}; \quad \sin r = \frac{AB \cdot \sin p + AC \cdot \sin q}{BC};$$

$$BD = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin p}{AB \cdot \sin p + AC \cdot \sin q}; \quad CD = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin q}{AB \cdot \sin p + AC \cdot \sin q}.$$

Эйлер рассматривает также вопросы, связанные с его работами по механике и выражающие соотношения между элементами треугольника с учетом положения его центра тяжести [1, № 131, л. 127, 128, 140, 141, 148].

На л. 264 в заметке «Геометрическая теорема» Эйлер выражает тангенс внешнего угла через две стороны и угол между ними. В современных обозначениях это соотношение запишется так:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - C) = \frac{c \cdot \sin A}{c \cdot \cos A - b} = \frac{c \cdot \operatorname{tg} A}{c - b \sec A}.$$

Следующая записная книжка относится к началу берлинского периода научной деятельности Л. Эйлера (1740—1744 гг.).

Здесь содержатся записи, касающиеся задачи о делении треугольника двумя взаимоперпендикулярными прямыми на четыре равновеликие части [1, № 132, л. 111—114]. Задача была предложена Я. Бернулли в 1687 г. [12], который свел ее к решению уравнения восьмой степени. Эйлер исследует различные варианты решения, но, хотя уже здесь вопрос доведен почти до полного решения. работы Е 729 и Е 730 [13, 14], посвященные этой задаче, были представлены Петербургской академии только в 1779 г., а опубликованы еще позже, в 1809. Вот так значителен бывал иногда промежуток между выполнением и публикацией эйлеровских работ!

Эйлер формулирует и доказывает теорему: Если в треугольнике $ABC$: $CD$ — биссектриса угла $C$, а $CP$ — высота, то

$$(BD - AD) : BD = AD : \frac{CD^2}{2DP}.$$

Положив $AD = a$, $BD = b$, $\cos ADC = n$, Эйлер получает следующее выражение для длины биссектрисы [1, № 132, л. 146]:

$CD = 2n \cdot ab/(b - a)$.

Методом подобия решается хорошо известная сейчас задача на построение треугольника по трем высотам [там же, л. 204], произвольная точка $O$ внутри треугольника $ABC$ соединяется с его вершинами и устанавливается соотношение между образовавшимися при этом отрезками $AO$, $BO$ и $CO$ и сторонами данного треугольника [л. 225]. Позднее [л. 450] Эйлер снова обращается к треугольникам с целочисленными сторонами.

Следующая теорема [л. 483] относится к теории трансверсалей: если треугольник $ABC$ пересекается прямой $abc$, проходящей через произвольную точку $O$ внутри треугольника, причем из вершин на прямую опущены перпендикуляры $Aa$, $Bb$, $Cc$, то $S_{\triangle AOB} \cdot Cc = S_{\triangle BOC} \cdot Aa + S_{\triangle AOC} \cdot Bb$ ($S$ — площадь).

В следующей записной книжке [1, № 133], относящейся к 1749—1753 гг., рассматриваются задачи о построении треугольников, площади которых находились бы в определенной зависимости от площадей вписанных и описанных кругов: сначала находится треугольник, площадь которого составляет половину площади описанного круга, затем — равнобедренный треугольник, площадь которого вдвое больше площади вписанного круга [там же, л. 25, 26].

В треугольнике $ABC$ с произвольной точкой $O$ внутри него, $AO$, $BO$ и $CO$ выражаются через стороны треугольника и углы $BOC$, $AOB$ и $AOC$ [л. 144]; позднее в подобной задаче стороны определяются через $AO$, $BO$ и $CO$ и тригонометрические функции углов [л. 158].

В записной книжке [1, № 134] задач, относящихся к геометрии треугольника, немного. Рассматриваются треугольники, биссектрисы которых выражаются рационально через стороны. Интересна теорема на л. 419:

В треугольнике $ABC$ : $CD$ — биссектриса угла $ACB$. Если построить $CE = DE$ ($E$ — на продолжении стороны $AB$), то $AD : BD = DE : BE$. Доказательство основано на подобии треугольников $ACE$ и $CBE$ ($\angle CAB = \angle BCE$; $\angle E$ — общий). Приводятся следствия:

$$\text{I. } DE = CE = \frac{AD \cdot BD}{AD - BD}, \quad BE = \frac{BD \cdot BD}{AD - BD}.$$

$$\text{II. } AE : DE = DE : BE.$$

На основании этой теоремы осуществляется построение четвертой гармонической точки по трем данным [1, № 134, л. 382].

В следующей записной книжке [1, № 135] рассмотрены соотношения, в которых использован центр тяжести

$O$ периметра треугольника $ABC$ (т. е. центр окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого служат середины сторон данного) (рис. 3). Если $a$, $b$, $c$ — стороны треугольника $ABC$, $S$ — его площадь, то расстояние $Ox$ до стороны $AB = c$ выражается соотношением

$$Ox = \frac{S(a+b)}{c(a+b+c)}.$$

Определены также

$$\frac{CR}{OR} = \frac{2(a+b+c)}{a+b}; \quad OG = \frac{3}{2}FG;$$

$$Ax = {}^1/_2\, c + \frac{(b-a)(b-a+c)}{4c};$$

$$\frac{AR}{BR} = \frac{a+c}{b+c}; \quad OF = \frac{1}{2}FG.$$

($CR$ — чевиана, проходящая через точку $O$, $F$ — центр

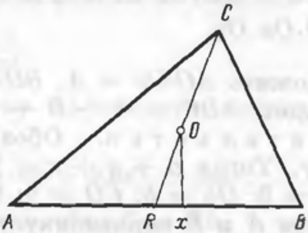

Рис. 3

тяжести площади треугольника, $G$ — центр вписанной окружности) [1, № 135, л. 40].

Установлено, что линии центров четырех окружностей, касательных к сторонам данного треугольника (т. е. вписанного и трех вневписанных) попарно перпендикулярны между собой. На этом основании предложен способ нахождения центра одной из этих окружностей по центрам трех других [там же, л. 43]. Затем [л. 45] рассмотрен треугольник, вершины которого суть основания биссектрис данного треугольника $ABC$. Для внутренних углов этого треугольника $PQR$ получены следующие выражения:

$$\operatorname{tg} QPR = \frac{2(\sin\beta + \sin\gamma)}{1 + 2\cos\alpha} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{60^\circ+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{60^\circ-\alpha}{2}}$$

$(\angle BAC = \alpha,\ \angle ABC = \beta,\ \angle ACB = \gamma)$.

Связанная с этой задача о построении треугольника по заданным трем точкам пересечения биссектрис его углов с противолежащими сторонами рассматривается Эйлером в одной из неопубликованных работ [1, № 134, л. 1—4].

Записи, относящиеся к геометрии треугольника, встречаются и в последующих записных книжках. Как известно, с конца 1760-х годов эти записи вели под диктовку почти совершенно ослепшего Эйлера его ближайшие ученики и помощники. При этом фиксировались, видимо, лишь законченные и наиболее важные результаты. Остановимся на одной из заметок в последней записной книжке 1779—1783 гг. [1, № 140]. Запись сделана Н. И. Фуссом:

«Если в каком-нибудь треугольнике $ABC$ из вершин на противоположные стороны проведены прямые $Aa$, $Bb$, $Cc$, пересекающиеся в точке $O$, то между парами отрезков этих прямых всегда имеет место соотношение

$$AO\cdot BO\cdot CO = AO\cdot Ob\cdot Oc + 2Oa\cdot Ob\cdot Oc + BO\cdot Oa\cdot Oc + CO\cdot Oa\cdot Ob.$$

Если положить $AO/Oa = A$, $BO/Ob = B$, $CO/Oc = C$, то всегда будет $ABC = A + B + C + 2$.

Доказательство. Обозначим углы при $O$ через $p$, $q$, $r$. Тогда $p + q + r = 180°$. Пусть $AO = \alpha$; $Oa = a$; $BO = \beta$; $Ob = b$; $CO = \gamma$; $Oc = c$.

Опустим из $A$ и $B$ перпендикуляры $A\alpha$ и $B\beta$ на $OC$. Получим $A\alpha = \alpha \sin p$ и $O\alpha = \alpha \cos p$, далее $B\beta = \beta \sin q$ и $O\beta = \beta \cos q$. Итак, в треугольнике $A\alpha c$ и в треугольнике $Bc\beta$ соответственно будет

$$\operatorname{tg} Ac\alpha = \frac{\alpha \sin p}{c - \alpha \cos p}, \quad \operatorname{tg} Bc\beta = \frac{\beta \sin q}{\beta \cos q - c}.$$

Так как эти углы равны, получаем равенство:

$$\frac{\alpha \sin p}{c - \alpha \cos p} = \frac{\beta \sin q}{\beta \cos q - c}$$

или $\alpha\beta\cdot\sin(p + q) = \alpha c\cdot\sin p + \beta\cdot c\cdot\sin q$. Но, так как $p + q = 180° - r$, будет $\sin(p + q) = \sin r$, откуда

$$\alpha\beta\cdot\sin r = \alpha c\cdot\sin p + \beta\cdot c\cdot\sin q.$$

Применим это равенство к треугольнику $BOC$, переставив циклические буквы $a$, $b$, $c$ и $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; углы $p$, $q$ и $r$ при этом перейдут в $r$, $p$, $q$; получим

$$\beta\gamma\cdot\sin q = \beta a\cdot\sin r + \gamma a\cdot\sin p.$$

Переходя таким же образом к треугольнику $COA$, получим

$$\alpha\gamma\cdot\sin p = \gamma b\cdot\sin q + \alpha b\cdot\sin r.$$

Далее получаем из первого, второго и третьего равенств соответственно

$$\sin r = \frac{c}{\beta}\sin p + \frac{c}{\alpha}\sin q, \quad \sin r = \frac{\gamma}{a}\sin q - \\ -\frac{\gamma}{\beta}\sin p, \quad \sin r = \frac{\gamma}{b}\sin p - \frac{\gamma}{\alpha}\sin q.$$

Приравнивая правые части двух первых соотношений, получаем

$$\frac{c+\gamma}{\beta}\sin p = \frac{\alpha\gamma - ca}{\alpha a}\sin q, \text{ откуда } \frac{\sin p}{\sin q} = \frac{\beta(\alpha\gamma - ca)}{a\alpha(\gamma + c)};$$

из первого и третьего равенства выходит

$$\frac{\sin p}{\sin q} = \frac{b\beta(\gamma + c)}{\alpha(\beta\gamma - bc)}.$$

Приравнивая правые части двух последних равенств, получаем:

$$\alpha\beta\gamma = \alpha\cdot bc + \beta\cdot ac + \gamma\cdot ab + 2abc.$$

Если учесть, что $\alpha = Aa$, $\beta = Bb$, $\gamma = Cc$, уравнение превращается в $ABC = A + B + C + 2$, что и требовалось доказать» [1, № 140, л. 55 об.— 56 об.].

Затем аналогичное соотношение выводится для сферического треугольника. При этом принимается

$$\frac{\operatorname{tg} AO}{\operatorname{tg} Oa} = A; \quad \frac{\operatorname{tg} BO}{\operatorname{tg} Ob} = B; \quad \frac{\operatorname{tg} CO}{\operatorname{tg} Oc} = C.$$

После доказательства появляются записи, содержащие упрощение доказательства предыдущей теоремы. Изложенное здесь доказательство в несколько видоизмененной форме, основанной на равенствах

$$S_{\triangle AOC} = {}^1/_2\alpha C\cdot\sin p \text{ и } S_{\triangle BOC} = {}^1/_2\beta C\cdot\sin q$$

и выражении площадей треугольников через соответственные отрезки чевиан и тригонометрические функции углов при точке $O$, опубликовано в Е 749 посмертно в 1815 г. [15] вместе с так называемой «теоремой Жергонна», аналитически выражаемой соотношениями

$$\frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} - \frac{Oc}{Cc} = 1 \text{ и } \frac{AO}{Aa} + \frac{BO}{Bb} + \frac{CO}{Cc} = 2.$$

Доказательство Жергонна относится к 1818 г. Следовательно, теорема была не только доказана Эйлером до Жергонна, но и раньше опубликована. Однако эта публикация ускользнула от внимания как специалистов-геометров, так и историков математики. Сам Эйлер настолько ценил этот результат, выявляющий важные аффинные свойства треугольника, что наряду с теоремами Чевы и Стюарта и их приложениями включил его в свой учебник геометрии [1, № 269, л. 214 об.— 215 об.] в качестве последнего параграфа. Включение в [1, № 269] результата исследований Эйлера, до тех пор неизвестных, лишний раз подтверждает, что автором [1, № 269] является Эйлер.

Уже упоминавшийся среди других неопубликованных мемуаров Эйлера, относящихся к геометрии треугольника, мемуар [1, № 104, л. 1—4], по терминологии Ф. Ноде-младшего посвящен «Тригоноскопии» [16, 17] и содержит решение задачи на построение треугольника по трем точкам пересечения биссектрис углов с соответствующими сторонами. Довольно громоздкое аналитическое решение задачи сводится к определению углов, образованных сторонами треугольника, заданного своими вершинами, со сторонами искомого треугольника.

* * *

Многие результаты Эйлера давно вошли в золотой фонд «новой геометрии треугольника», раздела, особенно бурно развивавшегося в XIX — начале XX в. Чтобы убедиться в этом, достаточно, вспомнить такие термины как «точки Эйлера» — середины отрезков высот от ортоцентра до соответствующих вершин, «прямые Эйлера», проходящие через ортцентр треугольника и центр вписанной окружности, «окружности Эйлера» («окружности девяти точек»), проходящие через основания медиан, основания высот и точки Эйлера. Присоединение к ним обнаруженных в рукописях, ранее неизвестных материалов, предвосхитивших результаты таких известных геометров, как М. Стюарт, Ж. В. Понселе, Л. Карно, Ж. Жергонн и др., позволяет по-новому оценить огромную роль Эйлера в формировании этого направления развития математики.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Архив ЛО АН СССР, ф. 136, оп. 1.
2. *Ceva G.* De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio. Milano, 1678.
3. *Chasles M.* Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes de la géométrie. Paris, 1837.
4. *Белый Ю. А.* Об учебнике Л. Эйлера по элементарной геометрии.— ИМИ. М., 1961 вып. XIV, с. 237—284.
5. *Stewart M.* Some general theorems... Edinbourgh, 1746.
6. *Euler L.* Problematis cujusdam Pappi Alexandrini constructio. EO1, vol. 26[4].
7. *Зетель С. И.* Новая геометрия треугольника. М., 1962, с. 35.
8. *Диофант Александрийский.* Арифметика и книга о многоугольных числах. М.: Наука, 1974, кн. VI, с. 150.
9. *Euler L.* Solutio problematis difficillimi a Fermatio propositi. EO1, vol. 2.
10. *Скопец З. А., Жарова В. А.* Задачи и теоремы по геометрии. М.: Учпедгиз, 1962, с. 10.
11. *Euler L.* Variae demonstrationes geometricae. EO1, vol. 26.
12. *Bernoulli J.* Solutio algebraica problematis de quadrisectione trianguli scaleni per duas normales rectam.— Acta eruditorum, 1687, p. 287.
13. *Euler L.* Dilucidationes super problemata geometrico de quadrisectione trianguli a Jacobo Bernoulli olim tractato. EO1, vol. 26.
14. *Euler L.* Solutio completa problematis, quo quaeritur sphaera, de quadrisectione trianguli per duas rectas inter se normales contiget. EO 1, vol. 26.
15. *Euler L.* Geometria et sphaerica quaedam EO1, vol. 26.
16. *Naudé Ph.* Trigonoscopiae cujusdam novae conspectus. Miscellanea Berolinensia, 1737, t. 5, p. 10—32.
17. *Naudé Ph.* Conspectus trigonoscopici continuatio cum adjectis curiosis nonnullis problematis algebraicis. Miscellanea Berolinensia, 1743, t. 7, p. 243—270.


---

[4] Ссылки даны на *L. Euleri.* Opera omnia, ser. 1 (EO1), vol. 1—29, 1911—1956.

# О СОЗДАНИИ ЭЙЛЕРОМ КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРИИ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

**А. Е. Малых**

Из разностороннего математического наследия великого ученого XVIII в. Леонарда Эйлера представляют интерес комбинаторные исследования, не получившие, на наш взгляд, еще достаточного освещения в историко-математической литературе. К комбинаторной тематике он обращался неоднократно, опубликовав в общей сложности семь работ, в том числе два больших мемуара. Развитие и решение проблем и задач, предложенных Эйлером в этих работах, привлекали пристальное внимание исследователей на протяжении почти двух столетий. Не утратили они своей актуальности и в наши дни, найдя целый ряд приложений теоретического и практического характера.

Мы рассмотрим лишь часть комбинаторных исследований Эйлера, относящихся к разработке основ теории латинских квадратов, выполненных им в последние годы жизни.

8 марта 1779 г. Эйлер представил Петербургской Академии наук большой мемуар «Исследование магического квадрата нового типа» [1], начинавшийся словами: «Весьма любопытный вопрос, который привлекал в течение некоторого времени внимание лучших умов мира, заставил меня выполнить исследования, которые, кажется, открыли новое направление в анализе и, в частности, в комбинаторике. Этот вопрос касается совокупности 36 офицеров шести разных званий, взятых из шести разных полков, которых выстраивают в карэ таким образом, чтобы в каждом ряду как по горизонтали, так и по вертикали находились шесть офицеров различных званий и из различных полков. Однако после всех трудов, затраченных на решение этой задачи, я был вынужден признать, что такое размещение абсолютно невозможно, хотя и не удалось дать строгого доказательства этому». Данная занимательная задача впоследствии стала называться задачей Эйлера о 36 офицерах.

Мемуар состоит из введения, четырех глав, заключения и содержит в общей сложности 153 параграфа. Во введении сформулирована задача о 36 офицерах. Для нахождения решения Эйлер «перевел» ее на математический язык (к тому времени ряд задач подобного вида был решен либо логическим путем, либо при помощи исчерпывающего перебора вариантов). Следуя условию, нужно составить две квадратные таблицы размера $n$ ($n = 6$), сходные с магическими квадратами, но отличающиеся от них рядом свойств. Одну из них автор назвал латинским квадратом, другую — греческим, причем первый выбирается произвольно. Отправляясь от него, получают некоторые числовые последовательности, из $n$ элементов каждая, «formules directrices», из которых составляют греческий квадрат. Затем квадраты накладывают друг на друга, получая «полный» или греко-латинский квадрат.

Обобщив далее такие «магические квадраты нового типа» на случай $n^2$ клеток, автор обнаружил, что внутренняя структура их чрезвычайно различна, они распадаются на многочисленные частные виды, каждый из которых изобилует нерешенными проблемами, а их исследование носит специфический характер. Число возможных способов построения квадратов огромно и как писал Эйлер: «Не поддается обозрению». Поэтому он ограничился четырьмя видами, рассматривая лишь «регулярные» латинские квадраты. В математической литературе их сейчас принято называть квадратами $q$-шагового типа.

В процессе исследования Эйлер пришел к выводу, что для решения казалось бы простой на первый взгляд задачи о 36 офицерах нужно создать специальный математический аппарат. Наиболее важной и трудоемкой его частью является выработка правил нахождения для каждого конкретного значения $n$ «formules directrices». В связи с этим он доказал ряд теорем, позволяющих судить о возможности их построения, а также дал приблизительную оценку их числа в зависимости от размера латинского квадрата и его структуры.

Другой важной задачей является нахождение числа квадратов в зависимости от значения $n$. Дав правило такого подсчета и применив его для случаев $n = 2, 3, 4, 5$, Эйлер, однако, не имел успеха в перечислении всех квадратов $6 \times 6$. Для решения же задачи от 36 офицерах необходимо было иметь их полный список. Эйлер указал метод получения максимально возможного числа «нерегулярных» квадратов из «регулярных». Практически получив большое число таких квадратов, автор, тем не менее, ни для одного не смог составить полного набора «formules directorices», а следовательно, и построить полные квадраты. По этому поводу он высказал уверенность, что *задача о 36 офицерах неразрешима*. Заметим, что к ней в дальнейшем неоднократно обращались многие математики, но лишь на рубеже XIX—XX вв. решение было дано французским математиком Тарри [2], подтвердившим предположение Эйлера.

На протяжении всего мемуара Эйлер исследовал и более общую проблему $n^2$ офицеров, доказав существование решений для нечетных и «четно-четных», т. е. делящихся на 4, значений $n$. Для «нечетно-четных», т. е. четных чисел, не делящихся на 4, проблема не поддавалась решению. Автор сформулировал ее в заключительной главе мемуара как гипотезу: *ни для какого нечетно-четного числа $n$ не существует полного квадрата из $n^2$ клеток*. Несмотря на многочисленные попытки доказательства, гипотеза оставалась открытой до 1959 г. [3], когда было установлено, что она неверна для всех значений $n = 4k + 2$, $k > 1$, $k \in N$.

Структура каждой из четырех глав в основном однотипна: рассматриваются конкретные значения $n = mq$ ($q = 1, 2, 3, 4$) и исследуются латинские квадраты из $n^2$ клеток. С целью составления полных квадратов для каждого из видов отыскиваются числовые последовательности и составляются их полные множества. Наряду с изучением частных вопросов в каждой главе доказываются теоремы, формулируются правила, причем последние иллюстрируются большим числом примеров. Часть вычислений, а в некоторых случаях даже все расчеты автором не даны, приведен лишь конечный результат, либо общее число решений. В конце каждой главы Эйлер обращается к задаче о 36 офицерах, доказывая невозможность ее решения для конкретного вида латинских квадратов.

В первой главе Эйлер рассмотрел «латинские квадраты простого хода», исследовав их для всех значений $n$ до 9 включительно. В случае построения полных квадратов, Эйлер показал, как из них можно получить обыкновенные магические. Первая глава наиболее насыщена и в теоретическом плане. В ней введены основные понятия, показан ряд соотношений между переменными величинами, сформулировано несколько правил, доказаны наиболее важные теоремы, нашедшие применение и в последующих главах, отмечены нерешенные вопросы.

Во второй главе исследованы латинские квадраты

2-шагового типа. Наряду с рассмотрением квадратов для конкретных порядков ($n = 2, 4, 6, 8, \ldots$), автор показал эффективность использования приемов, полученных в первой главе. Приведены и новые теоретические результаты, касающиеся *всех* квадратов данного типа.

В третьей и четвертой главах рассмотрены аналогичные задачи для квадратов 3- и 4-шагового типа. Кроме того, доказаны теоремы, не имевшие места для двух предыдущих случаев, показано разнообразие методов нахождения «formules directrices», приведены многочисленные примеры построения полных квадратов, сформулированы нерешенные задачи.

Заключительная глава мемуара посвящена перечислительным задачам. Автор получил ряд важных результатов: разработал процедуру дополнения латинских прямоугольников до квадратов, нашел не только общее число нормализованных латинских квадратов для $n = 2, 3, 4, 5$, но и объединил их в классы, ввел понятие общего преобразования, подойдя вплотную к исследованию групп автоморфизмов и др.

Таким образом, в мемуаре Эйлера, по-существу, созданы основы комбинаторной теории латинских квадратов, содержащие доказательство целого ряда теорем, формулировку и решения системы фундаментальных задач. К их числу могут быть отнесены:

1) вопросы, связанные с существованием «formules directrices» для квадратов, имеющих различную структуру и число ячеек;

2) методы получения «formules directrices» для составления полных квадратов;

3) исследование структуры греко-латинских квадратов;

4) всестороннее изучение «регулярных» квадратов;

5) развитие перечислительных методов, нашедших применение в ряде комбинаторных исследований;

6) подсчет числа нормализованных латинских квадратов (для $n = 2, 3, 4, 5$) и их отождествление.

На протяжении полувека, прошедшего со времени появления мемуара, идеи и исследования Эйлера не получили сколько-нибудь заметного продвижения. Во всяком случае, нам не известно ни одной работы, относящейся к рассматриваемой тематике. По-видимому, этот факт можно объяснить чрезвычайно высоким авторитетом Эйлера, получившим значительные результаты, которые открыли новое направление в комбинаторном анализе.

Кроме того, оказало влияние и его пессимистическое заключение относительно практической важности задачи о 36 офицерах.

Интерес к латинским квадратам и прямоугольникам, задаче от 36 офицерах и гипотезе Эйлера вновь возник, начиная со второй половины XIX в. Оказалось, что они могут быть использованы в статистической теории планирования экспериментов.

Перейдем к более детальному анализу мемуара Эйлера, который, как было уже отмечено, начинался с формулировки задачи от 36 офицерах. Автор обозначает шесть различных полков латинскими буквами $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, а шесть различных офицерских званий — греческими — $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\xi$. Тогда характер каждого офицера определяется двумя буквами: латинской и греческой, т. е. при помощи следующих 36 упорядоченных пар:

$$
\begin{array}{cccccc}
a\alpha & a\beta & a\gamma & a\delta & a\varepsilon & a\xi \\
b\alpha & b\beta & b\gamma & b\delta & b\varepsilon & b\xi \\
c\alpha & c\beta & c\gamma & c\delta & c\varepsilon & c\xi \\
d\alpha & d\beta & d\gamma & d\delta & d\varepsilon & d\xi \\
e\alpha & e\beta & e\gamma & e\delta & e\varepsilon & e\xi \\
f\alpha & f\beta & f\gamma & f\delta & f\varepsilon & f\xi
\end{array}
$$

Анализируя задачу, Эйлер приходит к выводу, что для ее решения нужно разместить эти пары букв в 36 ячейках полного квадрата так, чтобы выполнялись условия:

1. В каждой строке квадрата встречаются шесть латинских и шесть греческих букв.

2. В каждом столбце квадрата встречаются те же 12 букв.

3. В полный квадрат должны быть вписаны все пары букв или, что равносильно:

3'. Никакая из 36 пар букв не должна повторяться.

Третье условие существенно, так как можно составить полные квадраты, в которых оно не выполняется.

Далее Эйлер обобщает формулировку задачи. Вместо шести полков и шести званий он предлагает взять $n$ различных латинских букв и $n$ греческих, после чего разместить $n^2$ их различных комбинаций в ячейках полного квадрата $n \times n$ так, чтобы каждый столбец и каждая строка содержали все греческие и все латинские буквы и никакая пара букв не встречалась бы дважды. Такое расположение удовлетворяет условию обычного магического квадрата: для его построения достаточно латинским буквам $a$, $b$, . . . дать значения 0, $n$, $2n$, . . ., а греческим $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, . . . дать значения 1, 2, 3, . . . Поскольку же в магических квадратах речь идет только о суммах всех чисел, стоящих в каждом столбце и строке, то совсем не обязательно, чтобы *все* числа встречались в каждой из строк и столбцов. Другими словами, условие 3 в этом случае может не иметь места. Этот факт и является, в частности, причиной того, что обычные магические квадраты из 36 клеток существуют.

Для облегчения дальнейших исследований Эйлер заменяет $n$ латинских и $n$ греческих букв первыми $n$ числами натурального ряда. Различие между ними состоит в следующем: числа, соответствующие латинским буквам, записываются в виде оснований, образуя квадрат, который Эйлер называет *латинским*, *фундаментальным* или *основным*. Числа же, соответствующие греческим буквам, приписываются к латинским в виде экспонент, образуя *греческий квадрат*. Кроме того, латинские числа, стоящие в первом столбце и в первой строке, записаны в естественном порядке, т. е. они одновременно представляют индексы столбцов и строк. Полный квадрат, получающийся при наложении латинского и греческого квадратов, Эйлер называет греко-латинским. Построение его начинается с нахождения всех экспонент для основного квадрата.

Эйлер пытается найти универсальный способ приписывания экспонент к каждому члену латинского квадрата. Сначала расставляется экспонента 1, которая должна встретиться только один раз в каждой строке и в каждом столбце. Затем аналогичная работа проводится для всех других экспонент. Кроме того, в первом столбце экспоненты должны быть записаны в естественном порядке. Расположение экспонент в виде последовательностей, которые Эйлер называет «formules directrices» (и которые в дальнейшем мы будем называть, следуя современной терминологии, трансверсалями), определяет выстроенных офицеров. Для построения полного квадрата нужно иметь список трансверсалей для каждой экспоненты. Далее необходимо, чтобы найденные трансверсали согласовывались друг с другом, т. е. чтобы при записи их одна под другой в каждой вертикали все числа были различными, ибо в противном случае одно и то же латинское число получило бы две различные экспоненты.

Основным этапом является нахождение самой трансверсали, по поводу чего Эйлер отмечает, что ему не известен какой-либо надежный способ ее построения. Он пользуется систематическим и исчерпывающим перебором.

Представив в общих чертах операции, которые нужно выполнять для построения полных квадратов, Эйлер переходит к более детальным исследованиям, носящим специфический характер в зависимости от внутренней структуры латинских квадратов и от их размера.

В мемуаре Эйлер исследует лишь квадраты $q$-шагового типа. При $q = 1$ строки и столбцы его являются циклическими подстановками элементов $1, 2, \ldots, n$. В современной математической литературе такие квадраты называют *циклическими*. Их Эйлер исследует в первой главе.

При $n = 2$ для циклического квадрата нельзя составить ни одной трансверсали. При $n = 3$ для латинского квадрата легко найти *полный* набор трансверсалей, по одной для каждой из экспонент. Поэтому полный квадрат имеет вид:

$$\begin{array}{ccc} 1^1 & 2^3 & 3^2 \\ 2^2 & 3^1 & 1^3 \\ 3^3 & 1^2 & 2^1 \end{array}$$

В циклическом латинском квадрате порядка 4 для экспоненты 1 нельзя составить трансверсали, а следовательно, и полного квадрата. Эйлер обобщает этот факт на случай четного $n$:

*Для любого циклического латинского квадрата четного порядка нельзя построить греческий квадрат.*

Для доказательства достаточно показать невозможность составления трансверсалей для экспоненты 1. Предположим противное. Пусть найдена трансверсаль $1, a, b, c, d, \ldots$, где $n - 1$ букв принимают значения $2, 3, 4, \ldots, n$, взятые в порядке, определяемом строками с соответствующими индексами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$, которые обозначены числами $2, 3, 4, 5, \ldots, n$.

Поскольку в циклическом латинском квадрате все числа, расположенные в строках, составляют арифметическую прогрессию с разностью 1, а за числом $n$ непосредственно следует 1, то выбирая второй элемент $a$ строящейся трансверсали из второго столбца и из строки с номером $\alpha$, получим $a = \alpha + 1$. Далее, так как третий член трансверсали выбирается из третьего столбца и из строки с номером $\beta$, то имеем $b = \beta + 2$. Аналогично рассуждая, имеем: $c = \gamma + 3$, $d = \delta + 4$, $e = \varepsilon + 5$ и т. д., причем окончательные вычисления производятся по $\mathrm{mod}\ n$. Обозначим сумму всех индексов $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ через $S$, тогда $a + b + c + \ldots = S + 1 + 2 + \ldots + (n - 1)$ или $a + b + c + \ldots = S + {}^1/_2 n(n - 1)$.

Так как сумма латинских букв равна сумме греческих, или, что то же самое, разность между ними кратна $n$, скажем, $\lambda n$, то из последнего равенства получим ${}^1/_2 n(n - 1) = \lambda n$ или $\lambda = {}^1/_2 (n - 1)$. Так как $\lambda$ — целое, то $n$ должно быть *нечетным*, что противоречит условию теоремы.

Для циклического латинского квадрата порядка 5 легко найти три трансверсали для экспоненты 1. Прибавляя по 1 к каждому из членов, получим трансверсали для экспоненты 2. Продолжая процесс аналогичным образом, можно получить трансверсали для всех экспонент. Согласовывая последние, Эйлер строит три греко-латинских квадрата порядка 5. Особый интерес представляет один из них:

$$\begin{matrix} 1^1 & 2^5 & 3^4 & 4^3 & 5^2 \\ 2^2 & 3^1 & 4^5 & 5^4 & 1^3 \\ 3^3 & 4^2 & 5^1 & 1^5 & 2^4 \\ 4^4 & 5^3 & 1^2 & 2^1 & 3^5 \\ 5^5 & 1^4 & 2^3 & 3^2 & 4^1 \end{matrix}$$

Если в этом квадрате выполнить подстановку строк (2453), то получим квадрат, в котором различные греческие и латинские числа стоят не только в строках, столбцах, на двух диагоналях, но также и на «ломаных диагоналях», т. е. «диагоналях» типа $3^3, 1^4, 4^5, 2^1, 5^2$. Эйлер их называет также «параллелями».

В циклическом латинском квадрате порядка 7 для экспоненты 1 можно составить 19 трансверсалей. Их отыскание при помощи простого перебора довольно хлопотливо. В связи с этим Эйлер пытается *найти эффективные правила получения новых трансверсалей, исходя из заданной.*

Пусть $1, a, b, c, d, \ldots$ — трансверсаль для экспоненты 1, в которой член $x$ соответствует неопределенному индексу $t$. Положим $t = 1$, получим $x = 1$. Далее замечаем, что $t$ может принимать все $n$ различных значений и так как $t$ — индекс столбца, из которого выбирается элемент $x$, то индекс строки будет $x - t + 1$. Ввиду того, что числа $a, b, c, d, \ldots$ должны выбираться из разных строк, то $x - t + 1$, а поэтому и $x - t$ должны принимать все $n$ различных значений.

Пусть теперь $1, A, B, C, D, \ldots$ — новая трансверсаль, полученная из данной, у которой индекс некоторого члена

$X$ равен $T$. При всех различных значениях $T$ разность $X - T$ принимает различные значения. Можем положить

$$T = x \text{ и } X = t. \qquad (1)$$

Это правило Эйлер формулирует следующим образом: *новая трансверсаль получается из старой при помощи инверсии*. Эйлер приводит также и второе правило: *для получения новой трансверсали достаточно положить $T = t$ и $X = \alpha + t - x$*.

Действительно, при изменении $t$ от 1 до $n$ $T$ принимает эти же значения. Так как $X - T = \alpha - x$, то эта разность принимает все значения от 1 до $n$. При составлении трансверсали для экспоненты 1, положив $t = 1$ и $x = 1$, получим $X = 1$, откуда $\alpha = 1$. Таким образом, новая трансверсаль получается по формуле $T = t$,

$$X = 1 + t - x. \qquad (2)$$

Для составления новых трансверсалей можно использовать и комбинации двух правил, в результате чего получается 11 новых формул:

| | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| $T = t$ | $t$ | $x$ | $1 + t - x$ | $x$ | $1 + t - x$ |
| $X = x$ | $1 - t - x$ | $t$ | $t$ | $1 + x - t$ | $2 - x$ |

| VI | VII | VIII | IX | X | XI |
|---|---|---|---|---|---|
| $1 + x - t$ | $2 - x$ | $1 + x - t$ | $2 - x$ | $2 - t$ | $2 - t$ |
| $x$ | $1 + t - x$ | $2 - t$ | $2 - t$ | $1 + x - t$ | $2 - x$ |

Для облегчения построения полного квадрата достаточно найти экспоненты для всех элементов первой строки. Пусть в рассматриваемой трансверсали 1, $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ член $x$ соответствует индексу $t$. К нему нужно приписать экспоненту 1. Ввиду того, что экспоненты возрастают при следовании сверху вниз по любому из столбцов, следующий элемент $x + 1$ имеет экспоненту 2 и т. д., вообще элемент $x + \lambda$ имеет экспоненту $\lambda + 1$. Выберем $\lambda$ так, чтобы $x + \lambda = t$, откуда $\lambda = t - x$. Поэтому элемент $t$, стоящий в первой строке, имеет экспоненту $\lambda + 1 = t + 1 - x$. Давая 1 последовательно значения 1, 2, 3, . . ., получим экспоненты для первой строки: 1; $3 - a$; $4 - b$; $5 - c$; $6 - d$; $7 - e$; $8 - f$.

Эйлер показал далее, что для получения полного квадрата в качестве исходной можно выбрать любую трансверсаль. После этого находят экспоненты для членов первой строки и спускаясь по столбцам, увеличивают экспоненты каждый раз на единицу. В результате полный квадрат имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc}
1^1 & 2^a & 3^b & 4^c & 5^d & 6^e & 7^f \\
2^2 & 3^{a+1} & 4^{b+1} & 5^{c+1} & 6^{d+1} & 7^{e+1} & 1^{f+1} \\
3^3 & 4^{a+2} & 5^{b+2} & 6^{c+2} & 7^{d+2} & 1^{e+2} & 2^{f+2} \\
4^4 & 5^{a+3} & 6^{b+3} & 7^{c+3} & 1^{d+3} & 2^{e+3} & 3^{f+3} \\
5^5 & 6^{a+4} & 7^{b+4} & 1^{c+4} & 2^{d+4} & 3^{e+4} & 4^{f+4} \\
6^6 & 7^{a+5} & 1^{b+5} & 2^{c+5} & 3^{d+5} & 4^{e+5} & 5^{f+5} \\
7^7 & 1^{a+6} & 2^{b+6} & 3^{c+6} & 4^{d+6} & 5^{e+6} & 6^{f+6}
\end{array}$$

Эйлер замечает, что можно получить полные квадраты, комбинируя трансверсали, входящие в *различные* греческие квадраты. Этот факт следует учитывать при нахождении полного множества греко-латинских квадратов.

Так как число трансверсалей для циклического латинского квадрата порядка 9 огромно, Эйлер ограничивается рассмотрением только таких, члены которых составляют арифметические прогрессии, причем из числа последних исключаются трансверсали с разностями 3 и 6, так как эти числа не взаимно просты с 9. И в общем случае необходимо, чтобы разности рассматриваемых прогрессий, а также разность $x - t$ не имели общих делителей с $n$.

Для латинских квадратов, порядок которых кратен трем, Эйлер формулирует третье правило нахождения трансверсалей:

*Введем для выбранной трансверсали индекс $t$, которому соответствует член $x$. Для составления новой трансверсали можно взять индекс $T = 2t - 1$, которому будет соответствовать член*

$$X = 2x - 1. \qquad (3)$$

Действительно:

1) положив $t = x = 1$, получим $T = X = 1$;

2) если $x$ принимает все допустимые значения, то $2x - 1$ и $2x$ также принимают эти же значения,

3) так как $x - t$ принимает все значения от 1 до $n$, то $X - T = 2(x - t)$ принимает эти же значения.

На многочисленных примерах Эйлер показывает, что при умелом применении композиции трех правил из одной трансверсали можно получить большое число новых, однако полного множества при этом не получается.

Далее Эйлер переходит к рассмотрению латинских квадратов нечетного порядка $n$, в которых элементы, стоящие на диагоналях и их «параллелях», подчиняются дополнительным условиям.

Пусть элементы трансверсалей квадрата образуют арифметическую прогрессию с разностью $d$: $1$, $1 + d$, $1 + 2d$, ..., $1 + (n - 1)\,d$, где $d$ и $n$ взаимно просты. Поэтому, если $n$ — простое, то $d$ может быть любым, меньшим $n$. Если же $n$ имеет делитель $p$, то из рассмотрения исключаются все арифметические прогрессии с разностью $\lambda = p, 2p, 3p, \ldots$ Данное условие существенно, однако недостаточно для того, чтобы последовательность чисел была трансверсалью. Поскольку индексу $t = 1 + \lambda$ соответствует член $x = 1 + \lambda d$, то для составления трансверсали необходимо, чтобы разность $x - t = \lambda\,(d - 1)$ принимала все допустимые значения. Из полученного равенства видно, что $d - 1$ должно быть взаимно просто с $n$, а потому, если $n \vdots p$, то исключаются значения $d = 1$ и $d = p + 1, 2p + 1, 3p + 1, \ldots$ Эйлер находит (не приводя доказательства) число значений, которое может принимать $d$. Если $n$ — простое ($d < n$), то их число $n - 2$; если же $n = p \cdot q$ ($p \neq q$), то число значений для $d$ равно $(p - 2)(q - 2)$. Это правило обобщается: если $n = p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots$, то число значений для $d$ равно $p^{\alpha-1}q^{\beta-1}r^{\gamma-1}\ldots$ $\ldots(p - 2)(q - 2)(r - 2)\ldots$

Используя эти замечания, нетрудно построить квадрат, у которого не только строки и столбцы, но и диагонали и их «параллели» содержат все различные элементы. Причем Эйлер замечает, что полные квадраты всегда можно свести к таким, у которых элементы первого столбца записаны в естественном порядке. Пусть разность латинских чисел $d$, а греческих $\delta$. Тогда первая строка полного квадрата запишется: $1^1$, $(1 + d)^{1+\delta}$, $(1 + 2d)^{1+2\delta}$, ... Для перехода к следующим строкам достаточно прибавить по единице как к латинским, так и к греческим буквам. Ввиду того, что латинские числа, стоящие в каждой строке, должны быть все различны, то разности $d$ и $\delta$ нужно выбирать так, чтобы $d$ и $d - 1$, равно как и $\delta$ и $\delta - 1$ были бы взаимно просты с $n$. Очевидно, кроме того, при $n$ простом $d \neq \delta$, так как в противном случае, все члены первой строки встретились бы в первом столбце. Если же $n$ — составное число, то дополнительно необходимо, чтобы разность $d - \delta$ была взаимно проста с $n$.

Далее Эйлер рассматривает диагональ латинского квадрата: $1, 2 + d, 3 + 2d, 4 + 3d, 5 + 4d, \ldots$ Ее элементы составляют арифметическую прогрессию с разностью $1 + d$. Если $1 + d$ взаимно проста с $n$, то на диагонали стоят различные числа. Числа, стоящие на всех «параллелях» данной диагонали, возрастают с той же разностью $1 + d$, поэтому указанное свойство распространяется также и на них. Аналогичное справедливо и для греческих чисел (разность $\delta + 1$ и $n$ взаимно просты). Поэтому в греческом квадрате на диагонали и ее «параллелях» стоят различные числа.

Элементы второй диагонали и ее «параллелей» как в латинском, так и в греческом квадратах образуют арифметические прогрессии с разностями $d - 1$ и $\delta - 1$ соответственно. Если эти разности взаимно просты с $n$, то на диагоналях и их «параллелях» стоят различные числа.

Таким образом, для построения рассматриваемого типа греко-латинских квадратов необходимо, чтобы выполнялись условия:

1) числа $d$, $d - 1$, $d + 1$ взаимно просты с $n$;
2) числа $\delta$, $\delta - 1$, $\delta + 1$ взаимно просты с $n$;
3) разность $d - \delta$ не имеет общих делителей с $n$.

Если $n : p$, то из допустимых значений $d$ и $\delta$ нужно исключить следующие: $d = \lambda p$, $d = \lambda p - 1$; $d = \lambda p + 1$; $\delta = \mu p$; $\delta = \mu p - 1$ $\delta = \mu p + 1$. В частности, если $p = 3$, то для $d$ и $\delta$ нужно исключить вообще все числа, т. е. полный квадрат, в котором на диагоналях и их «параллелях» стоят различные числа, построить невозможно.

Если $n$ — простое, то множество всех значений, которые могут принимать $d$ и $\delta$, равно $n - 3$. Если $n = p \cdot q$ ($p \neq q$; $p$, $q$ — простые), то число значений $d$ и $\delta$ будет $(p - 3)(q - 3)$. Вообще, если $n = p^\alpha q^\beta r^\nu \ldots$, то $d$ и $\delta$ принимают $p^{\alpha-1}q^{\beta-1}r^{\nu-1}\ldots(p - 3)(q - 3)(r - 3) \ldots$ значений.

Эйлер применяет эти общие рассуждения к $n = 5$ и к $n = 7$, показывая в последнем случае, как из греко-латинского квадрата получить обычный магический, причем он является пандиагональным.

Возможность построения полных квадратов для $n$ составного, но не кратного 3, обсуждается Эйлером на примере $n = 35$, для которого можно построить 12 различных полных квадратов и практическое построение которых нецелесообразно.

*Во второй главе* Эйлер исследует латинские квадраты 2-шагового типа, называя их «des carrés latins à double marche»: Для таких квадратов он доказывает важную б) при изменении $x$ и $t$ от 1 до $n$ величина $u = x - t + 2 \pm 1$ изменялась от 1 до $n$;

в) при изменении $x$ и $t$ от 1 до $n$ величина $v = t - x + 2 \pm 1$ также изменялась от 1 до $n$, причем знак «+» имеет место, если $t$ — нечетно и $x$ — четно, а «—» во всех остальных случаях.

Пусть в трансверсали 1, $A$, $B$, $C$, $D$., . . . элемент $X$ соответствует индексу $T$. Нужно, чтобы при изменении $T$ величины $X - T + 2 \pm 1$, $X$, $T - X + 2 \pm 1$ принимали все различные значения от 1 до $n = 4m$. Так как $t$ и $x$ можно транспонировать, то получится новая трансверсаль, если подставить $x$ в индекс $u = x - t + 2 \pm 1$, т. е. взять $T = x - t + 2 \pm 1$ и $X = x$. Кроме того, имеем новую трансверсаль, положив $T = x$ и $X = t$.

Второе правило получается из первого, если взять $T = t$, $X = t - x + 2 \pm 1$. Поскольку $U = X - T + 2 \pm 1$, тогда $u = -x + 4$. Это правило имеет место всегда, за исключением $x$ четного и $t$ нечетного. В последнем случае $X = t - x + 3$.

Из трансверсали для экспоненты 1 можно получить трансверсали для других нечетных экспонент. Так, из трансверсали для экспоненты $a$ получают трансверсали для экспоненты $a + 2$, добавляя к каждому члену исходной число 2.

Нахождение трансверсалей для четных экспонент не столь очевидно и нуждается в доказательстве. Так как в квадрате 2-шагового типа вторая строка получается из первой путем увеличения нечетных членов на единицу и уменьшения четных на единицу, то можно рассуждать следующим образом. Пусть в трансверсали для экспоненты 1 члену $x$ соответствуют индексы $t$ и $u$, а для экспоненты 2 члену $x^{\mathrm{I}}$ соответствуют $t$ и $u^{\mathrm{I}}$. В зависимости от значений $t$ и $x$ значений $u$ и $u^{\mathrm{I}}$ находят из таблицы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $t = 2i$ | $t = 2i$ | $t = 2i + 1$ | $t = 2i + 1$ |
| $x = 2k$ | $x = 2k + 1$ | $x = 2k$ | $x = 2k + 1$ |
| $u = 2k - 2i + 1$ | $u = 2k - 2i + 4$ | $u = 2k - 2i$ | $u = 2k - 2i + 1$ |
| $x^{\mathrm{I}} = 2k - 1$ | $x^{\mathrm{I}} = 2k + 2$ | $x^{\mathrm{I}} = 2k - 1$ | $x^{\mathrm{I}} = 2k + 2$ |
| $u^{\mathrm{I}} = 2k - 2i + 2$ | $u^{\mathrm{I}} = 2k - 2i + 3$ | $u^{\mathrm{I}} = 2k - 2i + 1$ | $u^{\mathrm{I}} = 2k - 2i + 2$ |

Как видим, второй и третий случаи дают для всех четных значений $u$ все нечетные значения $u^{\mathrm{I}}$. В первом и четвертом случаях все нечетные значения $u$ дают все четные значения $u^{\mathrm{I}}$. Поэтому все различные значения $u$ дают все различные значения $u^{\mathrm{I}}$, т. е. трансверсали. Таким образом, найдя трансверсаль для экспоненты 2, можно получить все остальные трансверсали для четных степеней.

В конечном счете из каждой трансверсали для экспоненты 1 можно получить полную систему трансверсалей.

Рассмотрим в общем случае любой столбец, определяемый индексом $t$, у которого над соответствующим членом стоит экспонента 1. Обозначим следующие за $x$ вниз по столбцу члены через $x^{\mathrm{I}}$, $x^{\mathrm{II}}$, $x^{\mathrm{III}}$, . . . и дадим им экспоненты 2, 3, . . .; тогда член $x^{(\varphi)}$ будет иметь экспоненту $\varphi + 1$. Так как $x^{\mathrm{I}}$, $x^{\mathrm{II}}$, . . ., $x^{(\varphi)}$ имеют те же значения, что и элементы латинского квадрата, то всегда будем иметь $t = x + \varphi_{-2}^{-0}$ или $\varphi = t - x_{+2}^{+0}$ и, следовательно,
$$\varphi + 1 = t - x + \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} = t - x + 2 \pm 1.$$

Отсюда ясно, что экспоненты первой строки латинского квадрата составляют некоторую трансверсаль, которая получается из исходной по формуле (4). Поэтому построение полного квадрата можно начать с первой строки, расположив ее экспоненты в виде какой-либо трансверсали и затем продолжать вписывать другие экспоненты в соответствии со столбцом квадрата, начинающегося с того же числа. Эйлер, однако, замечает, что такой способ построения полного квадрата можно применять только в случае, если полная система трансверсалей формируется из заданной.

После общих замечаний Эйлер переходит к рассмотрению частных случаев ($n = 4$, 8) и, используя полученные выше результаты, ограничивается отысканием трансверсалей и приблизительной оценкой числа греко-латинских квадратов.

*В третьей главе* Эйлер исследует латинские квадраты 3-шагового типа (des carrés latins à triple marche) имеющие порядок $n = 3m$, где $m$ — число блоков. Наиболее простой вид квадрата при $m = 1$. Исследуя возможности построения трансверсалей, Эйлер, прежде всего, доказывает, что *случай $n = 6$ должен быть исключен из рассмотрения.*

Он обозначает два блока, являющиеся латинскими квадратами порядка 3, буквами $A$ и $B$:

$$A = \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1; \\ 3 & 1 & 2 \end{cases} \quad B = \begin{cases} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{cases}$$

Блок $A$ содержит элементы $a$, блок $B$ — элементы $b$. Тогда для $n = 6$ квадрат имеет вид: $\begin{smallmatrix} A & B \\ B & A \end{smallmatrix}$. Если для него существует трансверсаль, то она должна содержать $3a$ и $3b$. Три первых ее элемента можно выбрать четырьмя различными способами: $3a$, $2a$ и $b$, $2b$ и $a$, $3b$. Для каждого из них Эйлер доказывает невозможность подбора недостающих членов трансверсали. Эта теорема позволила сделать обобщение на случай латинских квадратов $(2k + 1)$-шагового типа. Причина несуществования трансверсалей по мнению автора состоит в том, что число элементов в блоках нечетно. Существование трансверсалей для четного числа элементов в блоках Эйлер доказывает и иллюстрирует на примере $n = 8$. В этой же главе он исследует латинские квадраты порядков 9 и 12.

Далее Эйлер выводит правила для отыскания трансверсалей. Пусть $t$ и $u$ — вертикальный и горизонтальный индексы некоторого члена $x$. Автор устанавливает соотношения: $x = t + u - 1$ и $x = t + u - 4$, в которых свободный член выбирается в зависимости от остатков при делении $t$ и $u$ на 3. Все числа относительно делимости на 3 разбиваются на три класса: $3\alpha + 1$, $3\alpha + 2$, $3\alpha + 3$ или для краткости 1, 2, 3. Оба выражения для $x$ можно объединить: $x = t + u - \omega$. Составим таблицу для нахождения значений $x$:

$$\text{если} \begin{cases} t = 1, 1, 1;\ 2, 2, 2;\ 3, 3, 3; \\ u = 1, 2, 3;\ 1, 2, 3;\ 1, 2, 3; \end{cases} \text{то} \begin{cases} \omega = 1, 1, 1;\ 1, 1, 4;\ 1, 4, 4; \\ x = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2. \end{cases}$$

Выразив $u = x - t + \omega$, можно найти индекс $t$, соответствующий $x$, и сопоставить $u$ всем значениям $t$ и $x$. Получим: $\omega = 4$, если

$$x = 1,\ 1,\ 2; \\ t = 2,\ 3,\ 3. \tag{6}$$

Формула (6) используется для проверки правильности составления трансверсалей.

Эйлер показал далее, как можно из одной трансверсали получить другие. Если в новой трансверсали члену $X$ соответствуют индексы $T$ и $U$ и $x = t + u - \omega$, причем $t$ и $u$ перестановочны, то положив $T = u$ и $U = t$, получим $X = x$, т. е. получив значения $u$, нужно записать их в естественном порядке и под каждым подписать соответствующие значения $x$. Можно, как и в предыдущих главах, положить $T = x$, $X = t$. В результате получим новую трансверсаль, инверсную исходной. При этом $X - T + \omega = t - x + \omega$. Так как при изменении $x$ и $t$ от 1 до $n$ это выражение принимает все такие же значения, то при $T = t$ можно принять

$$X = t - x + \omega. \tag{7}$$

Получим второе правило, в котором $\omega = 4$ при $\begin{cases} t = 1, 1, 2, \\ x = 2, 2, 3 \end{cases}$ и $\omega = 1$ при всех остальных значениях $t$ и $x$.

Далее Эйлер выводит правила получения трансверсалей для различных экспонент. Прежде всего он доказывает, что трансверсали для экспонент 2 и 3 можно получить по следующей схеме, в которой члены трансверсалей для экспонент 1, 2 и 3 имеют соответственно вид:

$$\begin{array}{lll} 3\alpha+1 & 3\alpha+2 & 3\alpha+3 \\ 3\alpha+2 & 3\alpha+3 & 3\alpha+1 \\ 3\alpha+3 & 3\alpha+1 & 3\alpha+2 \end{array}$$

Пусть члену $x$ трансверсали для экспоненты 1 соответствуют индексы $t$ и $u$ и $u = x - t + \omega$, члену $x^{\mathrm{I}}$ трансверсали для экспоненты 2 — индексы $t$ и $u^{\mathrm{I}}$ и $u^{\mathrm{I}} = x^{\mathrm{I}} - t + \omega$ и члену $x^{\mathrm{II}}$ трансверсали для экспоненты 2 — индексы $t$ и $u^{\mathrm{II}}$ и $u^{\mathrm{II}} = x^{\mathrm{II}} - t + \omega$. Из приведенной ниже таблицы, в которой представлены все возможные значения индексов $t$ и $x$ и $\alpha - \beta = \gamma$, видно, что индексы $u^{\mathrm{I}}$ и $u^{\mathrm{II}}$ принимают те же значения, что и $u$:

$$\begin{array}{rlll} t = & 3\beta + 1, 2, 3 & 1, 2, 3 & 1, 2, 3 \\ x = & 3\alpha + 1, 2, 3 & 2, 3, 1 & 3, 1, 2 \\ u = & 3\gamma + 1, 2, 3 & 2, 2, 2 & 3, 3, 3 \\ x^{\mathrm{I}} = & 3\alpha + 2, 3, 1 & 3, 1, 2 & 1, 2, 3 \\ u^{\mathrm{I}} = & 3\gamma + 2, 2, 2 & 3, 3, 3 & 1, 1, 1 \\ x^{\mathrm{II}} = & 3\alpha + 3, 1, 2 & 1, 2, 3 & 2, 3, 1 \\ u^{\mathrm{II}} = & 3\gamma + 3, 3, 3 & 1, 1, 1 & 2, 2, 2 \end{array}$$

Чтобы получить трансверсали для экспонент 4, 5, 6, нужно прибавить 3 к каждому члену трансверсалей для экспонент 1, 2, 3 соответственно и т. д. Полученные правила и их комбинации в случае $n = 9$ Эйлер применяет для составления трансверсалей и построения полных квадратов.

*Четвертая глава* мемуара посвящена исследованию латинских квадратов 4-шагового типа. В ней рассматриваются квадраты порядков $n = 4m$, где $m$ — число блоков (циклических квадратов порядков 4), обозначенных буквами $A$, $B$, $C$, ... В этой главе, как и в предыдущих, Эйлер изучает возможность получения трансверсалей, набора полного множества их, построения греко-латинских квадратов. Автор показывает, какие частичные изменения претерпевают правила, полученные в первых трех главах, и отмечает, что применение их приводит к весьма громоздким вычислениям. Поэтому он предлагает другой подход для решения поставленных задач.

При исследовании квадратов $q$-шагового типа и сейчас используют методы, предложенные Эйлером. Однако такие квадраты составляют лишь небольшую часть всех латинских квадратов. Для них все еще остается нерешенным ряд проблем.

В теории латинских квадратов важными являются вопросы, связанные с их составлением, перечислением и отождествлением. Заключительная глава мемуара посвящена именно таким исследованиям. Эйлеру не удалось решить задачу о 36 офицерах. Он пришел к выводу: если полные квадраты возможны, то они должны строиться из нерегулярных латинских квадратов. Эйлер указал метод получения их: *если в регулярном квадрате транспонировать числа a и b, расположенные в вершинах прямоугольника, то, несмотря на кажущееся соответствие, получается другой квадрат, отличающийся от исходного ряда свойств.*

Найдя все трансверсали для полученного квадрата, можно попытаться построить их полную систему.

Эйлер рассмотрел большое число нерегулярных квадратов, но так и не смог решить задачу. Он пришел к выводу: «И я не колеблюсь в том, чтобы сделать заключение о невозможности составления никакого полного квадрата из 36 клеток и что такая невозможность распространяется на случаи, когда $n = 10$, $n = 14$ и вообще, на все нечетно-четные числа».

В поисках решения задачи Эйлер вплотную подошел к понятию группы подстановок латинских квадратов. Он вводит понятие *общего преобразования*, с помощью которого каждый квадрат может быть преобразован в большое количество других, обладающих теми же свойствами по отношению к трансверсалям, что и исходный. Поэтому, если рассматриваемый квадрат допускает систему трансверсалей, то ее будут иметь и все квадраты, полученные из него при помощи общего преобразования. Следовательно, достаточно рассмотреть любой из них.

Частным случаем общего преобразования является композиция трех подстановок: элементов, строк и столбцов. Эйлер рассматривает и другой частный случай общего преобразования — транспозицию греческого и латинского квадратов. Обобщая исследования полных квадратов, Эйлер указывает для них комбинаторный инвариант. Каждая клетка квадрата содержит латинское и греческое числа $a$ и $b$ и определяется горизонтальным и вертикальным индексами $c$ и $d$. Четверка чисел $a$, $b$, $c$, $d$ обладает свойством переместительности. По сути дела, Эйлер предвосхитил возможность разбиения полных квадратов на классы сетевого изоморфизма.

Получение полного множества латинских квадратов порядка $n$ у Эйлера выполняется путем составления его из латинских прямоугольников. Он пишет: «Я отметил выше, что полное исследование всех возможных вариаций будет вопросом весьма важным. Однако он показался мне довольно трудным и почти невозможным, когда число $n$ превышает 5. Чтобы облегчить это перечисление, нужно начинать со следующего вопроса: *сколькими различными способами при заданной первой строке можно варьировать вторую строку при конкретном значении $n$?*»

Эйлер приводит таблицу для числа латинских прямоугольников размера $n \times 2$:

| $n$ | число вариаций |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | $1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0$ |
| 4 | $3 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1$ |
| 5 | $11 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1$ |
| 6 | $53 = 4 \cdot 11 + 3 \cdot 3$ |
| 7 | $309 = 5 \cdot 53 + 4 \cdot 11$ |
| 8 | $2\,119 = 6 \cdot 309 + 5 \cdot 53$ |
| 9 | $16\,687 = 7 \cdot 2119 + 6 \cdot 309$ |

Из таблицы видно, что числа составляют последовательность, в которой каждый последующий член определяется двумя предыдущими. Если обозначить число вариаций для значений $n$, $n+1$, $n+2$, $n+3$ соответственно через $P$, $Q$, $R$, $S$, то

$$R = nQ + (n-1)P \tag{8}$$

и

$$S = (n+1)\,R + nQ. \tag{9}$$

Из (8) и (9) можно найти зависимость, при которой каждый член $S$ определяется тремя предыдущими $P$, $Q$, $R$. Из (8) имеем

$$R - Q = (n-1)(Q+P) \text{ или}$$
$$n - 1 = (R-Q)/(P+Q). \tag{10}$$

Аналогично из (9)

$$S - R = n(Q+R) \text{ и } n = \frac{S-R}{Q+R}. \tag{11}$$

Откуда $1 = (S-R)/(Q+R) - (R-Q)/(P+Q)$ или $PS - PR + QS - QR - RR = PQ + PR + QR$. Тогда $S = (PQ + 2PR + 2QR + RR)/(P+Q)$ или $S = 2R + Q + (PR + PQ)/(P+Q) - Q = 2R + Q + [(R + Q)(R-Q)]/(P+Q)$.

Эйлер получил также зависимость, при которой каждый член определяется только предшествующим. Пусть $P$ — число вариаций второй строки при заданном значении $n$. Тогда для значения $n+1$ число вариаций $Q$ равно: $nP - (P \pm 1)/n$, где верхний знак берется, когда $n$ нечетно, а нижний, когда $n$ четно. Пусть $R$ — число вариаций при значении $n+2$: $R = nQ + (n-1)P$ или $R = nQ + (n-1)P = n[nP - (P\pm 1)/n] + (n-1)P = nnP - P \pm 1 + (n-1)P = (n-1)(n+2)P \pm 1$.

По существу, Эйлер дает решение широко известной в те времена во Франции dérangements, впервые предложенной Монмором.

Исследования, выполненные в заключительной главе, Эйлер считал весьма важными. Заметим, что изучать латинские квадраты с помощью групп подстановок, к чему он вплотную подошел, математики стали лишь с начала XX в. О важности своих исследований Эйлер писал: «...такое перечисление всех возможных вариаций будет объектом, достойным внимания геометров (так в те времена называли математиков: *А. М.*), тем более, что все принципы, известные в комбинаторике, не окажут им ни малейшей помощи».

В заключении Эйлер писал, что рассмотренная задача «будучи сама по себе не слишком полезной, оказала важное влияние на развитие общей теории чисел и комбинаторики, в частности».

Со второй половины XIX в. теория латинских квадратов, основы которой были заложены Эйлером, начинает бурно развиваться. Устанавливаются многочисленные связи с другими математическими дисциплинами. С другой стороны, в 70-х гг. XX в. Макмагон указал на практическую значимость латинских квадратов, применив последние в статистике для уменьшения числа экспериментов, необходимых в дисперсионном анализе.

Исследования Эйлера оказались весьма важными для разработки теории планирования экспериментов. В начале XX в. Фишер заложил основы этой теории и уделил в ней значительное место латинским квадратам. Он показал эффективность использования их в сельскохозяйственных экспериментах. Начиная с 30-х годов латинские квадраты получили широкое и разностороннее применение для организации экспериментальных работ в промышленности, медицине, педагогике, торговле, социологии и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Euler L.* Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques.— Verh. zeeuwsch. Genootsch. Wetensch. Vlissengen., 1782, vol. 9, p. 85—239 [1].
2. *Tarry G.* Le probléme des 36 officiers.— C. r. Assoc. Franç Av. Sci., 1900. Vol. 1; 1901. Vol. 2, p. 189—200.
3. *Bose R. C., Shrikhande S. S., Parker E. T.* Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture.— Canad. J. Math., 1960, vol. 12, p. 189—203.

# НЕИЗВЕСТНЫЕ РАБОТЫ Л. ЭЙЛЕРА ПО АСТРОНОМИИ

**Н. И. Невская**

Эйлер неоднократно и весьма охотно обращался к решению различных теоретических и прикладных астрономических проблем. Недавно найденные архивные материалы раскрывают новые, ранее не известные грани творческой личности Л. Эйлера, характеризуют его не только как теоретика, но и как наблюдателя, яркого представителя Петербургской астрономической школы.

Как известно, первые систематические астрономические наблюдения в России были начаты в 1727 г., в обсерва-

[1] Перепечатано в *Euler L.* Opera omnia, ser. 1. 1923. Vol. 7 (1923).

тории Петербургской Академии наук ее основателем и первым директором Ж. Н. Делилем и продолжались до весны 1747 г., вплоть до его отъезда в Францию. За эти годы самим Делилем и его сотрудниками было выполнено много интересных наблюдений, принесших всемирную известность Петербургской обсерватории.

После 1747 г. эти журналы наблюдений стали недоступны для исследователей. И. Д. Шумахер утверждал, что Делиль увез их с собой во Францию. Делиль же в письмах к Г. Ф. Миллеру сообщал о том, что оставил их в Петербурге и неоднократно, но тщетно предлагал свою помощь в обработке этих материалов [1].

В 1850 г. В. Я. Струве запросил из парижского архива Ж. Н. Делиля якобы увезенные им журналы. В Париже оказались лишь копии, после получения которых оригиналы были обнаружены в архиве Петербургской Академии наук [2]. Для сравнения всех этих материалов они были переданы в Пулково. Однако В. Я. Струве вскоре заболел и умер, так и не закончив работы. Взятые им из архива оригиналы журналов были потеряны.

Разбирая в 1977 г. документы, поступившие из Пулкова в Ленинградское отделение Архива АН СССР, сотрудница этого архива Е. С. Кулябко обратилась к нам за консультацией по поводу обнаруженных там материалов XVIII в. Так были вновь найдены журналы наблюдений Петербургской астрономической обсерватории.

Содержащиеся там наблюдения охватывают период с 12 июня 1727 г. по 29 мая 1747 г. и включают почти ежедневные записи утром, днем, вечером и ночью. Помимо Делиля, в них участвовали другие астрономы и геодезисты, а также многочисленные добровольные помощники, среди которых оказался и Л. Эйлер.

Первые свои наблюдения он провел 11 марта 1733 г. Вместе с «геодезистами», имена которых не названы в журнале, Л. Эйлер под руководством Делиля наблюдал «соответственные высоты верхнего края Солнца» утром и вечером, а затем вычислил полученную высоту Солнца, отметив, что ветер мешал наблюдениям. Как указано в журнале, наблюдения велись «с малым квадрантом и

---

[1] ЦГАДА, ф. 199, оп. 2, портфель № 546, ч. 2, № 11 (письмо от 26.VI.1762 г.) и др.

[2] Эти копии были переданы в Пулково в 1847 г. и возвращены в Париж в 1882 г.

часами $E$»[3]. Постоянно работая под контролем Делиля, Л. Эйлер к концу апреля настолько освоил методику наблюдений и расчетов, что стал получать результаты, сравнимые с данными Делиля[4]. Несмотря на это вплоть до 1 октября 1734 г. Делиль тщательно проверял все наблюдения и расчеты Эйлера, и лишь убедившись в их правильности, доверил ему самостоятельную работу. В дальнейшем Эйлер вел эти наблюдения полуденных высот Солнца в паре с Ж. Н. Делилем, Г. В. Крафтом или другими сотрудниками обсерватории, систематически выполняя добровольно взятую на себя обязанность до самого отъезда из России в 1741 г.

С большим увлечением изучал Л. Эйлер и солнечные пятна, появившиеся в июле 1734 г. Вместе с Ж. Н. Делилем он с интересом наблюдал пятна и факелы, тщательно измеряя их положение на солнечном диске и проводя множество зарисовок[5]. Иногда Эйлер участвовал также в наблюдении покрытий звезд и планет Луной и довольно часто слышал сетования Ж. Н. Делиля на плохой ход часов обсерватории (записи об этом то и дело встречаются в журналах). Несомненно, что работа в Петербургской обсерватории 1733—1741 гг. под руководством такого выдающегося астронома своего времени как Ж. Н. Делиль, была хорошей школой для Л. Эйлера. Здесь он вплотную столкнулся с важнейшими проблемами астрономической науки, многие из которых он в дальнейшем решил.

* * *

Изучение архивов Ж. Н. Делиля познакомило нас еще с одной неопубликованной астрономической работой Л. Эйлера, посвященной проблемам атмосферной рефракции: «О рефракции лучей света». Ее латинский оригинал в настоящее время хранится в Ленинградском отделении Архива АН СССР[6]. В архиве Парижской обсерватории есть копия этой работы Л. Эйлера, сделанная рукой Ж. Н. Делиля, с его пометками и замечаниями, а также неизвестное письмо Л. Эйлера к Ж. Н. Делилю по поводу данной работы. Сравнение материалов ленинградского и

---

[3] Ленинградское отделение Архива АН СССР (ЛО ААН СССР), Р. I, оп. 44, № 1, л. 272.

[4] Там же, л. 283 об., 286 и др.

[5] Там же, л. 378 и др.

[6] Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962, т. I, с. 102, № 345.

парижского архивов раскрывает творческую лабораторию великого математика и убедительно показывает, как тщательно он готовил свои рукописи к печати.

Вкратце история этой работы такова. 26 декабря 1738 г. Л. Эйлер закончил статью «О рефракции лучей света» и передал ее Ж. Н. Делилю, который вместе с Г. В. Крафтом тщательно изучил рукопись, обнаружив в ней ряд ошибок и неточностей. 30 апреля (11 мая) 1739 г. рукопись была возвращена Л. Эйлеру, который внес в нее необходимые исправления и передал для печатания. Однако работа Эйлера осталась неопубликованной.

В феврале 1912 г. ленинградская рукопись была послана в Цюрих, профессору Ф. Рудио, который готовил к изданию труды Л. Эйлера. В сопроводительном письме от 5(18) февраля 1912 г. непременный секретарь Петербургской академии наук С. Ф. Ольденбург писал:

«*Милостивый государь и высокочтимый коллега,*

*Академия поручила мне послать Вам еще один рукописный автограф Эйлера: «О рефракции лучей света», который я прошу Вас нам вернуть, после того как Вы используете его для Вашей публикации...*» [7]

Поскольку предполагавшаяся публикация рукописи Л. Эйлера снова не состоялась, ниже предлагается выполненный нами русский перевод рукописи Л. Эйлера, а также его письма к Ж. Н. Делилю и других материалов из парижского архива этого астронома с необходимыми комментариями. Вставленные переводчиком слова приводятся в квадратных скобках.

## О рефракции лучей света

сдано г. Эйлером 26 дек. 1738 г.[1] нов. ст.

**1.** То свойство лучей света, благодаря которому они при прохождении через различные среды отклоняются от прямой линии и испытывают преломление, не без основания приписывается различной скорости движения, с которой лучи переносятся. И если даже относительно самой этой скорости можно выдвинуть много сомнений, то какова бы ни была причина рефракции, ее без всякой ошибки следует отнести к различию скоростей лучей. Таким образом, скорость лучей будет рассматриваться здесь как свойство, вызывающее преломление. Благодаря этому свойству лучи света в любой прозрачной среде имеют дан-

---

[7] ЛО ААН СССР, ф. 136, оп. 1, № 125, л. 3. Автограф — французский, письмо дается в нашем переводе.

ную степень скорости, по которой и определяется величина рефракции.

Пусть луч света претерпевает рефракцию такого рода, переходя из одной среды в другую так, чтобы синус угла падения относился к синусу угла преломления, как скорость в первой среде к скорости во второй среде.

**2.** Итак, если в пустоте или бесконечно разреженном воздухе скорость света полагается равной $c$, а потом в воздухе, имеющем плотность $m$, скорость света полагается равной $u$, то луч света при переходе из пустоты в воздух преломляется таким образом, что синус угла падения будет относиться к синусу угла преломления как $c/u$. По эксперименту же Хоуксби [2] рефракция лучей при переходе из пустоты в обычный воздух определена так, что синус угла падения относится к синусу угла преломления как 1 000 000/999 736. Итак, если плотность этого воздуха полагается равной $m$, а скорость света — равной $u$, то $c/u = 1000000/999736$. Подобным же образом выясняется, что если луч из этого воздуха переходит в воздух, вдвое более плотный, то синус угла падения будет относиться к синусу угла преломления так же, как 1000000/999736. Если же предполагается, что скорость света в воздухе с плотностью $2m$ равна $2u$[3], то $u$ будет равно:

$u = 999\,736c/1\,000\,000$[4], а $2u = 999\,736$ и $1\,000\,000 = (999\,736/1\,000\,000)^2\ c$.

Откуда следует заключить, что скорость света в воздухе, плотность которого была бы равна $\nu m$, будет равна $(999736/1000000)^{\nu}c$. При проведении же этого эксперимента барометр имел высоту до 29 дюймов $7^1/_2$ линий [5]. Термометр же или объем винного спирта занимал 137 делений. Тот же спирт во время замерзания воды занимает 126 делений, во время же наибольшего летнего тепла — 144 деления [6].

**3.** Поэтому если бы воздух имел какую-нибудь неизменную плотность $= q$, то [скорость] лучей света в этом воздухе следует оценить как $= (0{,}999736)^{q/m}c$. А так как $0{,}999736 = 1 - \frac{264}{1000000} = 1 - \frac{1}{3800}$ [7]; скорость света в этом воздухе равна *:

$$\approx\left(1 - \frac{1}{3800}\right)^{q/m}\cdot c.$$

* Приводимая ниже формула отсутствует в записи Л. Эйлера. Она вставлена А. Ф. Лапко.

Для этой скорости можно достаточно надежно принять такое выражение: $c = \frac{cq}{3800m}$. Плотность же воздуха при неизменной температуре пропорциональна упругости, т. е. высоте ртути в барометре. А при постоянной упругости плотность обратно пропорциональна числу градусов, которые указывает термометр, поскольку эти числа характеризуют расширение воздуха. Итак, если в каком-либо месте наблюдается высота барометра, равная $a$, а термометр указывает число [градусов] $= n$, то плотность воздуха будет равна $m \cdot \frac{a}{29{,}625} \cdot \frac{137}{n}$, т. е. если $a$ выражается в дюймах лондонского фута, $4{,}624 \cdot ma/n$[8]. И в этом воздухе скорость света равна: $c \cdot \left(1 - \frac{a}{822 \cdot n}\right)$.

4. Теперь определим изменение плотности воздуха на разных атмосферных высотах. Итак, пусть $ACP$ будет вертикальная прямая, на которой $CD$ будет горизонтальной линией, взятой на поверхности моря. Сама же аппликата[9] $CD$ выражает плотность воздуха в этом месте, которая будет равна $m$. На какой-либо высоте $P$ соответствующая аппликата выражает $Pm = y$ — плотность воздуха. Шкала же этих плотностей будет непрерывна до $B$, места, где воздух приведен к максимальной плотности.

Пусть $AC = a$; $AB = p$ и $AP = x$, тогда $x$ будет равен $x = \frac{b}{\sqrt[3]{p}} \cdot l \cdot \frac{p}{y} + \frac{(p-y)\,b}{3p\sqrt[3]{p}}$. Вот почему если предполагается, что $CP = z$, то будет $a + z = \frac{b}{\sqrt[3]{p}} \cdot l \cdot \frac{p}{y} + \frac{b\,(p-y)}{3p\sqrt[3]{p}}$. Пусть $z = 0$. Положим, что $y = m$, тогда будет

$$a = \frac{b}{\sqrt[3]{p}} \cdot l \cdot \frac{p}{m} + \frac{b\,(p-m)}{3p\sqrt[3]{p}} = AC.$$

Если $z$ выражается в парижских футах[10] так, чтобы $z$ было неким известным числом, то, как показал эксперимент, если $z$ не будет слишком большим числом, то $y$ будет равно: $y = \frac{22000 \cdot m}{22000 + z}$. И потом $b$ равным образом будет обозначать известное число парижских футов, которое мы таким образом и найдем.

5. Пусть $z$ будет бесконечно малое число $y = m -$

$-mz/22000$; и потому

$$a+z=\frac{b}{\sqrt[3]{p}}\cdot l\cdot\frac{p}{m}+\frac{b(p-m)}{3p\sqrt[3]{p}}+z=\frac{b}{\sqrt[3]{p}}\cdot l\cdot\frac{p}{m}+$$
$$+\frac{bz}{22000\cdot\sqrt[3]{p}}+\frac{(p-m)\,b}{3p\sqrt[3]{p}}+\frac{bmz}{3\cdot 22000\cdot p\cdot\sqrt[3]{p}};$$

откуда будет

$$1=\frac{b}{22000\cdot p\cdot\sqrt[3]{p}}+\frac{bm}{66000\cdot p\cdot\sqrt[3]{p}}\quad\text{или}\quad 66000\cdot p\cdot\sqrt[3]{p}=$$
$$=3\cdot b\cdot p+b\cdot m;$$

итак, $b=\dfrac{66000\cdot p\cdot\sqrt[3]{p}}{3p+m}$.

Проведенный же эксперимент по сжимаемости воздуха показал [11], что $p=64m$ [12], откуда будет $b=87544\sqrt[3]{m}$. Итак, мы имеем

$$a=87544\cdot\sqrt[3]{\frac{m}{p}}\cdot l\cdot\frac{p}{m}+\frac{87544\cdot(p-m)}{3p}\sqrt[3]{\frac{m}{p}}=$$
$$=21886\cdot l\cdot 64+7181\text{ [13]}\quad\text{и}\quad 21886\cdot l\cdot 64+7181\text{ [13]}+z=$$
$$=21886\cdot l\cdot\frac{64m}{y}+\frac{87544\cdot(64m-y)}{768m}.\ \text{Или}$$

$$z=21886\cdot l\cdot\frac{m}{y}+\frac{113\frac{95}{96}(m-y)}{m}\text{ [14]}.$$

Откуда мы получим соотношение между плотностью воздуха и высотой над уровнем моря [15], опять очень близкое к $y=e^{-z/21886m}$. На этой же высоте скорость распространения света в воздухе будет равна $c\left(1-\dfrac{e^{-z/21886}}{3800}\right)$, откуда можно будет определить рефракцию, которую претерпевают лучи, проходящие через атмосферу. Сделаем то же рассмотрение менее широким и воспользуемся вместо определенных чисел неопределенными, и на высоте $z$ положим скорость света равной $c=e\left(1-\dfrac{e^{-z/\eta}}{\lambda}\right)$.

6. Теперь пусть $C$ — центр Земли, $AQ$ — поверхность Земли, а $A$ — место, в котором наблюдается луч света под углом $\angle NAC$; прямая $NA$, проведенная по касательной к кривой $AMm$, с которой луч [света] образует в точке наблюдения $A$ угол $\angle NA\alpha$ или дополнение к повышению над горизонтом в месте наблюдения, синус

которого равен $\alpha$; в то время как полный синус равен 1. Из чего мы определим свойства кривой $AMm$, которую образует луч[16]. Пусть полудиаметр Земли $AC = a$, $QM = z$ и на касательную $MP$ из точки $C$ опустим перпендикуляр $CP = p$. Затем в ближайшей окрестности [этой точки] проведем построение $qm = z + \partial z$; и перпендикуляр $CP = p + \partial m$, причем $mp$ будет касательной к кривой, построенной в точке $m$. Вследствие этого $CM$ будет равно: $CM = a + z$, а $PM = \sqrt{(ca + z)^2 - p^2}$, откуда синус угла $\angle PmC$ равен $\frac{p}{a + z + \partial z} = \frac{p}{a + z} - \frac{p \cdot \partial z}{(a + z)^2}$. Синус же угла $\angle pmC = \sin \angle nm\mu = \frac{p + \partial p}{a + z + \partial z}$ [17] $= \frac{p}{a + z} + \frac{(a + z)\,\partial p - p\partial z}{(a + z)^2}$. И в самом деле, угол $\angle nm\mu$ — это угол падения луча $\mu m$ в слое атмосферы $ms$, а $\angle Pmc$ — угол преломления. Вот почему, если предполагается, что скорость луча света, с которой он проходит через $mM$, равна $z$, то скорость, которую он будет иметь при прохождении через выше расположенный слой, будет равна $m\mu = z + \partial z$, откуда по свойству преломления будет:

$$z + \partial z : z = \frac{p}{a + z} + \frac{(a + z)\,\partial p - p\partial z}{(a + z)^2};$$

$$\frac{p}{a + z} - \frac{p\partial z}{(a + z)^2}; \text{ или}$$

$$\frac{z\,(a + z)\,\partial p - zp\,\partial z}{(a + z)^2} = \frac{p\,\partial z}{a + z} - \frac{zp\partial z}{(a + z)^2}.$$

Так что будет $z\partial p = p\partial z$. Интегрирование этого уравнения даст: $p/z = \text{const}$, в соответствии со свойством кривой $AMm$, которую образует луч света.

**7.** Когда же из-за уменьшения плотности воздуха $z$ будет равно $z = c\left(1 - \frac{e^{-z/\eta}}{\lambda}\right)$, а $p = Cc\left(1 - \frac{e^{-z/\eta}}{\lambda}\right)$ или синус угла $\angle CMP$ полагается равным $s$, из-за $p/(a + z) = s$, то получится

$$(a + z)\, s = Cc\left(1 - \frac{e^{-z/\eta}}{\lambda}\right).$$

Постоянная же $C$ определится при совмещении точки $M$ с точкой $A$, в которой $z$ будет $z = 0$ и $s = \alpha$; откуда

$$a\alpha = Cc\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right), \text{ или } Cc = \frac{a\alpha}{1 - 1/\lambda}.$$

Вот почему из-за кривизны этого луча получается определенное уравнение:

$$(a+z)\,s=\frac{a\alpha}{1-\frac{1}{\lambda}}\left(1-\frac{e^{-z/\eta}}{\lambda}\right)=\frac{a\alpha\,(\lambda-e^{-z/\eta})}{\lambda-1};$$

[откуда] получаются $\lambda=3800$ и $\eta=21886$, если $z$ — выражается в парижских футах. Итак, отсюда будет синус угла

$$\angle CMP=s=\frac{a\alpha\,(\lambda-e^{-z/\eta})}{(a+z)\,(\lambda-1)}.$$

8. Пусть синус угла $\angle ACQ=x$, а косинус $=\sqrt{1-x^2}$ [18], дуга же $AQ$ будет равна $=a\cdot$дугу, синус которой равен $x$, и угол $\angle QCq=\partial x/\sqrt{1-x^2}$, откуда будет

$$Mr=\frac{(a+z)\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\ \text{ и }\ Mm=\sqrt{c\partial z^2+\frac{(a+z)^2\,\partial x^2}{1-x^2}}$$

и поэтому синус угла

$$\angle CMP=s=\frac{(a+z)\,\partial x}{\sqrt{c\,(1-x^2)\,\partial z^2+(a+z)^2\,\partial x^2}}=$$

$$=\frac{a\alpha\,(\lambda-e^{-z/\eta})}{(\lambda-1)\,(a+z)},$$

что приведется к такому уравнению:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{a\alpha\,(\lambda-e^{-z/\eta})\,\partial z}{(a+z)\sqrt{(c\lambda-1)^2\,(a+z)^2-a^2\alpha^2\,(\lambda-e^{-z/\eta})^2}}.$$

В этом уравнении переменные $x$ и $z$ отделены друг от друга.

9. Угол же $\angle ACQ$ найден по высоте $z$ или наоборот. Синус угла $\angle ANC$ будет равен $\alpha\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-\alpha^2}$, и отсюда

$$CN=\frac{a\alpha}{\alpha\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-\alpha^2}}\ \text{ и }\ AN=\frac{ax}{\alpha\sqrt{c\,(1-x^2)}-x\sqrt{1-\alpha^2}};$$

откуда $MN$ будет равно:

$$MN=\frac{a\alpha}{a\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-\alpha^2}}-a-z.$$

Итак, если провести хорду $MA$, которая представляет собой луч света, идущий из $M$ в [точку] $A$, если он не претерпевает никакого преломления. Тангенс угла $\angle MAN$ находится [из выражения] [19]:

$$\frac{a\alpha\left(\sqrt{\alpha\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-\alpha^2}}\right)-(a+z)\left[\alpha\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-\alpha^2}\right]^2}{ax-\left[ax-(a+z)\left(\alpha\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-\alpha^2}\right)\right]\left(\alpha x+\sqrt{(1-x^2(1-\alpha^2)}\right.}\,.$$

И этот угол следует добавлять к наблюдавшемуся углу $\angle NA\alpha$, чтобы получить истинный угол $\angle MA\alpha$, на который объект $M$ отстоит от зенита $\alpha$. Или же, что найденное из наблюдений повышение объекта над горизонтом следует уменьшить на тот же самый угол. Проведенный же из [точки] $M$ к [прямой] $AN$ перпендикуляр $MR$ равен

$$MR = a\alpha-(a+z)\left(\alpha\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-\alpha^2}\right) \text{ и}$$

$$AR=\frac{\alpha x}{\alpha\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-\alpha^2}}-\frac{a\alpha\left[\alpha x+\sqrt{(1-x^2\,(1-\alpha^2)}\right.}{\alpha\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-\alpha^2}}+$$
$$+(a+z)\left[\alpha x+\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha^2)}\right].$$

**10.** Положим, что $AR = u$ и $RM = y$, [тогда] $AM = \sqrt{u^2+y^2}$ и синус угла $\angle RAM = y/\sqrt{u^2+y^2}$, а [его] косинус равен $u/\sqrt{u^2+y^2}$. Отсюда будет [20] синус угла $\angle MA\alpha$ и [его] косинус равны [соответственно]

$$\frac{\alpha u+y\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{y^2+u^2}} \quad \text{и} \quad \frac{u\sqrt{1-\alpha^2}-\alpha y}{\sqrt{u^2+y^2}},$$

и поэтому

$$CM=\sqrt{a^2+u^2+y^2\cdot 2au\cdot\sqrt{(1-\alpha^2)}-2a\alpha y}=a+z \quad \text{и}$$

$$(a+z):\frac{\alpha u+y\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{u^2+y^2}}=\sqrt{u^2+y^2}:x,$$

откуда будет

$$x=\frac{\alpha u+y\sqrt{1-\alpha^2}}{a+z}\,.$$

**11.** Пусть расстояние $z$ будет очень малым по сравнению с радиусом $a$. [Тогда] будет $e^{-z/\eta}=1-z/\eta$. И потом

$$\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{a\alpha\left(\lambda-1+\frac{z}{\eta}\right)\partial z\left(\frac{1}{a}+\frac{z}{a^2}\right)}{\sqrt{(\lambda-1)^2(a+z)^2-a^2\alpha^2\left(\lambda-1+\frac{z}{\eta}\right)^2}}\,.$$

Однако

$$\frac{1}{\sqrt{\left[(\lambda-1)^2(a+z)^2-a^2\alpha^2\left(\lambda-1+\frac{z}{\eta}\right)^2\right]}}=$$

$$=\left[(\lambda-1)^2a^2(1-\alpha^2)+2az(\lambda-1)^2-\frac{2(\lambda-1)a^2\alpha^2z}{\eta}\right]^{-1/2}=$$

$$=\frac{1}{(\lambda-1)a\sqrt{1-\alpha^2}}-\frac{a\eta z(\lambda-1)^2+a^2\alpha^3(\lambda-1)^2\cdot z}{\eta(\lambda-1)^3a^3(1-\alpha^2)^{3/2}},$$

что следует умножить на

$$(\lambda-1)\alpha-\frac{(\lambda-1)\alpha z}{\alpha}+\frac{\alpha z}{\eta}.$$

Итак, из-за того, что $x=0$, [получим] приближенно [21]:

$$\partial x=\frac{\alpha\,\partial z}{a\sqrt{1-\alpha^2}}-z\,\partial z\left(\frac{\alpha\eta(\lambda-1)-a\alpha^3}{\eta a^2(\lambda-1)(1-\alpha^2)^{3/2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{(\lambda-1)\alpha\eta-a\alpha}{\eta\alpha^2(\lambda-1)\sqrt{1-\alpha^2}}\right);\ z=\frac{ax\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha},$$

отсюда будет

$$MR=a\alpha-a\alpha-ax\sqrt{1-\alpha^2}+\frac{ax^2(1-\alpha^2)}{\alpha}+\frac{1}{2}a\alpha^2x.$$

Итак, $MR=\dfrac{ax^2(2-\alpha^2)}{2\alpha}$, а из-за [22] $\alpha\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-\alpha^2}=$ $=\alpha-\dfrac{\alpha x^2}{2}-x\sqrt{1-\alpha^2}$; $AR=\dfrac{ax}{\alpha}$; откуда тангенс угла $MAN$ будет равен $x(1-{}^1/_2\alpha^2)$.

**12.** Если же по $x$ определить $z$, то можно будет найти и тангенс угла $\angle MAN$, на который следует увеличить полученное из наблюдений расстояние объекта $M$ от зенита; тангенс [угла $\angle MAN$] равен $\dfrac{\alpha z}{2\eta(\lambda-1)\sqrt{1-\alpha^2}}$, а так как $\lambda=3800$ и $\eta=21886$, то будет: $2\eta(\lambda-1)=$ $=166333600$; потому что в самом деле: $az/\sqrt{1-\alpha^2}=$ $=ax$. Тангенс угла $\angle MAN$ будет равен $ax/166333600=$ $={}^9/_{76}x$.

П р а в и л о. Итак, высота любого наблюдаемого объекта всегда должна быть уменьшена на угол, который относится к углу удаления объекта в месте наблюдения от Земли как 9 к 76.

Путем наблюдения единичного объекта, высота которого и его расстояние от какого-либо места наблюдения — иные, можно определить более точное отношение: 9 : 76.

К рукописи Л. Эйлера Ж. Н. Делиль присоединил свои замечания. Дальнейший текст представляет собой русский перевод французского автографа Делиля.

«Г. Эйлер сообщил эту диссертацию г. Крафту [23]. Тот нашел в ней ошибку в вычислении, устранение которой дает поправку углов так, как они указаны здесь для расстояний, указанных рядом во французских футах. Предполагается, что на поверхности Земли взяты

**Таблица**

| Расстояния $AQ$ во французских футах | Рефракция углов $\angle RAM$ | | | Расстояния $AQ$ во французских футах | Рефракция углов $\angle RAM$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 000 | | 1″ | 15‴ | 80 000 | 1 | 40 | 0 |
| 10 000 | | 12 | 30 | 90 000 | 1 | 52 | 30 |
| 20 000 | | 25 | 0 | 100 000 | 2 | 5 | 0 |
| 30 000 | | 37 | 30 | 200 000 | 4 | 10 | 0 |
| 40 000 | | 50 | 0 | 300 000 | 6 | 15 | 0 |
| 50 000 | 1′ | 2 | 30 | 400 000 | 8 | 20 | 0 |
| 60 000 | 1 | 15 | 0 | 500 000 | 10 | 25 | 0 |
| 70 000 | 1 | 27 | 30 | 1 000 000 | 20 | 50 | 0 |

Однако очевидно, что не так уж необходимо, чтобы расстояние между объектом и местом наблюдения было точно известно; может быть достаточной и грубая оценка, так как допущенная в расстоянии ошибка в 100 футов, вызывает [ошибку в определении угла] лишь на одну секунду [24]. Впрочем, эту таблицу не следует распространять на бо́льшие расстояния, так как она была составлена в предположении, что высота $z$ ($MQ$) — исчезающе мала по сравнению с полудиаметром Земли $a$, что при больших интервалах оказывается ошибочным [25].

Сообщено 30 апреля (11 мая) 1739 г.» [26]

## Письмо Л. Эйлера к Ж. Н. Делилю

«Господину
Господину Делилю, члену имп[ераторской] Академии наук, в собственном доме [27]

Милостивый государь,

Я прошу Вас сообщить мне таблицу рефракций, которая извлечена из наблюдений, так как у меня есть только одна копия таблицы г. Буге [28], а мне помнится, что его рефракции для очень малых высот не согласуются с опытом. Итак, поскольку я нашел формулу для вычисления таблицы рефракций в любом месте, где хотя бы одна рефракция получена из наблюдений [29], я очень хотел бы ее выверить.

Остаюсь совершенно Ваш, милостивый государь,
нижайший и покорный слуга
Л. Эйлер

*P. S.* Я прошу Вас также, милостивый государь, вернуть мне эти бумаги [30], которые я у Вас оставил, для того, чтобы можно было все привести в порядок и сделать из нее статью» [31].

## ПРИМЕЧАНИЯ

1 Латинский оригинал Л. Эйлера (автограф хранится в ЛО ААН СССР, ф. 136, оп. 1, № 125, л. 1—2 об.). Копия рукописи, сделанная рукой Ж. Н. Делиля,— в архиве Парижской обсерватории, шифр А 2 1, л. 1—4. Делиль опустил слова «новый стиль» в заглавии статьи.

2 Хоуксби Френсис (Hauksbee Francis, 1666—1713) — английский физик-экспериментатор, мастер по изготовлению научных инструментов. С 1704 г.— демонстратор Лондонского королевского общества. Убежденный ньютонианец. Вероятно, по настоянию Ньютона, тщательно измерил показатель преломления различных жидкостей, вел эксперименты по рефракции и дифракции света. 11 наблюдений Хоуксби по дифракции Ньютон включил во второе издание своей «Оптики» (1717 г.).

3 У Эйлера написано u2.

4 Делиль допустил здесь ошибку при копировании. У него было: $u = 999\,937/1\,000\,000$;

5 29 дюймов 7,5 линий составляют 74,829 см.

6 По-видимому, Л. Эйлер пользуется Делилевой шкалой термометра, имевшей 150 делений. В переводе на шкалу Цельсия $137° = 11°$ C, а $144° = 18°$ C.

7 Здесь Л. Эйлер допустил ошибку в вычислениях, написав 263 вместо 264, которая была замечена Г. В. Крафтом и исправлена в оригинале Л. Эйлера.

8 То есть, $1{,}409\ \text{м} \cdot \frac{ma}{n}$.

9 В современной терминологии — абсцисса. К разделу 4 Эйлер привел чертеж № 1 л. 1 об., который Делилем перенесен в конец статьи.

10 1 парижский фут равен 0,32484 м.

11 По-видимому, здесь имеются в виду эксперименты, представлявшие собой видоизмененное повторение опытов Ж. Н. Делиля 1712 г. по измерению скорости распространения в атмосфере звука грома и света молнии. Они проводились Д. Бернулли и Л. Эйлером летом 1727 г. в Петербурге. При стрельбе из пушки вертикально вверх, измерялись скорость распространения в атмосфере света и звука. На основе этих экспериментов Эйлер пришел к выводу о существовании предела сжимаемости воздуха, что послужило основой для разработки им своеобразной модели

земной атмосферы, применявшейся затем и к атмосферам других небесных тел.

[12] Первоначально у Л. Эйлера было: $bp = 64\ m$. По указанию Делиля в формулу внесена поправка: $b$ — вычеркнуто.

[13] У Эйлера было: 10600. Число зачеркнуто и исправлено на 7181, вероятно, рукой Г. В. Крафта.

[14] Под этой строчкой мелко вписано рукой Г. В. Крафта:

$$z = 22000 l \frac{m}{y} + \frac{22000\,(m-y)}{3p}\ ;\ y = \frac{m\,(22000 - z)}{22000}.$$

[15] У Эйлера буквально: «на уровне моря» (в оригинале: «altitudines supra libellam aqua»).

[16] В оригинале здесь приведен чертеж № 2, который Делиль дал в конце статьи.

[17] У Делиля здесь описка: $\frac{p + \partial p}{a + z + \partial}$.

[18] У Эйлера здесь и ниже — устаревшие обозначения $\sqrt{(1 - xx)}$. В русском переводе дана принятая сейчас система записи.

[19] Здесь и ниже у Эйлера и Делиля много расхождений. Часто путаются $a$ и $\alpha$, $x$ и $\alpha$, скобки и т. д., плюсы вместо минусов и т.п.

[20] «fiet» Эйлера Делиль заменил на «sit».

[21] Делиль допустил здесь описку: в числителе второго члена, стоящего в скобках, вместо $\eta$ написано $y$, а в знаменателе первого члена, стоящего в скобках $(1 - \alpha^2)^{3/2}$ заменено на $(1 - a^2)^3$.

[22] В следующем выражении Делиль допустил описку: заменил $\alpha$ на $a$ в последнем члене левой и втором члене правой части.

[23] Крафт Георг Вольфганг (1701—1754) — профессор физики Петербургской Академии наук, первоначально — сотрудник Ж. Н. Делиля.

[24] Слова в квадратных скобках вставлены нами при переводе.

[25] Л. Эйлер, весьма сильный теоретик, не обладал интуицией астронома-наблюдателя и экспериментатора, поэтому он часто обращался за советом к Ж. Н. Делилю, которого считал искусным наблюдателем и экспериментатором.

[26] В опубликованных протоколах заседаний конференции Петербургской Академии наук нет сведений о представлении этой работы. Возможно, это — дата возвращения работы Л. Эйлера вместе с мнением о ней автору?

[27] Публикуемое ниже письмо Л. Эйлера к Ж. Н. Делилю хранится в парижском архиве Делиля вместе с приведенной выше статьей Эйлера. Письмо представляет собой французский автограф Эйлера. Оно не датировано, написано на развернутом листе. До сих пор не публиковалось и не аннотировалось. Вероятно, записка Л. Эйлера написана тогда же, когда и заключение Ж. Н. Делиля о работе Л. Эйлера, т. е. 30 апреля (11 мая) 1739 г. или несколько раньше.

[28] Бугер Пьер (1698—1758) — французский физик, астроном и гидрограф, привлеченный Ж. Н. Делилем и Ж. Ж. Дорту де Мераном к разработке проблем фотометрии и астрономической рефракции. Делиль имел сравнительную таблицу рефракции по данным различных авторов, в том числе и П. Бугера. Вероятно, таблицу Бугера он и давал Л. Эйлеру для копирования.

[29] Об этой формуле Л. Эйлера нам ничего не известно.

[30] Вероятно, речь идет о приведенной выше статье Л. Эйлера от 26 декабря 1738 г.

31 Нам не известна печатная работа Л. Эйлера, включавшая хотя бы основные идеи этой работы. По-видимому, она осталась неопубликованной. Причину этого также не удалось установить.

# ПРИВЕТСТВЕННАЯ РЕЧЬ НА ПРИЕМЕ, ОРГАНИЗОВАННОМ АКАДЕМИЕЙ НАУК СССР 17 АПРЕЛЯ 1957 г., В ДНИ ЮБИЛЕЙНОЙ СЕССИИ, ПОСВЯЩЕННОЙ 250-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Л. ЭЙЛЕРА[1]

**В. Серпинский**

От имени делегации Польской Академии наук я хочу выразить нашу искреннюю благодарность за то, что нам была дана возможность присутствовать на этой великолепной сессии памяти Эйлера. Мы встретили здесь много наших давних знакомых, знаменитых математиков разных стран, а также познакомились со многими новыми, которых научные труды были нам знакомы, но которых мы не знали лично. Мы выслушали много чрезвычайно интересных докладов и провели много разговоров на научные темы, видели превосходную выставку, посвященную Эйлеру. Мы очень благодарны организаторам сессии за все это и еще за то, что дали нам возможность посетить город и его окрестности, а в частности посетить Эрмитаж, где мы увидели несчетное множество славных картин. Благодарим также за прекрасную медаль в честь Эйлера, которую мы получили. Эта чрезвычайно удачная сессия надолго останется в нашей памяти.

Поднимаю этот бокал за дружество между математиками всех стран.

---

[1] Редакция публикует здесь тексты двух речей, произнесенных В. Серпинским (1882—1969), членом Академии наук Польской Народной Республики, и М. Фреше (1878—1973), членом Академии наук Института Франции, на официальном приеме, организованном Академией наук СССР, в дни Юбилейной Сессии, посвященной 250-летию со дня рождения Л. Эйлера (Ленинград, 15—18 апреля 1957 г.). Оригиналы обеих речей хранятся у А. П. Юшкевича, бывшего Ученым Секретарем Оргкомитета сессии; он же перевел речь М. Фреше с французского. В. Серпинский произнес свою речь на русском языке.

# ПРИВЕТСТВЕННАЯ РЕЧЬ НА ПРИЕМЕ, ОРГАНИЗОВАННОМ АКАДЕМИЕЙ НАУК СССР 17 АПРЕЛЯ 1957 г. В ДНИ ЮБИЛЕЙНОЙ СЕССИИ, ПОСВЯЩЕННОЙ 250-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Л. ЭЙЛЕРА

**М. Фреше**

Господин председатель![1]
Дамы, господа

Я думаю, что побил здесь два рекорда. В самом деле, среди зарубежных делегатов я — старший по возрасту и я же проделал самый долгий путь, чтобы приехать сюда. На языке математиков это два максимума, которые можно назвать почти несовместимыми. Я упоминаю об этом, чтобы показать, какое значение я придаю настоящим торжествам в честь Эйлера. Могу к этому добавить, что непременные секретари нашей Академии энергично настаивали на том, чтобы я принял приглашение представлять ее здесь. Они считали важным прежде всего засвидетельствовать наше восхищение гением Эйлера и нашу признательность за его гигантский вклад в прогресс науки. Они хотели также напомнить о научных, хотя и не топографических связях между Эйлером и нашей Академией. Наконец, непременные секретари желали подчеркнуть то важное значение, которое они придают укреплению связей между советскими и французскими математиками.

Позвольте остановиться на этих двух пунктах.

Слушая вчера доклад г. Шрёдера [2], я сожалел, что мое несовершенное знание немецкого языка позволяло мне уловить его содержание лишь частично. Но, во-первых, я понял достаточно, чтобы заметить, что в этом докладе

---

[1] Председатель, названный в первых словах речи М. Фреше, это академик М. А. Лаврентьев (1900—1980), бывший Председателем Оргкомитета Юбилейной сессии.— *Примеч. ред.*

[2] К. Шрёдер — член Академии наук ГДР, возглавлявший делегацию этой Академии на Юбилейной сессии. Доклад Шрёдера «О трудах Леонарда Эйлера в области прикладных наук», упоминаемый Фреше, опубликован в сборнике «Леонард Эйлер». М.: Изд-во АН СССР, 1958.— Примеч. ред.

Академики В. Серпинский и М. Фреше рядом с бюстом Л. Эйлера

содержались как интересные, иногда даже забавные частности, так и глубокие мысли. Далее, я заметил, что г. Шрёдер нередко возвращался к имени Даламбера, Лежандра, Мопертюи, Лагранжа. Это подтверждает слова, сказанные мною позавчера о благотворном влиянии Эйлера на французских математиков и обратно [3].

Впоследствии, благодаря (по крайней мере, отчасти) деятельности Эйлера, его преемники в России продолжали изучать французские труды. Некоторые из этих преемников поддерживали тесные личные связи со своими французскими коллегами и даже публиковали свои труды преимущественно на французском языке. И, наоборот, ваши великие математики Лобачевский, Чебышев, Марков, Ляпунов и многие другие вызывали у нас восхищение, и труды их были нередко продолжены также и во Франции.

Я ограничусь в подтверждение сказанного только личными воспоминаниями. Так, в курсе Эмиля Бореля, который я имел честь подготовить к печати, тщательно исследуются многочлены Чебышева. Я подготовил также

---

[3] Текст краткой речи, произнесенной М. Фреше на Юбилейной сессии 15 апреля 1957 г., к сожалению, не сохранился.— *Примеч. ред.*

в свое время к печати книгу по теории вероятностей о цепях, названных мною цепями Маркова—Пуанкаре. Я мог бы значительно умножить известные примеры взаимодействия русских и французских математиков дореволюционного времени.

Разрешите мне пойти далее и привести еще некоторые примеры из моей личной работы, ибо они будут для большинства из Вас новыми, а также потому, что они относятся ко времени после Октябрьской революции.

Вскоре после войны 1914—1919, когда я был еще довольно молод, я как-то получил письмо двух молодых советских математиков — Павла Александрова и Павла Урысона. Они познакомились с моими первыми работами по теории абстрактных пространств и сообщали, что намерены изучать эти пространства и желают вступить со мной в контакт по этим вопросам.

Так началась переписка, явившаяся для меня весьма поучительной. К несчастью, смерть похитила Урысона, причем как раз во Франции, во время купания в море и это явилось для науки огромной потерей, ибо несмотря на свою короткую научную жизнь, Урысон оставил значительное по объему и крайне важное по содержанию наследие. Благодаря преданности его друга Павла Александрова рукописные труды Урысона смогли быть собраны, дополнены, подготовлены к печати и опубликованы. Мы обязаны Александрову множеством личных весьма важных и хорошо известных открытий, но я хочу подчеркнуть, насколько мы обязаны ему за то бескорыстие, с которым он ознакомил нас с творчеством его друга, жертвуя для этого столь многими часами, которые мог бы использовать для собственных исследований [4].

Павлу Александрову я обязан также знакомством с вашим соотечественником профессором Колмогоровым, с которым меня соединили как научные, так и личные дружественные связи. Я с гордостью вспоминаю, что мог в одной из моих книг отвести важное место его работам по теории вероятностей и тем самым лучше ознакомить с последними французских читателей.

Я ограничиваюсь этими примерами, относящимися к областям, которыми занимаюсь лично. Но Вы, несомнен-

---

[4] О письмах П. С. Александрова и П. С. Урысона к М. Фреше см. статью Л. К. Арболеда «Рождение советской топологической школы».— Ист.-мат. исследования, 1980, вып. XXV.— *Примеч. ред.*

но, уже знаете от г. Данжуа о его плодотворных научных связях с покойным Лузиным и многими другими Вашими соотечественниками [5].

Между советскими и французскими математиками, и самыми крупными и самыми начинающими, установились в высшей степени плодотворные письменные, а также личные связи во всех областях. Конечно, политические события иногда замедляли, иногда даже полностью задерживали развитие этих связей.

Но теперь времена изменились, я могу сообщить, между прочим, что уже достигнуто соглашение о взаимном обмене между Москвой и Парижем советниками по делам культуры наших посольств. Этой доброй новостью я и хочу закончить, дамы и господа, свое слишком долгое выступление. Я пью за укрепление связей между советскими и французскими математиками. В самом деле, такие контакты устанавливаются наиболее естественным и дружеским образом между людьми, занимающимися одинаковыми вещами. И если эти связи укреплять, то близким станет время, когда осуществятся идеи одного нашего поэта, стихи которого начинаются словами.

«Если бы парни всего мира...» [6], — словами, ставшими названием фильма, который идет сейчас в кинематографах Москвы и Ленинграда. В этой надежде я предлагаю поднять Ваши бокалы, даже если они уже пустые.

---

[5] О переписке члена Академии наук Института Франции А. Данжуа (1884—1974) с академиком Н. Н. Лузиным см. соответствующие публикации в Ист.-мат. исследованиях, 1978, вып. XXIII и 1980, вып. XXV.— *Примеч. ред.*

[6] Полнее эта фраза такова: «Если бы парни всего мира могли пожать друг другу руку...».— *Примеч. ред.*

## ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ У ДИОФАНТА И АЛ-КАРАДЖИ

Б. А. Розенфельд

Хорошо известно, что системы линейных уравнений решались в древне-китайской «Математике в девяти книгах» методом «фан-чэн» [1, с. 44]. В «Арифметике» Диофанта имеется одна задача, сводящаяся к системе 3 линейных уравнений с 3 неизвестными — задача $\mathrm{II}_{18}$, однако в сохранившемся греческом тексте приведено только условие задачи и не указан способ ее решения. Текст задачи гласит: «Данное число разложить на три такие числа, чтобы каждое полученное от разложения число превышало следующее за ним на заданную часть и еще на заданное число и все давшие и получившие числа сделались бы равными. Пусть требуется 80 разложить на три такие числа, чтобы 1-е давало 2-му свою пятую часть и еще 6, 2-е же 3-му — 6-ю часть и 7, а 3-е 1-му — 7-ю часть и 8, и чтобы после обмена все сделались равными» [2, с. 69]. П. Таннери считал эту задачу, находящуюся среди задач на неопределенные уравнения, позднейшей вставкой, но «взятой из древнего комментария к книге I» [2, с. 68]. Однако вопрос этот отнюдь не ясен.

Как видно, автор этого текста, говоря «следующее за ним», предполагает циклическую упорядоченность трех чисел. Если обозначить эти числа $x$, $y$ и $z$, задача выражается тремя уравнениями

$$x+y+z=80, \tag{1}$$

$$x-\left(\frac{x}{5}+6\right)+\left(\frac{z}{7}+8\right)=y-\left(\frac{y}{6}+7\right)+\left(\frac{x}{5}+6\right)=$$
$$=z-\left(\frac{z}{7}+8\right)+\left(\frac{y}{6}+7\right).$$

Аналогичная задача имеется в трактате «Ал-Фахри» ал-Караджи (X—XI вв.), содержащем большое число задач как из сохранившегося до нашего времени греческого текста «Арифметики» Диофанта, так и из арабской рукописи, именуемой в оригинале переводом IV—VII книг «Арифметики» Диофанта, хотя, быть может, она принадлежит не самому Диофанту, а какому-либо представителю его школы [3]. В отличие от греческого текста «Арифметики» в тексте «Ал-Фахри» приведено решение этой задачи, во много раз превышающее по размерам решения остальных задач, заимствованных ал-Караджи у Диофанта (в парижской рукописи [4] это решение начинается на л. 88 и заканчивается на л. 89 об., в то время как решение остальных задач Диофанта занимают у ал-Караджи, как правило, меньше листа). Эта задача $\mathrm{III}_{40}$ формулируется ал-Караджи так: «Пятьдесят дирхемов разделены между тремя людьми и если первый отдает второму треть его [части] и два дирхема, второй отдает третьему четверть его [части] и три дирхема, а третий отдает первому одну пятую его [части] и четыре дирхема, то после взятия и отдавания будет равенство» [4, л. 88]. Сохраняя прежние обозначения, можно записать условие этой задачи; аналогично (1)

$$x+y+z=50, \tag{2}$$

$$x-\left(\frac{x}{3}+2\right)+\left(\frac{z}{5}+4\right)=y-\left(\frac{y}{4}+3\right)+$$

$$+\left(\frac{x}{3}+2\right)=z-\left(\frac{z}{5}+4\right)+\left(\frac{y}{4}+3\right).$$

Однако ал-Караджи не вводит три неизвестных, а вводит только одну неизвестную — «вещь», которую мы обозначим $x$. Он пишет: «Прими имущество первого за вещь, а имущество второго за восемь дирхемов» [4, л. 88]. Таким образом, в наших обозначениях, ал-Караджи полагает $y_1=8$, откуда в силу 1-го уравнения (2) $z_1=$ $=50-x_1-y_1=42-x_1$. Ал-Караджи подставляет значение $y_1=8$ во 2-е и 3-е уравнения системы (2) и получает

$$y_1-\left(\frac{y_1}{4}+3\right)+\left(\frac{x_1}{3}+2\right)=5+\frac{x_1}{3}$$

и

$$x_1-\left(\frac{x_1}{3}+2\right)+\left(\frac{z_1}{5}+4\right)=5+\frac{x_1}{3},$$

откуда $z_1=15-1\frac{2}{3}x_1$,

$$z_1 - \left(\frac{z_1}{5} + 4\right) + \left(\frac{y_1}{4} + 3\right) = 5 + \frac{x_1}{3},$$

откуда $z_1 = 5 + \frac{5}{12} x_1$.

Исключение $z_1$ дает $5x_1 = 24$, откуда $x_1 = 4\,{}^4/_5$, а подстановка $x_1$ в каждое из этих двух уравнений дает $z_1 = 7$. Однако эти значения $x_1$, $y_1$ и $z_1$ не удовлетворяют 1-му уравнению (2), так как

$$x_1 + y_1 + z_1 = 19\,{}^4/_5.$$

Найдя, что «сумма того, что у [всех] троих — девятнадцать и четыре пятых дирхема», ал-Караджи пишет: «Но это было бы верным, если бы эта сумма была равна пятидесяти. Поэтому будем решать задачу снова и положим то, что у первого, вещью, а то, что у второго,— двенадцатью дирхемами» [4, л. 88 об.]. Таким образом, теперь мы имеем вещь $x_2$, $y_2 = 12$, а подставляя это значение во 2-е и 3-е уравнение системы (2), будем иметь

$$y_2 - \left(\frac{y_2}{4} + 3\right) + \left(\frac{x_2}{3} + 2\right) = 8 + \frac{x_2}{3}$$

и

$$x_2 - \left(\frac{x_2}{3} + 2\right) + \left(\frac{z_2}{5} + 4\right) = 8 + \frac{x_2}{3},$$

откуда $z_2 = 30 - 1\frac{2}{3} x_2$,

$$z_2 - \left(\frac{z_2}{5} + 4\right) + \left(\frac{y_2}{4} + 3\right) = 8 + \frac{x_2}{3},$$

откуда $z_2 = 7\frac{1}{2} + \frac{5}{12} x_2$.

Аналогично предыдущему находится $x_2 = 10\,{}^4/_5$ и $z_2 = 12$. Эти значения также не удовлетворяют 1-му уравнению (2):

$$x_2 + y_2 + z_2 = 34\,{}^4/_5.$$

Далее ал-Караджи пишет: «Если ты прибавил к тому, что у тебя было, разность, [равную] четырем дирхемам, то число суммы у [всех] троих увеличилось на пятнадцать дирхемов. Поэтому для каждого дирхема [разности] — дирхем с половиной и с четвертью [в сумме]. Чтобы получить пятьдесят, необходимо увеличить не на пятнадцать, а на тридцать дирхемов с одной пятой. Поэтому если для одного дирхема прибавляются три с половиной и с четвертью, то смотри, сколько дирхемов нужно прибавить для тридцати и одной пятой: для этого раздели тридцать дирхемов и одну пятую на три с половиной и с четвертью, в частном получится восемь и четыре семьдесят пятых единицы. Поэтому решай задачу снова, положив [то, что] у первого, вещью, а то, что у второго,— шестнадцатью и четырьмя семьдесят пятыми единицы» [4, л. 89].

Таким образом, метод, с помощью которого ал-Караджи решает систему (2), состоит в сочетании «метода алгебры» с методом двойного ложного положения: найдя при первом ложном положении $y_1 = 8$ сумму $\Sigma_1 = x_1 + y_1 + z_1 = 19^4/_5$, а при втором ложном положении $y_2 = 12$ найдя $\Sigma_2 = x_2 + y_2 + z_2 = 34\,^4/_5$, он находит, что при приращении $\Delta y = y_2 - y_1 = 4$ приращение суммы $\Delta\Sigma = 15$ и, считая зависимость $\Delta\Sigma$ от $\Delta y$ линейной, а $\Sigma = 50$, составляет пропорцию

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{\sum - \sum_1}{\sum_2 - \sum_1}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{y-8}{4} = \frac{50 - 19^4/_5}{15} = \frac{30^1/_5}{15},$$

откуда

$$y - 8 = \frac{4 \cdot 30^1/_5}{15} = 8^4/_{75}$$

и $y = 16^4/_{75}$. Далее, подставляя это значение $y$ во 2-е и 3-е уравнения (2), он получает

$$y - \left(\frac{y}{4} + 3\right) + \left(\frac{x}{3} + 2\right) = 11\frac{1}{25} + \frac{x}{3}$$

и $$x - \left(\frac{x}{3} + 2\right) + \left(\frac{z}{5} + 4\right) = 11\frac{1}{25} + \frac{x}{3},$$

$$z = 45\frac{15}{75} - 1\frac{2}{3}x,$$

$$z - \left(\frac{z}{5} + 4\right) + \left(\frac{y}{4} + 3\right) = 11\frac{1}{25} + \frac{x}{3},$$

$$z = 10\frac{1}{30} + \frac{5}{12}x.$$

Исключение $z$ дает $422 = 25x$, т. е. $x = 16^{22}/_{25}$, откуда $z = 17^1/_{15}$. Теперь решение найдено, ибо

$$x + y + z = 16^{22}/_{25} + 16^4/_{75} + 17^1/_{15} = 50.$$

Вопрос о том, кому принадлежит это решение, остается открытым. Это решение могло содержаться в той части греческого оригинала «Арифметики» Диофанта, которая не дошла до нас, могло принадлежать, как полагал Таннери, неизвестным «древним комментаторам» «Арифметики», наконец, могло принадлежать самому ал-Караджи или его арабским предшественникам. Следует отметить, что метод двойного ложного положения, применяемый в этом решении, еще не выражен в той алгоритмической форме, в которой он уже ранее применялся учеными арабского мира при решении одного линейного уравнения с одним неизвестным [1, с. 203—204; 5], поэтому возможно более древнее происхождение этого решения.

Автор выражает большую благодарность А. П. Юшкевичу за ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юшкевич А. П.* История математики в средние века. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Диофант Александрийский.* Арифметика и Книга о многоугольных числах/Пер. И. Н. Веселовского; ред. и комм. И. Г. Башмаковой. М.: 1974.
3. *Башмакова И. Г., Славутин Е. И., Розенфельд Б. А.* Арабская версия «Арифметики» Диофанта.— ИМИ, 1978, вып. XXIII, с. 192—225.
4. *Ал-Караджи Абу Бакр.* Китаб ал-Фахри фи-л-джабр ва-л-мукабала. Рукопись Парижской Национальной библиотеки. 2459.
5. *Выгодский М. Я.* Происхождение «правила двух ложных положений».— ИМИ, 1960, вып. XIII, с. 231—252.

## ОБ «ИСТОРИЧЕСКОМ И ПРАКТИЧЕСКОМ ТРАКТАТЕ ПО АЛГЕБРЕ» ДЖОНА ВАЛЛИСА

**Т. А. Токарева**

*1. К автобиографии Дж. Валлиса.* Когда всеми признанный профессор геометрии из Оксфорда Джон Валлис (Уоллис) (1616—1703) достиг 80-летнего возраста, он, в ответ на неоднократные просьбы доктора Томаса Смита (1638—1710) (его друга и члена Совета колледжа Магдалины в Оксфорде), взялся за составление своей автобиографии. «Воспоминания о моей жизни»—автобиография Валлиса сохранилась в бумагах Смита, найденных в Бодлеанской библиотеке в Оксфорде.

«Воспоминания» были написаны под диктовку, исправлены самим Валлисом, а также дополнены рукой Смита, на основании замечаний Валлиса, появившихся позднее. Впервые автобиография была опубликована в начале XVIII в. Херном — это издание хранится в Бодлеянской библиотеке. В 1970 г. Кристоф Скриба, после тщательного изучения манускриптов Бодлеянской библиотеки и Британского музея опубликовал автобиографию вместе со своими исследованиями и замечаниями [1].

Кроме окончательного варианта автобиографии, посланного в письме к Смиту от 15 апреля 1697 г., который часто прямо или косвенно используется биографами Валлиса, существует еще и первый вариант, неполный и плохо сохранившийся. Оба эти текста, после транскрибирования Скриба приводит в [1].

«Воспоминания» представляют интерес не только для биографов Валлиса, но и для гражданских историков, так как в них отражена история возникновения Лондонского королевского общества, а также жизнь Собрания богословов в Вестминстре.

Ниже ограничимся минимумом биографических фактов, необходимым для возможно более полного понимания алгебраического творчества великого английского ученого и общественного деятеля XVII в.

Джон Валлис родился 23 ноября 1616 г. в Ашфорде (графство Кент), а умер 28 октября 1703 г. в Оксфорде, где и был погребен в церкви св. Марии. Эпитафия гласит: «Здесь покоится Джон Валлис — доктор теологии, профессор геометрии и хранитель Оксфордского Архива. Он оставил бесценные труды...» (далее приводится перечень этих трудов).

Первоначальное, в основном языковое, образование Валлис получил в грамматических школах. Он изучил греческий и латынь достаточно, чтобы читать произведения античных классиков в подлинниках, а также иврит, что позволило ему через некоторое время прочесть Библию на языке оригинала.

Первое знакомство с математикой произошло в 14 лет (1631), когда Валлис во время школьных каникул заинтересовался занятиями брата по бухгалтерскому учету. «...В течение нескольких дней моего прибывания в Ашфорде,— пишет Валлис,— я проявил большой интерес к тому, чем занимался мой брат, ...и он, чтобы удовлетворить мою любознательность показал мне кое-что из того, чему обучался сам в течение 3-х месяцев... Среди прочего... я изучал практическую арифметику...Поскольку брат объяснял мне все по той же методике, по которой занимался сам и на тех же примерах, я понял все без особого труда, чему был очень рад и решил, что не без пользы провел 10—14 дней..., это было моим первым введением в математику и единственным, что я знал по этому предмету....» [1, с. 26—27].

Следующей ступенью в процессе математического образования был Эммануэль колледж Кембриджского университета, куда Валлис поступил в 1632 г. Здесь он совершенствовался в языках, натурфилософии, богословии, а все свободное время посвятил изучению трудов античных авторов по математике, а также математических произведений на новых языках. Занятия эти никем не направлялись.

Английская буржуазная революция (1640—1666 гг.) сообщила мощный импульс развитию естествознания. В Англии стали создаваться научные общества, издаваться научные бюллетени. С 1645 г. в Лондоне начали собираться конференции ученых, и Валлис, будучи секретарем Собрания богословов Вестминстра (с 1644 г.), осуществлял связь между Собранием и многими крупными естествоиспытателями того времени. Кружок ученых, в работе которого принимал участие Валлис, вырос затем в Лондонское королевское общество, а Валлис стал одним из первых его членов и ведущим математиком до вступления в него в январе 1672 г. И. Ньютона.

Серьезные занятия математикой вообще и алгеброй в частности начинаются в 1647—1648 гг., о чем говорит сам Валлис в XLVI главе «Исторического и практического трактата по алгебре» [2, гл. XLVI, с. 175—177]. «...Приблизительно в году 1647 (или в начале 1648), когда я был еще очень молодым алгебраистом (мало знакомым с достижениями алгебры, так как не было никого, кто мог бы меня с ними познакомить), мне случайно попалось первое издание книги «Ключ к математике» г-на Оутреда, опубликованной в 1631 г. ...Обнаружив, что несмотря на упоминание кубических уравнений, он не дал способа их решения (как сделал это в отношении квадратных), я рискнул попытаться разработать способ их решения» [2, гл. XLVI, с. 175]. «...Эти правила дают тот же результат, что и правило Гарриота или те, которые приводит Декарт под названием «Правила Кардано» (и о которых я в то время не имел ни малейшего представления). Однако мой метод яснее и естественнее, чем метод Гарриота и оба эти метода проще метода Кардано...» [там же, с. 177].

Свои методы Валлис в 1648 г. сообщил Джону Смиту (1618—1652) (члену Совета Королевского колледжа в Кембридже и профессору математики этого университета) и изложил в послании от 5 декабря 1656 г. к Вильяму Броункеру, которое явилось предисловием к «Трактату, опровергающему диалог о пропорциональности М. Мейбома» (Adversus Marci Meibomii de proportionibus Dialogum Tractatus Elencticus) [3, с. 229—290, предисловие с. 231—256], опубликованному в 1657 г.

С 14 июня 1649 г. Дж. Валлис становится профессором Севилевой кафедры геометрии в Оксфорде. Это назначение и избрание его хранителем университетского Архива определили дальнейшую судьбу Валлиса.

В соответствии с занимаемой должностью он читал лекции по 13 книгам «Начал» Евклида, «Коническим сечениям» Аполлония, работам Архимеда, а также курсы лекций по практической и теоретической геометрии, тригонометрии,' механике и теории музыки.

2. *«Всеобщая математика или полный курс арифметики»*. Результатом лекций по элементарной математике явилось опубликованное в 1657 г. и вошедшее в I том собрания математических трудов (1693—1699 гг., первое алгебраическое произведение Валлиса «Всеобщая математика или полный курс арифметики» [3, с. 12—288].

Работа эта состоит из 45 глав и предисловия, датированного 20 декабря 1656 г. Чисто алгебраическими можно считать следующие 6 глав: гл. XI «Об обозначении алгебраическом или буквенном» [с. 52—60]; гл. XV «Алгебраическое или буквенное сложение и вычитание» [с. 70—73]; гл. XX «Алгебраическое или буквенное умножение и деление» [с. 102—112]; гл. XXIII «Вторая книга «Начал» Евклида, изложенная и доказанная арифметически» [с. 123—127]; гл. XXXV—XXXVI «Пятая книга «Начал» Евклида, изложенная и доказанная арифметически» и «Ее краткое обозрение» [с. 182—196].

В XI главе закладывается, по словам Валлиса «фундамент алгебры», вводятся алгебраические обозначения, формулируется основной теоретический принцип — «алгебра есть не что иное как арифметика, а не геометрия» [с. 56]. XV и XX главы — задаются операции над алгебраическими выражениями. И наконец, в XXIII,

| Nomina | Characterer | | | | | Potestas seu gradus |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Radix | ℓ | R | A | a | a | 1 |
| Quadratum | ʒ | Q | Aq | aa | $a^2$ | 2 |
| Cubus | 𝒞 | C | Ac | aaa | $a^3$ | 3 |
| Quad. quadratum | ʒ ʒ | QQ | Aqq | aaaa | $a^4$ | 4 |
| Surdesolidum | ß | S | Aqc | &c. | $a^5$ | 5 |
| Quad. Cubi. | ʒ 𝒞 | QC | Acc | | $a^6$ | 6 |
| 2^m Surdesolidum | B ß | bS | Aqqc | | $a^7$ | 7 |
| Quad. quad. quad. | ʒ ʒ ʒ | QQQ | Aqcc | | $a^8$ | 8 |
| Cubi cubus | 𝒞 𝒞 | CC | Accc | | $a^9$ | 9 |
| Quad. Surdesol | ʒ ß | QS | Aqqcc | | $a^{10}$ | 10 |
| 3^m Surdesolidum | C ß | cS | Aqccc | | $a^{11}$ | 11 |
| Quad. quad. cubi | ʒ ʒ 𝒞 | QQC | Acccc | | $a^{12}$ | 12 |
| 4^m Surdesolidum | D ß | dS | Aqqccc | | $a^{13}$ | 13 |
| Quad. 2^i Surdesol. | ʒ B ß | QbS | Aqcccc | | $a^{14}$ | 14 |
| Cubus Surdesol. | 𝒞 ß | CS | Accccc | | $a^{15}$ | 15 |
| Quad. quad. quad. quad. | ʒ ʒ ʒ ʒ | QQQQ | Aqqcccc | | $a^{16}$ | 16 |

XXXV—XXXVI главах Валлис демонстрирует все преимущества «новой арифметической алгебры». XXIII глава — «геометрическая алгебра» греков (вторая книга «Начал») переведена на язык новой алгебры, а в XXXV—XXXVI главах арифметически изложена теория отношений Евдокса.

Уже во «Всеобщей математике» отчетливо проявляется тенденция Валлиса рассматривать любую проблему и в историческом аспекте. Так, в предисловии [с. 14—16] он дает общие сведения из истории алгебры, делит алгебру на «алгебру» и «новую алгебру» [с. 16], начинающуюся с Виета. По ходу изложения прослеживает эволюцию числовых и буквенных обозначений. В главе XI [с. 55] приводится таблица знаков (рис. 1), применяемых для записи алгебраических выражений коссистами (2-й столбец), Виетом (3-й столбец), Оутредом (4-й столбец), Гарриотом (5-й столбец) и Декартом (6-й столбец). Валлис отмечает, что Оутред наряду с символами $A_q$, $A_c$ использует также $AA$ и $AAA$ соответственно, Гарриот вторую степень обозначает $aa$, а третью — $a^3$, как и Декарт.

«Всеобщая математика» явилась отправным пунктом для дальнейших исследований. Она поставила проблемы, наметила пути и методы исследований, которые нашли свое продолжение и завершение в «Историческом и практическом трактате по алгебре».

3. *Краткая история публикации и структура «Трактата по алгебре».* Последним крупным произведением Валлиса является «Исторический и практический трактат по алгебре», впервые опубликованный в 1685 г. Валлис собирался издать этот труд сразу же после выхода «Всеобщей математики», причем на английском языке, для того, чтобы он был доступен широкому кругу читателей, но по ряду случайных причин, как пишет сам Валлис в предисловии к трактату от 20 ноября 1684 г., это осуществить не удалось.

Трактат был в основном завершен и направлен в Лондон для перепечатки в 1676 г., причем многие его части, как это видно из текста, были написаны значительно раньше. Один лист был напечатан в качестве образца, а перепечатка остального была приостановлена вплоть до августа 1683 г. Окончательно же это произведение вышло из печати в 1685 г. (латинский вариант помещен во II томе собрания математических трудов).

«В трактате,— по словам автора,— содержатся сведения о зарождении, развитии и распространении того предмета, который мы теперь называем алгеброй, начиная с древнейших времен... до современности (т. е. до середины XVII в.)» [2, с. 1 Предисловия].

«Трактат по алгебре» состоит из 100 глав и предисловия — всего около 400 страниц (точнее 9 + 344). Историко-научные исследования здесь тесно переплетаются с теоретическими выкладками.

Предисловие знакомит нас с планами автора. Характер его чисто исторический.

Весь трактат можно разделить на три части — 2 алгебраических, посвященных «предыстории алгебры» (гл. I—XIV) и «собственно алгебре» (гл. XV — LXXII); и третью (гл. LXXIII—XCIX), в которой повторяются основные моменты «Арифметики бесконечных», содержание методов неделимых и исчерпывания, новые результаты Ньютона. Создается впечатление, что все материалы условно выделенной нами третьей части помещены здесь 1) с целью их широкого внедрения в математическую практику; 2) для Валлиса это была итоговая математическая работа и именно в третьей части отражены в той или иной мере все его основные достижения; 3) во многих письмах этого периода Валлис выражал величайшую тревогу о том, что научные результаты его соотечественников, в частности Ньютона, останутся незамеченными или будут перехвачены иностранцами. Так в письме к Ольденбургу от 21 марта 1666 г. он писал: «Я хотел бы чтобы наши ученые были более расторопными, чем я их нахожу вообще (особенно наиболее выдающихся), в своевременном опубликовании своих открытий, чтобы не дать иностранцам присвоить честь открытий, сделанных ими» (Royal Society Guard Book, [4, с. 154]). С целью закрепления приоритета Ньютона в создании метода флюксий и метода приближенного решения уравнений, о которых Валлис узнал из писем Ньютона к Ольденбургу от 13 июня и 24 октября 1676 г., он счел необходимым поместить содержание этих методов в XCI, XCV главах трактата.

4. *Предыстория алгебры.* Первые 14 глав трактата [2, гл. I—XIV, с. 1—66] являются как бы предысторией алгебры. Они начинаются с разговора об этимологии слова алгебра, о предмете и содержании этого предмета; о развитии системы исчисления; приводится история происхождения, распространения и использования современных цифр, говорится о шестидесятиричных, десятичных дробях и логарифмах. Здесь же Валлис устанавливает основные вехи развития алгебры, естественно связывая их с именами: Диофанта, ал-Хорезми, Луки Пачоли, Ф. Виета.

I. Историю алгебры Валлис начинает с Древней Греции [2, гл. II, с. 3—7]. Кратко говорит о достижениях Евклида, Платона, Паппа, Архимеда и Диофанта. Акцент делается на последнем «...наибольшее представление об алгебре из всех греческих авторов дает нам Диофант Александрийский, написавший алгебру в 13 книгах, из которых в настоящее время сохранились шесть, озаглавленные Arithmeticorum Libri sex (Арифметика в 6 книгах), а также книга De numeris Multangulis (О многоугольных числах). Мне стало известно, что ученый Воссиус (голландский историк математики XVI в. (1547—1600) считает, что остальные материалы сохранились в рукописях императора Льва, которые находятся во французской королевской библиотеке в Париже...» [2, гл. II, с. 4].

Оценка Валлисом символики Диофанта весьма современна. Он одним из первых в истории математики отмечает, что у Диофанта делается попытка обозначить буквами не только неизвестные, но и известные величины.

II. Далее Валлис переходит к рассмотрению арабского периода истории алгебры. «...После Диофанта... это учение продолжили арабские авторы... от них и пошло название алгебра...» [2, гл. II, с. 5]. Отмечается, что наиболее значительные результаты в области алгебры принадлежат ал-Хорезми. Складывается впечатление, что с конкретными арабскими источниками Валлис не был знаком. В частности, во «Всеобщей математике» [3, с. 159—160] он при рассмотрении геометрических прогрессий приводит отрывок арабского текста и затем дает его латинский эквивалент, ссылаясь при этом на своего друга Д. Покока, сделавшего ему этот перевод, из чего следует, что сам Валлис не владел языком и знакомился с арабскими текстами на основании переводов.

Науке арабского Востока Валлисом отводится решающая роль в процессе становления алгебры, потому что:

1) алгебра стала известна в Европе от арабов (через Испанию), когда в XI—XII вв. проявился повышенный интерес к арабским источникам;

2) значительным толчком в развитии алгебры явились «арабские цифры».

В «Трактате по алгебре» Валлис продолжает начатый во «Всеобщей математике» разговор об анализе понятия «цифра».

Введение в обращение арабских цифр в Европе Валлис относит примерно к XI в. и говорит, что это имело два положительных эффекта: 1) десятичные дроби (Региомонтан, Стевин, Бриггс) [2, гл. VIII—IX, с. 22—35]; 2) логарифмы (Непер, Бриггс, Геллибранд) [2, гл. XII, с. 59—61].

III. Дальнейшее развитие алгебры (по Валлису) связано с достижениями европейских авторов до Виета. «...Самый древний печатный труд по алгебре, который мне пришлось увидеть, принадлежит Луке Пачоли. Труд был опубликован на итальянском языке в Венеции в 1494 г. и переиздан в 1523 г. под названием «Summa de arithmetica, proportioni et proportionalità» [2, гл. XIII, с. 61]. Это произведение явилось своего рода эталонным, так как большинство последователей Пачоли вплоть до Виета в своих работах сохраняли и последовательность изложения и перечень проблем, которые он затрагивал. Валлис приводит краткое содержание «Суммы» [2, гл. XIII, с. 62]. Далее упоминается об алгебраических работах М. Штифеля, Дж. Кардано, Р. Бомбелли и других. Валлис считает их написанными в одном ключе с «Суммой». Основные черты этих произведений:

— теория уравнений рассматривается в основном до квадратного включительно; Бомбелли, Кардано, Тарталья — до третьей степени, Дель-Ферро — до четвертой;

— символика, имеющая арабскую природу, основана на мультипликативном принципе образования степеней.

IV. С именем французского математика Франсуа Виета связано появление «новой алгебры» (термин, введенный Валлисом во «Всеобщей математике»).

«...После того, как алгебра... получила распространение в Европе и развилась до такой степени, что научилась решать все виды квадратных уравнений и большую часть кубических... Франсуа Виет значительно усовершенствовал ее введением «Видовой арифметики» (Specious arithmetik), в которой значками и символами обозначались не только неизвестные, но и известные величины. Все действия арифметики, которые раньше производились с обычными цифрами, стали производиться со значками и символами...» [2, гл. XIV, с. 64].

Валлис демонстрирует метод Виета на примерах, а затем высказывает интересные замечания по поводу происхождения «Видовой арифметики». «...Адвокаты, описывая случаи судебной практики, применяют нарицательные имена (которые могут означать любое замешанное в дело лицо) и эти имена называют «species». Для краткости они стали сокращать в последнее время эти имена до начальных букв... Я полагаю, что Виет, знакомый с языком юристов, дал буквенным обозначениям $A$, $B$, $C$ и т. д. названия «species». Он использовал буквы по своему усмотрению для обозначения любых чисел или величин... Соответственно применение действий арифметики к числам, обозначенным символами или «species» было названо «Arithmetica speciosa» или «Specious arithmetik»».

Основную заслугу Виета Валлис видит в том, что он возродил принцип построения алгебры Диофанта, дал новое толкование правилам алгебры, созданной его ближайшими предшественниками и современниками, а также «...добавил множество своих изобретений, которые отличало понимание смысла этих правил и делало их применение более удобным...» [там же].

На этом кончается та часть трактата, которую мы условно назвали «предысторией алгебры». Прежде чем перейти к «собственно алгебре», следует отметить, что это условное разбиение объясняется тем, что Валлис рассматривает все проблемы под углом зрения развития алгебры в Англии, «предыстория» — это доанглийский период, а «собственно алгебра» — новая алгебра, возникшая в Англии в XVII в.

*5. Алгебра Джона Валлиса.* Собственно алгебре посвящены главы XV — LXXII [2, с. 67—280]. В качестве вспомогательного материала здесь Валлис использует:

1) Clavis Mathematica («Ключ к математике») 1631 г. В. Оутреда.

2) Artis analyticae praxis («Практика аналитического искусства») 1631 г. Т. Гарриота.

3) An Introduction to Algebra («Введение в алгебру») 1668 г. Дж. Пелля.

I. Как уже говорилось, «Ключ к математике» Вильяма Оутреда оказал на Валлиса большое влияние.

В «Трактате по алгебре» в главах с XV по XXIX [2, с. 67—125] рассматриваются основные положения «Ключа...» Причем Валлис далек от пересказа этого произведения, он его переосмысливает. Основную заслугу Оутреда он видит в том, что «...Мистер Оутред в своем труде «Ключ к математике»..., впервые опубликованном в 1631 г., при изложении материала следует методике Виета, как тот в свою очередь использовал методику Диофанта...» [2, гл. XV, с. 67]. Имеется в виду символический метод, в основе которого лежит аддитивный принцип образования степеней. «...Оутред сокращает терминологию, использованную Виетом, применяя только обозначения в виде букв $q$, $c$ и т. д., которые у Виета выражались полностью как «Quadrato», «Cubo» и т. д. Правда, когда Виет впервые ввел этот способ изложения... необходимо было эти новые термины выражать полностью. Однако, когда это стало употребляться на практике, мистер Оутред... вместо слов стал применять отдельные буквы...» [там же].

При изложении материала Оутред пользуется следующими знаками:

1) «+» и «—» для сложения и вычитания «интерпретируя их как имеющие противоположное значение: если знак «+» означает «вверх», «вперед», «выигрыш», «увеличение», «над», «сложение», и т. д. то знак «—» означает «вниз», «назад», «потерю», «уменьшение», «под», «вычитание» и т. д. И наконец, если знак «+» понимается как данное положение, то знак «—» следует понимать как противоположное...» (эта интерпретация принадлежит самому Валлису) [2, гл. XVI, с. 69].

2) $\times$ — для умножения;

3) $=$ — для обозначения равенства;

4) $::$ — для пропорциональности;

5) $\div\!\!\div$ — для непрерывной пропорции;

6) $\surd$ — для корня;

7) $\sqsupset$, $\sqsubset$ — для «больше чем», «меньше чем».

После введения операций дается их обоснование и большое количество примеров и таблиц.

В «Ключе...» постоянно используется несколько букв для представления следующих выражений:

$$A > E,\quad A+E=Z,\quad A^2+E^2=\text{6},\quad A^3+E^3=\text{9},$$
$$A-E=X,\quad A^2-E^2=\text{X},\quad A^3-E^3={}^{\prime}\text{X},$$
$$AE=Æ,\quad A^2E^2=Æ^2,\quad A^3E^3=Æ^3,$$

и т. п. [2, гл. XXVI, с. 111].

С помощью этих выражений Оутреду и другим авторам, в частности самому Валлису, удалось добиться существенных результатов как в самой алгебре, так и в других областях математики. Иллюстрацией этому может служить II книга «Начал» Евклида, переписанная в новых терминах [2, гл. XXVI, с. 113—114], [2, гл. XXVIII, с. 117—121]. Используя этот метод, Валлис смог переоткрыть правило Кардано [2, гл. XLVI, с. 165—177]. Валлис ввел много дополнительных обозначений по аналогии с оутредовыми.

В «Трактате по алгебре» неоднократно подчеркивается, что «эта методика изложения позволяет проникнуть в суть предмета...» [2, гл. XV, с. 69]. «...Вряд ли можно указать какого-нибудь ученого до Оутреда,— говорит Валлис,— которому удалось бы в столь немногих выражениях изложить столь много и с максимальной ясностью...» [2, гл. XV, с. 67].

Рассматривая построение алгебры Оутредом, Валлис возобновляет разговор о природе алгебры, начатый во «Всеобщей математике», считая, что «...природа алгебры является более абстрактной и не сводится к местным измерениям, и поэтому в ней можно использовать любые понятия и методы, применяемые для отношений...» [2, гл. XXII, с. 90], в связи с этим немалое внимание как Оутредом, так и Валлисом уделяется теории отношений, проводится еще большая разработка, по сравнению со «Всеобщей математикой» 5-й книги «Начал» Евклида и многих других вопросов, связанных с отношениями, пропорциями и прогрессиями [2, гл. XVIII—XXI, с. 75—90].

Изложение теории уравнений начинается с формулировки «общего правила алгебры», приведенного Оутредом в XVIII гл. «Ключа...» «...Когда задача или вопрос сформулирован, предположим, что сделано то, что требовалось сделать по условию. Затем обозначим неизвестную величину (или комбинацию величин) буквой $A$ или другой буквой... (чтобы закончить эту операцию быстро, необходимо представить себе какие величины являются известными, а какие неизвестными). Пусть теперь так определенные величины (как известные, так и неизвестные) каким-то образом соединены и сравниваются друг с другом... причем так, как это требуется в поставленной задаче до тех пор, пока не будет найдено что-то определенное, равное некоторой конкретной величине или какой-то ее степени...» [2, гл. XXVII, с. 116].

Форма записи уравнений у Оутреда, Виета и большинства их предшественников, как отмечает Валлис,— это выделение всех членов, содержащих неизвестное с одной стороны, а известных величин — с другой. Прежде чем приступить к решению уравнений, их необходимо преобразовать [2, гл. XXVIII, с. 116—117]:

1) избавиться от дробных коэффициентов при членах, содержащих неизвестные; 2) все члены уравнения, содержащие неизвестные, собрать в одной части; 3) если все члены уравнения, содержащие неизвестное, имеют общий множитель, то на него необходимо разделить каждый член уравнения; 4) если все члены уравнения содержат неизвестное в некоторой степени, то методом деления можно понизить порядок уравнений; 5) избавиться от иррациональных членов.

В «Ключе к математике» Оутред излагает теорию только для квадратных уравнений, весьма редко, в качестве примеров, рассматривая кубические и уравнения высоких степеней. Причем, при решении уравнений ограничивается случаем положительных корней, опуская анализ мнимых и отрицательных. «...Уравнений более высокого порядка, чем содержащие 2 корня, я не нашел у мистера Оутреда; а также упоминания об отрицательных корнях, равно как и наличие более чем двух положительных корней в любом уравнении...» [2, гл. XXVIII, с. 121], «хотя,— замечает Валлис,— в кубических уравнениях может быть три корня, а в уравнениях высших степеней и более. Об этом хорошо знал Виет; ...это, естественно, должно было быть известным и мистеру Оутреду» [2, гл. XV, с. 69].

Метод решения кубических уравнений, дополняющий теорию уравнений Оутреда помещен Валлисом в XLVI главе «Трактата по алгебре» [2, гл. XLVI, с. 175—177]. Он состоит в следующем: так как

$$(A+E)^2 = A^3 + 3A^2E + 3AE^2 + E^3, \tag{1}$$

$$(A-E)^3 = A^3 - 3A^2E + 3AE^2 - E^3; \tag{2}$$

в терминах Оутреда можно записать

$$Z^3 - \mathcal{Z} + 3ÆZ, \qquad X^3 = \mathcal{X} - 3\,ÆX, \qquad (3) \qquad (4)$$

то Валлис рассматривает два уравнения

$$Z^3 = 3ÆZ = \mathcal{Z}, \quad X^3 + 3ÆX = \mathcal{X} \qquad (5) \qquad (6)$$

(где $Z$ и $X$ являются искомыми корнями соответственно), отмечая при этом, что в уравнениях

$$Z^3 - 3ÆZ = -\mathcal{Z}, \quad X^3 + 3ÆX = -\mathcal{X} \qquad (7) \qquad (8)$$

способ нахождения корней не отличается от (5)—(6) и любое кубическое уравнение может быть приведено к одной из форм (5)—(8).

Приведем в качестве примера решение (5). Поскольку

$$\frac{Æ}{A} = E, \qquad \frac{Æ^3}{A^3} = E^3,$$

$$A^3 + \frac{Æ^3}{E^3} = A^3 + E^3 = \mathcal{Z}, \qquad A^6 + Æ^3 = \mathcal{Z}\,A^3,$$

$$A^6 - \mathcal{Z}\,A^3 = -Æ^3,$$

то

$$A^3,\ E^3 = {}^1/_2\mathcal{Z} \pm \sqrt{{}^1/_4\mathcal{Z}^2 - Æ^3} \text{ и}$$

$$Z = A + E = \sqrt[3]{{}^1/_2 \mathcal{Q} + \sqrt{{}^1/_4 \mathcal{Q}^2 - Æ^3}} + \\ + \sqrt[3]{{}^1/_2 \mathcal{Q} - \sqrt{{}^1/_4 \mathcal{Q}^2 - Æ^3}},$$

причем, «...$A^3$, $E^3$ иногда могут быть мнимыми величинами, когда $Æ^3$ больше ${}^1/_4\ \mathcal{Q}^2$, как это бывает в квадратных уравнениях...» [2, гл. XLVI, с. 176].

II. После изложения символических основ алгебры по Оутреду, Валлис переходит к рассмотрению ее теоретических основ, где наибольших результатов достиг Томас Гарриот. Главы XXX — LVI [2, с. 125—214], связаны с именем Гарриота и его «Практикой аналитического искусства» [1631 г.).

«...Мистер Гарриот в посмертно опубликованном Уорнером в 1631 г. трактате по алгебре (вскоре после выхода в свет первого издания «Ключа» Оутреда) в некоторых моментах видоизменил метод Виета и Оутреда. Он также сделал много благополучных улучшений в этом искусстве и заложил основание, на котором Декарт, хотя его и не цитировал, построил большую часть... своей алгебры...» [2, гл. XXX, с. 126].

Гарриоту принадлежат следующие открытия и нововведения в области алгебры:

I. В символике:

а) введение строчных букв для обозначения неизвестного, запись больших степеней неизвестного с индексом наверху; б) использование знаков $>$ и $<$ для «больше» и «меньше».

II. В теории уравнений:

а) начало решения уравнения с его упрощения (избавление от иррациональности, от знаменателя; уничтожение промежуточных членов методом подстановок; перенос всех членов уравнения в одну часть;

б) развитие и теоретическое обоснование выдвинутой Виетом зависимости между корнями и коэффициентами уравнения;

в) определение, путем сравнения уравнений с каноническими, количества и вида действительных корней;

г) установление того, что уравнения высших степеней можно представить как произведение уравнений низших степеней, которое является основным и неотъемлемым достижением Гарриота в области алгебры. Это позволило ему определить, что количество корней уравнения соответствует наивысшей степени неизвестного, а также понять, что уравнения, кроме действительных корней, имеют еще и мнимые.

Заканчивает Валлис изложение алгебры Гарриота словами: «...все это либо точно сформулировано им, либо явное следует из его изложения. Большинство из этих пунктов, насколько мне известно, являются его собственными открытиями, но кое-что было открыто до него Виетом...» [2, гл. LIII, с. 200].

Многие историки математики [4], [5] и др. обвинили Валлиса в переоценке заслуг Гарриота и нарочитой недооценке достижений Декарта, объясняя это традиционным английским «патриотизмом».

Изучение трактата не позволяет согласиться с такими объяснениями.

Во-первых, Валлис ставит перед собой задачу проследить становление алгебры в Англии. Поэтому он концентрирует свое внимание преимущественно на достижениях англичан.

Во-вторых, арифметическая манера изложения материала английскими алгебраистами ему ближе, чем геометрические интерпретации французов.

В-третьих, о Гарриоте как о математике долгое время судили по его «Практике аналитического искусства», которая была опубликована по неполной рукописи Уорнером. В «Практике» рассматриваются алгебраические уравнения и их положительные решения, а отрицательные и комплексные — не рассматриваются совсем. Однако, в бумагах Гарриота (Add. 6782-9, Br. Mus., H. M. C. 240, 241, Petworth House) [6] обнаруживается, что он в своих вычислениях пользовался отрицательными и комплексными корнями, а также лучше понимал природу алгебраических уравнений, чем это отражено в «Практике». Судя по титульному листу «Практика аналитического искусства» предназначалась в качестве учебника герцогу Нортамберлендскому. Возможно, поэтому Гарриот считал целесообразным пользоваться в ней только положительными числами. Объяснения, приводимые Валлисом в «Трактате по алгебре», более близки к рукописи (Ms. Add. 6783), с которой он, по-видимому, был знаком, чем к «Практике».

В-четвертых, несмотря на то, что «Практика» не получила широкого признания как в Англии, так и на континенте, среди математиков-профессионалов XVII в. циркулировали ее неопубликованные отрывки. Таким образом, она могла быть вполне доступна Декарту, посетившему в 1631 г. Англию [7, с. 240]. Однако Декарт в письме к Гюйгенсу от декабря 1638 г. [8, с. 227] писал, что не был знаком с книгой Гарриота до написания «Геометрии».

В главах, посвященных алгебре Гарриота, также при разборе алгебры Оутреда, Валлис читает между строк, усиливая тем самым силу и значение учения Гарриота.

III. Главы LVII — LXV [2, с. 214—264] отведены Валлисом «неопределенным задачам». Исходным материалом здесь послужило упомянутое «Введение в алгебру» (1668 г.) Джона Пелля, в основу которого легли лекции, прочитанные им в Цюрихе по алгебре Диофанта и опубликованные в 1659 г. его учеником Реном, а затем переведенные на английский язык Томасом Бранкером.

«...Искусство решения неопределенных задач,— говорит Валлис,— заключается в правильном выборе таких произвольных величин (вместо недостающих), чтобы в процессе решения некоторые величины уничтожали друг друга и уравнения можно было привести к уравнениям более низкой степени или более удобной формы...» [2, гл. LVII, с. 215].

Говоря о заслугах Пелля в решении неопределенных уравнений Валлис прежде всего отмечает его символические нововведения. Наряду со знаками, применяемыми Оутредом и Гарриотом, Пелль использует:

÷ — для деления;

⊙ — для возведения в степень;

ω — для извлечения корня;

∴ — для «следовательно»;

точку над цифрой — для числа, в отличие от номера уравнения, над которым производят действие;

$*$ — для недостающих уравнений, если число уравнений меньше числа неизвестных.

Пелль применяет табличный принцип записи решения уравнений. Таблицы состоят из трех столбцов. В крайнем левом пишется, какие операции проделываются уравнениями, во втором столбце стоят номера уравнений, а в третьем — результат осуществленных операций. Валлис, высоко оценив этот принцип, демонстрирует его на примере решения 19-й задачи V книги «Арифметики» Диофанта.

IV. Мнимые величины, впервые появившиеся у Дж. Кардано (1501—1576) в «Великом искусстве» (1545 г.), а затем используемые при решении «неприводимого случая» кубических уравнений Р. Бомбелли (ок. 1526—1573) в его «Алгебре (1560) для многих крупных ученых XVII в. оставались загадкой. Первая попытка интерпретировать их принадлежит Джону Валлису [2, гл. LXVI—LXIV, с. 264—273].

Рассматривая отрицательные числа, как движение по прямой в противоположном направлении, он говорит: «...теперь то, что допустимо для линий перенесем на плоскость...» [2, гл. LXVI, с. 265], такая постановка вопроса позволила ему сделать вывод, что «...так так $\sqrt{bc}$ есть среднее пропорциональное между $b$ и $c$ или между $-b$ и $-c$, то $\sqrt{-bc}$ означает среднее пропорциональное между $b$ и $-c$ или $-b$ и $c$...» [2, гл. LXVI, с. 265]. Далее это иллюстрируется геометрическими примерами, но «...все, что касается геометрических примеров... лежит вне темы, которая рассматривается чистой алгеброй, исходя из ее собственных принципов...» [2, гл. LXIX, с. 272—273].

В XXXII главе [2, с. 133] Валлис замечает, что разговор о мнимых величинах он поведет в конце «Трактата по алгебре»; таким образом, наше условное разделение трактата на 3 части и окончание «собственно алгебры» на интерпретации мнимых величин является совершенно оправданным.

*6. Заключение.* Оценивая вышедший в 1685 г. в свет «Исторический и практический трактат по алгебре» отметим полное соответствие названия и содержания работы Дж. Валлиса.

Отличительная черта «Трактата» — энциклопедичность. На его страницах органически сочетались исторические сведения с практически исчерпывающим описанием известных к тому времени алгебраических методов и приемов, угадывались контуры последующих открытий. Отметим, что такое цельное сочетание исторического и конкретно-дисциплинарного анализа в математической работе — случай весьма не частый и вызывающий особый интерес.

«Трактат» отличает еще одна особенность: написанный на английском языке, он способствовал популяризации знаний.

Здесь также уместно указать на введение в научный оборот метода флюксий и метода приближенного решения уравнений (Ньютона—Рафсона).

Резюмируя, можно сказать, что «Трактат по алгебре исторический и практический» Джона Валлиса является важным памятником науки Англии конца XVII в. и ценным элементом развития мировой математической мысли.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Scriba Ch. J.* The autobiography of John Wallis, F. R. S.— Notes and Records Roy. Soc. L., 1970, vol. 25, N 1, p. 17—46.
2. *Wallis J.* A treatise of algebra both historical and practical. L., 1685.
3. *Wallis J.* Opera mathematica. Vol. I, 1695. Mit einem Vorwort von Christoph J. Scriba. N. Y., 1972.
4. *Scott J. F.* The mathematical work of John Wallis. L, 1933.
5. *Montucla J. E.* Histoire des mathématiques. P., 1758. Vol. II.
6. *Lohne J. A.* Dokumente zur Revalidierung von Thomas Harriot als Algebraiker.— Arch. Hist. Exact. Sci., 1966, vol. 3, N 3, p. 186—205.
7. *Baillet.* Vie des Descartes. Paris, 1691.
8. *Декарт Р.* Геометрия, М., 1938.


# О РАБОТАХ ЛЕЖАНДРА ПО ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ[1]


Л. А. Сорокина


Из всех математиков конца XVIII — начала XIX веков, кроме Гаусса, занимавшихся изучением эллиптических интегралов, Лежандр, пожалуй, наиболее близко подошел к идее их обращения. Его работы, в которых нашли свое наиболее полное развитие результаты Эйлера, Лагранжа и других математиков, явились тем фундаментом, на котором выросло здание теории эллиптических функций.

В историко-математической литературе о результатах Лежандра в этой области математики принято в основном судить по двум его основным трудам: «Exercices de cal-

[1] Автор пользуется случаем, чтобы выразить глубокую благодарность проф. И. Г. Башмаковой, под руководством которой выполнена эта работа, и канд. физ.-мат. наук А. И. Лапину, который прочитал рукопись и сделал ряд ценных замечаний. Автор благодарит также коллектив Отдела Внешнего обслуживания Государственной публичной библиотеки им. М. Е. Салтыкова-Щедрина (Ленинград), который прислал ксерокопии работ [1—3].

cul intégral»[2] (1811 г.) [4] и «Traité des fonctions elliptiques»[3] (1825—1829 гг.) [5]. Что касается более ранних его работ, опубликованных в 1788 и 1793 гг. [1—3], то, например, у Клейна [6] и Вилейтнера [7] мы находим лишь краткое упоминание основных результатов этих работ. Несколько подробнее говорят на эту тему Дж. Виванти, К. Р. Валлнер [8, с. 854—858, 860—864] и А. П. Юшкевич [9, с. 354—360]. Поэтому основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы рассмотреть те результаты из упомянутых выше работ Лежандра, которые не были освещены или же оказались лишь слегка затронутыми в более ранних исторических обзорах.

К моменту появления первых работ Лежандра теория эллиптических интегралов, т. е. интегралов вида:

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right) dx,$$

где $R$ — рациональная функция, $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени, уже выросла в обширную область анализа. С эллиптическими интегралами ученые встретились еще в XVII в. сначала в задачах на спрямление дуги эллипса (например, у Ньютона [10, с. 148], а затем при решении задач механики.

Уже первые работы по теории эллиптических интегралов Я. и И. Бернулли показали, что эти новые трансцендентные функции обладают целым рядом интересных свойств. Так И. Бернулли, поставивший впервые вопрос об отыскании кривых, у которых сумма или разность дуг была бы спрямляема, т. е. представима через дугу окружности или отрезок прямой, показал, что подобным свойством обладают дуги кубической параболы $3ay = x^3$.

В начале XVIII в. задачей Бернулли занялся итальянский математик-любитель Дж. К. де Тоски ди Фаньяно, В 1714 г. он поставил задачу, аналогичную задаче И. Бернулли, для параболы $4a^2y = x^4$, а в следующем году дал решение и более общей задачи для кривых с уравнением:

$$\frac{m+2}{2} a^{m/2} y = x^{(m+2)/2} \text{ [9, с. } 354-355].$$

Исследования Фаньяно, который открыл первые теоремы сложения, нашли свое продолжение не сразу, так

[2] Далее, говоря об этой работе, будем ее кратко называть «Exercices».

[3] Далее мы будем называть ее кратко «Traité».

как основное внимание математиков начала XVIII в. было направлено на сведение интегралов от иррациональных функций к дугам эллипсов и гипербол. Только Эйлер в начале 50-х годов XVIII столетия вновь обратился к изучению свойств эллиптических интегралов. Уже в статье «Интегрирование дифференциального уравнения «$\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$» (1756—1757, 1761) [11, с. 180—206] он впервые формулирует и доказывает в алгебраической форме теорему сложения для эллиптических интегралов, которую развил во 2-м разделе 1-го тома «Интегрального исчисления» [1768).

Исходным пунктом исследований Эйлера были аналогичные теоремы, имеющие место в обычной тригонометрии. Если мы рассмотрим уравнение:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\,, \tag{1}$$

то верхние границы интегрирования оказываются связанными соотношением:

$$z = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2},$$

что для $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$, $z = \sin\mu$ дает обычную теорему сложения тригонометрии.

Но, как отмечал А. И. Маркушевич, «исток позднейшей теории абелевых функций можно видеть в вопросе, в какой мере отмеченные выше закономерности связаны с тем, что в интеграле под знаком корня стоит многочлен второй степени $\sqrt{1-t^2}$ ?» [12, с. 8]. Сам Эйлер, хотя и не формулирует явно этот вопрос, но тем не менее отвечает на него. В главе VI первого тома «Интегрального исчисления» он показывает, что дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0, \tag{2}$$

где $X = 1 + mx^2 + nx^4$ и $Y = 1 + my^2 + ny^4$, имеет полный интеграл вида:

$$x^2 + y^2 - nx^2y^2 + 2\sqrt{1 + mC^2 + nC^4}\,xy - C^2 = 0 \tag{3}$$

($C$ — постоянная интегрирования). Отсюда выводится, что

$$C=\varphi(x, y)=\frac{x\sqrt{Y}+y\sqrt{X}}{1-nx^2y^2}. \tag{4}$$

Это выражение и есть алгебраический интеграл уравнения (2). Но в трансцендентной форме интеграл уравнения (2) можно записать в виде:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}+\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}=\gamma=\text{const}, \tag{5}$$

где $P(t)=1+mt^2+nt^4$. Пусть $x=C$ при $y=0$. Тогда, положив в (5) $y=0$, имеем

$$\gamma=\int_0^C \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}.$$

Следовательно, окончательно, используя (4), имеем:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}+\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}=\int_0^{\varphi(x,y)} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}.$$

Последнее уравнение показывает, что в том случае, когда в уравнении (1) под знаком корня стоит многочлен четвертой степени, сумма двух интегралов

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}+\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{P(t)}},$$

где $P(t)=1+mt^2+nt^4$, может быть представлена одним интегралом того же вида $\int_0^C \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$.

Работы Эйлера, как известно, оказали большое влияние на последующее развитие теории эллиптических интегралов, а свое дальнейшее развитие они нашли в работах Лагранжа и Лежандра.

Основная цель первых работ Лежандра [1] и [2] (опубликованных в 1788 г.) была четко определена в предисловии к первому из них. Прежде всего он хотел показать, что дуги гиперболы полностью зависят от дуг эллипса, а не представляют собой особого рода трансцендентных, как это предполагали некоторые из его предшественников. Второе, и пожалуй главное, было в том, чтобы ввести дуги эллипса в исчисление, подобно тому как это уже имело место в его время для дуг круга и логарифмов. Для этого он стремится построить исчисление для дуг эллипса, используя достаточно быстро сходящиеся ряды, и с их помощью таблицы этих функций.

Содержание первой работы Лежандра достаточно подробно изложено в [8, с. 854—859]. Поэтому мы обратим внимание лишь на некоторые моменты.

Принято считать, что Лежандр пришел к тригонометрической форме записи эллиптических интегралов, делая, например, в интеграле

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

подстановку $x = \sin\varphi$. На самом же деле, еще за три года до появления первых работ Лежандра, тригонометрической формой эллиптического интеграла

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

впервые воспользовался Лагранж в своей работе «Об одном новом методе интегрального исчисления» [13, с. 253—312]. То же самое делает Лежандр в «Exercices» [4, с. 11] и в « Traité» [5, с. 22]. В первой же своей работе [1] он первоначально просто пользуется параметрическими уравнениями эллипса $x = \sin\varphi$, $y = \sqrt{1-c^2}\cos\varphi$, где большая полуось равна 1, $c$ — эксцентриситет эллипса, и тогда малая полуось $b = \sqrt{1-c^2}$. В результате для дуги эллипса получается известный интеграл:

$$E(\varphi, c) = \int \sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\, d\varphi, \tag{6}$$

который Лежандр впоследствии назовет «эллиптической функцией» второго рода [4].

Огромная вычислительная работа, проделанная Лежандром, позволила ему разложить интеграл в достаточ-

---

[4] Даже после опубликования блестящих работ Абеля и Якоби, относящихся к функциям, полученным в результате обращения интегралов, рассмотренных Лежандром, он так и не согласился с новой терминологией, предложенной его молодыми коллегами. См. об этом например, письмо Лежандра к Якоби от 19 августа 1829 г. [14, с. 452].

но быстро сходящиеся ряды, пригодные для довольно быстрого вычисления эллиптических интегралов (6). В конце мемуара [1] мы встречаемся с важным для теории эллиптических интегралов результатом. А именно, в главе V [1, с. 634—636] он показывает, что дуги гиперболы не представляют собой ничего нового, отличного от дуг эллипса вида трансцендентных, а сводятся к последним.

В последней VI главе [1, с. 637—643] мы находим примеры из механики, приводящие к эллиптическим интегралам первого рода[5]. Одним из них является пример с маятником, для которого время $t$ отклонения от вертикали на угол $\varphi$ выражается интегралом:

$$\int \frac{{}^1/_2 \sqrt{L}\, d\varphi}{\sqrt{\frac{H}{2L} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \tag{7}$$

где $L$ — длина маятника и $H$ — высота, необходимая для наибольшей скорости.

В этой же главе рассматриваются подстановки, которые приводят интеграл

$$\int \frac{dz}{\sqrt{A + Bz^2 + Cz^4}}$$

к тригонометрической форме. Впоследствии эти подстановки вошли сначала в мемуар 1792—1793 гг., а затем в «Exercices» и «Traité».

В том же 1786 г. вышел второй мемуар Лежандра на ту же тему [2]. К этому времени ему стал известен более ранний (1775) мемуар Ландена [15, с. 23—36]. И основной целью Лежандра стало получение результатов, аналогичных тем, которые были найдены Ланденом, но при помощи собственных методов.

Известно, согласно Ландену, что любая дуга гиперболы может выражаться при помощи дуг двух эллипсов. Лежандр же установил, что это утверждение распространяется и на дуги эллипса, тем самым закладывает вместе с Ланденом основы будущей теории преобразования эллиптических функций.

Для нас в этом мемуаре Лежандра наибольший интерес представляет глава XV «Новая формула, из которой следует ряд теорем, подобных теореме Фаньяно», в которой мы впервые встречаемся у Лежандра с теоремой сло-

---

[5] Здесь еще Лежандр не вводит это наименование.

жения эллиптических функций, но не в алгебраической форме (3), как это было сделано у Эйлера.

Уже здесь Лежандр ставит задачу найти интеграл дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=0,$$

которое подстановками $x=\sin\varphi$, $y=\sin\psi$ он приводит к виду

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=0 \tag{8}$$

или

$$\int\limits_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\int\limits_0^\psi\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=\gamma \tag{9}$$

($\gamma$ — постоянная интегрирования). Но из (9) видно, что при $\psi=0$, $\varphi=\mu$

$$\gamma=\int\limits_0^\mu\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\text{ или }\ F(\varphi)+F(\psi)=F(\mu), \tag{10}$$

где $F(\varphi)$, $F(\psi)$, $F(\mu)$ — интегралы вида

$$F(\varphi)=\int\limits_0^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

и где $\Delta(\varphi)=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$. Лежандр указывает, что интеграл уравнения (8) «согласно известным методам» будет

$$\cos\varphi\cos\psi=\Delta(\mu)\sin\varphi\cdot\sin\psi+\cos\mu\,[6], \tag{11}$$

где $\mu$ — произвольная константа, определяемая соотношением (10). Встает вопрос, что же понимает здесь Лежандр под «известными методами»? В более поздней своей работе 1792—1793 гг. [3], о которой мы будем говорить ниже, он называет их методами Эйлера. Но, как известно, первоначально, по крайней мере в начале VI главы «Интегрального исчисления» [16, с. 346—347, задача

---

[6] Вместо $\Delta(\mu)$ Лежандр здесь пишет $\lambda$, но мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в его более поздних работах.

78], Эйлер, исходя из соотношения

$$x^2 + y^2 - nx^2y^2 + 2\sqrt{1 + mC^2 + nC^4}\, xy - C^2 = 0,$$

показывает, что оно удовлетворяет дифференциальному уравнению (2). В свою очередь от этого соотношения Эйлер затем переходит к выражению (4). Попутно заметим, что выражение (4) может быть получено из (2) при помощи интегрирования по частям, что, в частности, показал Стюрм в небольшой заметке, опубликованной в 1833 г.; но представляется естественным, что этот метод вывода соотношения (4) был известен и Эйлеру.

Мы вновь вернулись к Эйлеру для того, чтобы попытаться ответить на поставленный вопрос относительно метода получения Лежандром формулы (11). Тут можно высказать несколько предположений. Во-первых, интегрированием по частям уравнения (8) Лежандр мог получить формулу:

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi\cdot\cos\psi\cdot\Delta(\psi) + \sin\psi\cdot\cos\varphi\cdot\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\psi},$$

где $\mu$, как и выше, произвольная константа, определяемая соотношением (10). Сама же последняя формула легко приводит к соотношению (11). Во-вторых, он мог воспользоваться методом интегрирования, которым впоследствии пользовался Лагранж в своем обширном труде «Теория аналитических функций» 1797 г. [17, с. 127—141]. Покажем, в чем состоят основные этапы вывода формулы (11), следуя методу Лагранжа. Для этого запишем исходное дифференциальное уравнение (8) в виде

$$d\varphi/d\psi = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}/\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}$$

и предположим, что $\varphi$ и $\psi$ суть функции некоторой переменной $t$. Тогда полагаем

$$\varphi_t' = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}, \qquad \psi_t' = \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi},$$

или

$$(\varphi')^2 = 1 - k^2\sin^2\varphi, \qquad (\psi')^2 = 1 - k^2\sin^2\psi.$$

Отсюда следует, что

$$2\varphi'\varphi'' = -2k^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\varphi',$$
$$2\psi'\psi'' = -2k^2\sin\psi\cdot\cos\psi\cdot\psi'$$

или

$$\varphi''_{tt} = -\frac{k^2}{2}\sin 2\varphi, \quad \psi''_{tt} = -\frac{k^2}{2}\sin 2\psi.$$

Положим $\varphi + \psi = 2p$, $\varphi - \psi = 2q$; тогда легко получается

$$2p'' = -k^2 \sin 2p\cdot\cos 2q, \quad 2q'' = -k^2 \sin 2q\cdot\cos 2p. \tag{12}$$

Умножая первое из этих равенств на $q'$, а второе на $p'$ и складывая их, получаем в левой части

$$2(p''q' + q''p') = 2(p'q')'$$

и, следовательно,

$$2(p'q')' = -{}^1/_2\, k^2 (2\sin 2p\cdot\cos 2q\cdot q' + 2\sin 2q\cdot$$
$$\cdot\cos 2p\cdot p') = -{}^1/_2 k^2 (\sin 2p\cdot\sin 2q)',$$

откуда:

$$2p'q' = -\frac{k^2}{2}\sin 2p\cdot\sin 2q + a. \tag{13}$$

Постоянную интегрирования $a$ определяем из условия, что $\varphi = \mu$ при $\psi = 0$. В этом случае

$$\varphi' = \sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}, \quad \psi' = 1, \quad p = q = \frac{\mu}{2},$$

$$p' = \frac{\varphi' + \psi'}{2} = \frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu} + 1}{2},$$

$$q' = \frac{\varphi' - \psi'}{2} = \frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu} - 1}{2};$$

следовательно

$$2p'q' = \frac{\varphi'^2 - \psi'^2}{2} = \frac{1 - k^2\sin^2\mu - 1}{2} = -\frac{k^2\sin^2\mu}{2}.$$

Учитывая (13), имеем

$$-\frac{k^2\sin^2\mu}{2} = -\frac{k^2\sin^2\mu}{2} + a,$$

откуда следует, что $a = 0$, т. е.

$$2p'q' = \frac{k^2}{2}\sin 2p\cdot\sin 2q.$$

Если разделить на это выражение каждое из соотношений (12), то будет

$$\frac{p''}{q'p'} = \frac{2\cos 2q}{\sin 2q}, \quad \frac{q''}{q'p'} = \frac{2\cos 2p}{\sin 2p}$$

или

$$\frac{p''}{p'} = 2\frac{\cos 2q}{\sin 2q}\,q', \quad \frac{q''}{q'} = 2\frac{\cos 2p}{\sin 2p}\,p'.$$

Интегрирование последних соотношений по $t$ дает

$$\ln p' = \ln\sin 2q + \ln b, \ln q' = \ln\sin 2p + \ln c$$

или

$$p' = b\sin 2q, \quad q' = c\sin 2p,$$

где $b$ и $c$ — постоянные интегрирования. Из последних равенств вытекает, что

$$\frac{p'}{q'} = \frac{b\sin 2q}{c\sin 2p}$$

или

$$c\sin 2p\cdot p' = b\sin 2q\cdot q'.$$

В свою очередь, интегрирование этого последнего соотношения дает

$$-c\cos 2p = -b\cos 2q + d, \tag{14}$$

где $d$ — постоянная интегрирования. Так как $\psi = 0$, $\varphi = \mu$:

$$b = \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\mu}+1}{2\sin\mu}, \quad c = \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\mu}-1}{2\sin\mu},$$

то

$$d = \cos\mu/\sin\mu.$$

Следовательно, (14) можно записать так

$$\frac{\cos\mu}{\sin\mu} = \frac{\Delta(\mu)+1}{2\sin\mu}\cos 2q - \frac{\Delta(\mu)-1}{2\sin\mu}\cos 2p$$

или, поскольку $2p = \varphi + \psi$, $2q = \varphi - \psi$, получаем искомое соотношение (11). Таким образом, этот второй возможный путь представляется более вероятным, поскольку он ведет непосредственно к соотношению (11). Кроме того, отдельные указания на возможность такого метода были сделаны Лагранжем еще в 1783 г. в уже упоминавшейся выше работе [13]. Как указывалось выше, Лагранж изложил этот метод в 1797 г. в книге [17], где применил его к интегрированию уравнения:

$$\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{A+B\cos z}}{\sqrt{A+B\cos u}}.$$

Наконец, если в соотношение (3), данное Эйлером, подставить $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$, $C = \sin\mu$, то после преобразований также получится соотношение (11).

В статье 1786 г. Лежандр еще не видит, что формула (11) ведет к теореме сложения эллиптических интегралов, или, по крайней мере, не высказывает этот факт. С совершенно иной картиной мы сталкиваемся в мемуаре 1792—1793 гг. [3], представленном Парижской Академии наук в 1792 г., но в связи с временным роспуском Академии опубликованном в 1793 г. отдельным изданием. Как указывал Валлнер [8, с. 860] даже во Франции эта работа является очень редкой, так что ее основное содержание долгое время оставалось почти неизвестным математикам. Это обстоятельство побудило, по-видимому, Лежандра вновь изложить ее основные результаты сначала в «Exercices», а затем с некоторыми добавлениями в «Traité».

По своему содержанию мемуар 1792—1793 гг. представляет первое систематическое изложение теории эллиптических интегралов. Не входя в подробности, мы ограничимся вопросом, связанным с теоремой сложения эллиптических функций.

Выше мы указывали, что во втором из мемуаров 1786 г. в качестве решения дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0.$$

Лежандр приводит выражение

$$\cos\mu = \cos\varphi\cdot\cos\psi - \Delta(\mu)\sin\varphi\cdot\sin\psi,$$

где $\mu$ — произвольная постоянная, подчиненная условию (10) и $\Delta(\mu) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}$. Учитывая, что в обозначениях Лежандра $\cos\mu = \sqrt{1 - \sin^2\mu}$, можно вывести

$$\cos\mu = \frac{\cos\varphi\cdot\cos\psi - \Delta(\varphi)\cdot\Delta(\psi)\sin\varphi\cdot\sin\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\psi}. \qquad (15)$$

В самом деле, для этого надо переписать соотношение (11) в виде

$$\Delta(\mu)\ \sin\varphi\cdot\sin\psi = \cos\varphi\cdot\cos\psi - \cos\mu.$$

Элементарные выкладки приводят к квадратному уравнению относительно $\cos\mu$

$$\cos^2\mu\,(1 - k^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\psi) - 2\cos\varphi\cdot\cos\psi\cdot\cos\mu + (\cos^2\varphi\cdot\cos^2\psi - (1 - k^2)\sin^2\varphi\cdot\sin^2\psi) = 0,$$

которое дает формулу (15) в качестве решения. Из (15) легко выводятся и три другие формулы, приведенные у Лежандра рядом с формулой (15):

$$\left\{\begin{aligned} \sin\mu &= \frac{\sin\varphi\cdot\cos\psi\cdot\Delta(\psi)+\sin\psi\cdot\cos\varphi\cdot\Delta(\varphi)}{1-k^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\psi}, \\ \operatorname{tg}\mu &= \frac{\Delta(\psi)\operatorname{tg}\varphi+\Delta(\varphi)\operatorname{tg}\psi}{1-k^2\Delta(\varphi)\cdot\Delta(\psi)\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\psi}, \\ \Delta\mu &= \frac{\Delta(\varphi)\cdot\Delta(\psi)-k^2\sin\varphi\cdot\sin\psi\cdot\cos\varphi\cdot\cos\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\psi}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Встает вопрос: что же это за формулы? Прежде всего при $k=0$ формулы (15) и (16) переходят в следующие:

$$\cos\mu=\cos\varphi\cdot\cos\psi-\sin\varphi\cdot\sin\psi,$$

$$\sin\mu=\sin\varphi\cdot\cos\psi+\sin\psi\cdot\cos\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi}{1-\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\psi},\ \Delta(\mu)=1,$$

т. е. в обычные тригонометрические формулы для случая, когда $\mu=\varphi+\psi$. Это замечание, отсутствующее у Лежандра в статье 1792—1793 гг., находится в «Exercices» [4, с. 12] и в «Traité» [5, с. 26].

Кроме того, обращает на себя внимание, что первая из формул (16) есть ни что иное как записанная в тригонометрической форме формула Эйлера (4), если в ней положить, следуя Лежандру, $x=\sin\varphi$, $y=\sin\psi$, $C=\sin\mu$; тогда $\sqrt{X}=\cos\varphi\cdot\Delta(\varphi)$ $\sqrt{Y}=\cos\psi\cdot\Delta(\psi)$ и т. д. при $m=-(1+k^2)$, $n=k^2$. Таким образом, первая из формул (16), по-существу, оказывается тригонометрической формой записи теоремы сложения Эйлера для эллиптических функций.

Положим в интеграле

$$\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$k^2=-1$, т. е. рассмотрим случай лемнискатного интеграла:

$$\int\limits_0^t\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Но первая из формул (16) для $k^2=-1$ дает:

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi\sqrt{1-\sin^4\psi}+\sin\psi\sqrt{1-\sin^4\varphi}}{1+\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой Гаусса

$$\mathrm{sl}(\varphi+\psi) = \frac{\mathrm{sl}\,\varphi\sqrt{1-\mathrm{sl}^4\psi}+\mathrm{sl}\,\psi\sqrt{1-\mathrm{sl}^4\varphi}}{1+\mathrm{sl}^2\varphi\,.\,\mathrm{sl}^2\psi},$$

легко видеть, что правые части двух последних формул совпадают с точностью до обозначений.

Конечно, чисто внешнее совпадение формул не позволяет еще делать какие-нибудь утверждения об их истинной природе. Но здесь существенно, что сам Лежандр видит в (15) и (16) формулы, позволяющие по амплитудам $\varphi$ и $\psi$ эллиптических интегралов

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}, \quad F(\psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} \tag{17}$$

вычислить амплитуду $\mu$ аналогичного интеграла

$$F(\mu) = F(\varphi) + F(\psi).$$

С этой целью во второй из формул (16) Лежандр делает подстановки $\mathrm{tg}\,\varphi' = \Delta(\psi)\,\mathrm{tg}\,\varphi$, $\mathrm{tg}\,\psi' = \Delta(\varphi)\,\mathrm{tg}\,\psi$, в результате которых получается

$$\mathrm{tg}\,\mu = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi' + \mathrm{tg}\,\psi'}{1-\mathrm{tg}\,\varphi'\,\mathrm{tg}\,\psi'} = \mathrm{tg}(\varphi'+\psi'),$$

откуда он тотчас заключает, что $\mu = \varphi' + \psi'$.

Таким образом, если теперь в формулах (15) и (16) рассматривать $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta(\varphi)$ и т. п. как некоторые гипотетические функции, связанные между собой соотношениями [7]

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1, \quad \Delta(\varphi) = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

то сами эти формулы будут представлять их теоремы сложения.

---

[7] Необходимо иметь в виду, что аргументом этих соотношений является амплитуда эллиптического интеграла $u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$. Поэтому, например, первое более правильно записать

$$\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1.$$

Интеграл

$$F(\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

можно рассматривать как результат униформизации алгебраической кривой $w^2=(1-x^2)(1-k^2x^2)$ при помощи формул $x=\sin\varphi$, $w=\cos\varphi\cdot\Delta(\varphi)$, где $\Delta(\varphi)=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$. Аналогично можно рассмотреть интегралы $F(\psi)$ и $F(\mu)$ из формулы (10). Идея Лежандра, на наш взгляд, состояла в том, что существуют некоторые гипотетические функции, которые в малой окрестности некоторой точки могут быть представлены тригонометрическими функциями от аргументов соответствующих интегралов вида (17). Для этих функций он и доказывает теорему сложения, выраженную формулами (15) и (16). Для доказательства ему было достаточно применить к выражению (3), данному у Эйлера, локальную униформизацию кривых $w^2=1+mx^2+nx^4$, $w^2=1+my^2+ny^4$, $w^2=1+mC^2+nC^4$ при $m=-(1+k^2)$, $n=k^2$. Поэтому, по нашему мнению, можно сказать, что в вещественной области Лежандр получил теоремы сложения для функций, впоследствии получивших наименование «эллиптических», которые получаются в результате обращения эллиптических интегралов

$$\int_0\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

или, в тригонометрической форме:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Да и то, что следует в мемуаре [5] вслед за формулами (15) и (16), представляет собой, по сути дела, развитие теории эллиптических функций в современном понимании этого термина: это формулы умножения и деления аргумента для тригонометрических функций от амплитуды эллиптического интеграла; показывается, что решение задачи деления ведет к алгебраическому уравнению степени $n^2$, и т. д. Все это Лежандр сделал, не производя явно обращения эллиптического интеграла и не ставя вопроса о периодичности рассматриваемых функций [8].

Итак, уже в начале 90-х годов XVIII в. Лежандр, по существу, владел основными результатами классической теории эллиптических функций. Но стали они известными, как уже неоднократно указывалось нами выше, значительно позднее, только в 1811 г. благодаря изданию «Exercices». В 1829 г. в классических «Новых основаниях теории эллиптических функций» [14, с. 85—340] Якоби воспользовался этими результатами, как известными. Исходя из интеграла

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

он полагает $x = \sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u = \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} u}$, $\Delta \operatorname{am} u = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u}$. Тогда формулы, полностью аналогичные формулам (15) и (16) Лежандра, для $\sin \operatorname{am}(u+v)$, $\cos \operatorname{am}(u+v)$ и $\Delta \operatorname{am}(u+v)$ он приводит без вывода, по-видимому, считая их уже доказанными Лежандром. В своих статьях 1837—1838 гг. Гудерманн ввел для этих функций новые обозначения $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$, которые с тех пор стали общеупотребительными и получили наименование «эллиптических функций Якоби».

Е. И. Славутин заметил, что Эйлер доказал теорему сложения для функции $w = f(t)$, которая получается путем обращения эллиптического интеграла

$$t = \Pi(w) = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}$$

[18, с. 184]. При этом Славутин подчеркнул, что «хотя у Эйлера не было специального обозначения для зависимости верхнего предела интегрирования от значения интеграла $t$, но тем не менее, он, без сомнения, пользовался этой зависимостью» [18, с. 185]. Лежандр тоже не осуществля-

[8] В явной форме Лежандр выписывает соотношение $\varphi = \operatorname{am} u$, где $u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$, только после выхода из печати в 1829 г. «Fundamenta nova etc.» Якоби, в первом дополнении к «Traité».

ет явного обращения эллиптического интеграла. Но приводимые им в «Exercices» и в «Traité» примеры из механики, а также пример с маятником, приведенный им еще в VI главе мемуара [3], позволяют утверждать, что он отчетливо понимал взаимосвязь переменных $t$ и $\varphi$, входящих в интеграл (7), описывающий движение маятника.

Таким образом, в своих фундаментальных исследованиях по теории эллиптических интегралов. Лежандр уже в конце XVIII в., хотя и стремился ограничиться изучением свойств эллиптических интегралов, неизбежно получил результаты для функций, являющихся обратными по отношению к этим интегралам. Но он сам еще не отдавал себе ясного отчета в том, что, по-существу, речь идет уже о свойствах новых трансцендентных функций, сыгравших впоследствии огромную роль в развитии математики.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Legendre A. M.* Mémoire sur es intégrations d'arcs d'ellipse. Histoire de l'Acad. des sciences de Paris. 1788, p. 616—643.
2. *Legendre A. M.* Second mémoire sur les intégrations d'arcs d'ellipse. Histoire de l'Acad. des sciences de Paris. 1788, p. 644—683.
3. *Legendre A. M.* Mémoire sur les transcendantes elliptiques. Paris, 1793.
4. *Legendre A. M.* Exercices de calcul intégral. Paris, 1811.
5. *Legendre A. M.* Traité des fonctions elliptiques. Paris, 1825—1829. Vol. 1—3.
6. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ОНТИ, 1937, ч. 1.
7. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Физматгиз, 1960.
8. *Cantor M.* Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. Leipzig, 1924. Bd. 4.
9. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия/Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1972, т. 3.
10. *Ньютон И.* Математические работы. М.; Л.: ОНТИ, 1937.
11. *Euler L.* Opera omnia, ser. 1, 1913. Vol. 20.
12. *Маркушевич А. И.* Введение в классическую теорию абелевых функций. М.: Наука, 1979.
13. *Lagrange J. L.* Sur une nouvelle méthode de calcul intégral.— In: Oeuvres de Lagrange. P., 1880. Vol. 2.
14. *Jacobi C. G. J.* Gesammelte werke. B., 1881. Bd. 1.
15. *Landen J.* An investigation of a general theorem for finding the lenght of any arc of any conic hyperbola by means of two elliptic arcs with some other new and useful theorems deduced therefrom.—Mathematical Memoirs. London, 1780. Vol. 1.
16. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление. М.; Л.: Гостехиздат, 1956, т. 1.
17. *Lagrange J. L.* Oeuvres. P., 1881, Vol. 9.
18. *Славутин Е. И.* Работы Эйлера об эллиптических интегралах.— В кн.: История и методология естественных наук: (математика, механика). М.: МГУ, 1973, вып. XIV, с. 181—189.

# К 175-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ И. П. Г. ЛЕЖЕН-ДИРИХЛЕ[1]

**Х. Кох**

13 февраля 1980 г. исполнилось 175 лет со дня рождения Иогана Петера Густава Лежен-Дирихле. Это дает повод напомнить о некоторых важных моментах его жизни и кратко обрисовать влияние его важнейших открытий на развитие математики вплоть до современности.

Другим поводом является то обстоятельство, что заслуги Дирихле, вполне признанные уже при его жизни (так, в 27 лет он стал действительным членом Прусской академии наук), в настоящее время не всегда подобным же образом отражаются в сознании математиков и историков математики нашего времени. Позволю себе привести три примера.

1. В изданном в 1975 г. Г. Вуссингом и В. Арнольдом сборнике научных биографий выдающихся математиков [1], включены биографии 17 математиков XIX столетия, среди них Б. Больцано, А. Ф. Мёбиуса и С. В. Ковалевской, но нет Дирихле.

2. Советский историк математики Ф. А. Медведев в 1975 г. писал: «Первую половину XIX в. в развитии математики можно с известной натяжкой охарактеризовать как период, когда математика была по преимуществу французской... (Перечисляется ряд французских математиков.— *Х. К.*)... Были, конечно, исключения, вроде Гаусса и Якоби в Германии, Лобачевского и Остроградского в России, Абеля в Норвегии, Бояи в Венгрии...» [2, с. 6]. О Дирихле упоминания нет.

3. В несколько бурно проходившей дискуссии о том, имя какого математика можно было бы присвоить будущему Центральному институту математики Академии наук ГДР, о Дирихле не было упоминания, несмотря на то, что все самые выдающиеся его работы появились в Берлине и что, за исключением полутора лет в Бреслау (ныне Вроцлав) и трех с половиной лет в Гёттингене, Дирихле работал только в Берлине.

В этой связи я хотел бы обратить внимание на ценные публикации о Дирихле К. Р. Бирмана, прежде всего его

---

[1] Перевод с немецкой рукописи И. А. Головинского.

работу [3]. Выражаю благодарность профессору Бирману за ряд ценных замечаний по настоящей статье.

Прежде всего несколько слов о жизни Дирихле. Он родился в 1805 г. в Дюрене, близ Аахена. Его дед, суконодел, прибыл сюда из соседней, франкоязычной части Бельгии, так что фамилия «Lejenne Dirichlet» легко объясняется как «молодой человек из Ришле», местечка неподалеку от Вервье. Отец Дирихле, начальник почтового отделения в Дюрене, обеспечил сыну хорошее образование в гимназиях Бонна, а затем Кёльна. С мая 1822 г. до осени 1826 г. Дирихле изучал математику в Париже, в то время еще являвшемся, бесспорно, центром мировой математики. Еще важнее, чем лекции и личные контакты, в том числе с С. Ф. Лакруа, Ж. Б. Фурье и С. Д. Пуассоном, было для Дирихле самостоятельное изучение «Арифметических исследований» К. Ф. Гаусса (1801), которые он вполне усвоил и первый упростил и популяризировал их в лекциях, позднее изданных Дедекиндом.

С лета 1823 г. Дирихле жил в качестве домашнего учителя в семье М. С. Фуа (1775—1825), где преподавал немецкий язык и литературу его жене и двум детям. В этой образованной и общительной семье он одновременно совершенствовал свое французское произношение, а также манеры. Генерал Фуа возглавлял в палате депутатов либеральную оппозицию, которая стремилась заменить ультраконсервативный режим короля Карла X властью крупной буржуазии, чего она и достигла благодаря революции 1830 г. Следующий эпизод освещает политический дух того времени.

В 1826 г. в связи с зачислением Дирихле на службу в систему прусских университетов, прусский министр по делам культов барон фон Альтенштейн запросил министра внутренних дел фон Шукмана, «нет ли с точки зрения полиции сомнений» (относительно приглашения Дирихле приват-доцентом); другой запрос был направлен прусскому послу в Париже барону фон Вертгерну. Последний отвечал:

«Так как о взглядах и образе жизни этого молодого человека в полицейских документах не обнаружено ничего предосудительного, хотя он и жил в доме человека, которого правительство причисляло к самым ярым своим противникам, то я полагаю возможным считать, что жил он здесь только для науки, не позволяя втягивать себя в политическую деятельность» [3, с. 19].

В 1825 г. Дирихле представил Парижской академии свою первую математическую работу «О невозможности некоторых неопределенных уравнений пятой степени» (Sur l'impossibilité de quelques équations indeterminées du cinquième degré). Лежандру, одному из двух рецензентов, удалось, несколько дополнив эту работу, доказать гипотезу Ферма для показателя 5, т. е. установить, что уравнение $x^5 + y^5 = z^5$ не имеет решений в положительных целых числах. Работа была напечатана в «Recueil des Mémoires des Savans étrangers» и сразу сделала Дирихле известным в научных кругах Парижа. Он вошел в более тесные отношения с членами Академии Ж. Б. Фурье и Александром фон Гумбольдтом, которые сыграли важную роль в его дальнейшей судьбе. По рекомендации Гумбольдта Дирихле смог в 1827 г. поступить на прусскую государственную службу в Бреслау, как приват-доцент с годовым содержанием 400 талеров. Университет в Бреслау был основан лишь в 1811 г. взамен университета во Франкфурте на Одере. Математика в нем была на чрезвычайно низком уровне. Поэтому Дирихле был рад перейти в 1828 г. в общую Военную школу в Берлине, с разрешением читать лекции в Берлинском университете, который также был основан только в 1810 г. В 1829 г. появляется его знаменитая работа по теории рядов Фурье; к ней я позже вернусь. В том же году его жалованье было повышено до 600 талеров. Это составило финансовую основу для создания семьи: в 1832 г. Дирихле женился на Ребекке Мендельсон-Бартольди [2].

В том же 1832 г. Дирихле был избран членом Прусской академии наук. В течение 1833—1855 гг. он ежегодно делал в Академии по меньшей мере один доклад о своих результатах. Исключение составляет время с осени 1843

---

[2] С семьей Ребекки Дирихле познакомил А. фон Гумбольдт. Ее отец — берлинский банкир Абрахам Мендельсон-Бартольди, отцом которого был известный философ Мозес Мендельсон-Бартольди, а сыном — Феликс Мендельсон-Бартольди, знаменитый композитор.

Здесь я хотел бы позволить себе маленькое отступление и указать на родство семейства Мендельсонов с другими математиками. Фанни Мендельсон-Бартольди, сестра Ребекки, вышла замуж за художника В. Гензеля, внуком которого был математик К. Гензель. Оттилия Мендельсон, еще одна внучка Мозеса Мендельсона, вышла замуж за математика Э. Куммера, зятем которого стал математик Г. А. Шварц.

до весны 1845 г., когда он получил отпуск для путешествия по Италии, проделанного им частью вместе с математиками К. Г. Я. Якоби, К. В. Борхардтом, Л. Шлефли [3] и Я. Штейнером.

В 1855 г. Дирихле все еще приходилось одновременно со своей профессурой в Берлинском университете преподавать в Военной школе. Поэтому он воспользовался предложением занять место Гаусса в Гёттингене, чтобы высказать желание освободиться от этой ставшей тягостной для него деятельности. Поскольку прусское министерство культуры своевременно на это не отреагировало, он принял приглашение в Гёттинген, где и работал до конца жизни.

О жизни Дирихле сказано достаточно. За более подробным жизнеописанием я отсылаю к замечательной памятной речи Э. Куммера, произнесенной в 1860 г. [4], а за дальнейшими ссылками на литературу — к названной выше работе К. Р. Бирмана [3].

Переходя теперь к математическому творчеству Дирихле, я хотел бы снова обратиться к словам Ф. А. Медведева, согласно которым в первой половине XIX столетия математика была преимущественно французской. В отношении Дирихле это справедливо, когда он изучал математику в Париже. Однако, мне кажется, что здесь следует внести уточнение.

В то время как Гаусс работал в Германии еще изолированно, Дирихле положил в истории математики начало перехода от периода, который нес на себе печать влияния преимущественно французских математиков (с кульминационным пунктом в последней трети XVIII в. и некоторым спадом в первой трети XIX в.) к периоду, отмеченному преимущественно влиянием немецких математиков (вторая треть XIX в.). Дирихле добился этого не только своими математическими работами, но также и преподавательской деятельностью, ибо в противоположность Гауссу он был выдающимся педагогом. К числу его слушателей и учеников принадлежали, в частности, Ф. Эйзенштейн (1823—1852), Л. Кронекер (1823—1891), Б. Риман (1826—1866) и Р. Дедекинд (1831—1916). Риман

---

[3] Шлефли, учитель гимназии из Швейцарии, во время поездки был переводчиком Штейнера и ежедневно занимался математикой с Дирихле. Впоследствии он вырос в значительного математика.

основал на названном им «принципе Дирихле» теорию комплексных алгебраических кривых и абелевых функций, благодаря чему явился одним из основоположников современной математики. Правда, этот принцип был обоснован лишь позднее в работах Д. Гильберта и Г. Вейля.

Если бы математику того времени пришлось делать доклад о важнейших проблемах математики, то наверняка среди них встретились бы следующие три проблемы:

**1.** В 1785 г. А. М. Лежандр дал неполное доказательство квадратичного закона взаимности, использовав недоказанное утверждение, вытекавшее, как он заметил, из следующего:

Для двух натуральных чисел $k$ и $l$, не имеющих общего делителя, всегда существует такое число $m$, что $l + km$ есть простое число. Последовательность $l + km$ ($m = 0, 1, \ldots$) является арифметической прогрессией.

Доказать это Лежандру не удалось.

**2.** В связи с обобщением квадратичного закона взаимности, а также со стремлением доказать гипотезу Ферма, представляется разумным перейти от целых чисел к целым алгебраическим числам. Целым алгебраическим числом является комплексное число $\alpha$, удовлетворяющее уравнению

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

с целыми рациональными коэффициентами. Требовалось развить теорию этих чисел, которая соответствовала бы первым трем главам «Арифметических исследований» Гаусса.

**3.** В 1807 г. Фурье доложил Парижской академии о своих исследованиях по теории распространения тепла в твердых телах. Его идеи с большей полнотой опубликованы в книге, вышедшей в 1822 г. В ее VI главе Фурье представляет произвольную нечетную функцию $\varphi(x)$, заданную в интервале $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$$

и утверждает, что $a_k$ дается интегралом

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx\, dx.$$

(Гаусс пришел к этому результату в 1810 г., но не опубликовал его.) Требовалось это утверждение доказать.

Первая и третья проблемы были решены Дирихле, в решение второй он внес существенный вклад. В настоящем сообщении я ограничиваюсь этими тремя проблемами и их дальнейшим воздействием на математику вплоть до современности. Другие важные результаты Дирихле относятся, в частности, к теории квадратичных форм и к теории потенциала.

Начнем с первой проблемы, теоремы Дирихле о существовании простых чисел в арифметических прогрессиях.

Доказательство состоит в поразительно простом рассуждении, ведущем к глубокому аналитическому факту, который затем нужно доказать. Обобщая подход Эйлера к доказательству теоремы Евклида о существовании бесконечного множества простых чисел, Дирихле рассматривает ряды

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

для действительных $s$ и функции $\chi$, которая на современном языке может быть определена так. Для $(n, k) = 1$, $\chi$: $(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$ есть гомоморфизм мультипликативной группы классов вычетов по модулю $k$ в мультипликативную группу комплексных чисел, причем полагают $\chi(n) = \chi(\bar{n})$. Для $(n, k) \neq 1$ полагают $\chi(n) = 0$. $\chi$ называется характером по модулю $k$. В частности, гомоморфизм $\chi_0$, где $\chi_0(n) = 1$, при $(n, k) = 1$, называется единичным характером.

Легко видеть, что эти ряды при $s > 1$ абсолютно сходятся, а при $\chi \neq \chi_0$ и $s = 1$ сходятся условно. Явление условной сходимости впервые строго рассмотрел Дирихле. Далее функция $L(s, \chi)$ может быть представлена как эйлеровское произведение

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

где произведение распространяется на все простые числа. Логарифмируя, получаем

$$\ln L(s, \chi) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + R_\chi(s),$$

где $R_\chi(s)$ сходится при $s > 0$.

Теперь наступает решающий момент в рассуждении Дирихле. Рассмотрим сумму

$$\sum_{\chi} \chi(l)^{-1} \ln L(s, \chi) = \sum_{\chi} \sum_{p} \frac{\chi(l)^{-1} \chi(p)}{p^s} + R(s),$$

где $R(s)$ при $s > 0$ сходится. Легко видеть, что сумма

$$\sum_{\chi} \chi(l)^{-1} \chi(p)$$

при $p \not\equiv l \pmod{k}$ равна нулю, а при $p \equiv l \pmod{k}$ равна числу $\varphi(k)$ обратимых классов вычетов по модулю $l$. Поэтому

$$\sum_{\chi} \chi(l)^{-1} \ln L(s, \chi) = \varphi(k) \sum_{p \equiv l \pmod{k}} \frac{1}{p^s} + R(s).$$

Вслед за Эйлером мы знаем, что при $s \to 1$ величина $L(s, \chi_0)$ стремится к бесконечности. Если бы мы знали, что $\lim\limits_{s \to 1} \ln L(s, \chi)$ при $\chi \neq \chi_0$ конечен, то теорема была бы доказана. Таким образом, дело сводится к тому, чтобы показать, что $\lim\limits_{s \to 1} L(s, \chi) \neq 0$. Для характеров $\chi$, для которых $\chi^2 \neq \chi_0$, это показать легко, но для таких характеров, для которых $\chi^2 = \chi_0$, т. е. для квадратичных характеров, это более глубокий факт. У Дирихле было его прямое доказательство, которое он, однако, не опубликовал, так как между $L(1, \chi)$ и числом классов квадратичных форм он открыл связь, которую знал еще Гаусс и которая называется трансцендентным определением числа классов:

$$h = \frac{\sqrt{D}}{\pi} L(1, \chi), \quad \text{если} \quad k \neq 3, 4, \chi(-1) = -1, \tag{1}$$

$$h = \frac{\sqrt{D}}{2 \ln \varepsilon} L(1, \chi), \quad \text{если} \quad \chi(-1) = 1, \tag{2}$$

причем $h$ — число классов, $D$ — дискриминант и $\varepsilon > 1$ — нормированная основная единица квадратичного числового поля, соответствующего $\varkappa$. Отсюда сразу видно, что $L(1, \chi) \neq 0$. (Здесь $\chi$ — простой характер, что, впрочем, не является существенным ограничением.) За подробностями мы отсылаем к книге [5, гл. V].

Прежде чем сделать некоторые замечания относительно дальнейшей участи первой проблемы, я хотел бы коротко остановиться на второй.

Дирихле рассматривает кольцо $Z(\alpha)$, порождаемое целым алгебраическим числом $\alpha$. Это — ближайшее обобщение кольца $Z$. Гаусс рассматривал арифметику в $Z[-1]$ в качестве предпосылки для «правильной» формулировки биквадратичного закона взаимности. Элементы $\varepsilon$ из $Z[\alpha]$, обратные к которым, $\varepsilon^{-1}$, снова лежат в $Z$, образуют группу — группу единиц кольца $Z[\alpha]$. Дирихле полностью выяснил структуру этой группы. Над этим вопросом он работал с 1841 по 1845 г. Главный пункт доказательства он нашел, по-видимому, когда слушал пасхальную музыку в Сикстинской капелле в Риме. Это доказательство тоже основано на почти тривиальной идее, знаменитом «принципе ящиков», который гласит, что если $n+1$ предметов разместить в $n$ ящиках, то по меньшей мере в одном ящике будут находиться два предмета.

Дирихле не смог полностью решить вторую проблему, так как кольца $Z[\alpha]$, вообще говоря, не являются подходящими областями для хорошего обобщения арифметики в $Z$. Большего успеха добился Куммер, ограничившись частным случаем $\alpha^n = 1$. Решающий прорыв был сделан Дедекиндом и Кронекером, которые осознали, что нужно исходить из расширения $K$ поля $Q$, и что кольцо $O$ всех целых чисел из $K$ должно рассматриваться как обобщение кольца $Z$. В случае $\alpha^n = 1$ и $K = Q(\alpha)$ будет $O = Z[\alpha]$. Это объясняет успех Куммера.

Дедекинд в X «Дополнении» [4] к изданным им «Лекциям по теории чисел» Дирихле образцово решил вторую проблему, причем подробно доказал теорему Дирихле о единицах, тогда как сам Дирихле дал только некоторые общие указания. В принципе, однако, доказательство Дедекинда не отличается от доказательства Дирихле.

Теперь несколько слов о развитии результатов Дирихле, относящихся к первой проблеме. Оно разделяется на целый ряд направлений.

1. В одной работе 1859 г. для Берлинской академии Риман рассмотрел свойства функции $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ в комплексной области и указал на глубокую связь $\zeta(s)$ с распределением простых чисел. Ж. Адамар и Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен доказали в 1896 г. независимо друг от дру-

---

[4] Впервые опубликовано в 1871 г. В четвертом издании 1894 г. это «Дополнение» из X стало XI. См. [6].

га асимптотический закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях:

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x, k, l) \Big/ \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{\varphi(k)},$$

где $\pi(x, k, l)$ означает количество простых чисел $p$, $p \equiv l \pmod{k}$, не превосходящих $x$. Впоследствии этот результат был уточнен.

2. Исследование рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, $a_n \in \mathbb{C}$, называемых рядами Дирихле, превратилось в самостоятельную дисциплину, о которой один из лучших знатоков ее, С. Мандельбройт, в предисловии к своей монографии «Ряды Дирихле», писал: «Эта часть гармонического анализа столь широка и богата публикациями и фактами, что было бы бессмысленно, как мне кажется, пытаться охватить всю теорию».

3. Дирихле смог дать для $L(1, \chi)$ замкнутое выражение и тем самым преобразовать формулы (1) и (2) в алгебраические формулы, что в 1850 г. обобщил Куммер. В новейшее время вопрос снова был поднят Х. Хассе и продвинут далее Х. Леопольдтом, в виде теории для любого абелева расширения $K/Q$ (т. е. группа Галуа поля $K/Q$ — абелева). Сюда же относятся многочисленные работы других математиков, посвященные частным случаям.

4. По определению, функции $L(s, \chi)$ отвечают мультипликативным группам классов вычетов по модулю $K$. Для квадратичных характеров мы видели, что $L(s, \chi)$ также может быть связанной с квадратичным числовым полем. Обобщения этой взаимозависимости имели решающее значение для истории алгебраической теории чисел после Дирихле. Они привели Э. Артина к его закону взаимности в теории полей классов и составляют предмет гипотез Р. П. Ленглендса, играющих в настоящее время важную роль в различных ветвях математики.

Теперь перехожу к третьей проблеме. В 1829 г. Дирихле доказал, что кусочно-непрерывная и кусочно-монотонная функция $f(x)$ в интервале $(-\pi, \pi)$ может быть разложена в тригонометрический ряд. Эта теорема и сегодня в лекциях для студентов доказывается почти так же, как у Дирихле, который $n$-ю частичную сумму

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

где

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(x) \sin \nu x \, dx, \qquad b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \nu x \, dx,$$

преобразует в конечный интеграл и затем показывает, что этот интеграл при $n \to \infty$ сходится к

$$^1/_2\,(f\,(x+0) + f\,(x-0)).$$

И здесь линия Дирихле была продолжена Риманом — в его диссертации в 1854 г. на право преподавания в университете, изданной лишь в 1867 г. Дедекиндом. Во введении Риман писал: «...Сопоставляя различные воззрения, я не преминул использовать кое-какие намеки и указания знаменитого математика, которому мы обязаны первой значительной работой в этой области». Далее он пишет о задаче представления произвольной функции синусами и косинусами: «В самом деле, эта задача была им решена с исчерпывающей полнотой для всех тех случаев, когда она могла бы быть поставлена природой (а только о таких случаях и шла речь), ибо при всем несовершенстве наших знаний о том, как силы и состояния материи изменяются в бесконечно малом в зависимости от места и времени, все же мы можем с уверенностью считать, что те функции, на которые не распространяется исследование Дирихле, в природе не встречаются» [7, с. 234]. Далее Риман оправдывает занятие этим вопросом ссылкой на его значение для оснований анализа и для применения в теории чисел. Он доказывает, что периодическая функция представляется тригонометрическим рядом, когда она интегрируема и имеет лишь конечное число максимумов и минимумов. По этому случаю Риман определяет интеграл, который носит теперь его имя. Диссертация Римана явилась одним из исходных пунктов теории функций действительного переменного. Мы не можем вдаваться в это дальше. Упомянем в заключение еще только следующий окончательный результат Л. Карлесона 1966 г.: ряд Фурье функции $f$ из $L^2\,(-\pi, \pi)$ сходится почти всюду к $f$.

Еще более важным, чем приведенное усовершенствование теоремы Дирихле, является ее обобщение на локально-компактные группы $G$, называемое гармоническим анализом. С точки зрения гармонического анализа, Дирихле рассматривает простейший нетривиальный случай группы $R/2\pi Z$, неприводимыми представлениями которой являются показательные функции $e^{inx}$, где $n \in \mathbf{Z}$, $x \in \mathbf{R}$. Функции на $R/2\pi Z$ вместо косинусов и синусов раскладывают по этим экспонентам, что для комплексозначных функций сводится к тому же самому. Гармонический анализ на локально-компактных группах — одна из фундаментальных ветвей современной математики. Она находится в тесной связи с упомянутыми выше гипотезами Ленглендса.

Подводя итог, можно сказать, что важные разделы математики испытали существенное влияние Дирихле. Его работам присущ неповторимый индивидуальный стиль, отличающийся сочетанием поразительно простых исходных рассуждений с остроумными аналитическими выкладками, благодаря чему анализ в целом был поднят им на более высокую ступень. Дирихле явился подлинным творцом применения анализа к проблемам теории чисел. Математические вопросы, которыми он первым занялся, и сегодня стоят в центре математических исследований.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Biographien bedeutender Mathematiker/Hsg. von H. Wussing und W. Arnold. B., 1975.
2. *Медведев Ф. А.* Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX—XX вв. М.: Наука, 1976.
3. *Biermann K. R.* J. P. G. Lejeune-Dirichlet. Dokumente für sein Leben und Wirken.— Abh. DAW, Klasse Math., Phys. und Techn., 1959, N 2.
4. *Lejenne-Dirichlet P. G.* Werke. B., 1889—1897. Bd. 1—2.
5. *Боревич З. И.*, *Шафаревич И. Р.* Теория чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1972.
6. *Лежен-Дирихле П. Г.* Лекции по теории чисел. В обработке и с дополнениями Р. Дедекинда. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
7. *Риман Б.* Сочинения. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
8. *Mandebrojt S.* Series de Dirichlet. P., 1967.

# К ИСТОРИИ КОМПЛЕКСНОГО УМНОЖЕНИЯ

## ГАУСС, ЭЙЗЕНШТЕЙН И КРОНЕКЕР

С. Г. Влэдуц

### I. Введение

Данная статья представляет собой вторую часть работы по истории теории комплексного умножения. Первая часть, посвященная Абелю, вышла в «Историко-математических исследованиях», вып. 26. Далее мы ссылаемся на нее как на «первую часть».

Здесь мы излагаем труды К. Ф. Гаусса, Ф. Г. Эйзенштейна и Л. Кронекера. Мы ограничиваемся этими авторами, так как именно их работы сформировали основные идеи и методы теории и оказали наибольшее влияние на последующее ее развитие. При этом из их исследований мы выбираем лишь то, что более или менее прямо относится к нашей теме — основным теоремам комплексного умножения. Так, мы не затрагиваем важную статью Эйзенштейна [1], которая касается более тонких вопросов теории. Хорошее представление о теории эллиптических функций Эйзенштейна и Кронекера дает книга А. Вейля [2]. Общее историческое введение см. в разделе 1 первой части.

Охватить все основные работы хотя бы XIX в. по теории комплексного умножения не представляется возможным. Мы должны лишь упомянуть ценные статьи Ш. Эрмита [3], Л. Силова [4]. Весьма существенны также исследования Г. Вебера, бóльшая часть которых резюмирована в его фундаментальном труде [5].

Автор выражает свою искреннюю благодарность А. П. Юшкевичу за многочисленные ценные замечания, которые были весьма полезны для оформления окончательного текста работы.

Напомним теперь необходимые определения и формулировки. Мы придерживаемся обозначений первой части и обозначений, которые вводятся ниже.

*1. Теория полей классов.* Пусть $L/K$ — конечное абелево расширение степени $n$ полей алгебраических чисел, $\mathfrak{p}$ — простой идеал $K$, неразветвленный в $L$. Тогда хорошо известным способом строится $\sigma_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}, L/K) \in \mathrm{Gal}(L/K)$ — автоморфизм Фробениуса, связанный с $\mathfrak{p}$ (см. [6, с. 253; 7, с. 86]), называемый также символом

Артина. Он однозначно характеризуется свойством $x^\sigma \equiv \equiv x^{N\mathfrak{P}} \pmod{\mathfrak{p}}$, где $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ — идеал $L$, лежащий над $\mathfrak{p}$, $x$ — целый элемент в $L$, $N_{\mathfrak{P}}$ — абсолютная норма $\mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{c}$ — целый идеал $K$, который делится на достаточно высокие степени ветвящихся в $L$ идеалов, и пусть $I_K(\mathfrak{c})$ — группа дробных идеалов, взаимно простых с $\mathfrak{c}$. Можно продолжить отображение $\mathfrak{p} \to (\mathfrak{p}, L/K)$ по линейности на $I_K(\mathfrak{c})$ и получить отображение Артина: $I_K(\mathfrak{c}) \to \to \mathrm{Gal}(L/K)$; оно сюръективно, и закон взаимности Артина утверждает, что его ядро — группа $P_1(\mathfrak{c})\,\mathfrak{N}(\mathfrak{c})$, где $\mathfrak{N}(\mathfrak{c})$ — подгруппа в $I_K(\mathfrak{c})$, порожденная нормами идеалов $L$, взаимно простых с $\mathfrak{c}$, а подгруппа $P_1(\mathfrak{c})$ состоит из главных идеалов вида $(\alpha)$, где $\alpha \equiv 1$ (mod* $(\mathfrak{c})$, т. е. $\alpha \equiv \equiv 1 \pmod{m_{\mathfrak{p}}^{c(\mathfrak{p})}}$. $m_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ — максимальный идеал локального кольца $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ при $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c} = \prod \mathfrak{p}^{c(\mathfrak{p})}$. Связь закона взаимности с разложением простых идеалов в расширении $L/K$ дается следующим простым результатом.

П р е д л о ж е н и е. Пусть $\mathfrak{p}$ — неразветвленный в $L$ простой идеал $K$ и пусть элемент $\sigma = \sigma_{\mathfrak{p}}$ имеет в группе $\mathrm{Gal}(L/K)$ порядок $f$. Тогда $\mathfrak{p}$ распадается в поле $L$ на $r = n/f$ сомножителей, каждый степени $f$. В частности, $\mathfrak{p}$ вполне распадается в $L$ тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{p}, L/K) = 1$ (см. [6, с. 253]).

В случае поля рациональных чисел $K = \mathbb{Q}$ по теореме Кронекера—Вебера $L \subset \mathbb{Q}(\zeta_m)$, где $\zeta_m = e^{2\pi i/m}$ — примитивный корень степени $m$ из единицы, и если $(p, m) = = 1$, $p$ — простое, то действие $\sigma = \sigma_p$ определяется правилом $\zeta_m^\sigma = \zeta_m^p$, откуда ясно, что простые числа разлагаются в $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ согласно их вычетам по модулю $m$.

При помощи аналитических средств показывается, что нормальное расширение $L$ поля алгебраических чисел $K$ (не обязательно абелево) определяется множеством $\mathrm{Spl}(L/K)$ простых идеалов $K$, вполне распадающихся в $L$ (см. [8, с. 383], теорема 2). Определим лучевое поле классов $K\mathfrak{c}$ по модулю $\mathfrak{c}$, как единственное абелево расширение $L/K$, в котором распадаются в точности неразветвленные в $L$ простые идеалы $K$, порожденные элементом $\alpha \equiv \equiv 1$ (mod* $\mathfrak{c}$). Такое поле существует для любого $\mathfrak{c}$; в интересующих нас частных случаях ($\mathfrak{c} = (m)$, $m$ — целое) для $K_{\mathfrak{c}}$ будет дано явное описание. При $\mathfrak{c} = (1)$ получаем понятие абсолютного поля классов $K_1/K$, являющееся, как легко показать, максимальным абелевым неразветвленным расширением $K$.

2. *Решетки в квадратичных полях.* Пусть $k = \mathbf{Q}(\tau)$ — квадратичное поле, $\mathfrak{o}_k$ — кольцо целых в $k$. Под порядком $\mathfrak{o}$ в $k$ мы будем понимать подкольцо $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}_k$, не совпадающее с $\mathbf{Z}$. Легко проверить, что если $\mathfrak{o}_k = [\omega, 1] = \mathbf{Z}\omega + \mathbf{Z}$, то для любого порядка $\mathfrak{o}$ существует единственное целое положительное число $m$ такое, что $\mathfrak{o} = [m\omega, 1] = Zm\omega + Z$. В этом случае $m$ называется кондуктором $\mathfrak{o}$. Решетка $L$ в $k$ — свободный $\mathbf{Z}$ подмодуль в $k$ с двумя образующими: $L = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$. Говорят, что $L$ принадлежит порядку $\mathfrak{o}$, если $\mathfrak{o} = \{\lambda \in k \mid \lambda L \subset L\}$, т. е. $\mathfrak{o}$ совпадает с кольцом множителей $L$. Множество решеток $L$, принадлежащих данному порядку $\mathfrak{o}$, образует группу относительно умножения решеток как множеств: $L_1 \cdot L_2 = \{l_1 \cdot l_2 \mid l_1 \in L_1,\ l_2 \in L_2\}$. Идеал $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{o}$ называется собственным $\mathfrak{o}$-идеалом, если он является решеткой, принадлежащей $\mathfrak{o}$; такие идеалы образуют мультипликативную подгруппу $I_\mathfrak{o}$. Главные идеалы в $I_\mathfrak{o}$ образуют подполугруппу $P_\mathfrak{o}$. Фактор $I_\mathfrak{o}/P_\mathfrak{o}$ — группа классов собственных $\mathfrak{o}$-идеалов. Имеют место изоморфизмы $G_\mathfrak{o} \simeq I_\mathfrak{o}(m)/P_\mathfrak{o}(m) \simeq I_k(m)/P_\mathbf{Z}(m)$, где $I_\mathfrak{o}(m)$ (соответственно $P_\mathfrak{o}(m)$) — множество собственных (соответственно главных) $\mathfrak{o}$-идеалов, взаимно простых с $m$, $I_k(m)$ — полугруппа $\mathfrak{o}_k$-идеалов, взаимно простых с $m$, $P_\mathbf{Z}(m)$ — полугруппа главных $\mathfrak{o}_k$-идеалов $(\alpha)$, где $\alpha \equiv a \pmod{m}$, $a \in \mathbf{Z}$, $(a, m) = 1$. Подробное изложение см. в книге С. Ленга [9, гл. 8, § 1].

Впоследствии нам понадобится понятие кольцевого поля классов для поля $k$ по модулю $m$. Это единственное абелево расширение $\bar{K}_m/k$, в котором распадаются те и только те простые идеалы $k$, которые принадлежат $P_\mathbf{Z}(m)$. Явное описание $\bar{K}_m$ см. ниже в п. 8.

3. *Характеры Гекке и L-ряды.* Пусть $\mathfrak{c}$ — целый идеал поля алгебраических чисел $K$. Характером Гекке мы будем называть гомоморфизм группы $I_K(\mathfrak{c})$ в группу $\mathbf{C}^\times$ ненулевых комплексных чисел по умножению, $\chi: I_K(\mathfrak{c}) \to \mathbf{C}^\times$, удовлетворяющий дополнительному условию, а именно: пусть $P_1(\mathfrak{c})$ — как в п. 1. Имеем включения $P_1(\mathfrak{c}) \subset K^\times \subset K_\infty^\times$ — группа единиц алгебры $K_\infty = \prod\limits_v K_v = K \otimes \mathbf{R}$, где произведение берется по всем архимедовым нормированиям $K$ (нас будет интересовать случай $\mathbf{Q}$ или $K = k = \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ — мнимоквадратично, в этих случаях $K_\infty^\times = \mathbf{R}^\times$ и $K_\infty^\times = \mathbf{C}^\times$, соответственно).

Группа $K_\infty^\times$ изоморфна $(\mathbf{R}^\times)^{r_1} \times (\mathbf{C}^\times)^{r_2}$, где $r_1$ — число вещественных, а $r_2$ — число пар комплексно-сопряженных нормирований $K$. В определении характера Гекке требуется, чтобы существовал *непрерывный* гомоморфизм $\psi$: $K_\infty^\times \to \mathbf{C}^\times$ такой, что его ограничение на $P_1(\mathfrak{c})$ совпадало с $\chi$, $\psi|_{P_1(\mathfrak{c})} = \chi|_{P_1(\mathfrak{c})}$. Можно доопределить $\chi$ до характера на $I_K = I_K(1)$, полагая $\chi(\mathfrak{a}) = 0$ при $\mathfrak{a} \notin I_K(\mathfrak{c})$.

По характеру Гекке $\chi$ строится $L$-ряд:

$$L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a} \neq 0} \chi(\mathfrak{a}) (N\mathfrak{a})^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \chi(\mathfrak{p}) (N\mathfrak{p})^{-s})^{-1}.$$

Здесь $s$ — комплексная переменная, сумма берется по всем ненулевым целым идеалам $\mathfrak{a} \subset K$, произведение — по всем простым идеалам $K$. Можно показать, что ряд для $L(s, \chi)$ абсолютно и равномерно сходится на компактных подмножествах полуплоскости $\mathrm{Re}(s) > d$ и поэтому определяет в ней аналитическую функцию. Один из важных результатов Гекке заключается в том, что $L(s, \chi)$ продолжается до мероморфной функции на всей комплексной плоскости и удовлетворяет функциональному уравнению, связывающему $L(s, \chi)$ и $L(m - s, \chi)$, где $m$ — некоторое натуральное число (см. [7, гл. VII, VIII]).

*4. Эллиптические кривые над произвольными полями. Редукция эллиптических кривых.* В первой части работы мы имели дело с эллиптическими кривыми, определенными над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ или над полями алгебраических чисел. Теперь нам понадобятся кривые, определенные над конечными полями.

Пусть вообще $k$ — произвольное поле. Для простоты мы считаем, что его характеристика $p = \mathrm{char}\, k \neq 2$. Тогда можно определить эллиптическую кривую, определенную над $k$, одним из двух эквивалентных способов:

а) Алгебраический подход: эллиптическая кривая $E$ задается полем $K = k(E)$ рациональных функций на ней. Поле $K$ характеризуется тем, что оно может быть представлено в виде $K = k(x; y)$, где $x$ и $y$ связаны единственным соотношением $y^2 = f(x)$, где $f(x)$ — многочлен третьей степени без кратных корней с коэффициентами из $k$.

б) Геометрический подход: эллиптическая кривая $E$ — это множество точек на проективной плоскости $\mathbf{P}^2(k)$, в которых обращается в нуль однородный многочлен третьей степени $g(X_0, X_1, X_2)$ с коэффициентами из $k$, причем требуется, чтобы $g$ не обращался в нуль одновременно со всеми своими производными, и чтобы существовали такие элементы $a_0$, $a_1$, $a_2$ из $k$, что $g(a_0, a_1, a_2) = 0$, т. е. чтобы уравнение $g(X_0, X_1, X_2) = 0$ имело хотя бы одно решение.

Очевидно, что эти определения полностью аналогичны определениям для поля $k = \mathbf{C}$, с небольшими усложнениями, вызванными тем, что поле $k$ может не быть алгебраически замкнутым, и, кроме того, в общем случае не несет никакой естественной топологии, так что нельзя трактовать кривую как риманову поверхность.

Точками эллиптической кривой в поле $l$ — расширении поля $k$ мы будем называть решение уравнения $g(X_0, X_1, X_2) = 0$, $X_0 = a_0$, $X_1 = a_1$, $X_2 = a_2$, $a_i \in l$, рассматриваемые как точки $\mathbf{P}^2(l)$ — проективной плоскости над полем $l$.

Можно также рассматривать эти точки как решения уравнения $y^2 = f(x)$, но при этом надо добавлять к решениям этого уравнения «бесконечное решение» $x = y = \infty$, чтобы соответствие с точками кривой было «правильным».

Если поле $k$ конечно, то конечно число точек кривой $E$ в любом конечном расширении $k$ — поле $l$ и мы будем обозначать через $N_{q^h}$ число точек $E$ в единственном расширении $l = \mathbf{F}_{q^h}$ степени $h$ поля $k = \mathbf{F}_q$.

Напомним понятие изогении эллиптических кривых (над произвольным полем). Проще всего определить изогению $\lambda: E \to E_1$ кривой $E$ на кривую $E_1$ как вложение $\lambda^*: k(E_1) \subset k(E)$ такое, что оно тождественно на поле $k$ и расширение $k(E)/\lambda^* k(E_1)$ имеет конечную степень $\deg \lambda^*$, называемую степенью изогении $\lambda$. Можно также интерпретировать $\lambda$ в терминах точек кривой $E$ и $E_1$, но это нам не понадобится, кроме одного специального случая морфизма Фробениуса. Под морфизмом Фробениуса мы понимаем следующее: пусть $E$ — эллиптическая кривая над конечным полем $k = \mathbf{F}_q$ из $q = p^r$ элементов. Тогда морфизмом Фробениуса мы называем изогению $\pi_p: E \to E^{(p)}$, соответствующую вложению $k(E^{(p)}) = k(x^p, y^p)$, $\pi_p^*: k(E^{(p)}) \subset k(E) = k(x, y)$, где $E^{(p)}$ — некоторая кривая с полем функций $k(E^{(p)}) = k(x^p, y^p)$. Легко проверить, что степень $\pi_p$ равна $p$. На точках кривой $E$ в расширениях поля $k$ морфизм Фробениуса задается возведением координат точек в $p$-ю степень.

Пусть теперь $E/K$ — эллиптическая кривая над полем алгебраических чисел $K$, и пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал поля $K$. Говорят, что кривая $E$ имеет хорошую редукцию по модулю $\mathfrak{p}$, если можно так выбрать уравнение $E$: $f(X_0, X_1, X_2) = 0$, что оно будет иметь $\mathfrak{p}$ — целые коэффициенты, т. е. принадлежащие локальному кольцу $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ идеала $\mathfrak{p}$ и при этом уравнение $\bar{f}(X_0, X_1, X_2) = 0$, где $\bar{f}(X_0, X_1, X_2)$ — форма с коэффициентами из конечного поля вычетов $k_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ идеала $\mathfrak{p}$, определяет эллиптическую кривую $E_\mathfrak{p}$ над $k_\mathfrak{p}$. В этом случае $E_\mathfrak{p}$ не зависит от выбора $f$ и называется редукцией $E$ по модулю $\mathfrak{p}$. Можно показать, что для любой эллиптической кривой $E/K$ редукция хорошая для всех, кроме конечного числа, идеалов $\mathfrak{p}$ в $K$. Аналогичным, но более сложным образом можно определить редукцию $\bar{\lambda}$: $E_\mathfrak{p} \to E'_\mathfrak{p}$ изогении $\lambda : E \to E'$ по модулю простого идеала $\mathfrak{p}$, при условии что $E$ и $E'$ имеют хорошие редукции по модулю $\mathfrak{p}$.

Эта конструкция, как можно проверить [(9, гл. 9]) дает инъективный гомоморфизм колец $\mathrm{End}(E) \to \to \mathrm{End}(E_\mathfrak{p})$. Одна из важных работ М. Дойринга [10] посвящена вопросу об образе этого отображения (см. также [9, гл. 13]).

5. *Дзета-функция эллиптической кривой, определенной над конечным полем.* Пусть $k = \mathbf{F}_q$ — конечное поле из $q = p^r$ элементов, $E$ — эллиптическая кривая, определенная над $k$, которую мы будем задавать ее полем функций $K = k(E) = k(x, y)$, где $y^2 = f(x)$, $f(x)$ — многочлен третьей степени без кратных корней. Это поле — функциональное с конечным полем констант $k$. Такие поля, как хорошо известно, обладают свойствами, вполне аналогичными свойствам полей алгебраических чисел, в частности, для них можно определить теорию дивизоров, теорию делимости и т. д. (см. [11]). Можно также определить в полной аналогии со случаем поля алгебраических чисел, дзета-функцию (по Дедекинду) такого поля:

$$\zeta_K(s) = \prod_\mathfrak{p} (1 - q_\mathfrak{p}^{-s})^{-1},$$

где $\mathfrak{p}$ пробегает все простые дивизоры поля $K$, $q_\mathfrak{p}$ — число элементов в поле $k_\mathfrak{p}$ — поле вычетов дивизора $\mathfrak{p}$, $s$ — комплексная переменная. Произведение сходится абсолютно и определяет аналитическую функцию при $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Это определение равносильно следующему:

$$\zeta_K(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h} \frac{q^{\{C_n^{(i)}\}} - 1}{q-1} \frac{1}{q^{ns}},$$

принадлежащему Ф. К. Шмидту, где $C_n^{(i)}$ пробегает $h$ классов дивизоров степени $n$, а $\{C\}$ — размерность класса $C$, т. е. число определенных над $k$ линейно независимых дивизоров из $C$, так что $(q^{\{C\}} - 1)/(q - 1)$ — число целых дивизоров из $C$. Можно переформулировать эти понятия в терминах числа решения уравнения $y^2 = f(x)$ в конечных полях-расширениях $k$, т. е. числа точек кривой $E$ в этих полях.

Обозначим через $N_{q^h}$ число решений уравнения $y^2 = f(x)$ в поле из $q^h$ элементов — единственном расширении степени $h$ основного поля $k$, считая, что есть «бесконечное решение» $x = y = \infty$. Тогда можно доказать, что дзета-функция поля $K$ равна следующему выражению, обычно называемому дзета-функцией кривой $E$:

$$\zeta_K(s) = Z_E(t) = \exp\left(\sum_{h=1} N_{q^h} t^h/h\right), \quad \text{где} \quad t = q^{-s},$$

а равенство имеет место в кольце формальных степенных рядов с рациональными коэффициентами $\mathbf{Q}[[t]]$, а под $\exp(F(t))$ для формального ряда $F(t)$ понимается ряд

$$\exp(F(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} F(t)^i/i! = 1 + F(t) + {}^1/_2 F(t)^2 + \ldots$$

Оказывается, что приведенные выше определения в нашем случае позволяют получить

$$Z_E(t) = \frac{1 - at + qt^2}{(1-t)(1-qt)},$$

где $a$ — некоторое целое число, называемое «следом Фробениуса», и которое можно определить так: $q + 1 - a = N_q$, где $N_q$ — число точек $E$ в поле $\mathbf{F}_q$. Аналог гипотезы Римана для $\zeta_K(s)$ утверждает, что $|a| \leqslant 2\sqrt{q}$. Это утверждение доказали Ф. К. Шмидт, Г. Хассе, А. Вейль в 30—40-х гг. нашего века. Как мы увидим, частный случай был получен уже Гауссом.

Об изложенных здесь результатах см. также [12—14].

6. *Дзета-функция эллиптической кривой, определенной над полем алгебраических чисел.* Пусть $E/K$ — эллиптическая кривая над полем алгебраических чисел $K$, и пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал поля $K$, для которого редукция $E$ по модулю $\mathfrak{p}$ хорошая. Обозначим ее $\bar{E}_\mathfrak{p}$, это кривая определенная над конечным полем $k_\mathfrak{p}$. Можно рассмотреть ее дзета-функцию, как это описано в п. 5:

$$Z_{\bar{E}_\mathfrak{p}}(t) = \frac{1 - a_\mathfrak{p} t + qt^2}{(1-t)(1-qt)} = \frac{1 - a_\mathfrak{p} q^{-s} + q^{1-2s}}{(1-q^{-s})(1-q^{1-s})},$$

где $q = q_\mathfrak{p} = N\mathfrak{p}$ — норма идеала $\mathfrak{p}$, т. е. число элементов в поле $k_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p} = \mathbf{F}_q$.

Замечая, что эллиптическая кривая имеет хорошую редукцию по модулю всех простых идеалов $K$, кроме конечного числа исключительных «плохих» простых идеалов, мы можем определить дзета-функцию кривой $E$ над полем $K$:

$$\zeta(E, K, s) = \prod_\mathfrak{p} Z_{\bar{E}_\mathfrak{p}}((N\mathfrak{p})^{-s}),$$

где произведение распространено на все идеалы, по модулю которых $E$ имеет хорошую редукцию. Можно преобразовать выражение для $\zeta(E, K, s)$ воспользовавшись формулой для $Z_{\bar{E}_\mathfrak{p}}(t)$:

$$\zeta(E, K, s) = \prod_\mathfrak{p} Z_{\bar{E}_\mathfrak{p}}((N\mathfrak{p})^{-s}) =$$

$$= \prod_\mathfrak{p} \frac{1 - a_\mathfrak{p}(N\mathfrak{p})^{-s} + (N\mathfrak{p})^{1-2s}}{(1-(N\mathfrak{p})^{-s})(1-(N\mathfrak{p})^{1-s})} =$$

$$= \prod_\mathfrak{p} (1-(N\mathfrak{p})^{-s})^{-1} \prod_\mathfrak{p} (1-(N\mathfrak{p})^{1-s}) \times$$

$$\times \prod_\mathfrak{p} (1 - a_\mathfrak{p}(N\mathfrak{p})^{-s} + (N\mathfrak{p})^{1-2s}) =$$

$$= \zeta_K^*(s)\,\zeta^*(s-1)\,Z(E, K, s),$$

где $\zeta_K^*(s) = \prod\limits_{\mathfrak{p}\notin S_E} (1-(N\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$ —

обыкновенная дедекиндова дзета-функция поля, точнее, функция, отличающаяся от нее на множитель из элементарных функций,

$$f(s) = \prod_{\mathfrak{p} \in S_E} (1 - (N\mathfrak{p})^{-s})^{-1},$$

где $S_E$ — конечное множество простых идеалов $K$, по модулю которых у $E$ нет хорошей редукции; то же самое относится и к $\zeta^*(s-1)$.

Функция $Z(E, K, s)$ называется существенной частью дзета-функции эллиптической кривой, а функция $L(E, K, s) = Z(E, K, s)^{-1}$ — $L$-рядом эллиптической кривой.

Одной из основных проблем, связанных с дзета-функцией эллиптической кривой, является вопрос об ее аналитическом продолжении. Проведенные выше выкладки были чисто формальными, но легко убедиться, что при $\operatorname{Re} s > 3/2$ произведение абсолютно сходится и в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 3/2$ функция $Z(E, K, s)$ представляет собой голоморфную функцию. Задача состоит в аналитическом продолжении $Z(E, K, s)$ левее прямой $\operatorname{Re} s = {}^3/_2$. Гипотеза Хассе — Вейля утверждает, что функция $Z(E, K, s)$ продолжается до мероморфной на всей комплексной плоскости функции и удовлетворяет функциональному уравнению относительно замены $s \mapsto 2 - s$ (см. по этому поводу [15], гл. 7 и, в более общем контексте, [13]). Эта гипотеза доказана в немногих частных случаях, например, если $E$ — кривая с комплексным умножением. Этот результат принадлежит М. Дойрингу (1950 гг.).

Точная его формулировка такова (мы берем нужный нам частный случай). Пусть $E$ — эллиптическая кривая с комплексным умножением на мнимо-квадратичное поле $k$, определенная над полем $K \supset k$. (Для понимания результатов Гаусса существенен лишь случай $K = k$.)

Теорема А. Имеется следующее выражение для $L$-ряда эллиптической кривой $E$:

$$L(E, K, s) = L(s, \chi_{E, K})\, L(s, \chi'_{E, K}),$$

где $L(s, \chi)$ — $L$-ряд с характером Гекке (см. п. 3), $\chi_{E, K}$ и $\chi'_{E, K}$ — сопряженные характеры Гекке для поля $K$, т. е. $\chi'_{E, K}(\mathfrak{a}) = \chi_{E, K}(\mathfrak{a})'$ при $\mathfrak{a} \in I_K$ (штрих здесь и ниже означает комплексное сопряжение). Из этой теоремы и результатов Гекке (п. 3) следует утверждение гипотезы Хассе — Вейля для кривой $E$ с комплексным умножением. Теорема об $L$-ряде эллиптической кривой является простым формальным следствием следующего утверждения:

Теорема В. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал $K$, по которому $E$ имеет хорошую редукцию. Тогда $\overline{\theta\,(\chi_{E,\,K}\,(\mathfrak{p}))}$ (черта — редукция $\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}$) — автоморфизм Фробениуса кривой $\bar{E}_{\mathfrak{p}}$ над полем $k_{\mathfrak{p}}$.

Здесь $\theta$: $k \to \mathrm{End}^0\,(E)$ — так называемое нормализованное вложение $k$ в $\mathrm{End}^0\,(E)$ (второе вложение отличается от нормализованного на комплексное сопряжение), которое канонически определяется по $E$ и на определении которого мы не будем здесь останавливаться. Подробности см. [9, гл. 9, § 4; гл. 10, § 4].

Именно в формулировке В теорема была в частном случае, по существу, известна Гауссу, как мы это увидим ниже.

7. *Аналитические параметризации и соотношения между различными типами эллиптических функций.* Под аналитической параметризацией мы будем понимать (комплексно-аналитический) изоморфизм $\psi$: $\mathbf{C}/\Gamma \to A\,(\mathbf{C})$, где $\Gamma$ — решетка, $A$ — эллиптическая кривая, $A\,(\mathbf{C})$ — точки $A$ с комплексными координатами. Если $A$ реализована как подмножество некоторого комплексного проективного пространства $\mathbf{P}^N\,(\mathbf{C})$ или если $A \setminus S$ ($S$ — конечное множество точек) реализована как подмножество аффинного пространства $\mathbf{A}^n\,(\mathbf{C})$, то $\psi$ задается некоторыми эллиптическими функциями. Например, стандартная реализация эллиптической кривой в виде плоской кубики с уравнением $X_0X_2^2 = 4X_1^3 - g_2X_0^2X_1 - g_3X_0^3$ или в неоднородных координатах $x = X_1/X_0$, $y = X_2/X_0$, $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, как мы видели, задается $\wp$-функциями Вейерштрасса: $x = \wp\,(t)$, $y = \wp'\,(t)$. Если представить уравнение эллиптической кривой в виде произведения $w^2 = (1-z^2)\,(1 - k^2z^2)$, то ее аналитическую параметризацию дают эллиптические функции Якоби с модулем $k$: $z = \mathrm{sn}\,(u, k)$, $w = (d/du)\,\mathrm{sn}\,(u,k) = \mathrm{cn}\,(u, k)\,dn\,(u, k)$.

Изоморфизм эллиптических кривых (т. е. изоморфизм полей $\mathbf{C}\,(x, y) \cong \mathbf{C}\,(z, w)$) приводит к выражению одних эллиптических функций через другие. Мы приведем эти соотношения для функций Вейерштрасса, более употребительных ныне, чем функций Якоби, которыми пользовался Кронекер, и лемнискатических функций, изучавшихся Гауссом и Эйзенштейном.

Имеем соотношения $\wp\,(z) = e_3 + (e_1 - e_2)\,(\mathrm{sn}\,w)^{-2}$, где $w = z\sqrt{e_1 - e_2}$, $e_1 = \wp\,(\omega_1/2)$, $e_2 = \wp\,(\omega_1 + \omega_2)/2)$, $e_3 = \wp\,(\omega_2/2)$ — корни уравнения $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$, $\omega_1$

$\omega_2$ — периоды $\wp$, т. е. $\Gamma = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$. При этом модуль $k$ функции $\operatorname{sn} w = \operatorname{sn}(w, k)$ выражается так:

$$k = \sqrt{(e_2 - e_3)/(e_1 - e_3)}.$$

Лемнискатические функции получаются при обращении интеграла

$$\varphi = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \qquad x = \sin \operatorname{lemn} \varphi = \operatorname{sl} \varphi, \qquad \operatorname{sl} 0 = 0.$$

Обозначая

$$\tilde{\omega}/2 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2,$$

имеем

$$\operatorname{cl} \varphi = \cos \operatorname{lemn} \varphi = \operatorname{sl}(\tilde{\omega}/2 - \varphi).$$

Связь с функциями Якоби:

$$\operatorname{sl} \varphi = \frac{\operatorname{sn}(\varphi\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}\operatorname{dn}(\varphi\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})}, \qquad \operatorname{cl} \varphi = \operatorname{cn}(\varphi\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}).$$

Выполняется соотношение $\wp(z) = (2\operatorname{sl}^2(z/\sqrt{2}))^{-1}$. $\wp(z)$ соответствует $g_2 = 1$, $g_3 = 0$. Доказательства этих результатов см. в [16, гл. 22]. Между $\operatorname{sl} u$ и $\operatorname{cl} u$ существует соотношение $1 = \operatorname{sl}^2 u + \operatorname{cl}^2 u + \operatorname{sl}^2 u \operatorname{cl}^2 u$, тем самым формулы $x = \operatorname{sl} u$, $y = \operatorname{cl} u$ задают параметризацию эллиптической кривой с уравнением $1 = x^2 + y^2 + x^2y^2$. Легко проверить, что эта кривая изоморфна кривой $w^2 = 1 - z^4$, причем имеет место изоморфизм не только над полем $\mathbf{C}$, но и над $\mathbf{Q}$: $\mathbf{Q}(x, y) = \mathbf{Q}(z, w)$ (в частности, их дзета-функции совпадают, что нам понадобится при обсуждении работ Гаусса).

8. *Комплексное умножение эллиптических кривых. Приложение к теории чисел.* Во введении к первой части работы была сформулирована основная теорема комплексного умножения. Она является следствием более точных результатов, описанных ниже, которые представляют также самостоятельную ценность.

Сначала об обозначениях. Мы рассматриваем символ $j$, с одной стороны, как обозначение инварианта эллиптической кривой $E$ и пишем в этом случае $j = j_E = j(E)$; если кривая получается при факторизации $\mathbf{C}$ по решетке $\Gamma$: $E(\mathbf{C}) = \mathbf{C}/\Gamma$, полагаем $j(\Gamma) = j(\mathbf{C}/\Gamma) = j(E)$. С другой стороны, мы рассматриваем $j$ как аналитическую функцию в верхней полуплоскости $H = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, определяемую хорошо известным способом. Связь между этими трактовками дается соотношением

$$j(z) = j(\mathbf{Z}z + \mathbf{Z}),$$

где $z \in H$ и $\mathbf{Z}z + \mathbf{Z}$ рассматривается как решетка в $\mathbf{C}$. Из соотношения $j(\lambda\Gamma) = j(\Gamma)$ легко вытекает, что при изучении свойств $j_E$ можно ограничиться только решетками вида $\mathbf{Z}z + \mathbf{Z}$ и, следовательно, значениями $j(z)$.

Пусть $k$ — мнимо-квадратичное поле, $\mathfrak{o} = \mathbf{Z} + m\mathfrak{o}_k$ — порядок в $k$ с кондуктором $m$, $\Gamma$ — решетка в $k$ с кольцом множителей $\mathfrak{o}$ (например, $\Gamma = \mathfrak{a}$ — собственный $\mathfrak{o}$-идеал), $\mathfrak{p}$ — идеал в $\mathfrak{o}_k$, такой, что $(\mathfrak{p}, m) = 1$, редукция кривой $E/K$, $E(\mathbf{C}) = \mathbf{C}/\Gamma$, $K = k(j(\Gamma))$ по всем $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ хорошая, $\mathfrak{p}_m = \mathfrak{o}_m \cap \mathfrak{p}$. Тогда имеем теорему (соотношение Кронекера):

Т е о р е м а. 1. В этих обозначениях $j(\Gamma)$ — целое алгебраическое число, поле $K = k(j(\Gamma))$ — абелево расширение $k$, неразветвленное в $\mathfrak{p}$ и действие $\sigma_\mathfrak{p} = \sigma$ на $j(\Gamma)$ дается формулой:

$$(j(\Gamma))^\sigma = j(\Gamma \cdot \mathfrak{p}_m^{-1}) \quad \text{или} \quad j(\Gamma\mathfrak{p}_m^{-1}) \equiv j(\Gamma)^{N\mathfrak{p}} (\operatorname{mod} \mathfrak{P}),$$

где $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ — идеал в $K = k(j(\Gamma))$.

При $m = 1$ из теоремы 1 легко следует, что $K_1 = k(j(\mathfrak{o}_k))$ — абсолютное поле классов для $k$.

Пусть теперь $\mathfrak{p}$ — идеал с простой нормой $p = N\mathfrak{p}$, $(p = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}'$.

Т е о р е м а 2. Пусть $A/K$ — эллиптическая кривая с $j_A = j(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}_k$, определенная над $K = k(j(\mathfrak{a})) = K_1$. Пусть $\varphi$: $\mathbf{C}/\mathfrak{a} \to A(\mathbf{C})$ — аналитическая параметризация. Тогда существует параметризация $\psi$: $\mathbf{C}/\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a} \to A^\sigma(\mathbf{C})$, где $A^\sigma$ — кривая, уравнение которой получается из уравнения $A$ применением автоморфизма Фробениуса $\sigma = \sigma_p$ к коэффициентам, изогения $\lambda$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}/\mathfrak{a} & \xrightarrow{\varphi} & A(\mathbf{C}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle can} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda} \\ \mathbf{C}/\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a} & \xrightarrow{\psi} & A^\sigma(\mathbf{C}) \end{array}$$

т. е. $\psi \circ \mathrm{can} = \lambda \circ \varphi$, can — естественная проекция, получающаяся при сопоставлении $z (\operatorname{mod} \mathfrak{a}) \to z (\operatorname{mod} \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a})$,

$z \in \mathbf{C}$. При этом $\tilde{\bar{\lambda}} = \pi_p$, где $\tilde{\bar{\lambda}}$ — редукция изогении $\lambda$ по модулю идеала $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$, $\mathfrak{P} \subset K$, а $\pi_p$ — морфизм Фробениуса на кривой $\bar{A}_{\mathfrak{p}}$.

Теорема 2 (это лемма 1 [9, с. 126]) — основное техническое средство доказательства следующего утверждения, уточняющего ту формулировку основной теоремы комплексного умножения, которую мы привели в первой части:

Теорема А. Пусть $E$ — эллиптическая кривая, такая, что $\mathrm{End}\,(E) = \mathfrak{o}_k$ — кольцо целых в мнимо-квадратичном поле $k$, $E$ определена над $k\,(j_E)$, и пусть $h = h^i$ — одна из функций, фигурирующих в основной теореме теории комплексного умножения, соответствующая кривой $E$. Тогда поле $K_m = k\,(j_E, h\,(E_m))$ — лучевое поле классов по модулю $m$ для любого натурального $m$, где, как обычно, через $E_m$ обозначаются точки $m$-деления $E$.

Далее нам понадобятся сведения не только о поле $K_m$, но также и о поле, порожденном над $k$ значениями $j\,(\mathfrak{o}_m)$, где $\mathfrak{o}_m = \mathfrak{o}$ — порядок в $k$ с кондуктором $m$ (см. п. 2),

$$\bar{K}_m = k\,(j\,(m\omega)), \quad \text{где} \quad \mathfrak{o}_k = \mathbf{Z}\omega + \mathbf{Z},\ \mathfrak{o}_m = \mathbf{Z} + m\mathfrak{o}_k = \mathbf{Z}m\omega + \mathbf{Z}.$$

Как легко вывести из теоремы 1 этого пункта, поле $\bar{K}_m$ соответствует группе классов $G_0 = I_k\,(m)/P_{\mathbf{Z}}\,(m)$ (см. п. 2) — фактор-группе лучевой группы классов $G\,(m) = I_k\,(m)/P_1\,(m)$. Поле, соответствующее группе $G_0 = I_k\,(m)/P_{\mathbf{Z}}\,(m)$ было названо нами в п. 2 кольцевым полем классов, поэтому имеет теорему В.

Теорема В. Пусть $E$ — эллиптическая кривая с $\mathrm{End}\,(E) = \mathfrak{o}_m$. Тогда $\bar{K}_m = k\,(j_E) = k\,(j\,(m\omega))$ — кольцевое поле классов для $k$ по модулю $m$.

Впоследствии нас будет интересовать разница между полями $K_m$ и $K_m^* = \bar{K}_m\, k\,(\zeta_m) = k\,(e^{2\pi i/m},\ j\,(m\omega))$, $\zeta_m = e^{2\pi i/m}$. Легко проверить, что поле $K_m^*$ — поле классов, соответствующее группе $I_k\,(m)/H_m^*$, где $H_m^*$ — группа главных идеалов $(\alpha)$ с $\alpha \equiv r \pmod{m}$, $r^2 = 1$ (это вытекает из определения кольцевого поля классов и того, что в $k\,(\zeta_m)$ распадаются в точности те $\mathfrak{p}$, для которых $N\mathfrak{p} \equiv 1 \pmod{m}$); (см. по этому поводу [17, § 10; 6, гл. XIII). Отсюда группа Галуа $\mathrm{Gal}\,(K_m/K_m^*)$ является произведением $t$ групп второго порядка, где $t$ — число простых делителей $m$. Легко доказать, что $\mathrm{Gal}\,(k^{ab}/k_{ab}^*)$ — произведение счетного числа групп второго порядка, где $k_{ab}^* =$

$= \bigcup_m K_m^*$ — поле, порожденное над $k$ всеми корнями из единицы и всеми значениями $j(z)$ при $z \in k$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Сделав эти краткие напоминания, перейдем к изложению результатов наших авторов.

## II. Гаусс

Работы Гаусса, которые мы рассмотрим в связи с теорией комплексного умножения, хорошо известны историкам математики и неоднократно комментировались (см., например [18, с. 75—76; 19, с. 63—65, 72—73]). Наша цель состоит в том, чтобы взглянуть на эти работы с более современной точки зрения и указать на связь с последующими исследованиями, в особенности принадлежащими Эйзенштейну.

Как упомянуто у Ф. Клейна в его лекциях о развитии математики в XIX в. ([18, с. 76]), Гаусс в своих работах о лемнискате разлагает умножение на 5 на два последовательных комплексных умножения и этим способом решает в квадратных радикалах уравнение 25-й степени, к которому приводит проблема деления лемнискаты на пять частей.

Ясно, что этот результат представляет собой частный случай результатов Абеля о делении лемнискаты, которые мы рассматривали в первой части. Несмотря на то, что Гаусс не опубликовал своих исследований на эту тему, видимо, можно говорить о его влиянии на Абеля в этом вопросе, так как Гаусс сделал намек на свои результаты во введении к «Арифметическим исследованиям» [20, т. I, с. 412—413], который побудил впоследствии Абеля к занятиям этими вопросами, в решении которых он столь сильно продвинулся.

Приведем мнение Ф. Клейна: «Путь, по которому следует Абель в исследовании эллиптических функций, лежит целиком в направлении, избранном Гауссом: совпадения в работах обоих математиков встречаются даже в обозначениях» [18, с. 140]. По сути дела, Гаусс задолго до Абеля получает важные частные случаи его теорем, относящихся к комплексному умножению. Эту сторону творчества Гаусса мы не будем рассматривать далее потому, что мы достаточно подробно говорили о трудах Абеля, с которыми она сходна.

Менее прост вопрос о результате Гаусса, который содержится в следующем знаменитом отрывке его дневника (это последняя запись в нем от 9 июля 1814 г.):

«Наблюдение индуктивным путем важнейшей теоремы, элегантнейшим образом связывающей теорию биквадратичного вычета с лемнискатическими функциями. Если $a + bi$ — простое число, $a - 1 + bi$ делится на $2 + 2i$, то число всех решений сравнения

$$1 = xx + yy + xxyy \pmod{(a + bi)},$$

включая $x = \infty$, $y = \pm i$, $x = \pm i$, $y = \infty$, равно $(a - 1)^2 + bb$».

Этот отрывок около ста лет хранился в бумагах Гаусса и только в 1917 г. был опубликован в его «Наследии» [20, т. $10_1$, с. 571].

Несмотря на столь большой срок, прошедший между получением этого результата и его публикацией, в 1917 г. он был новым, и комментатор (П. Бахман) указывает только, что, как заметил Р. Дедекинд в письме Ф. Клейну, число решений сравнения, о котором идет речь, равно числу решений сравнения по модулю простого числа $p = a^2 + b^2$ в целых рациональных числах. Это объясняется, очевидно, тем, что $\mathbf{Z}/(a + bi) \simeq \mathbf{Z}/(p) = \mathbf{F}_p$ — простое поле из $p$ элементов, т. е. тем, что $N(a + bi) = p$. Дедекинд проверил справедливость теоремы при $p < 100$, а Фрикке (письмо к Ф. Клейну) заметил, что уравнению $1 = x^2 + y^2 + x^2y^2$ удовлетворяют функции $x = \sin \operatorname{lemn} u$, $y = \cos \operatorname{lemn} u$. В то же время П. Бахман отмечает, что основная идея этой записи не выяснена.

Замечание Фрикке является ключом к пониманию теоремы. Оно дает аналитическую параметризацию лемнискатическими функциями эллиптической кривой с уравнением $1 = x^2 + y^2 + x^2y^2$ (см. I, п. 7). Вскоре после опубликования теорему Гаусса доказал Г. Герглотц [21]. Метод, который он применил, по существу, совпадает с методом Хассе [22] в доказательстве гипотезы Римана для дзета-функции эллиптической кривой над конечным полем — деление на такой элемент $\omega \in \operatorname{End}(E)$, что $\omega \cdot \omega' = p$. При этом у Хассе используется поднятие в нулевую характеристику и интенсивно используется техника комплексного умножения, в частности, теорема о порождаемости лучевого поля классов (по произвольному, не обязательно целому модулю) значениями эллиптических функций в точках деления на $\omega$.

Теорема Гаусса включает, конечно, утверждение гипотезы Римана для дзета-функции кривой $x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1$ над полем из $p$ элементов $\mathbf{F}_p$: след Фробениуса $a_p$ равен $p + 1 - N_p$, где $N_p$ — число точек эллиптической кривой с аффинным уравнением $x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1$ в поле $\mathbf{F}_p$, т. е. именно полное (с учетом четырех «бесконечных» решений) число решений сравнения в теореме Гаусса. Из нее видно, что если $a_p = p + 1 - N_p$, то

$$a_p = a^2 + b^2 + 1 - (a - 1)^2 + b^2 = 2a$$

и очевидное неравенство $|2a| < 2\sqrt{p} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ дает гипотезу Римана. Именно как частный случай этой гипотезы воспринимал утверждение Гаусса М. Дойринг, цитируя этот отрывок из «Наследия» в начале своей весьма важной для теории комплексного умножения работы [10, с. 197].

Однако нам кажется, что более поздние работы Дойринга свидетельствуют о гораздо большем значении теоремы Гаусса. Обратимся к глобальной дзета-функции кривой $E$ с уравнением $1 = x^2 + y^2 + x^2y^2$, (рассматривая ее над полем $\mathbf{Q}(i)$, как Гаусс).

По определению, $\zeta(E, \mathbf{Q}(i), s) = \prod\limits_{\mathfrak{p}} Z_{\overline{E}_{\mathfrak{p}}}(N\mathfrak{p}^{-s})$ есть произведение множителей — дзета-функций эллиптических кривых, полученных из данной редукцией по «хорошим» простым (см. I, п. 6). Легко показать, что в данном случае редукция кривой по всем нечетным простым хорошая.

Все простые нечетные простые в кольце гауссовых целых $\mathbf{Z}[i]$ разбиваются на два типа: с простой нормой $p \equiv 1 \pmod 4$ и с нормой $q^2$, где $q \equiv 3 \pmod 4$. Гаусс имеет дело только с простыми первого типа. Для всех простых второго типа, как можно доказать, $a_q = 0$ и число решений сравнения $1 \equiv x^2 + y^2 + x^2y^2 \pmod q$ равно $q + 1$ (эти простые дают «суперсингулярные» редукции $E$). Кроме того, простых второго типа «мало», их плотность во множестве всех простых идеалов $\mathbf{Q}(i)$ равна нулю. Зато для простых первого типа («einliedrig») Гаусс, по существу, вычисляет значение характера Гекке $\chi_{E,k}$, о котором идет речь в теоремах п. 6 введения, на образе идеала $(a + bi)$ в группе идеалов $I_k(\mathfrak{c})$ ($\mathfrak{c}$ — здесь степень двойки).

Поясним сказанное. Прежде всего, в случае, рассмотренном Гауссом, легко интерпретировать число $a_{\mathfrak{p}} = a_p = p + 1 - N_p$ — «след Фробениуса» как след некоторого линейного оператора, действующего в двумерном векторном пространстве. А именно, можно доказать, что в этом случае $\mathrm{End}_k(E) \cong \mathrm{End}(\bar{E}) \cong \mathbf{Z}[i]$ и $\mathrm{End}^0(E) \cong \mathrm{End}^0(\bar{E}) \cong \mathbf{Q}(i) = k$ (напомним, что $\mathrm{End}^0(E) = \mathrm{End}(E) \otimes \mathbf{Q}$ — поле частных кольца $\mathrm{End}(E)$). Эндоморфизм Фробениуса $\pi_{\mathfrak{p}} = \pi_p$, определенный в п. 4 введения, является элементом $\mathrm{End}(\bar{E}) \cong \mathrm{End}(E)$ и, следовательно, может рассматриваться как элемент $\mathrm{End}^0(E) = \mathbf{Q}(i)$. Рассматривая $\mathbf{Q}(i)$ как двумерное векторное пространство над полем $\mathbf{Q}$, мы можем рассмотреть $\pi_p$ как линейный оператор на нем и взять его след. В данном случае сравнительно легко доказать, что $\mathrm{Tr}\,\pi_p = a_p$.

Сравним результат Гаусса с формулировкой теоремы В п. 6 введения. Утверждение Гаусса можно переписать так: $N_p = p + 1 - \mathrm{Tr}\,m$, где $m = a + bi$ — образующая идеала $(a + bi) = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{p}' = (p)$, удовлетворяющая условию $m \equiv 1 \pmod{(2 + 2i)}$, т. е. $m$ — примарное в смысле Гаусса комплексное простое. Сравнение с формулой $N_p = p + 1 - \mathrm{Tr}\,\pi_p$ показывает, что $\varphi(m) = \pi_p$, где $\varphi$ — отождествление поля $k$ с кольцом $\mathrm{End}^0(\bar{E}_{\mathfrak{p}})$, получаемое следующим образом: $\varphi\colon k \xrightarrow{\theta^{-1}} \mathrm{End}^0(E) \xrightarrow{\mathrm{red}} \mathrm{End}^0(\bar{E}_{\mathfrak{p}})$. Теперь видно, что результат Гаусса, по существу, совпадает с частным случаем теоремы при $K = k = \mathbf{Q}(i)$, $E$ — кривая с уравнением $x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1$, $\mathfrak{p} \subset k$ — идеал с простой нормой $p = N_{\mathfrak{p}} \equiv 1 \pmod 4$, причем верна формула $\chi_{E,k}(\mathfrak{p}) = m$, дающая в этом случае явное значение $\chi_{E,k}$ на идеале $\mathfrak{p}$, рассматриваемом как элемент группы $I_k(\mathfrak{c})$.

Эта замечательная теорема Гаусса — частный случай следующего результата.

Т е о р е м а (Дэвенпорт—Хассе [23]). Для кривой $y^2 = D - x^4$

$$N_p = \begin{cases} p + 1, & p \equiv 3 \pmod 4, \\ p + 1 - \left(\dfrac{D}{m}\right)_4 m' - \overline{\left(\dfrac{D}{m}\right)}_4 m, & p \equiv 1 \pmod 4, \end{cases}$$

где $p = m \cdot m' \in \mathbf{Q}(i)$, $m \equiv 1 \pmod{2 + 2i}$, $(\div)_4$ — биквадратичный вычет в $\mathbf{Q}(i)$.

Е. Джекобсталь нашел элементарное доказательство того факта, что $\pi_p/m = i^\nu$ (теорема уточняет, что $i^\nu = (D/m)_4$). Оно основано на том, что при $p \equiv 1 \pmod 4$ кольца $\mathrm{End}(E)$ и $\mathrm{End}(\bar{E})$ совпадают (это легко перевести в совсем элементарные термины и в той или иной форме могло быть известно Гауссу или Эйзенштейну). Поэтому

$\pi_p \in \mathbf{Z}[i] = \mathrm{End}(\bar{E}) = \mathrm{End}(E)$. Так как $\pi_p \cdot \pi'_p = p$, где штрих, как обычно, обозначает сопряжение (это равносильно «гипотезе Римана»), то $\pi_p/m$ — единица в кольце $\mathbf{Z}[i]$, т. е. имеет вид $i^v$. В случае, рассматриваемом Гауссом, $D = 1$ и $\pi_p/m = 1$. Это утверждение также допускает элементарную проверку. Кривая $y^2 = 1 - x^4$ имеет очевидные точки 2-деления: $y = 0$, $x = \pm 1$, $\pm i$ (считается, что нулем группового закона на кривой является точка $y = 0$, $x = 1$). Простая проверка действия $\pi_p$ и $m$ на эти точки (можно взять любую из них, кроме $y = 0$, $x = 1$) устанавливает их равенство. По сути дела, такая проверка была осуществлена Эйзенштейном в его втором доказательстве биквадратичного закона взаимности, см. раздел III ниже.

Дэвенпорт и Хассе идут другим путем. Они пользуются так называемыми «суммами Якоби» [24] и устанавливают их связь с гауссовыми суммами. Основной результат их статьи в нашем случае можно записать в виде формулы $\pi(\chi, \psi) = \pi_p$, где равенство рассматривается как равенство комплексных чисел, $\pi_p \in \mathbf{Q}(i)$ — образ эндоморфизма Фробениуса при $\varphi^{-1}$, $\pi(\chi, \psi) = \sum\limits_{x+y=1} \chi(x)\psi(y)$, где $\chi$ — биквадратичный, а $\psi = \chi^2$ — квадратичный характер по модулю $p$.

Гаусс получил также еще несколько результатов этого типа: он вычислил число решений уравнения $ax^3 - by^3 \equiv 1 \pmod{p}$ [20, т. I, с. 445], сравнения $ax^4 - by^4 \equiv 1$ (в своей первой работе по теории биквадратичных вычетов, [20, т. III]), а также число решений сравнения $1 + ax^4 + by^4 + cz^4 \equiv 0 \pmod{p}$ (там же). Все эти исследования чрезвычайно важны, они доказывают «гипотезу Римана» для некоторых кривых и поверхностей над конечным полем. Мы, однако, оставим в стороне эти труды, так как Гаусс в них использует элементарный метод, который непосредственно ведет к суммам Якоби и гауссовым суммам, но не связан (или связан весьма косвенно) с теорией комплексного умножения эллиптических кривых, нашей основной темой. Мы лишь укажем те работы нашего века, где эти вопросы получили дальнейшее осмысление и развитие: [14, 23]. Современное состояние вопроса отражено в статье [25].

## III. Комплексное умножение у Эйзенштейна

Основные применения комплексного умножения к теории чисел у Эйзенштейна касаются функций, допускающих комплексное умножение на $k = \mathbf{Q}(\mu)$, где $\mu$ — примитивный корень четвертой или шестой степени из единицы. Он доказывал при помощи эллиптических функций такого рода законы взаимности, биквадратичный и бикубический.

Исходной точкой рассуждений Эйзенштейна была аналогия со случаем тригонометрических функций и их применением к доказательству закона квадратичной взаимности Гаусса. В работе «Применение алгебры к трансцендентной арифметике» (1845) [26, с. 121—128]) он дает новое доказательство квадратичного закона взаимности и полностью параллельное ему доказательство биквадратичного закона взаимности.

Рассуждения Эйзенштейна таковы:

а) *Квадратичный случай.* Пусть $p$ — простое нечетное число, и задано разбиение совокупности ненулевых вычетов $\bmod p$ на две группы, так что для любого вычета $r$ из одной из них $-r$ принадлежало другой (например, $r = 1, 2, \ldots, (p-1)/2$, $r = -1, -2, \ldots, -(p-1)/2$). Для любого целого $q$, не делящегося на $p$, $qr \equiv r'$ или $qr \equiv -r' \pmod p$, поэтому имеем (обозначая через $\omega = 2\pi$ — период тригонометрических функций) $\sin(qr\omega/p) = \sin(r'\omega/p)$ или $\sin(qr\omega/p) = -\sin(r'\omega/p)$ и всегда $qr \equiv r' \sin(qr\omega/p)/\sin(r'\omega/p) \pmod p$.

Заставляя пробегать $r$ все $(p-1)/2$ значения из одной группы, мы добьемся того, чтобы $r'$ также пробежало всю эту группу и, перемножая все таким образом получившиеся равенства, получим

$$q^{(p-1)/2} \prod r \equiv \prod r \cdot \frac{\prod \sin(gr\omega/p)}{\prod \sin(r'\omega/p)} \equiv$$

$$\equiv \prod r \cdot \prod \left\{ \frac{\sin(qr\omega/p)}{\sin(r\omega/p)} \right\} \pmod p, \text{ т. е.}$$

$$q^{(p-1)/2} \equiv \prod_r \left\{ \frac{\sin(qr\omega/p)}{\sin(r\omega/p)} \right\} \pmod p.$$

Если предположить, что $q$ — также нечетное простое, то

$$p^{(q-1)/2} \equiv \prod_\rho \left\{ \frac{\sin(p\rho\omega/q)}{\sin(\rho\omega/q)} \right\} \pmod q$$

($\rho$ — пробегает половину системы ненулевых вычетов $\bmod q$). Обозначая

$$x=\sin v,\ P=\frac{\sin pv}{\sin v},\ Q=\frac{\sin qv}{\sin v},$$

имеем, что $P$ и $Q$ — многочлены от $x^2$ степени $(p-1)/2$ и $(q-1)/2$ соответственно,

$$P=\frac{(-1)^{(p-1)/2}}{2^{p-1}}\prod_r (x^2-\alpha^2),\ Q=\frac{(-1)^{(q-1)/2}}{2^{q-1}}\prod_\rho (x^2-\beta^2),$$

где

$$\alpha=\sin(r\omega/p),\ \beta=\sin(\rho\omega/q).$$

Отсюда

$$q^{(p-1)/2}\equiv c\prod_{\alpha,\beta}(\alpha^2-\beta^2)\,(\bmod p),$$

$$p^{(q-1)/2}\equiv c\prod_{\alpha,\beta}(\beta^2-\alpha^2)\,(\bmod q),$$

где $c=\left(-\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)}$.

Отсюда, очевидно, следует квадратичный закон взаимности.

б) Биквадратичный случай. Через $x=\sin\operatorname{am} v$ Эйзенштейн обозначает функцию, обращающуюся в нуль при $v=0$ и удовлетворяющую уравнению $dx=\sqrt{1-x^4}dv$ (на самом деле это лемнискатический синус $\operatorname{sl} v=\sin\operatorname{lemn} v=\operatorname{sn}(v\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})/\sqrt{2}\operatorname{dn}(v\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$, см. п. 7 введения).

Ясно, что $\sin\operatorname{am}(v+k\omega)=\sin\operatorname{am} v$ при $k\in\mathbf{Z}[i]$, где

$$\omega=4\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Кроме того, как сразу следует из дифференциального уравнения, определяющего $x$, $\sin\operatorname{am} iv=i\sin\operatorname{am} v$. Пусть теперь $m=a+bi$ примарное в смысле Гаусса простое число в $\mathbf{Z}[i]$, т. е. $(a+bi)\equiv 1\ (\bmod\ (2+2i))$. Тогда $p=N(m)=a^2+b^2$ — простое целое рациональное число $p\equiv 1\ (\bmod 4)$. Можно разделить систему ненулевых вычетов $\mathbf{Z}[i]\bmod(a+bi)$ на четыре группы (четверть-системы) $R$, $iR$, $-R$, $-iR$, так что при $n\in\mathbf{Z}[i]$, $n\equiv$

$\equiv 0 \pmod m$, $nr \equiv r', ir', -r', -ir' \pmod m$; ясно, что при этом всегда

$$r' \frac{\sin \operatorname{am}(nr\omega/m)}{\sin \operatorname{am}(r'\omega/m)} \equiv nr \pmod m.$$

Отсюда

$$n^{(p-1)/4} \equiv \prod_r \left\{\frac{\sin \operatorname{am}(nr\omega/m)}{\sin \operatorname{am}(r\omega/m)}\right\} \pmod m; \tag{1}$$

считая $n$ примарным простым, имеем:

$$m^{(q-1)/4} \equiv \prod_\rho \left\{\frac{\sin \operatorname{am}(m\rho\omega/n)}{\sin \operatorname{am}(\rho\omega/n)}\right\} \pmod n, \quad \text{где } q = N(n). \tag{2}$$

Далее Эйзенштейн доказывает соотношение

$$\frac{\sin \operatorname{am}(mv)}{\sin \operatorname{am} v} = \frac{\varphi(x)}{x^{p-1}\varphi(1/x)}, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ — многочлен степени $p-1$ (для примарного $m$).

Доказательство соотношения (3) элементарно — с точностью до умножения на $i^\nu$ оно вытекает непосредственно из дифференциального уравнения, определяющего $x$. Проверка для одного значения $v = \omega/4$ дает $i^\nu = 1$. Это соотношение в дальнейшем было уточнено им в первой из серии работ по эллиптическим функциям (см. ниже).

Из этого при помощи (1) и (2) легко выводятся формулы:

$$n^{(p-1)/4} \equiv \prod_{\alpha,\beta} \frac{(\alpha^4-\beta^4)}{(1-\alpha^4\beta^4)} \pmod m,$$

$$m^{(q-1)/4} \equiv \prod_{\alpha,\beta} \frac{(\beta^4-\alpha^4)}{(1-\alpha^4\beta^4)} \pmod n,$$

где $\alpha$ пробегает корни $\varphi(x)$, $\beta$ — корни $f(x)$,

$$\frac{\sin \operatorname{am}(nv)}{\sin \operatorname{am} v} = \frac{f(x)}{x^{q-1}f(1/x)}.$$

Отсюда сразу следует биквадратичный закон взаимности.

Уточнение этих результатов Эйзенштейн получил в первой работе своей серии исследований по теории эллиптических функций [27].

Пусть обозначения как выше: $m = a + bi$ — нечетное простое число, $a^2 + b^2 = p = N(m)$, $x = \varphi(t) = \operatorname{sn}(t\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})/\sqrt{2}\, dn(t\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Тогда интеграл уравнения

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = m\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{4}$$

имеет вид

$$y = \frac{x\,(A_0 + A_1x^4 + \ldots + A_{(p-1)/4}x^{p-1})}{1 + B_1x^4 + \ldots + B_{(p-1)/4}x^{p-1}} = \frac{U}{V}, \tag{5}$$

где $A_i$, $B_i$ — целые комплексные. Ясно, что $A_0 = m$. Полагая, $x = 1/i^\mu\xi$, $y = 1/\eta$, имеем

$$\eta = \frac{B_{(p-1)/4} + B_{(p-5)/4}\xi^4 + \ldots + \xi^{p-1}}{A_{(p-1)/4} + A_{(p-5)/4}\xi^4 + \ldots + A_0\xi^{p-1}}\, i^\mu_\xi, \text{ так что}$$

$$y = i^\mu x\,\frac{B_{(p-1)/4} + B_{(p-5)/4}x^4 + \ldots + x^{p-1}}{A_{(p-1)/4} + A_{(p-5)/4}x^4 + \ldots + A_0x^{p-1}}$$

— тоже интеграл (4) и он совпадает (5) с точностью до $i^\nu$, поэтому

$$A_0 = i^\nu B_{(p-1)/4}, \ldots, A_{(p-5)/4} = i^\nu B_1,\ A_{(p-1)/4} = i^\nu.$$

Уравнение (5) можно переписать так

$$\varphi(mt) = \varphi(t)\,\frac{A_0 + A_1\varphi(t)^4 + \ldots + A_{(p-1)/4}\varphi(t)^{p-1}}{1 + B_1\varphi(t)^4 + \ldots + B_{(p-1)/4}\varphi(t)^{p-1}},$$

потому что $d\varphi = \sqrt{1-\varphi(t)^4}dt$.

Теперь для определения $\nu$ положим $t = \omega/4$, $\varphi(t) = 1$. Тогда $i^\nu = \varphi(m\omega/4)$. Из определения $\varphi$ легко следует, что $\varphi[(2\alpha + 1 + 2\beta i)\,\omega/4] = (-1)^{\alpha+\beta}$. Если $m$ примарно по Гауссу, а именно этот случай рассматривается, $m \equiv 1 \pmod{2+2i}$, то $\alpha+\beta$ четно и $i^\nu = 1$.

Итак, для примарных $m$ (и только для них)

$$\varphi(mt) = \varphi(t)\,\frac{m + A_1\varphi(t)^4 + \ldots + \varphi(t)^{p-1}}{1 + A_{(p-1)/4}\varphi(t)^4 + \ldots + m\varphi(t)^{p-1}},$$

$$y = \frac{mx + A_1x^5 \ldots + x^p}{1 + A_{(p-5)/4}x^4 + \ldots + mx^{p-1}} = \frac{U}{V}.$$

Далее Эйзенштейн формулирует следующее предложение, справедливо подчеркивая его важность: «Если $m$ — примарное комплексное простое число, так что $p \equiv 1 \pmod 4$ — просто, то все коэффициенты $U$, кроме последнего, и $V$, кроме первого, делятся на $m$.»

Доказательство быстро получается из дифференциального уравнения, связывающего $x$ и $y$: подставляя $y = U/V$ в (4), получим $V(dU/dx) - U(dV/dx) = m\sqrt{U^4 - V^4}/\sqrt{1 - x^4}$, поэтому $\sqrt{U^4 - V^4}/\sqrt{1 - x^4}$ — многочлен от $x^4$. Ясно также, что $(U^4 - V^4)/(1 - x^4) = T^2$ — многочлен от $x^4$ с целыми коэффициентами и постоянным членом 1. Значит, $T$ имеет целые коэффициенты $V(dU/dx) - U(dV/dx) = mT$,

$$(dU/dx) = A_0 + 5A_1x^4 + 9A_2x^8 + \ldots; \; (dV/dx) = 4B_1x^3 + 8B_2x^7 + \ldots; \text{ и } V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx} = A_0 + (-3A_0B_1 + 5A_1)x^4 + \ldots \equiv 0 \pmod m).$$

Для примарного $m$ числа $5, 9, 13, \ldots, p - 4$ на $m$ не делятся и поэтому $A_i$ делятся на $m$ при $0 \leqslant i \leqslant (p - 5)/4$,

$$\varphi(mt) = \varphi(t)\frac{mf + \varphi(t)^{p-1}}{1 + mg}.$$

Здесь $f$ и $g$ — многочлены от $\varphi(t)^4$ с целыми (комплексными) коэффициентами.

Действуя, как описано выше, Эйзенштейн получает формулу

$$n^{(p-1)/4} = \prod \frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)},$$

где $t = r\omega/m$, а $r$ пробегает четверть-систему ненулевых вычетов $\operatorname{mod} m$,

$$\left[\frac{n}{m}\right] = \prod \frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)}, \tag{6}$$

где $\left[\frac{n}{m}\right]$ — биквадратичный вычет. Применяя к (6) формулу

$$\varphi(nt)/\varphi(t) = \frac{nF + \varphi(t)^{q-1}}{1 + nG},$$

получаем

$$\left[\frac{n}{m}\right] \prod \{1 + nG\} = \prod \{nF + \varphi(t)^{q-1}\}$$

и отсюда легко выводится, что

$$\left[\frac{n}{m}\right] \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}\cdot\frac{q-1}{4}} m^{\frac{q-1}{4}} \pmod n, \text{ т. е.,}$$

$$\left[\frac{n}{m}\right] = (-1)^{\frac{p-1}{4}\cdot\frac{q-1}{4}}\left[\frac{m}{n}\right] -$$

закон взаимности.

Рассуждение и идеи, содержащиеся в этих работах Эйзенштейна, весьма примечательны. Он доказывает в частном случае лемнискатических функций предложение, которое является ключом к исследованию расширений основного мнимоквадратичного поля, порожденного точками деления соответствующих эллиптических кривых (т. е. значениями эллиптических функций при $x = \omega/n$, $\omega \in \Gamma$ — решетка периодов). Это предложение — теорема 2 п. 7 введения.

В случае, рассматриваемом Эйзенштейном, $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}_k = \mathbf{Z}[i]$, $j_A = j(i) = 1728$, $k(j_A) = k$, $\sigma$ — тождественный автоморфизм, $A$ — эллиптическая кривая с уравнением $z^2 = 1 - x^4$, $\mathfrak{p} = (m)$ — главный идеал, порожденный числом $m$. Аналитические параметризации $\varphi$ и $\psi$ в формулировке теоремы даются функциями $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$: $x = \varphi(t)$, $z = \varphi'(t)$.

Действительно, центральное предложение, важность которого так подчеркивает автор, утверждает, что при параметризации с помощью $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ изогения эллиптической кривой, соответствующая умножению на $m$: $\mathbf{C}/\mathfrak{o}_k \to \mathbf{C}/m^{-1}\mathfrak{o}_k$, $t \mapsto mt$, дает функцию $y = (xmf(x) + x^p)/(1 + mg(x))$, многочлены $f(x)$, $g(x)$ имеют целые коэффициенты, $y = \varphi(mt)$ — координата на экземпляре кривой, даваемой параметризацией $\mathbf{C}/m^{-1}\mathfrak{o}_k \xrightarrow{(\varphi,\, \varphi')} A(\mathbf{C})$. Очевидно, что при редукции по модулю $m$ отображение $x \mapsto y = \frac{xmf + x^p}{1 + mg}$ дает отображение $\bar{x} \mapsto \bar{y} = \bar{x}^p$, т. е. $\bar{x} \mapsto \bar{x}^p$, что, по определению, есть автоморфизм Фробениуса $\pi_p$. Заметим, что в данном случае не надо заботиться об арифметическом смысле $j_A$, так как $j_A = 1728$ рационально, и абсолютное поле классов для $k = \mathbf{Q}(i)$ совпадает с $k$. По этой же причине результаты Эйзенштейна в принципе достаточны для исследования абелевых расширений при $k = \mathbf{Q}(i)$.

В дальнейшем Кронекер получил обобщение результатов Эйзенштейна на произвольные эллиптические функции и тем самым дал основное техническое средство для доказательств теорем комплексного умножения.

Кроме того, доказательство предложения на самом деле доказывает больше, чем в нем утверждается. Как мы сейчас покажем, это доказательство содержит основные элементы доказательства теоремы Гаусса о числе решений сравнения $1 \equiv x^2 + y^2 + x^2y^2 \pmod{a + bi}$. Как уже говорилось, основным в теореме является установление того, что при отображении редукции эндоморфизмов кривой $x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1$ морфизм умножения на примарное $m$ переходит в морфизм Фробениуса $\pi_p$. А как мы видели, именно это и утверждает предложение Эйзенштейна. Интересно, что доказательство этого предложения идет аналогично самому простому современному доказательству Е. Джекобсталя: сначала равенство устанавливается с точностью до умножения на $i^\nu$, что, по сути дела, вытекает из рассмотрения степеней отображения умножения на $m$ и морфизма Фробениуса, а потом значение отношения $\pi_p/m$ вычисляется в точке второго порядка кривой $z^2 = 1 - x^4$, а именно в точке $(\varphi(\omega/4), \varphi'(\omega/4))$, $x = \varphi(\omega/4) = 1$, $z = \varphi'(\omega/4) = 0$ (то, что зто точка второго порядка, легко вытекает из формул сложения, а также ясно из общей теории). Получается $1 = i^\nu = \varphi(m\omega/4)$ при условии примарности $m$.

Таким образом, утверждение Эйзенштейна, что на его предложении основываются все приложения деления лемнискаты в теории чисел, показывает его прозорливость, так как даже вычисление глобальной дзета-функции кривой с комплексным умножением на $i$ в значительной степени содержится в его рассуждениях.

Из всего сказанного ясно, что Эйзенштейн осознавал связь лемнискатических функций с теорией биквадратичного вычета, которую имел в виду Гаусс в своей последней дневниковой записи.

По всей видимости, возможности, заложенные в этой связи, еще не исчерпаны. Об этом свидетельствует гипотеза о значениях биквадратичных гауссовых сумм (см. [28, § 20]).

Пусть $p \equiv 1 \pmod 4$ — простое число, $p = a^2 + 4b^2 = \pi \cdot \pi'$, где $\pi = a + 2bi$, $a > 0$, $b > 0$, и пусть $\tau(\chi) = \sum\limits_x \chi(x) e^{2\pi ix/p}$ — гауссова сумма для биквадратичного характера $\chi$, причем из двух биквадратичных характеров $\chi$ и $\chi'$ мы выбираем тот, для которого $\tau(\chi)^4$ имеет положительную мнимую часть. При такой нормализации можно доказать (см. [28, с. 513—517]), что $\tau(\chi)^4 = p\pi^2$, $\pi(\chi')^4 = p\pi'^2$. В силу того, что $\operatorname{Im} \tau(\chi)^4 > 0$, $\tau(\chi)$ лежит в 1, 3, 5 или 7 октанте комплексной плоскости.

Определим классы $P_1$, $P_3$, $P_5$, $P_7$ простых чисел требованием: $(p \in P_i)$ тогда и только тогда, когда $\tau(\chi)$ лежит в $i$ октанте $(i = 1, 3, 5, 7)$.

Как известно, для гауссовой суммы с квадратичным характером имеется точная формула, определяющая ее значение:

$$\tau(\chi) = \begin{cases} \sqrt{p} & \text{при } p \equiv 1 \pmod 4, \\ i\sqrt{p} & \text{при } p \equiv 3 \pmod 4). \end{cases}$$

Весьма важен вопрос о значении (см. [28, с. 401]) суммы для биквадратичного (или кубического) характера. На этот счет существуют гипотезы, выражающие значение гауссовой суммы через эллиптические функции (см. [29, 30]). Исходной точкой рассуждений здесь является формула, доказанная Эйзенштейном в работе [27], а именно

$$\prod_r \varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4 = (-1)^{(p-1)/4} m,$$

где $R$ — четверть-система ненулевых вычетов $\bmod p$, или

$$\prod \varphi\left(\frac{nr\omega}{m}\right) = \left[\frac{n}{m}\right] \prod \varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right).$$

Кроме точной формулы для значения суммы, представляется интересным вопрос о статистическом законе распределения этого значения. Напомним, что подмножество $S$ множества простых чисел $P$ называется имеющим (натуральную) плотность, если существует предел

$$p(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{число элементов } S \leqslant n}{\text{число простых} \leqslant n},$$

называемый в этом случае (натуральной) плотностью множества $S$. Гипотеза, аналогичная гипотезе Куммера для кубических характеров, состоит в том, что множества $P_1$, $P_3$, $P_5$, $P_7$ имеют натуральные плотности (и эти плотности равны). Связь биквадратичных характеров с лемнискатическими функциями позволяет очень просто получить некоторое приближение к этому результату. А именно, пользуясь просто доказываемой формулой $\tau(\chi)^2 = \psi(2)\sqrt{p}\pi(\chi, \psi)$, где $\psi = \chi^2$ — квадратичный характер $\bmod p$,

$$\pi(\chi, \psi) = \sum_{x+y=1} \chi(x)\psi(y) -$$

сумма Якоби, тем, что $\pi(\chi, \psi) = \pi_p$ является значением характера Гекке (см. выше), а также стандартными фактами о равнораспределенности простых идеалов по секторам (см. 7, гл. VIII) получаем утверждение о том, что множества $P_+ = P_1 \bigcup P_5 = \{\tau(\chi)^2$ имеют положительную мнимую часть$\}$ и $P_- = P_3 \bigcup P_7$ имеют плотности, равные $^1/_2$. Коснемся также третьего доказательства биквадратичного (и бикубического) закона взаимности, данного Эйзенштейном в § 7 шестой части его исследований по теории эллиптических функций ([31; 26, с. 309—324]). Мы рассмотрим его менее подробно, так как оно дается в терминах тэта-функций, а не эллиптических или модулярных функций и, таким образом, имеет только косвенное отношение к нашей основной теме. См. также книгу [2], первая часть которой посвящена разбору других (и более важных) аспектов теории Эйзенштейна.

Доказательство основано на изучении свойств бесконечного произведения

$$\varphi(x) = x \prod_e \left(1 - \frac{x}{m\omega + n\omega'}\right),$$

$\omega, \omega'$ — базис решетки Г, $\prod\limits_e$ означает произведение «по Эйзенштейну» (см. [2, с. 36]). Функция $\varphi(x)$, определенная таким образом, отличается от функции $H(x)$ Якоби множителем, зависящим только от решетки Г, но не от $x$ [32, с. 43].

В своем доказательстве Эйзенштейн исходит из функции

$$F(x) = \varphi(tx) = \prod_{n=-\infty}^{n=\infty} \left\{ \prod_{\substack{m=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{m=\infty} \left(1 - \frac{tx}{m + n\beta}\right)\right\},$$

где $t$ — четное целое число, $\beta = i$ или $r = (-1 + \sqrt{-3})/2$), функция $\varphi$ соответствует решетке $\{1, i\}$ или $\{1, r\}$. Пусть $k, l$ — различные комплексные простые, $p, q$ — их нормы, $\varkappa$ — элемент полной, $\varkappa'$ — приведенной системы вычетов $(\mathrm{mod}\ k)$, $\lambda, \lambda'$ — $(\mathrm{mod}\ l)$, $\theta = 4$ или 6 в зависимости от случая, $p, q \equiv 1 \pmod{\theta}$, $p - 1 = \theta p'$, $q - 1 = \theta q'$. Обе системы $\varkappa', \lambda'$ можно разбить на $\theta$ ассоциированных частей: $\varkappa' = \epsilon\sigma$, $\lambda' = \epsilon\tau$, где $\epsilon^\theta = 1$, $\epsilon$ пробегает $\theta$ значений, а $\sigma$ и $\tau$ — $p'$ и $q'$ значений. Имеем

$$l\sigma = \epsilon\sigma_1 \pmod{k}, \qquad (7)$$

каждое $\sigma$ дает свое $\sigma_1$. Далее Эйзенштейн пользуется формулами, выведенными им в § 6 своей работы. Основным техническим средством является выяснение того, как меняется функция $\varphi$ при изменениях аргумента и при изменениях порядка выполнения умножений. Таким образом он доказывает в § 6 следующие формулы:

$$F(k, x) = \rho c^{p-1} e^{wt^2} \prod_{\varkappa} F\left(x + \frac{\varkappa}{k}\right), \tag{8}$$

где $k = a + bi$ — целое комплексное число, $\rho = i^{b^2+b+a-1}$ при $\beta = i$, $\rho = (-1)^{(a+b-1)/2} r^{-b}$, при $\beta = r$, $c$ — некоторая константа (вычисленная у Эйзенштейна), и где $w$ не зависит от $t$; если положить в (8) $k = \mathfrak{e}$ — комплексная единица, то получаем

$$F(\mathfrak{e}x) = \mathfrak{e} \cdot e^{wt^2} F(x). \tag{9}$$

В силу периодичности $\varphi$ ($\varphi$ — тэта-функция) имеем также при целом комплексном $k$

$$F(x + k) = e^{wt^2} F(x), \tag{10}$$

$w$ зависит от $x$ и $k$, но не от $t$. Применяя к (7) формулу (10), получаем $F(\mathfrak{e}\sigma/k) = e^{wt^2} F(\mathfrak{e}\sigma_1/k)$, по (9) $F(\mathfrak{e}\sigma/k) = \mathfrak{e} e^{wt^2} F(\mathfrak{e}\sigma_1/k)$ и

$$F(\mathfrak{e}\sigma/k) = \mathfrak{e} e^{wt^2} F(\sigma_1/k). \tag{11}$$

Перемножая равенства (7) при всех $\sigma$, получаем

$$l^{p'} \prod_{\sigma} \sigma \equiv \prod \mathfrak{e} \prod \sigma \pmod{k},$$

откуда

$$l^{p'} \equiv \prod \mathfrak{e} \pmod{k}.$$

Перемножая таким же образом (11) с учетом равенства

$$\prod_{\sigma} F(l\sigma/k) = \prod \mathfrak{e} e^{wt^2} \prod_{\sigma} F\left(\frac{\sigma}{k}\right),$$

имеем

$$\prod (\mathfrak{e}) = e^{wt^2} \prod_{\sigma} \frac{F(l\sigma/k)}{F(\sigma/k)}. \tag{12}$$

По (8) имеем

$$F(lx)/F(x) = \rho' c^{q-1} e^{wt^2} \prod_{\lambda'} F\left(x + \frac{\lambda'}{l}\right),$$

$\rho'$ зависит от $l$, как $\rho$ от $k$. Из (12) при перемножении по $\sigma/k$ следует

$$\prod \mathfrak{e} = e^{wt^2} \rho'^{p'} c^{\theta p' q'} \prod_{\sigma} \prod_{\lambda'} F\left(\frac{\sigma}{k} + \frac{\lambda'}{l}\right).$$

Существует ровно одна комплексная единица, которая сравнима с $l^{p'}$ по mod $k$, а именно

$$e^{wt^2} \rho'^{p'} c^{\theta p' q'} \prod_{l} \left\{\prod_{\sigma} \prod_{\tau} F\left(\frac{\sigma}{k} + \frac{\varepsilon\tau}{l}\right)\right\}. \tag{13}$$

Тем самым выражение (13) задает значение характера (биквадратичного или бикубического) $(\mathfrak{e}/k)$. Записывая аналогичным образом $(k/l)$ и пользуясь формулами § 6, а также элементарной леммой, позволяющей избавиться от неопределенных множителей типа $e^{wt^2}$, Эйзенштейн выводит бикубический и биквадратичный законы взаимности.

Это доказательство аналогично первому доказательству для биквадратичного закона, но в нем вместо функции sl используется тэта-функция $\varphi$, содержащая большую теоретико-числовую информацию. Основа обоих доказательств — специальный случай комплексного умножения, а именно существование нетривиального корня из единицы $\mathfrak{e} = i$ или $r$ такого, что для соответствующих решеток $\Gamma$ имеем $\mathfrak{e}\Gamma = \Gamma$.

## IV. Кронекер

Кронекер обычно считается основателем теории комплексного умножения (см., например, [9, с. 128]). Как мы видели, это не вполне точно. Уже Гаусс и Эйзенштейн осознали важнейшие задачи и методы теории в частном случае лемнискатических функций. Тем не менее, значение исследований Кронекера трудно переоценить. Он сформулировал важнейшие проблемы теории, далеко продвинулся в их решении и дал все необходимые технические средства для вывода окончательных результатов, которые были получены целым рядом математиков — Г. Вебером, Такаги, Фютером, Хассе, Дойрингом и др.

Мы выделим из многочисленных результатов Кронекера только те, которые, по нашему мнению, непосредственно относятся к основным теоремам теории комплексного умножения, и лишь слегка коснемся смежных тем. В частности, мы совершенно оставим в стороне вопросы, связанные с предельными формулами Кронекера, тем более, что эта тема достаточно полно освещена в недавней книге А. Вейля [2], особенно в ее XI главе. Также только эпизодически рассмотрим результаты, связанные с «соотношениями между числами классов» (см. ниже).

В 1853 г. Кронекер публикует работу «Об алгебраически разрешимых уравнениях (I часть)» [33, с. 1—11], в которой исследует свойства абелевых уравнений и в конце которой формулирует (без доказательства) предложение, которое является «трудной частью» теоремы Кронекера—Вебера: «корень любого абелева уравнения с целочисленными коэффициентами можно выразить в качестве рациональной функции от корней из единицы» [33, с. 11].

Далее он пишет: «Между корнями тех абелевых уравнений, коэффициенты которых содержат только целые комплексные числа вида $a + b\sqrt{-1}$ и корнями уравнений, появляющихся при делении лемнискаты, также существует сходное соотношение, и, наконец, можно обобщить вышеупомянутые результаты на все абелевы уравнения, коэффициенты которых содержат определенные числовые иррациональности» [там же]. Первая половина этого замечания, по сути дела, совпадает с формулировкой основной теоремы комплексного умножения для поля $\mathbf{Q}(i)$. Вторая половина его показывает, что Кронекер тогда еще не вполне ясно представлял себе общую картину теории и не связывал ее столь жестко, как впоследствии, с полями определенного вида — мнимо-квадратичными,— а надеялся на сравнительно легкое обобщение теории абелевых расширений $\mathbf{Q}$ или $\mathbf{Q}(i)$ на все поля алгебраических чисел (конечной степени). Этот вопрос, впоследствии ставший известным как двенадцатая проблема Гильберта, не решен в общем случае до сих пор, и, видимо, для его решения требуются существенно новые идеи, которыми математика в настоящее время не располагает.

Кронекер возвращается к этой теме в работе «Об эллиптических функциях, для которых имеет место комплексное умножение» [33, с. 171—185]. В ней Кронекер обращается именно к теории комплексного умножения, его идеи и формулировки становятся существенно более отчетливыми, при этом он затрагивает почти все аспекты теории.

Кронекер рассматривает следующую ситуацию: пусть $n > 3$ целое нечетное число, $\varkappa$ — модуль эллиптической функции, $k = \varkappa^2$. Он отмечает, что число различных значений $k$, для которых возможно умножение эллиптической функции на $\sqrt{-n}$, т. е. $\sin\operatorname{am}(\sqrt{-n}u, \varkappa)$ выражается в виде рациональной функции от $\sin\operatorname{am}(u, \varkappa)$ и $\varkappa$, равно $6G(n)$, где $G(n)$ — число классов собственно эквивалентных квадратичных форм дискриминанта $(-n)$. Все эти значения $k$ — алгебраические функции одного значения; более того, они суть корни целочисленного уравнения, степень которого равна числу их значений и которое распадается на столько целочисленных множителей, каково число различных порядков дискриминанта $(-n)$; каждому такому порядку соответствует определенный сомножитель уравнения, степень которого равна $6H(\mathfrak{o})$, где $H(\mathfrak{o})$ — число классов порядка $\mathfrak{o}$. Принадлежащий собственному примитивному порядку сомножитель разлагается на шесть сомножителей равной степени с коэффициентами, содержащими только целые числа и $\sqrt{-n}$. Степень каждого получаемого таким образом уравнения равна числу классов собственно примитивных форм дискриминанта $(-n)$, и корни одного из этих уравнений обладают тем свойством, что они выражаются как рациональные функции с целыми коэффициентами одного из них и для любых двух таких функций $\varphi(k)$ и $\psi(k)$ имеет место соотношение $\varphi(\psi(k)) = \psi(\varphi(k))$. Аналогичные факты имеют место и в общем случае.

Кронекер также приводит примеры соотношений на числа классов, которые можно вывести из комплексного умножения, а именно:

$$2F(n) + 4F(n - 2^2) + 4F(n - 4^2) + \ldots =$$
$$= \varphi(n) - \psi(n),$$
$$4F(n - 1^2) + 4F(n - 3^2) + 4F(n - 5^2) + \ldots =$$
$$= \varphi(n) = \psi(n),$$
$$F(n) + 2F(n - 1^2) + 2F(n + 2^2) + \ldots = \varphi(n),$$

где $n \equiv 3 \pmod 4$, $F(n)$ — число всех классов собственно эквивалентных примитивных форм дискриминанта $(-n)$, $\varphi(n)$ — сумма делителей $n$, бо́льших $\sqrt{n}$, $\psi(n)$ — сумма остальных делителей $n$.

В том же году Кронекер сообщает в письме к Дирихле, что он доказал абелевость уравнений для сингулярных значений модуля [34, с. 420].

В 1862 г. он публикует статью «О комплексном умножении эллиптических функций» [33, с. 207—219], где уточняет результаты предыдущей работы, рассматривая разложение уравнения для $k = \varkappa^2$ степени $6G(n)$, где $G(n)$ — число классов собственно эквивалентных квадратичных форм дискриминанта $(-n)$, в поле, полученном из основного мнимо-квадратичного поля $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-n})$ присоединением $\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_\nu}$, где $p_i$ — делители $n$. Кронекер формулирует предложение:

«Сингулярные модули, для которых имеет место комплексное умножение на $\sqrt{-n}$, определяются в соответствии с $n \equiv 3$ или $n \equiv 1 \pmod 4$ уравнением для $k$ или $k(1-k)$, коэффициенты которого содержат лишь $\sqrt{p_i}$, а степень равна числу содержащихся в одном роде классов собственных примитивных форм дискриминанта $-n$» [33, с. 21].

Более того, Кронекер устанавливает соответствие между каждым сомножителем и некоторым родом форм. Далее он ставит вопрос о неприводимости получающихся уравнений, отмечая, что в частных случаях этот факт доказывается легко, а общего доказательства он не нашел. Эти результаты Кронекера можно пояснить следующим образом. Соотношение $\varphi(\psi(k)) = \psi(\varphi(k))$ означает, что группа Галуа поля, порожденного над основным мнимо-квадратичным полем $k$ значением $k = \varkappa^2$ — абелева. Легко перевести этот результат на язык, использующий вместо $k$ модулярный инвариант $j$, так как разложение уравнений для $k$ на шесть сомножителей как раз и отвечает уравнению шестой степени, связывающему $k$ и $j$: $4(k^2 - k + 1)^3 = 27k^2(1-k)^2 j$. Следовательно, указанный результат Кронекера эквивалентен аналогичному утверждению о значениях $j$. Более тонкие результаты о разложении на множители над расширениями, получаемыми присоединением $\sqrt{p_i}$, где $p_i \mid n$, также легко объяснимы с точки зрения теории полей классов, так как эти расширения неразветвлены над основным полем и, следовательно, лежат в абсолютном поле классов, и основная теорема комплексного умножения показывает, что вид разложения уравнений, встречающихся у Кронекера, должен быть именно таков.

В современных изложениях теории комплексного умножения разложения по родам, так же, как и «соотношения между числами классов» не играют большой роли, несомненно, по причине завершенности теории полей классов, которая позволяет выводить основную теорему комплексного умножения непосредственно из утверждений, соответствующих теоремам 1 и 2 п. 8 введения. Во времена Кронекера здание теории полей классов еще не было построено, были заложены только некоторые его основания, и соображения такого рода играли существенную роль не только у Кронекера, но и значительно позже у Вебера [5], являющегося одним из творцов теории полей классов. Дальнейшие работы Кронекера, относящиеся к нашей теме, написаны в 1870 г.: «Об алгебраических уравнениях, от которых зависит деление эллиптических функций» (1876 г.) [33, с. 261—275], «Некоторые соображения из теории алгебраических уравнений» (1879 г.) [33, с. 72—96], «Об абелевых уравнениях» (1877 г.) [33, с. 61—71].

В первой из этих работ он обращается к исследованию уравнения деления эллиптических функций $\sin \mathrm{am}\,(u, \varkappa)$ на $n$ частей, причем исследует, по сути дела, «общий» случай, рассматривая модуль $\varkappa$ как независимую переменную. Однако в конце статьи Кронекер делает замечание, показывающее, что он связывает свои исследования со случаем сингулярных значений модуля $\varkappa$.

В третьей части второй работы проводится чисто алгебраическое изучение уравнения деления, основанное на исследовании свойств модулярной группы.

Третья работа посвящена доказательству теоремы Кронекера—Вебера, точная формулировка которой содержится в п. IX. В последнем, XI пункте Кронекер указывает на свои более ранние исследования уравнений, корни которых суть сингулярные значения модуля, а также уравнений, корни которых — значения эллиптических функций с сингулярными модулями и аргументами, находящимися в рациональном отношении с периодами. Он замечает, что эти уравнения можно назвать абелевыми; в данной работе Кронекер впервые употребляет этот термин в его современном значении, тогда как в более ранних статьях он называл абелевыми циклические в нашей терминологии уравнения. Коэффициенты этих уравнений содержат только целые числа и корни из них. Далее он пишет: «...надо предположить, что вся совокупность таких уравнений (т. е. абелевых над мнимо-квадратичными полями) исчерпывается теми, которые возникают из теории эллиптических функций» [33, с. 71]. Мы видим, что теперь гипотеза принимает вид, включающий уравнения деления эллиптических функций. В заключение, Кронекер приводит набросок доказательства абелевости уравнения деления при помощи простого метода, которым он в 1857 г. доказал утверждение об абелевости уравнений для сингулярных модулей. Он добавляет, что позднее он получил этот последний результат существенно иным путем.

Кронекер рассуждает так: пусть $D < 0$ — целое, $D = b^2 - 4ac$, $F(x) = 0$ — уравнение деления эллиптических функций с сингулярным модулем, принадлежащим $\sqrt{D}$ (т. е. с комплексным умножением на порядок поля $Q(\sqrt{D})$), которое отвечает делению периода на $a$ частей. Эти эллиптические функции допускают умножение на $b + \sqrt{D}$ и таким образом из уравнения $F(x) = 0$ можно получить уравнение той же степени $\Phi(x) = 0$, корни которого — эллиптические функции, полученные из корней $F(x) = 0$ умножением аргумента на $b + \sqrt{D}$. Это уравнение $\Phi(x) = 0$ имеет $(a - 1)$ кратный нулевой корень, и все остальные корни $a$-кратны, так что $\Phi(x) = x^{a-1}(c_1 + c_2x + \ldots + c_ax^{a-1})^a$. При подходящем выборе эллиптической функции $c_1$ также будет принадлежащим $\sqrt{D}$ сингулярным модулем, который выражается в виде рациональной функции первого модуля, так что выполняется характеристическое свойство абелевых уравнений (т. е. $\varphi(\psi(k)) = \psi(\varphi(k))$ (см. выше).

Важнейшим документом является также письмо Кронекера к Дедекинду от 15 марта 1880 г., отрывок которого помещен в [34, с. 455—458]. Здесь Кронекер пишет, что преодолел трудности, которые стояли на пути к завершению исследования, занимавшего его последние месяцы. Оно касается его «излюбленной мечты юности», а именно доказательства того, что абелевы уравнения с коэффициентами, содержащими только квадратные корни из рациональных чисел, исчерпываются при помощи уравнений преобразования эллиптических функций с сингулярными модулями, подобно тому, как целочисленные абелевы уравнения исчерпываются уравнениями деления круга. Далее он выражает уверенность, что в окончательном завершении доказательства теоремы не встретится новых трудностей. Говоря о методе доказательства, Кронекер ссылается на утверждение Якоби, что все коэффициенты преобразования эллиптических функций являются целыми алгебраическими кратными последнего коэффициента (за исключением коэффициента при $x^n$, равного единице). Это замечание позволяет трактовать вышеупомянутые уравнения как уравнения преобразования, а также представлять их в виде степеней уравнений умножения, как это сделано в работе «Об абелевых уравнениях» (см. выше), поэтому эти уравнения имеют свойства, сходные со свойствами уравнений деления круга, все коэффициенты которого делятся на соответствующее простое число. Мы выбрали из письма лишь те места, которые понадобятся нам при обсуждении исследований Кронекера.

Очень интересен вопрос, насколько Кронекер владел точной формулировкой основной теоремы комплексного умножения. Прежде чем обсудить этот вопрос, мы резюмируем содержание подробного и весьма интересного комментария Хассе к этому письму [34, с. 510—515].

Хассе считает, что формулировка гипотезы в письме допускает три трактовки:

a) максимальное абелево расширение мнимо-квадратичного поля $k$ порождается сингулярными значениями модулей эллиптических функций, при этом (молчаливо) предполагается, что надо присоединить еще максимальное круговое поле $\mathbb{Q}^{ab}$;

b) $k^{ab}$ порождается сингулярными значениями модуля и значениями эллиптических функций в точках деления (в этом случае присоединение $\mathbb{Q}^{ab}$ излишне);

c) $k^{ab}$ порождается только значениями эллиптических функций в точках деления.

Хассе отмечает, что утверждение (b) верно (это основная теорема теории комплексного умножения), (a) — не совсем верно (см. конец п. 8 введения), а справедливость утверждения (c) неизвестна (с современной точки зрения гипотеза (c) не сильно отличается от (b), так как минимальное поле определения эллиптической кривой $E$ с комплексным умножением на $\mathfrak{o}_k$ равно абсолютному полю классов $k_1 = k\,(j\,(\mathfrak{o}_k))$).

Хассе рассматривает две статьи Кронекера: 1) 1853 г. [33, с. 1—11] и 2) 1877 г. [33, с. 63—71]. Относительно 1) он говорит, что формулировка на с. 11 не дает возможности выбора между (a), (b) и (c). На основании работы 1877 г. Хассе отвергает формулировку (c) и остается возможность выбора между (a) и (b). Первым трактовку (a), хотя и без особой уверенности, высказал в 1899 г. Гильберт в статье [35]. В своей парижской лекции о математических проблемах при изложении двенадцатой проблемы он приводит в точности формулировку Кронекера из письма к Дедекинду [36, с. 41], но далее Гильберт явно указывает на то, что всюду имеются в виду модулярные функции [36, с. 43].

Фютер в согласии с Гильбертом приписывал Кронекеру формулировку (a) и в 1905—1907 гг. привел ее доказательство [37], недостаточность которого была обнаружена им впоследствии [38].

В третьем томе (1908) своей монографии [5] (2 издание) Вебер также придерживается трактовки (a) и в § 169 [5, с. 617—619] приводит доказательство следующего предложения:

«Поле деления эллиптических функций получается из «Ordnungskörper» (т. е. поля, порожденного всеми $j(\mathfrak{o}_m) = j(m\omega)$) и поля деления круга».

Это неверное предложение основывается на неточных результатах § 158 [5, с. 592] (см. по этому поводу [17] § 10 и п. 8 введения к нашей работе). Хассе, находясь в этом вопросе под влиянием Гильберта и Фютера, в статье [17, § 10] с большой уверенностью приписывал Кронекеру трактовку (a).

В точной форме (b) теорема была позднее доказана Такаги [39], Хассе [40].

В настоящем комментарии Хассе в результате детального анализа источников приходит к выводу, что формулировку (b) можно приписать Кронекеру с высокой степенью вероятности; комментатор отмечает, что остается возможность того, что Кронекер владел не вполне точным вариантом гипотезы, или вариантом, не совпадающим с (b), но приписывание ему трактовки (a) Хассе называет «исторической несправедливостью».

Некоторые основные аргументы Хассе кратко можно изложить так:

1) Кронекер в тех случаях, когда могла бы идти речь об (a), ни разу не упоминает о необходимости присоединения $Q^{ab}$, а без этого гипотеза легко опровергается;

2) формулы (63) и (64) работы [33, с. 389—470] суть вещественные случаи сравнений, играющих ключевую роль в доказательстве Фютера [41] основных результатов теории (см. об этом ниже);

3) в работе 1877 г. [33, с. 71] упоминается и о значениях эллиптических функций от аргументов, находящихся в рациональном отношении к периоду.

Наша точка зрения такова: мы полагаем, что в работах 1850 гг. Кронекер имел в виду еще не вполне точную форму гипотезы, так как ни в них, ни в письме к Дирихле от мая 1857 г. он не упоминает о значениях эллиптических функций в точках деления, а говорит только о сингулярных значениях модуля. В то же время в работе 1877 г. он явно говорит о них и дает набросок доказательства их арифметических свойств. Вместе с тем обстоятельством, что в 1870—1880 гг., как мы видели, Кронекер обращал свое особое внимание на уравнения деления, все сказанное позволяет утверждать, что к началу 1880-х годов ему была известна правильная трактовка гипотезы. Об этом также убедительно свидетельствует работа 1886 г. [33, с. 389—470] (см. ниже). Тем самым, как это и считается в математическом фольклоре, под «излюбленной мечтой юности» Кронекера надо понимать точную форму основной теоремы комплексного умножения.

З а м е ч а н и е. С современной точки зрения можно формулировать основную теорему комплексного умножения как утверждение, что $k^{ab}$ порождается специальными значениями модулярных функций, но при этом надо допустить использование модулярных функций всех уровней. Такая формулировка представляется наиболее глубокой (закон взаимности Шимуры, см. [15], гл. 6; 9, гл. 11]).

Рассмотрим теперь важнейшую работу 1886 г. «К теории эллиптических функций» [33, с. 389—470].

Так как эта работа написана в терминах эллиптических функций Якоби, менее употребительных ныне в исследованиях теоретического характера, а также находится в сильной зависимости от одной работы Якоби, мы напомним здесь некоторые сведения из их теории.

Одной из основных задач теории эллиптических функций Якоби является проблема преобразования. Пусть $m$ — нечетное простое число (общий случай можно свести к этому при помощи композиции преобразований). Пусть $E$ — эллиптическая кривая в форме Лежандра $t^2 = (1 - z^2)(1 - k^2z^2)$. Как мы видели в п. 7 введения, функции $z = \mathrm{sn}\,(u, k) = \mathrm{sn}\,u = \sin \mathrm{am}\,(u, k)$, $t = \mathrm{cn}\,u \cdot \mathrm{dn}\,u = \cos \mathrm{am}\,u \cdot \Delta\,\mathrm{am}\,u$ дают параметризацию этой кривой, т. е. изоморфизм $\varphi$: $\mathbf{C}/\Gamma \to E\,(\mathbf{C})$, где $\Gamma = \mathbf{Z} \cdot 2iK' + \mathbf{Z} \cdot$

$4K$ — решетка периодов функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u$;

$$K = \int_0^{\pi/2} d\varphi/\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

$$K' = \int_0^{\pi/2} d\varphi/\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} —$$

связанные полные эллиптические интегралы первого рода. Проблема преобразования степени состоит в нахождении явных формул в терминах функции $\operatorname{sn} u$ для изогений $\nu_m$ эллиптической кривой степени $n : \nu_m : E \to E_m$. Ясно, что такие изогении соответствуют выбору решеток $\Gamma_m \supset \Gamma$ индекса $[\Gamma_m : \Gamma]$ и изогения $\nu_m$ получается при помощи $\varphi$ из $\lambda_m : \mathrm{C}/\Gamma \to \mathrm{C}/\Gamma_m$, где $\lambda_m$ — естественная проекция, возникающая из включения, $\Gamma \subset \Gamma_m$, $\lambda_m (u \bmod \Gamma) = u \bmod \Gamma_m$. Легко проверить, что существует в точности $n + 1$ решетка $\Gamma_m$ с таким свойством, а именно, если $\Gamma = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$, то $\Gamma_0 = \mathbf{Z}(\omega_1/n) + \mathbf{Z}\omega_2$, $\Gamma_m = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\left(\frac{\omega_2 + m\omega_1}{n}\right)$, $m = 1, \ldots, n$, — полный набор нужных решеток.

Рассмотрим одну из изогений $\nu_m$, скажем $\nu_0$. Она преобразует кривую $E$ с модулем $k$ в кривую с модулем, который Якоби обозначает $\lambda$ (а для $E_m$, $m \geqslant 1$, $-\lambda_m$). Параметризацию $E_0$ дает функция с модулем $\lambda$; и кроме того, вместо аргумента $u$ надо рассматривать аргумент $u/M$, где $M$ — мультипликатор (у Кронекера $1/M = \mu$), так как решетка $\Gamma_0$ не имеет вида $\mathrm{Z} \cdot 2iK' + \mathrm{Z} \cdot 4K$, и чтобы привести ее к такому виду, требуется ее умножение на $M$. Изогения $\nu_0 : E \to E_0$ задается рациональными функциями от координат на $E$ и $E_0$. Следовательно, между $x = \operatorname{sn}(u, k) = \sin \operatorname{am}(u, k)$ и $y = \operatorname{sn}(u/M, k) = \operatorname{sn} \operatorname{am}(u/M, \lambda)$ существует зависимость, выражаемая формулой $y = \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — рациональная функция. Определение явного вида функции $\Phi(x)$ — основная задача теории преобразований эллиптических функций. Эта задача была решена независимо Абелем ([42, т. 1, с. 518—617]) и Якоби [43]. Якоби дал несколько ее решений, в частности, в статье [44], с которой связана рассматриваемая нами работа Кронекера. Об истории проблемы преобразования (см. [32, гл. VII, § 8]).

Вернемся к работе Кронекера. Во введении Кронекер пишет, что в одной работе Якоби, которая еще полностью не оценена, содержится рекурсивная формула, которая дает коэффициенты, появляющиеся в проблеме деления эллиптических функций, причем путь решения полностью отличен от более ранних решений, данных Абелем и Якоби. Этой формулой Кронекер пользовался в своих исследованиях эллиптических функций с сингулярными модулями, приведших его к некоторым общим свойствам этих коэффициентов, «которые представляют собой лучший фундамент для арифметических приложений сингулярных модулей и соответствующих эллиптических функций» [33, с. 389]. Работа, о которой говорит Кронекер — статья Якоби [44]. Якоби дает здесь метод вычисления коэффициентов $B, B', B'', \ldots, B^{(n-1)/2}$ в формуле преобразования:

$$(-1)^{(n-1)/2}y = x\frac{\{B^{(n-1)/2} + B^{(n-3)/2}x^2 + \ldots Bx^{n-1}\}}{B + B'x^2 + \ldots + B^{(n-1)/2}x^{n-1}} = \frac{U(x)}{V(x)},$$

где $x = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,(u, k), \quad y = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}\,(u/M, \lambda)$.

Метод Якоби основан на получении дифференциального уравнения в частных производных для $z = U(x)$ или $V(x)$:

$$n(n-1)x^2z + (n-1)(\rho x - 2x^3)\frac{\partial z}{\partial x} + (1 - \rho x^2 + x^4)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2n(\rho^2 - 4)\frac{\partial z}{\partial \rho},$$
$$\rho = k + \frac{1}{k}. \tag{14}$$

Он позволяет вычислить коэффициенты в формуле умножения:

$$(-1)^{(n-1)/2}y = \frac{Bx^{n^2} + B'x^{n^2-1} + \ldots + B^{(n^2-1)/2}x}{B + B'x^2 + B''x^4 + \ldots + B^{(n^2-1)/2}x^{n^2-1}},$$

$x = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,u$, $y = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,(n, u)$, полагая в (14) $n = n^2$ (здесь $n$ может быть любым нечетным числом). Из этих же соображений Якоби выводит решение в радикалах уравнений деления.

Первоначально Кронекер вывел свой основной результат из (14). Он полагает, как у Якоби в цитированной работе, $x = \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(u, \varkappa) = \sqrt{\varkappa}\,\sin am\,(u, \varkappa)$ (далее мы будем пользоваться современными обозначениями $\mathrm{sn}\,u$,

$\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$); при этом

$$u = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(\varkappa - x^2)(1 - \varkappa x^2)}}, \qquad x = \frac{\vartheta_1(\xi, w)}{\vartheta_0(\xi, w)}, \quad u = 2K\xi,$$

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \vartheta_3(0, w), \qquad \sqrt{\varkappa} = \frac{\vartheta_2(0, w)}{\vartheta_3(0, w)},$$

где $\vartheta_i$ — обычные тэта-функции:

$$\vartheta_0(\zeta, w) = \sum (-q)^{n^2} \cos 2n\zeta\pi, \qquad \vartheta_1(\zeta, w) =$$
$$= q^{1/4} \sum (-1)^n q^{n^2+n} \sin(2n+1)\zeta\pi, \qquad \vartheta_2(\zeta, w) =$$
$$= q^{1/4} \sum q^{n^2+n} \cos(2n+1)\zeta\pi, \ \vartheta_3(\zeta, w) =$$
$$= \sum q^{n^2} \cos 2n\zeta\pi, \qquad q = e^{w\pi i}.$$

Основной объект рассмотрения для Кронекера — уравнение деления

$$\Phi_n(x) = x^{n^2} + \sum_r \varphi_{nr} x^{2r+1} = 0, \text{ где} \tag{15}$$

$$\sqrt{\varkappa}\, \mathrm{sn}(nu) =$$
$$= (-1)^{(n-1)/2} \frac{\varphi_{n0} x + \varphi_{n1} x^3 + \ldots + \varphi_{n\nu} x^{n^2-1} + x^{n^2}}{\varphi_{n0} x^{n^2-1} + \varphi_{n1} x^{n^2-3} + \ldots + \varphi_{n\nu} x^2 + 1}$$

$(\nu = (n^2 - 1)/2)$.

Корни (15) — величины $\mathrm{sn}\, \dfrac{4hK + 2h'K'i}{n}$ $(h, h' = 0, 1, \ldots, n-1)$. Кронекер получает разложение на неприводимые множители:

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|m} F_d(x), \qquad \ln F_n(x) = \sum_{dd'=m} \mu(m) \ln \Phi_d(x),$$

$\mu(m)$ — функция Мёбиуса и вычисляет степени $f(m) = \deg F_m$.

Далее он вычисляет $F_n(0)$ (если $n$ имеет два простых делителя, то $F_n(0) = \pm 1$, если $n$ — степень простого, то $F_n(0) = \pm p$; и на основании остроумных вычислений с тэтафункциями получает выражения для дискриминанта многочлена $\Phi_n(x)$:

$$D(\Phi_n(x)) = 2^{n^2(n^2-1)/3} (\rho^2 - 4)^{(n^2-1)(n^2-3)/12} n^{n^2}$$

(здесь и далее $n$ простое).

Дальнейшие рассуждения Кронекера основаны на изучении свойств величин $\sqrt{\varkappa}\, \mathrm{sn}\, (4hK + 2h'K'i)/n$. Он доказывает следующее предложение: «каждая величина поля $(\rho, p_{hh'})$ (т. е. порожденного $\rho$, $p_{hh'}$), которая делится на $\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,((4hK + 2h'K')/n)$, делится на $p_{hh'}$, где

$$p_{h,h'} = \prod_r \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,((4hrK + 2h'rK'i)/n).$$

Затем он исследует свойства поля, порожденного $(\rho, \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(4K/n))$, устанавливает принадлежность ему величин $\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(4rK/n)$, а также, что это поле — циклическое расширение степени $(n-1)$ поля $(\rho, \mu\sqrt{\lambda/\varkappa})$. Для сопряженных с $\mu\sqrt{\lambda/\varkappa}$ величин $\mu_h\sqrt{\lambda_h/\varkappa}$ $(h = 0, 1, \ldots, n-1)$ имеем

$$\mu_h\sqrt{\lambda_h/\varkappa} = \prod_r \sqrt{\varkappa}\,((4rKh + 2rK'i)/n).$$

Для $\lambda$ и $\mu$ имеются формулы, принадлежащие Якоби ([43, § 23]), которые Кронекер в своих обозначениях переписывает так:

$$\sqrt{\lambda}\,El\,({}^1\!/_4, n, w), \qquad \sqrt{\lambda_h} = El\,({}^1\!/_4, (h + w)/n),$$

$$\sqrt{\mu} = \sqrt{\pm n}\,\frac{\vartheta_3\,(0, 2nw)}{\vartheta_3\,(0, 2n)}, \qquad \sqrt{\mu_h} = \frac{\vartheta_3\left(0, \dfrac{2\,(h + w)}{n}\right)}{\vartheta_3\,(0, 2w)},$$

где $El\,(\zeta, w) = \dfrac{\vartheta_1\,(2\zeta, 2w)}{\vartheta_0\,(2\zeta, 2w)}$ — функция, введенная им для удобства обозначений, $El\,(\zeta, w) = \sqrt{\varkappa}\ \mathrm{sn}\,(4K\zeta, \varkappa)$, $\sqrt{\varkappa} = \mathrm{El}\,(1/4,\ w)$, $2w = K'i/K$.

При помощи этих уравнений Кронекер устанавливает, что для целого $m$ функция $El\,({}^1\!/_4, 2mw)$ — корень алгебраического уравнения с коэффициентами — целозначными функциями обратных значений $\sin(\pi/4)\,El\,({}^1\!/_4, w)$, первый и последний коэффициенты которого по абсолютной величине равны единице.

Далее он замечает, что величина $\sqrt{\lambda/\varkappa}$ принадлежит полю $(p, \varkappa, \mu\sqrt{\lambda/\varkappa})$ только в том случае, когда два сопряженных значения $\sqrt{\lambda/\varkappa}$, т. е. две величины из совокупности: $El\,({}^1\!/_4,\ nw)$, $El\,({}^1\!/_4,\ w/n)$, $El\,({}^1\!/_4,\ (1 + w)/n)$, $\ldots, El\,{}^1\!/_4,\ (n - 1 + w)/n)$ совпадают, что бывает при сингулярных значениях $w$ (т. е. в случае комплексного умножения).

Доказав таким образом большое количество предварительных фактов. Кронекер приступает к выводу основного результата, важность которого трудно переоценить.

Он исходит из равенства: $\mathrm{Nm}\,(\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(4K/n)) = n$, откуда можно получить эквивалентности

$$\mu\sqrt{\lambda/\varkappa} \backsim (\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(4K/n))^{n-1}, \quad \mu_h = \sqrt{\lambda_h/\varkappa} \backsim$$
$$\backsim (\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,((4hK + 2K'i))^{n-1}.$$

Из того доказанного ранее факта, что $\sqrt{\lambda/\varkappa}$, $\sqrt{\lambda_n/\varkappa}$ — алгебраические единицы, вытекает, что

$$\mu \backsim (\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(4K/n))^{n-1}, \quad \mu_h \backsim (\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,((4hK + 2K'i)/n))^{n-1}.$$

Имеем также

$$\mathrm{Nm}\,(\mu\sqrt{\lambda/\varkappa}) = n, \quad \mathrm{Nm}\,\mu = n$$

так что $\mu\sqrt{\lambda/\varkappa}$ и $\mu$ — простые делители $n$ в соответствующих полях.

Из (16) следует при помощи простых рассуждений, что любая целая величина поля $(p, \mu\sqrt{\lambda/\varkappa})$, которая делится на $\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(2K/n)$ делится на $\mu$.

Это то, что нужно для доказательства основного результата, так как очевидно, что коэффициенты при $x$, $x^3, \ldots, x^{n-2}$ в произведении $\prod\limits_r (x - \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(2rK/n))$ $(r = 0,1, \ldots, n-1)$, делятся на $\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(2K/n)$ в $(\rho, \mu\sqrt{\lambda/\varkappa})$, поэтому они делятся на $\mu$.

При помощи формулы Якоби ([43, § 23])

$$(-1)^{(n-1)/2}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}\,(\mu u, \lambda) = \prod_r \frac{x - \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(2rK/n)}{1 - x\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(2rK/n)}$$

$$(x = \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(u, x),\ r = 0, 1, \ldots, n-1)$$

получается следующее фундаментальное утверждение:

«При выражении $(-1)^{(n-1)/2}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}\,(\mu u, \lambda)$ через $\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(u, \varkappa) = x$ получается дробь с числителем степени $n$ и знаменателем степени $(n-1)$. Коэффициенты ее числителя и знаменателя — целые алгебраические величины от $(\rho, \varkappa, \mu)$; коэффициент при степени $n$ в числителе, равно как свободный член в знаменателе, имеют абсолютную величину 1; все остальные коэффициенты делятся на $\mu$, причем коэффициент при $x$ в числителе и равный ему коэффициент при $x^{n-1}$ в знаменателе абсолютно эквивалентны $\mu$».

Эта теорема представляет собой основной результат статьи Кронекера и фигурирует у него как формула (63). Он переписывает его в виде формулы

$$(-1)^{(n-1)/2}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}(\mu u, \lambda) = (\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}(u, \varkappa))^n (\mathrm{mod}\,\mu), \qquad (17)$$

имеющей номер (64) в его работе.

Далее Кронекер обсуждает связь этих результатов с формулами умножения, получающимися из учета соотношения $\mu\mu' = n$, показывающего, что умножение на $n$ разлагается на два преобразования степени $n$. Затем он выясняет важный для теории сингулярных модулей вопрос, когда могут совпадать значения $\mathrm{El}(\xi, v) = \mathrm{El}(\eta, w)$, и показывает, что в этом случае $\eta = \sigma\xi + \tau$, $v = (aw + b)/(cw + d)$, $ad - bc = 1$, $a$, $b$, $c$, $d$ — целые.

Подстановка $u = K$ с учетом [43, § 24], дает $\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}(u, \varkappa) = \sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}(\mu u, \lambda) = (-1)^{(n-1)/2}\sqrt{\lambda}$, откуда по (17) имеем

$$\sqrt{\lambda} = (\sqrt{\varkappa})^n (\mathrm{mod}\,\mu). \qquad (18)$$

В последующих параграфах своей работы Кронекер изучает уравнение $T(z) = 0$, где $T(z) = (z - \mu\tau)(z - \mu_0\tau_0)\ldots(z - \mu_{n-1}\tau_{n-1})$, а $\tau$ — целая величина в $(\rho, \sqrt{\varkappa}, \mu)$, $\mu_i\tau_i$ — сопряженные $\mu\tau$ в $(\rho, \sqrt{\varkappa}, \mu_i)$. Для коэффициентов $\theta_i$ многочлена $T(z) = \theta_0 - \theta_1 z + \theta_2 z^2 - \ldots \ldots -\theta_n z^n + z^{n+1}$ он устанавливает сравнения

$$\theta_n \equiv 0,\ \theta_{n-1} \equiv 0,\ \ldots,\ \theta_2 \equiv 0,\ \theta_0 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n)$$

и при $\tau = 1$, $\theta_1 = \mu_0\mu_1 \ldots \mu_{n-1} \equiv \mu' (\mathrm{mod}\,\mu)$; поэтому $\theta_1$ не делится на $n$. Значит

$$\begin{cases} T(z) \equiv z(z^n - \theta_1), & T_1(z) \equiv (z^n - \theta_1) \quad (\mathrm{mod}\, n), \\ n = \mu\mu', & \mu' = \theta_1 - \theta_2\mu + \ldots + \theta_n\mu^{n-1} - \mu^n. \end{cases}$$

Кронекер замечает также, что $T(z) = (z - \mu)(z - \mu_0)\ldots \ldots (z - \mu_{n-1}) = T(z, \varkappa)$ является многочленом от $z$, $\varkappa$ с целыми коэффициентами.

Последние три параграфа статьи содержат еще два доказательства основного результата. Второе доказательство основано на уравнении Якоби (14). Учитывая арифметическую природу $\sqrt{\lambda}$ и $\sqrt{\varkappa}$, изученную в начале работы, Кронекер индукцией по $h$ вниз, начиная со значения $h =$

$= (n-1)/2$, очень просто устанавливает нужный результат.

Третье доказательство еще проще и полностью аналогично доказательству Эйзенштейна его основного результата для лемнискатических функций.

Пусть теперь $n$ — произвольное нечетное число,

$$y = \frac{\sum\limits_r \tau_r x^{2n+1}}{\sum\limits_r \tau_r x^{n-2r-1}} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

$\tau_{(n-s)/2}, \tau_i$ — целые алгебраические величины от $\rho$. Кронекер находит соотношение

$$P'Q - PQ' \equiv 0 \pmod{\tau_0}, \tag{19}$$

обобщающее рассмотренное выше соотношение Эйзенштейна

$$V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx} \equiv 0 \pmod{m},$$

которое получится, если подставить в формулу Кронекера $\varkappa = 1/\sqrt{2}$, $n = p$ — простое, $p \equiv 1 \pmod 4$ (см. раздел III). При этом Кронекер рассуждает аналогично Эйзенштейну.

Из (19) просто следуют сравнения $\tau_r \equiv 0 \pmod{\tau_0}$ $(r = 0, 1, \ldots, (n-3)/2)$, эквивалентные основному результату.

Статья Кронекера важна не только своим основным результатом, но и методами его доказательств, несущими большую информацию.

Основная формула (17) содержит, по сути дела, обе теоремы 1 и 2 из п. 8 раздела I нашей работы, являющиеся основными техническими средствами комплексного умножения. Теорема 1 получается из (17) при подстановке $u = K$, что дает формулу (18), и дальнейшей подстановке вместо $\varkappa$ сингулярного модуля, соответствующего умножению на $M = 1/\mu$, где $\mu$ из мнимо-квадратичного поля, $\mu\mu' = n = p$. (Это утверждение точное, только если идеал $\mathfrak{p}$ главный, в общем случае требуется бóльшая аккуратность.) Разница с формулировкой теоремы 1 лишь в том, что вместо функции $j$ здесь используется модуль $\varkappa$. Точно так же теорема 2 получается при подстановке вместо $\varkappa$ соответствующего сингулярного модуля, и тогда отображения $\varphi$ и $\psi$ из ее формулировки задаются функциями $x = \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(n, \varkappa)$, $y = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{sh}\,(\mu n, \lambda)$ и их производными.

Интересны также идеи, заложенные в доказательствах основных формул, особенно в первом из них. Далее мы считаем, что читатель в общих чертах знаком с современным состоянием теории модулярных функций одного переменного. Ознакомиться с ним можно по книгам [15, 9], выпускам трудов конференции [45, 46]. Хорошим введением в эту тематику может служить книга [47].

Значительная часть рассмотрений Кронекера относится к изучению поля модулярных функций всех уровней с рациональными коэффициентами. Это связано с тем, что функции $\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,\dfrac{4hK+2hK'i}{n}$ порождают поле модулярных функций некоторого уровня $N$. Он вычисляет группу Галуа поля модулярных функций уровня $N$ над полем, задаваемым модулярным уравнением, что соответствует теореме 5 в [9, гл. 6]. Кроме того, Кронекер работает над кольцами, аналогичными $\mathbf{Z}[j]$, доказывая, что различные модулярные функции являются целыми над этими кольцами.

Результаты (63) и (64) также допускают интерпретацию в терминах модулярных функций. В них можно видеть некоторый прообраз соотношений Эйхлера—Шимуры («конгруэнц-соотношений»). Чтобы пояснить сказанное, возьмем простейший случай этих соотношений для группы $\Gamma_0(N)$, доказанный Эйхлером [48] (см. также первую лекцию в [47], § 3, в особенности (15)). Формула Эйхлера—Шимуры в этом контексте состоит в утверждении, что для точки $(j \times j')$ редукции $\tilde{C}_p$ модулярной кривой $C = H^*/\Gamma_0(N)$ по простому модулю $p \nmid N$ имеют место соотношения

$$\pi(\tilde{j}\times\tilde{j}')=\tilde{j}^{p}\times\tilde{j}'^{p},\qquad \tilde{j}_i^{p}=\tilde{j},\qquad \pi'(\tilde{j}\times\tilde{j}')=\sum_{i=1}^{p}(\tilde{j}_i\times\tilde{j}'_i), \tag{20}$$

где $\pi$ — соответствие Фробениуса на $\tilde{C}_p\times\tilde{C}_p$, $\pi'$ — его транспозиция. Соотношения (3) дают формулу Эйхлера—Шимуры

$$\tilde{T}_p=\pi'+\pi, \tag{21}$$

где $\tilde{T}_p$ — редукция соответствия, задаваемого оператором Гекке. Основной момент в доказательстве — изучение редукции изогений степени $p$ эллиптической кривой $E$, представляющей точку $(j\times j')\in C$. Формулы (20) вытекают из утверждения, что одна из изогений степени $p$ кривой редуцируется в морфизм Фробениуса, а остальные $p$ изогений — в его транспозицию, причем последнее утверждение непосредственно следует из сепарабельности соответствующих редукций.

Формула (17) как раз и утверждает, что редукция некоторой изогении степени $p = n$ эллиптической кривой дает морфизм Фробениуса. Утверждение о сепарабельности редукций остальных изогений также согласуется с доказанными Кронекером результатами о делимости коэффициентов $T(z)$.

Видимо, эти рассуждения имеет в виду Г. Шимура, когда пишет, что прототип соотношений Эйхлера—Шимуры содержится еще в работах Кронекера [15, с. 225]. То, что Кронекер мотивировал свои исследования нуждами теории комплексного умножения, еще более подчеркивает его исключительную проницательность. Свидетельство этого — теория эллиптических модулей В. Г. Дринфельда [49], позволяющая дать обобщение одновременно теоремы Кронекера—Вебера, основной теоремы комплексного умножения и соотношений Эйхлера—Шимуры на функциональные поля и позволяющие рассмотреть ситуации этих трех теорем с единой позиции.

## V. Выводы

Мы рассмотрели в двух частях нашей работы исследования математиков, которые, по нашему мнению, формировали основные идеи и методы комплексного умножения — Абеля, Гаусса, Эйзенштейна и Кронекера. К ним по праву надо присоединить Якоби, который делит с Абелем честь открытия самого явления комплексного умножения, и труды которого по теории эллиптических функций, в особенности по теории их преобразований, оказали формирующее влияние на дальнейшие исследования в этой области, прежде всего на работы Кронекера.

Каждый из первых четырех названных математиков внес значительный вклад в общее здание теории. Абель, исходя из интереса к решению уравнений в радикалах, исследовал в частных случаях алгебраические свойства значений эллиптических функций в точках деления при наличии комплексного умножения и свойства соответствующих значений модуля. Он установил, что эти значения порождают разрешимые расширения $\mathbf{Q}$ и доказал это в частных случаях. При этом Абель высказал предположение о неразрешимости соответствующих расширений в случае отсутствия комплексного умножения, что было доказано полтора века спустя после выхода работ Абеля.

Гаусс, получивший свои результаты ранее Абеля, но не публиковавший их, достиг глубокого проникновения в теорию. Ему принадлежит теорема, связывающая теорию лемнискатических функций с теорией биквадратичных вычетов и представляющая собой частный случай результатов Дэвенпорта—Хассе и Дойринга, полученных в середине XX в. Гауссу, видимо, была ясна возможность применения комплексного умножения для исследования глубоких арифметических вопросов, в частном случае лемнискатических функций.

Труды Эйзенштейна в области комплексного умножения также относились в основном к лемнискатическим функциям. Для них он, уточняя методы Абеля (см. [32, с. 26]), доказал предложение, на котором, по его утверждению основываются все применения лемнискатических функций к арифметике, и при его помощи вывел биквадратичный закон взаимности. Доказательство этого утверждения содержит бóльшую часть доказательства теоремы Гаусса, упомянутой выше, что показывает глубину предложения Эйзенштейна. Он разработал также более тонкие отделы теории, которых мы не касались [1].

Наконец, Кронекер в течение своих более чем тридцатилетних изысканий в теории комплексного умножения сформулировал все ее основные теоремы, получил доказательства части своих утверждений и дал основные технические средства для разработки остальных разделов теории в виде, не сильно отличающемся от современного. Он ввел в математический обиход основные идеи и методы теории. Завершение и отделка всего здания была окончена трудами целого ряда математиков конца XIX — первой половины XX в., и в настоящее время теория комплексного умножения представляет собой один из основных инструментов в исследованиях по теории чисел и алгебраической геометрии.

### ЛИТЕРАТУРА


1. *Eisenstein F. G.* Über einige allgemeine Eigenschaften der Gleichung usw.— J. Crelle, 1850, Bd. 39, S. 160—179, 224—287.
2. *Вейль А*. Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру. М.: Мир, 1978.
3. *Hermite Ch.* Sur la théorie des équations modulaires.— In: Oeuvres. P., 1881, vol. 2, p. 39—81.

4. *Sylow L.* Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques.— J. math. pure et appl., sér. 4, 1887, vol. 3, p. 236—301.
5. *Weber H.* Lehrbuch der Algebra. Leipzig, 1908. Bd. 3.
6. Алгебраическая теория чисел. под ред. Касселься и Фрёлиха. М.: Мир, 1969.
7. *Ленг С.* Алгебраические числа. М.: Мир, 1967.
8. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1972.
9. *Lang S.* Elliptic functions. N. Y., 1973.
10. *Deuring M.* Die Typen der Multiplicatorenringe elliptischer Funktionkörper.— Hamb. Abh., 1941, Bd. 14, S. 197—272.
11. *Вейль А.* Основы теории чисел. М.: Мир, 1972.
12. *Шафаревич И. Р.* $\zeta$-функция. М.: МГУ, 1967.
13. *Серр Ж. П.* Локальные множители дзета-функции алгебраических многообразий.— Мат. сб., 1971, 15 : 1, с. 3—15.
14. *Weil A.* Numbers of solutions of equations in finite fields. — Bull. AMS, 1949, vol. 55, p. 497—508.
15. *Шимура Г.* Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. М.: Мир, 1973.
16. *Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н.* Курс современного анализа. М.; Л.: ГТТИ, 1934. Ч. II.
17. *Hasse H.* Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper.— Jahresber. DMV, 1926, Bd. 35, H. 1—4, S. 1—55.
18. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. I. М.; Л.: ОНТИ, 1937.
19. *Gauss K. F.* Gedenkband anlässlich des 100 Todestages. Leipzig, 1957.
20. *Gauss K.-F.* Gesammelte Werke. Göttingen, 1863—1933. Bd. 1—12.
21. *Herglotz H.* Zur letzten Eintragung in Gauss'schen Tagebuch.— Ber. Math.-Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss., 1921, Bd. 73, S. 271—276.
22. *Hasse H.* Beweis des Analogons der Riemann' schen Vermutung für Kongruenz-Zetafunktion.— Nachr. Ges. Wiss. Góttingen, Math.-Phys. Kl., 1933, S. 253—262.
23. *Davenport H., Hasse H.* Die Nullstellen der Kongruenz-Zetafunktion in gewissen zyklischen Fällen.— J. reine angew. Math., 1935, Bd. 172, S. 151—182.
24. *Weil A.* Jacobisums as «Grössencharaktäre».— Trans. AMS, 1952, vol. 73, p. 487—495.
25. *Mazur B.* Slopes of Frobenius.— Proc. Symp. Pure Math., 1975, vol. 29.
26. *Eisenstein F. G.* Mathematische Abhandlungen. B.. 1847.
27. *Eisenstein F. G.* Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen. I. Abteilung des biquadratischen Fundamentalsatze usw.— J. Crelle, 1846, Bd. 30, S. 185—210.
28. *Хассе Г.* Лекции по теории чисел. М.: ИЛ, 1953.
29. *McGettrick A. D.* On the biquadratic Gauss sums.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1972, vol. 71, p. 79—83.
30. *Кассельс Дж.* О гипотезе Куммера.— Мат. сб., 1972, 16 : 1.
31. *Eisenstein F. G.* Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen. VI. Genaue Untersuchung der unendlichn Doppelprodukte usw.— J. Crelle, 1847, Bd. 35, S. 135—274.

32. Abrégé d'histoire des mathématiques 1700—1900/Sous la direc. de Jean Dieudonné. P., 1978. Vol. 2.
33. *Kronecker L.* Werke. Leipzig, 1929. Bd. 4.
34. *Kronecker L.* Werke. Leipzig, 1930. Bd. 5.
35. *Hilbert D.* Über die Theorie der relativ-quadratischen Zahlkörper.— Jahresber. DMV, 1899. Bd. 6.
36. Проблемы Гильберта, под ред. П. С. Александрова. М.: Наука, 1969.
37. *Fueter R.* Die Theorie der Zahlenstrahlen. I, II.— J. Math., 1905, Bd. 130; 1907, Bd. 132.
38. *Fueter R.* Abel'sche Gleichungen in quadratisch-imäginären Zahlkörper.— Math. Ann., 1914, Bd. 75.
39. *Takagi K.* Über eine Theorie der raltiv—Abel'schen Zahlkörper.— J. Coll. Sci., Tokyo, 1920, vol. 41.
40. *Hasse H.* Neue Begründung der komplexen Multiplikation.— J. Math., 1926, Bd. 157.
41. *Fueter R.* Vorlesungen über die singuläre Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptische Funktionen. II. B., 1927.
42. *Abel N. H.* Oeuvres completes: Vol. 1—2. Christiania, 1881.
43. *Jacobi C. G.* Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Regiomonti, 1829 (перепеч. в: *Jacobi C. G.* Gesammelte Werke. B., 1881, Bd. I, S. 55—138).
44. *Jacobi C. G.* Suite des notices sur les fonctions elliptiques.— J. Crelle, 1828, vol. 4, p. 185—193 (перепеч. в: *Jacobi C. G.* Gesammelte Werke. B., 1881, Bd. I, S. 266—275).
45. Modular Functions. I.— Lect. Notes Math., 1973, 320.
46. Modular Functions, IV.— Lect. Notes Math., 1975, 476.
47. *Ленг С.* Введение в теорию модулярных форм. М.: Мир, 1979.
48. *Eichler M.* Quaternäre quadratische Formen und die Riemann'sche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion.— Arch. Math., 1954, Bd. 5, S. 355—366.
49. *Дринфельд В. Г.* Эллиптические модули.— Мат. сб., 1974, 94 : 4, с. 594—627.

# КРАТКИЙ ОЧЕРК ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ ЭРАТОСФЕНОВА РЕШЕТА

**Б. А. Эльнатанов**

1. *Аналитическая запись эратосфенова решета.* Первоначальный способ отсеивания простых чисел из ряда натуральных, предложенный древнегреческим ученым Эратосфеном (III—II в. до н. э.), был значительно модернизирован и модифицирован в связи с приложением его к задачам определения числа простых чисел заданного промежутка, количества простых делителей составного числа, составления таблиц простых чисел и простых делителей и т. д.

Большое значение в развитии метода эратосфенова решета имело предложенное Л. Эйлером (1707—1783) видоизменение [1]. Он предложил для определения всех простых чисел натурального ряда, кроме 2, 3 и 5, рассматривать простые числа в прогрессиях $30k + r$; $(30, r) = 1$.

Решето Л. Эйлера способствовало уменьшению количества проверок при определении простых чисел натурального ряда. Это, естественно, привело к расширению таблиц простых чисел. В исследованиях Л. Эйлера [2] принцип, на котором основано решето, привел к установлению точной формулы для функции, означающей число чисел, не превосходящих $m$ и взаимно простых с ним. Впоследствии К. Ф. Гаусс (1777—1855) назвал эту функцию функцией Эйлера [3, с. 38—39] и обозначил ее через $\varphi(m)$.

Применение принципа решета к определению значения $\varphi(m)$ таково: из системы чисел

$$1, 2, 3, \ldots, m,$$

где $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, последовательно исключаются числа, кратные $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Среди чисел $1, 2, 3, \ldots, m$ количество чисел, кратных $p_1$, равно $m/p_1$, значит, число чисел, не делящихся на $p_1$, равно

$$m - \frac{m}{p_1} = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right).$$

Далее, исключая из оставшихся чисел

$$\frac{m}{p_2}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)$$

числа, кратные $p_2$, можно получить число чисел, не кратных $p_1$ и $p_2$, оно будет равно

$$m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$$

и т. д., и в конечном итоге

$$\varphi(m) = m \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(подробно об этом см. [4, с. 61—63; 5]).

Важнейшими в предыстории современного метода решета являются исследования А. Лежандра (1752—1833). В 1830 г. [6, с. 86—88], пользуясь методом решета, он нашел точное выражение для количества чисел прогрессии

$$kA - C \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

не делящихся ни на одно из заданных простых $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Это выражение

$$m - \sum_{1\leqslant i\leqslant r}\left[\frac{m+(p_i)_0}{p_i}\right] + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{m+(p_ip_j)_0}{p_ip_j}\right] - \\ - \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant r}\left[\frac{m+(p_ip_jp_k)_0}{p_ip_jp_k}\right] + \ldots, \qquad (1)$$

где $[x]$ — целая часть $x$, $(a)_0$ — наименьшее положительное, при котором $(a_0)A - C$ кратно $a$, или, другими словами, $(a)_0$ — наименьшее положительное решение сравнения

$$Ax \equiv C \pmod a.$$

Лежандр заметил, что если $p_1 = 2,\ p_2 = 3, \ldots, p_r \leqslant \leqslant \sqrt{Am - C}$, то (1) определяет число простых чисел прогрессии $kA - C$, лежащих между $\sqrt{mA - C}$ и $mA - C$. В частности, при $A = 1$, $C = 0$

$$\pi(m) - \pi(\sqrt{m}) + 1 = m - \sum_{1\leqslant i\leqslant r}\left[\frac{m}{p_i}\right] + \\ + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{m}{p_ip_j}\right] - \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant r}\left[\frac{m}{p_ip_jp_k}\right] + \ldots, \qquad (2)$$

где $\pi(m)$ — число простых чисел, не превосходящих $m$.

Формула (2), на первый взгляд, похожа на общие формулы Ж. Лиувилля (1809—1882) и Р. Дедекинда (1831—1916), установленные ими в 1857 г. Однако Ж. Лиувилль заметил [7], что из тождества Гаусса

$$m = \sum_{d|m} \varphi(d) \qquad (3)$$

следует выражение для $\varphi(m)$, полученное еще Эйлером и Гауссом

$$\varphi(m) = m - \sum_{1\leqslant i\leqslant k}\frac{m}{p_i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}\frac{m}{p_ip_j}$$

при $m = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$.

В работе Ж. Лиувилля применяется практически то, что теперь принято называть принципом обращения Мёбиуса к равенству (3).

В [8] принцип обращения записан Р. Дедекиндом таким образом:

если $F(m)=\sum_{d|m} f(d)$,

то

$$f(m)=F(m)-\sum_{1\leqslant i\leqslant n} F\left(\frac{m}{p_i}\right)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} F\left(\frac{m}{p_i p_j}\right)-\ldots,$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — простые делители числа $m$.

Следует отметить, что формула Лежандра (2) не является прямым следствием формулы Дедекинда.

В 1832 г. Е. Жонкьер (1820—1901) представил работу [9] о формуле для определения числа простых чисел, не превосходящих границу, записанную им в форме

$$\pi(x)=\pi(\sqrt{x})-1+\sum(-1)^m\left[\frac{x}{2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots p_n^\omega}\right], \qquad (4)$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ принимает значения нуля и единицы, а $m$ — число простых, входящих в знаменатель суммы в первой степени. Е. Жонкьер доказывает, что при отсеивании составных чисел делимость их на каждое простое учитывается только один раз. В своем письме к Ж. Бертрану (1822—1900) от 17 декабря 1882 г. [10] он сообщал о формуле для числа простых чисел и утверждал, что эта формула, «оказывается, принадлежит Лежандру», ибо содержится в его книге по теории чисел. Однако Жонкьер заметил, что Лежандром не установлен тот факт, что если речь идет о составных, имеющих больше двух делителей, то каждое из них выбрасывается один раз. Он приводит доказательство этого факта [11], которое Р. Липшиц (1832—1903) разъясняет следующим образом: число чисел, не превосходящих $x$ и кратных $p_i$, равно $[x/p_i]$. Вычитая это количество из $[x]$ для всех $i=1, 2, \ldots, n$, замечая, что числа, кратные одновременно двум простым $p_i$ и $p_j$, вместо одного раза вычитаются два раза, к числу оставшихся чисел нужно прибавить $[x/p_i p_j]$ для всех комбинаций $1\leqslant i<j\leqslant n$; при этом оказывается, что прибавлено слишком много. Например, для чисел, кратных $p_1 p_2 p_3$, сначала единица трижды вычиталась (при $[x/p_1]$, $[x/p_2]$, $[x/p_3]$ и $[x/p_1 p_2]$, $[x/p_1 p_3]$, $[x/p_2 p_3]$) так, что число такого вида вообще не засчитывается. Продолжение процесса приводит к (4). Если некоторое число, не превосходящее $x$, делится точно на $n$ чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то из об-

щего количества чисел $[x]$ оно вычитается

$$n - C_n^2 + C_n^3 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 1 - (1-1)^n = 1$$

раз.

Р. Липшиц в письмах к Ш. Эрмиту (1822—1901) [12—15] указывал, что способ рассуждений, приведший Е. Жонкьера к повторному установлению формулы Лежандра, ведет к упрощению части теоретико-функциональных соотношений теории чисел, в частности, и тех тождеств, которые в 1879 г. установлены Р. Липшицем, а также другими авторами. Если

$$F(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \tau(m),$$

$$G(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \sigma(m), \quad D(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \varphi(m),$$

то

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mu(k) F([n/k]) = n,$$

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k\mu(k) G([n/k]) = n,$$

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mu(k) D([n/k]) = \varphi(n),$$

где $\tau(m)$ и $\sigma(m)$ — соответственно число и сумма положительных делителей числа $m$, $\varphi(m)$ — функция Эйлера, $D(m)$ — треугольное число $(m^2 + m)/2$, $\mu(m)$ — функция Мёбиуса, определяемая равенством

$$\mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 1, \\ 0, & \text{если } p^2 \mid m, \\ (-1)^k, & \text{если } m = p_1 p_2 \ldots p_k. \end{cases}$$

Методом, схожим с решетом Эратосфена, Р. Липшиц безуспешно пытался получить доказательство приближенной формулы Б. Римана (1826—1866) [16, с. 216—224]:

$$\pi(x) = \sum_n \frac{\mu(n)}{n} \operatorname{li}(\sqrt[n]{x}),$$

где $\operatorname{li}(x) = \int\limits_2^x \frac{du}{\ln u}$.

Для $x < 10^9$ формула Римана хорошо согласуется с численными подсчетами, из которых следует, что $\pi(x) <$

$<$ li $(x)$. Однако в начале XX в. выяснилось, что неравенство $\pi(x) < \operatorname{li}(x)$ верно не для всех $x$ [17], и тем самым формула Римана была опровергнута.

*2. Применение эратосфенова решета.* Исследования по видоизменениям эратосфенова решета до начала XIX в. касались лишь вопроса определения простых чисел и простых делителей составных чисел в арифметических прогрессиях и приложения их к задачам составления таблиц таких чисел. Применение решета было значительно расширено А. Полиньяком (1826—1863). Он предлагает видоизменение решета для последовательности натуральных чисел, начинающихся с нуля [18—20]. При этом он учитывает «расстояние» между двумя невычеркнутыми числами, из которых образовывает так называемые *диатомические* последовательности.

Так, в ряде чисел

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, . . .

вычеркивается нуль и затем каждое второе. Здесь «расстояние» между двумя незачеркнутыми числами всегда равно единице. Из этого образовывается первая диатомическая последовательность:

1, 1, 1, 1, . . .

В таблице чисел с вычеркнутым каждым вторым

$$\cancel{0}, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, 15, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}, 21, \cancel{22}, 23, \ldots$$

теперь вычеркивается каждое третье, начиная с нуля, что приводит ко второй диатомической последовательности:

1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, . . .,

составленной с учетом «расстояния» между двумя невычеркнутыми числами в таблице

$$\xcancel{0}, 1, \cancel{2}, 3, 4, 5, \xcancel{6}, 7, \xcancel{8}, 9, \cancel{10}, 11, \xcancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, 17, \xcancel{18}, 19, \cancel{20}, \cancel{21}, \cancel{22}, 23, \ldots$$

В ней ввиду того, что первое незачеркнутое простое является 5, вычеркивается каждое пятое, начиная с нуля, в результате образуется третья диатомическая последовательность:

1,5,3,1,3,1,3,5,1,5,3,1,3,1,3,5,1,5,3,1,3,1,3,5, ...

Продолжая этот процесс, А. Полиньяк устанавливает закономерность составления диатомических последовательностей и обобщает его для произвольной $n - 1$ диатомической последовательности (начиная с нуля, вычеркивается каждое $p_n$-е число, где $p_n$ — $n$-е простое число).

А. Полиньяк надеялся, что предложенная им модификация решета должна привести к решению многих задач теории чисел. Однако выяснилось, что теория диатомических последовательностей ведет к более слабым результатам, чем теория распределения простых чисел, разработанная П. Л. Чебышевым (1821—1894) [21]. Значение и место этих теорий в развитии теории чисел изучены в [4, с. 64—66; 22, с. 265—271; 23, с. 122—127]. Отметим, что А. Полиньяк привел формулировку, а затем и доказательство теорем [18—20]:

1. Между простым числом и его квадратом всегда имеется по крайней мере одно простое число.

2. Между двумя последовательными степенями одного и того же числа имеется по крайней мере одно простое число.

Эти теоремы оказались слабее теорем П. Л. Чебышева. П. Л. Чебышев доказал также постулат Бертрана о существовании одного простого числа между $a$ и $2a - 2$, начиная с $a > 3$. Тем не менее исследования А. Полиньяка интересны тем, что они подчеркивают применимость метода решета ко многим задачам теории чисел.

Профессор Московского университета Ф. А. Слудский (1841—1897) в 1866 г. на заседании математического общества прочел доклад о числе и форме простых чисел [24]. Первая часть доклада была посвящена вопросу о подсчете числа простых чисел с помощью формулы Лежандра (2), а вторая — определению самих простых чисел, заключенных между $\sqrt{m}$ и $m$.

В основу работы Ф. А. Слудского положен факт, что целое число $x$, заключенное между $\sqrt{m}$ и $m$, простое тогда и только тогда, когда оно не кратно ни одному простому, не превосходящему $\sqrt{m}$, или, другими словами, для того чтобы $x$ было простым, оно должно удовлетворять системе сравнений

$$\begin{cases} x \equiv [u]_1^{p_1-1} \pmod{p_1}, \\ x \equiv [v]_1^{p_2-1} \pmod{p_2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x \equiv [w]_1^{p_k-1} \pmod{p_k}, \end{cases}$$

где

$[u]_1^{p_1-1}$ пробегает $1, 2, \dots, p_1 - 1$,

$[v]_1^{p_2-1}$ пробегает $1, 2, \dots, p_2 - 1$,

. . . . . . . . . . . . . . . .

$[w]_1^{p_k-1}$ пробегает $1, 2, \dots, p_k - 1$,

а $p_1, p_2, \dots, p_k$ — все простые, меньшие или равные $\sqrt{m}$. Решение системы сравнений Ф. А. Слудский выбирает в форме

$$x \equiv (P/p_1)^{p_1-1}[u]_1^{p_1-1} + (P/p_2)^{p_2-1}[v]_1^{p_2-1} + \dots$$
$$\dots + (P/p_k)^{p_k-1}[w]_1^{p_k-1} \pmod{P},$$

где $P = p_1 p_2 \dots p_k$. Выбирая из бесчисленного множества значений $x$ те, которые расположены между $\sqrt{m}$ и $m$, он находит искомые простые числа.

Идеи Ф. А. Слудского развиты далее Э. К. Шпачинским. Он для выяснения вопроса о простоте нечетного числа $n = 2a + 1$, принадлежащего некоторому числовому промежутку, пользуется необходимым условием его простоты, а именно $n$ — простое число, если

$$a \not\equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}$$

для всех простых $p \leqslant \sqrt{n}$ [25]. Другими словами, если $n = 2a + 1$ простое, то число $a$ не должно удовлетворять ни одному из сравнений

$$\begin{aligned} &x \equiv 1 \pmod{3}, \\ &x \equiv 2 \pmod{5}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &x \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}, \end{aligned}$$

где простое $p \leqslant \sqrt{n}$. Эти сравнения Э. К. Шпачинским названы критериальными. Он этот прием применяет к определению простых произвольного интервала, причем как возрастающего, так и убывающего.

Таким образом, дальнейшее развитие идеи о возможности определения простых чисел в промежутке натурального ряда с помощью решета принадлежит Ф. А. Слудскому и Э. К. Шпачинскому. Они, в частности, указали способ определения простых чисел, заключенных между произвольным $a$ и $a^2$, на основании сведений о простых, не превосходящих числа $a$.

*3. Применение решета Эратосфена для арифметических прогрессий.* Решето Эйлера для определения простых чисел и наименьших простых делителей составных чисел в прогрессии $30k + r$, $(30, r) = 1$, послужило стимулом для исследований распределения простых чисел в прогрессиях. Сначала надо было доказать бесконечность числа простых в прогрессиях $mk + r$, $(m, r) = 1$ и $0 < r < m$.

Доказал эту теорему в 1837 г. [26] Лежен-Дирихле (1805—1859) специальными «не элементарными» приемами, основанными на свойствах введенной им $L$-функции.

Задача увеличения границ таблиц простых чисел связана с вопросом применения решета к арифметической прогрессии с большой разностью. В 1864 г. В. А. Лебег предложил применить решето для прогрессии $210k + r$, $(210, r) = 1$, [27] и с его помощью определить все простые числа натурального ряда, кроме 2, 3, 5, 7, так как $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Академик Петербургской академии наук В. Я. Буняковский (1804—1889) предложил видоизменение решета [28] для определения простых чисел специального вида [29; 4, с. 59—61]. Прием В. Я. Буняковского основан на решении в целых числах линейных неопределенных уравнений с двумя неизвестными. Этот прием сводится к задаче определения $\pi(x + y) - \pi(x)$ для достаточно больших $y$ с указанием на практический способ выяснения простоты достаточно больших натуральных чисел. Особое место в приеме В. Я. Буняковского занимает задача определения простых чисел, заключенных в заданном промежутке и оканчивающихся одним и тем же числом. Он довольно подробно изучал прогрессию $101 + 10k$ в промежутке от 100 до 200. Для таких чисел он вводит обозначение $1x1$, где $x$ — последовательно принимает значения

0, 1, 2, . . ., 9. Поскольку

$$1x1 = 100 + 10x + 1 = 101 + 10x,$$

задача сводится к отысканию простых чисел, в прогрессии $101 + 10x$ при $0 \leqslant x \leqslant 9$. Ее составными числами являются числа $1x1$, где $x$ определяется как решение уравнения

$$py - 10x = 101 \qquad (5)$$

при каком-либо простом $p \leqslant \sqrt{200}$.

Для решения уравнения (5) предварительно отыскивается наименьшее неотрицательное целое значение $x_0$, для которого соответствующее значение $y_0$, в уравнении $py - 10x = 1$ также целое. Общее решение (5) представляется в виде

$$x = 101x_0 - pz \text{ или} \qquad (6)$$

$$z = \frac{101x_0 - x}{p}.$$

Здесь $z$ целое, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{101x_0 - 9}{p} \leqslant z \leqslant \frac{101x_0}{p}. \qquad (7)$$

Так, при $p = 3$, определяя $x_0$ как наименьшее неотрицательное целое, такое, что $3y - 10x = 1$, и при $y_0$ также целом, и подставляя его в (7), получаем

$$64^1/_3 \leqslant z \leqslant 67^1/_3.$$

Поэтому целые возможные значения $z$ равны 65, 66, 67 и с учетом (6) $x = 1, 4, 7$, следовательно, имеется три составных числа — 111, 141 и 171.

Полагая $p$ последовательно равным 7, 11 и 13, в конечном итоге обнаруживаем, что числа 111, 121, 141, 161 и 171 составные, а простыми числами рассматриваемого промежутка будут 101, 131, 151, 181 и 191.

Разработанный прием В. Я. Буняковский употребил и для промежутка от 1000 до 10000. Простые числа здесь он определил содержащимися в прогрессиях

$1x1$, $1x3$, $1x7$, $1x9$,

$2x1$, $2x3$, $2x7$, $2x9$,

. . . . . . . . . .

$9x1$, $9x3$, $9x7$, $9x9$,

в которых $x$ принимает двузначные значения 00, 01, . . . . . ., 99. Например, в промежутке от 1000 до 2000 рассматриваются числа, оканчивающиеся на единицу, тройку, семерку и на девятку, при этом решаются неопределенные уравнения

$$py - 10x = 1001, \quad py - 10x = 1003, \quad py - 10x = = 1005, \quad py - 10x = 1007,$$

в которых $x$ может принимать двузначные значения 00, 01, 02, . . ., 99, а простое $p$ — значения 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 и 43, так как $\sqrt{2000} = 44{,}6$. В. Я. Буняковский, распространив этот прием для отыскания трехзначных простых чисел, сумма составляющих цифр которых равна постоянному числу, а также простых чисел «возвратного вида», т. е. простых чисел, состоящих из нечетного числа цифр с одинаковыми равноудаленными от начала и конца цифрами, переходит к выяснению простоты достаточно больших чисел. Введенный способ, как заметил сам В. Я. Буняковский,— «выгодно отличается от непосредственного применения приема Эратосфена». Так, по Эратосфену, при определении простых чисел от 1001 до 1991 приходится употреблять 374 деления, а предложенный способ сводит эту задачу к решению 36 неопределенных уравнений.

К концу XIX в. наблюдается тенденция обобщения предыдущих исследований. Для определения простых чисел от 1 до $N$ к простым числам $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, . . ., $p_n$ ($p_n \leqslant N$) следует присоединить все простые, не превосходящие $N$, получаемые из прогрессий

$$\psi(2 \cdot 3 \ldots p_n) + k 2 \cdot 3 \ldots p_n,$$

где $\psi(2 \cdot 3 \ldots p_n)$ — функция, принимающая целые значения, взаимно простые с $2 \cdot 3 \ldots p_n$ и не превосходящие его.

Решение такой обобщенной задачи с выяснением сферы приложения ее к теоретическим и практическим вопросам теории чисел в 1883 г. предложено П. С. Порецким (1846—1907) [30]. Подробное изучение работы П. С. Порецкого проведено Е. П. Ожиговой [23, с. 270—275]. По упоминанию П. С. Порецкого, впервые функцией $\psi(m)$ для частных значений ее аргумента занимались французские математики Дюпре и Дормуа. Причем Дюпре значения $\psi(m)$ вычислял для $m = 3 \cdot 5 \ldots p_n$ с дополнительными условиями, а формула Дормуа, хотя и верна для любого $m = 2 \cdot 3 \ldots p_n$, но неудобна для практического применения.

Более удобная формула для $\psi(m)$ при $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} = \Pi(p) \cdot A$, где $\Pi(p) = p_1 p_2 \ldots p_n$, а $A = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \ldots p_n^{\alpha_n-1}$, доказана П. С. Порецким. Он доказал, что

$$\psi(m) = \psi(\Pi(p)) + k\Pi(p),$$

где $k$ принимает значения $0, 1, 2, \ldots, A-1$. В частности,

1. При $m = p$, $\psi(p) = 1, 2, \ldots, p-1$;

2. При $m = \Pi(p)$ $\psi(m) = \Pi(p) \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\psi(p_i)}{p_i} - k'\Pi(p)$.

Здесь $k$ принимает такие значения, при которых правая часть заключается между 0 и $\Pi(p)$, а число возможных значений $k'$ равно

$$\varphi(\Pi(p)) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_n - 1) = \Pi(p-1).$$

Общее теоретическое решение задачи о нахождении простых чисел в прогрессиях $\psi(\Pi(p)) + k\Pi(p)$ весьма просто. В самом деле, пусть требуется определить все простые числа между $M$ и $N$ $(N > M)$. Пусть $p_1 < p_2 < \ldots < p_n \leqslant N$. Для произведения $2 \cdot 3 \ldots p_n$ П. С. Порецкий вводит обозначение $\pi(p_n)$, и полагая $\Pi(p) = \pi(p_n)$ в выражении $\psi(\Pi(p)) + k\Pi(p)$, учитывая, что для $p_n > 3$, $\pi(p_n) > p_n^2$, находит, что все значения $\psi(\pi(p_n))$, заключенные между $M$ и $N$, являются искомыми простыми числами.

Для определения простых чисел с помощью формулы $\psi(\Pi(p_n)) + k\Pi(p_n)$ П. С. Порецкий разработал практические рекомендации. Особое внимание он уделил вопросу определения «больших» простых чисел и простых делителей «больших» чисел. По-видимому, он впоследствии пользовался новыми приемами быстрого выполнения вычислительных работ. П. С. Порецкий занимался составлением таблиц делителей чисел от девяти до двенадцати миллионов. Однако эту работу по состоянию здоровья он завершить не смог [31].

Исследованиям простоты и выяснению простых делителей «больших» чисел посвящена серия работ Э. Лебона, рассматривающего арифметические прогрессии $BK + J$, где $B = 2\cdot 3\cdot 5 \ldots p_n$, $J$ — взаимно простое с $B$ положительное число [32—35]. Числу $J$ придается $\varphi(B) = (2-1)(3-1)\ldots(p_n-1)$ значений и решаются неопределенные уравнения

$$BK + J = MD,$$

где $D$ — число вида $BK' + J'$, а $K$ и $M$ неизвестные. Э. Лебон рассматривает частный случай, соответствующий значению $p_n = 13$, и сравнительно просто находит простые числа и наименьшие делители чисел в промежутке от $B = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13 = 30030$ до $B^2 = 30030^2 = 901800900$.

Интересное видоизменение решета Эратосфена предложил Ж. Мохед [36]. Его способ применим к двум прогрессиям по $m$ членов:

$$a^k + b,\ 2a^k + b,\ 3a^k + b, \ldots, ma^k + b). \tag{8}$$

$$-a^k + b, -2a^k + b, -3a^k + b, \ldots, -ma^k + b. \tag{9}$$

Если $p$ — простое число не делит $a^k$ и не превосходит корень квадратный из наибольшего члена прогрессии (8) и (9), то решение

$$x \equiv x_{k_p} \pmod p$$

сравнения

$$a^k x + b \equiv 0 \pmod p$$

таково, что числа

$$x_{k_p},\ p + x_{k_p},\ 2p + x_{k_p}, \ldots, m_p p + x_{k_p}$$

и

$$p - x_{k_p},\ 2p - x_{k_p},\ 3p - x_{k_p}, \ldots, m'_p p - x_{k_p}$$

являются соответственно теми числами в (8) и (9), которые кратны $p$, а $m_p$ и $m'_p$ такие наибольшие из целых, что

$$m_p p + x_{k_p} \text{ и } m'_p p - x_{k_p}$$

не превосходят $m$.

Этот метод с помощью найденных Ж. Мохедом рекуррентных формул может быть применен при отыскании делителей чисел вида

$$x_{k+1} a^{k+1} + b,$$

Так, зная решение сравнения

$$x_k a^k + b \equiv 0 \pmod p$$

или, что тоже самое,

$$\frac{x_k}{a} a^{k+1} + b \equiv 0 \pmod p$$

и принимая $x_k/a$ за $x_{k+1}$, можно найти решение сравнения

$$x_{k+1} a^{k+1} + b \equiv 0 \pmod p.$$

Это сравнение решается с помощью целого числа

$$x_{k+1} \equiv \frac{x_k}{a} \equiv \frac{x_k + yp}{a} \pmod p,$$

получающего выбором наименьшего возможного значения $y$. Более того, вовсе не обязательно определить решение сравнений

$$a^k x_k + b \equiv 0 \pmod p \text{ и } a^k x_k' - b \equiv 0 \pmod p.$$

В самом деле, сложением этих сравнений, в частности, можно заключить, что

$$x_k + x_k' = p.$$

Этот способ при $a = 2$ и $b = 1$ сильно упрощается и довольно быстро приводит к простым или делителям чисел Ферма $2^{2^n} + 1$. Принимая за $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p_n$, $b = 1$, $k = 1$, можно значительно быстрее получить результаты Э. Лебона. Полагая $a = 6$, $b = \pm 1$, Л. Дайнс [37] составил таблицы делителей чисел до 102 млн. и определил несколько простых «близнецов» больших, чем 4 млрд. Так, выражение $6^k x_k \pm 1$ при $k$, не превосходящих 10, и выбранных $x_k$ приводит к результатам: числа $6^6 \cdot 2203 \pm \pm 1$ равны простым «близнецам» 102783167 и 102783169, а числа $6^7 \cdot 33 \pm 1$ — простым «близнецам» 9237887 и 9237889. Кроме того, числа $6^7 \cdot 53 \pm 1$, т. е. 14836607 и 14836609 являются «близнецами» и т. д. Л. Дайнс также обнаружил простые «близнецы» 4232632321 и 4232632319, которые получаются иэ выражения $6^{10} x_{10} \pm 1$ при $x_{10} = = 70$.

*4. Обобщение формулы для аналитического выражения эратосфенова решета. Полное обращение формулы для числа простых чисел.* Во вторую половину XIX столетия интенсивно исследуются обобщения аналитического представления различных модификаций решета Эратосфена и его применений. В 1883 г. Дж. Ж. Сильвестр (1814—1897) замечает, что [38] формула Лежандра (2) является следствием логической теоремы об определении числа элементов в некотором множестве из элементов, не обладающих свойствами $a$; $b$; . . .; $m$. Пусть $N_a$, $N_b$, . . ., $N_{ab}$, $N_{ac}$, . . .; $N_{ab\ldots m}$ — соответственно числа элементов, не обладающих указанными свойствами, $a$, $b$, . . ., $m$; $a$ и $b$, $a$ и $c$, . . .; $a$, $b$, . . ., $m$, тогда число элементов, не обладающих свойствами $a$; $b$; . . .; $m$, равно

$$\begin{aligned}&N-(N_a+N_b+\ldots+N_m)+\\&+(N_{ab}+N_{ac}+\ldots+N_{km})-\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\pm N_{ab\ldots m}.\end{aligned}$$

Дж. Ж. Сильвестру принадлежат еще два обобщения формулы Лежандра, одно из которых он применил к подсчету сумм простых чисел. В [38] он приводит формулу

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant n}p+1=D(n)-\sum_{p_i\leqslant\sqrt{n}}p_iD\left(\left[\frac{n}{p_i}\right]\right)+\\+\sum_{\substack{p_i,\,p_j\leqslant\sqrt{n}\\i<j}}p_ip_jD\left(\left[\frac{n}{p_ip_j}\right]\right)-\\-\sum_{\substack{p_i,\,p_j,\,p_k\leqslant\sqrt{n}\\i<j<k}}p_ip_jp_kD\left(\left[\frac{n}{p_ip_jp_k}\right]\right)+\ldots,\end{aligned}$$

где $D(x)=(x^2+x)/2$.

О другом обобщении он сообщил Э. Люка [39, с. 400—402], что число простых чисел, больших $n$ и меньших $2n$, когда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ такие простые числа, что $p_n^2$ не превышает $2n$, равно

$$\begin{aligned}m-\sum_{p_i^2\leqslant 2n}H\frac{m}{p_i}+\sum_{\substack{p_i^2,\,p_j^2\leqslant 2n\\i<j}}H\frac{m}{p_ip_j}-\\-\sum_{\substack{p_i^2,\,p_j^2,\,p_k^2\leqslant 2n\\i<j<n}}H\frac{p}{p_ip_jp_n}+\ldots,\end{aligned}$$

где

$$Hx=\begin{cases}[x], & \text{если } \{x\}<{}^1/_2,\\ x, & \text{если } \{x\}={}^1/_2,\\ [x]+1, & \text{если } \{x\}>{}^1/_2,\end{cases}$$

$\{x\}$ — дробная часть числа $x$.

Формула Лежандра (2), представляющая собой точное аналитическое выражение для $\pi(m)$, имеет несколько существенных недостатков: во-первых, увеличивается число слагаемых при возрастании $m$, во-вторых, под знаком суммы располагается знак целой части и, в-третьих, она требует сведений о простых числах, не превосходящих $\sqrt{m}$. Избавить формулу от указанных недостатков пытались многие. Прежде всего, уменьшалось число простых чисел, при помощи которого просеиваются числа. В 1870 г. Э. Мейсель (1826—1895) [40] доказал, что

$$\pi(x)=\Phi(x,\sqrt[3]{x})-\sum_{\sqrt[3]{x}<p\leqslant\sqrt{x}}\pi\left(\frac{x}{p}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}(\pi(\sqrt{x})+\pi(\sqrt[3]{x})-2)(\pi(\sqrt{x})-\pi(\sqrt[3]{x})+1),$$

где $\Phi(x,\sqrt[3]{x})$ — число чисел до $x$, не делящихся ни на одно простое, не превосходящее $\sqrt[3]{x}$. В 1890 г. Ф. Рогель (1852—1901) [41] записал формулу Мейселя в виде

$$\pi(x)=|x|\prod_{i=2}^{m}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\sum_{r=m+1}^{n}\pi\left(\frac{x}{p_2}\right)+\binom{n}{2}-\binom{m-1}{2},$$

где символ $|x|$ обладает свойством

$$|x|\frac{1}{p_2p_3\ldots}=\left|\frac{x}{p_2p_3\ldots}\right|$$

и означает целую часть числа $x/p_2p_3\ldots$, $m$ такое целое, что

$$p_m\leqslant\sqrt[3]{x}<p_{m+1},\ n=\pi(x),\ \text{а}\ \binom{n}{2}\ \text{и}\ \binom{m-1}{2}\ —$$

— биномиальные коэффициенты. Для целого $k$, удовлетворяющего условию $p_k\leqslant\sqrt[4]{x}<p_{k+1}$, Ф. Рогель доказы-

вает, что

$$\pi(x) = |x| \prod_{i=2}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + \sum_{r=k+1}^{n} \pi\left(\frac{x}{p_r}\right) -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{m-k} \sum_{r=m-\nu+1}^{n^{(\nu)}} \pi\left(\frac{x}{p_{m-\nu+1} p_r}\right) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{m-k} \binom{n^{(\nu)}}{2} - \binom{m}{3} + \binom{k-1}{3},$$

где $n^{(\nu)}$ таково, что $p_{n^{(\nu)}} < x^{1/(\nu+2)}$.

На заключительном этапе формула обобщается для произвольного $q$ такого, что при некотором целом $h$ выполняется условие $p_h \leqslant x^{1/q} < p_{h+1}$:

$$\pi(x) = |x| \prod_{i=2}^{h} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) - \sum_{r=k+1}^{n} \pi\left(\frac{x}{p_r}\right) -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{m-h} \sum_{r=m-\nu+1}^{n^{(\nu)}} \pi\left(\frac{x}{p_{m-\nu+1} p_r}\right) -$$

$$- \sum_{\mu=1}^{k-l} \sum_{\nu=1}^{m_\mu-k+\mu} \sum_{r=m_\mu-\nu+1}^{n_\mu^{(\nu)}} \pi\left(\frac{x}{p_{m_\mu-\nu+1} p_{k-\mu+1} p_r}\right) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{q-1} \binom{k}{q-1} + (-1)^q \binom{l-1}{q-1}.$$

Формулы Мейселя и Рогеля не упразднили эти недостатки. В них также есть существенные просчеты: во-первых, увеличивается число слагаемых при уменьшении числа простых делителей и, во-вторых, в них имеется функции $\Phi(x, x^{1/n})$. В силу этого не удалось получить полного обращения формулы Лежандра.

Рекуррентное соотношение между значениями $\pi(x)$ установлено лишь в 1943 г. в работе [42] А. А. Бухштаба, доказавшего формулу

$$\sum_{k \subset \omega_1} \pi\left(\frac{x}{k}\right) - \sum_{k \subset \omega_2} \binom{\pi\left(\sqrt{\frac{x}{k}}\right)}{2} +$$

$$+\sum_{k\subset\omega_3}\binom{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{x}{k}}\right)}{3}-\ldots=x-1,$$

где $\omega_s$ — область значений в $s$-й сумме, состоящей из единицы и всех чисел $k$ таких, что $p_k^s \leqslant x$, $\binom{\pi\left(\sqrt[s]{x/k}\right)}{s}$ — биномиальный коэффициент.

Избавить формулы Лежандра от слагаемых, содержащих $[x]$, пытался П. Пачи (1847—1903) [43, с. 10], заметивший, что если в формуле

$$\pi(n)-\pi(\sqrt{n})+1=n-\sum\left[\frac{n}{p_i}\right]+$$
$$+\sum\left[\frac{n}{p_ip_j}\right]-\ldots\pm\left[\frac{n}{2\cdot 3\ldots\cdot p}\right]$$

обозначить

$$N=\sum\left[\frac{n}{p_i}\right]-\sum\left[\frac{n}{p_ip_j}\right]+\ldots\mp\left[\frac{n}{2\cdot 3\ldots p}\right]$$

и заменить $[n/\alpha]$ на $n/\alpha$, то $N$ заменится на

$$n\sum\frac{1}{p_i}-n\sum\frac{1}{p_ip_j}+\ldots\mp\frac{n}{p_1p_r\ldots p_k}=$$
$$=n\left\{1-\frac{\varphi(p_1p_r\ldots p_k)}{p_1p_r\ldots p_k}\right\},$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера.

Оценку погрешности, получающейся при этом, впервые [44, с. 304] рассмотрел Л. Кронекер (1823—1891). Так как $[x]=x-\{x\}$ с $\{x\}<1$, то

$$\pi(x)=\pi(\sqrt{x})-1+\sum_{d|P}\mu(d)\left[\frac{x}{d}\right]=$$
$$=\pi(\sqrt{x})-1+x\sum_{d|P}\frac{\mu(d)}{d}+\varepsilon\cdot A=$$
$$=\pi(\sqrt{x})-1+x\sum_{p\leqslant p_n\leqslant\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\varepsilon\cdot A,$$

где $P$ — произведение всех простых чисел, не превосходящих $\sqrt{x}$, $\varepsilon$ — положительная или отрицательная дробь $|\varepsilon|<1$ такая, что допущенная погрешность расположена между $-A$ и $A$, а

$$A=\sum_{k=0}^{\pi(\sqrt{x})}\binom{\pi(\sqrt{x})}{k}=2^{\pi(\sqrt{x})}.$$

В 1874 г. Ф. Мертенс (1840—1903) [45] установил, что

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)_{.} \text{ равно } \frac{e^{\alpha-a}}{\ln x},$$

где $a$ — постоянная Эйлера, определяемая соотношением

$$a=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right), \text{ и } \lim_{x\to\infty}\alpha=0.$$

Таким образом в начале XX в. по вопросу определения значения $\pi(x)$ с помощью решета Эратосфена была получена тривиальная оценка

$$\pi(x)=\pi(\sqrt{x})-1+\frac{2e^{-a}x}{\ln x}+\varepsilon\cdot 2^{\pi(\sqrt{x})}.$$

Попытки определения удовлетворительной погрешности в аналитической записи решета Эратосфена сыграли особую роль в становлении современных методов решета и его применений. Прежде всего в исследованиях В. И. Романовского (1879—1954) [46—48], несмотря на наличие недостаточно строгих и точных результатов, удачно разъясняются сущность вопроса и возникающие затруднения, устанавливается возможность приложения метода к задачам приближенного счета числа представлений четного числа суммой двух простых слагаемых, числа «близнецов» и т. д. Ж. Мерлен [49] пытался решить проблемы Гольдбаха—Эйлера, «близнецов» и др. с помощью двукратного и многократного решета. Однако без дополнительных идей решение таких задач оказалось невозможным. Ошибки в работе Мерлена обнаружены Ж. Адамаром [50]. Вклад в метод решета В. И. Романовского и Ж. Мерлена одинаков, однако благодаря комментарию Ж. Адамара работа Ж. Мерлена получила большую известность. Об этом подробнее говорится в работе [51].

Позже выяснилось, что существенный сдвиг в решении этого вопроса может быть получен другим путем, что сделал норвежский математик В. Брун.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Euler L.* De tabula numerorum primorum,. . . Novi Comment. Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae, vol. 19, 1775, p. 132—180. E01—N3.
2. *Euler L.* Speculationes circa quasdam insignes proprietates numerorum.— Acta Acad. Petropol. 1784, p. 18—30. E01—N4.
3. *Gauss F.* Disquisitiones arithmeticae. 1801.
4. *Ожигова Е. П.* Что такое теория чисел. М.: Знание, 1970.
5. *Эльнатанов Б. А.* Развитие метода решета от Эратосфена до Эйлера. Изв. АН Тадж. ССР. Серия физ.-мат. и геол.-хим. наук, 1979, 71, № 1, с. 3—7.
6. *Legendre A.* Théorie des nombres. P., 1830. Vol. 2.
7. *Liouville J.* Sur quelques formules générales... — J. Math., Paris, 1857, 2, p. 110—112.
8. *Dedekind R.* Theorie de höheren Congruenzen.— J. Math., Berlin, 1857, Bd. 54, S. 21—25.
9. *Jonquières E. de.* Formule pour déterminer combien il y a de nombres donnés.— C. r. Acad. sci., 1882, vol. 95, p. 1144.
10. *Jonquières E. de.* Sur la formule récemment ... — Comptes rendus, 1882, vol. 95, p. 1343—1344.
11. *Jonquières E. de.* Addition à une Note sur les nombres premiers.— C. r. Acad. sci., 1883, vol. 96, p. 231—232.
12. *Lipschitz R.* Sur une Communication de M. de Jonquières relative aux nombres premiers.— C. r. Acad. sci., 1882, vol. 95, p. 1344—1346.
13. *Lipschitz R.* Sur une Communication de M. de Jonquères relative aux nombres premiers.— C. r. Acad. sci., 1883, vol. 96, p. 58—61.
14. *Lipschitz R.* Addition à une Note sur les nombres premiers.— C. r. Acad. sci., 1883, vol. 96, p. 114—115.
15. *Lipschitz R.* Application d'une méthode donnée par Legendre.— C. r. Acad. sci., 1883, vol. 96, p. 327—329.
16. *Риман Б.* Сочинения. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
17. *Littlewood J. E.* Sur la distribution des nombres premiers.— C. r. Acad. sci., 1914, vol. 158, p. 1869—1872.
18. *Polignac A. de.* Recherches nouvelles sur les nombres premiers.— C. r. Acad. sci., 1849, vol. 29, p. 397—401.
19. *Polignac A. de.* Six propositions arithmologiques deduites crible d'Eratosthène.— Nouv. Ann. Math., 1849, vol. 7, p. 423—429.
20. *Polignac A. de.* Nouvelles recherches sur les nombres premiers.— J. math. pures et appl., 1854, vol. 19, p. 305—333.
21. *Чебышев П. Л.* О простых числах.— Полн. собр. соч. М.; Л.: Изд. АН СССР, 1944, т. 1.
22. *Иванов И. И.* Теория чисел. Пг. 1914.
23. *Ожигова Е. П.* Развитие теории чисел в России. Л.: Наука, 1972.
24. *Слудский Ф. А.* Заметка о числе и форме простых чисел.— Мат. сб., 1868, т. 3, вып. 1—4.
25. *Шпачинский Э. К.* К вопросу о выделении простых чисел.— Вест. опытн. физ. и элемент. математики. Киев, 1888, № 41.
26. *Lejeune-Dirichlet P. G.* Beweis des Satzes,...— Abh. Acad. Berlin, 1837, p. 45—71.
27. *Lebesgue V. A.* Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers.— Mém. soc. sci. phys. et math. Bordeaux, 1864, vol. 3, p. 1—37.

28. *Буняковский В. Я.* Об одном видоизменении способа, известного под названием эратосфенова решета.— Зап. Петербургской Академии наук, 1882, т. 41, Приложение № 3, с. 1—32.
29. *Крутиков Ф.* Отыскание простых чисел, заключающихся в данных пределах.— Вестн. опытн. физики и элемент. математики. Киев, 1886, сем. 1, № 10, с. 215—218.
30. *Порецкий П. С.* О распознавании простых чисел.— Сообщения и протоколы секции физико-математических наук. Казань, 1888, т. 6, вып. 1—2, с. 52—140.
31. Дневник IX съезда русских естествоиспытателей и врачей. М., 1894, № 5, с. 8—9.
32. *Lebon E.* Theory and construction of tables for the rapid determination of the prime factors of a number.— Bull. Amer. Math. Soc., Lancaster, New York, 1906, vol. 13, N 1, p. 74—78.
33. *Lebon E.* Sur une nouvelle Table de diviseurs des nombres.— C. r. Acad. sci., 1914, vol. 159, p. 597—599.
34. *Lebon E.* Sur une nouvelle Table...— C. r. Acad. sci., 1916, vol. 162, p. 346—348.
35. *Lebon E.* Sur une nouvelle Table... — C. r. Acad. sci., 1917, vol. 164, p. 117—121.
36. *Morehead J. C.* Extension of the sieve of Eratosthenes to Arithmetical Progression.— Ann. Math., Cambridge, 1908/1909, vol. 10, N 3, p. 100—105.
37. *Dines L. L.* A method of investigating numbers of the forms $6^ks \pm 1$.— Ann. Math., Cambridge, 1908/1909, vol. 10, N 3, p. 105—115.
38. *Sylvester J.* Note sur le théorème de Legendre cité dans une Note insérée dans les Comptes rendus.— C. r. Acad. sci., 1883, vol. 96, p. 463—468.
39. *Lucas E.* Théorie des nombres. P., 1891. Vol. 1.
40. *Meissel E.* Ueber die Bestimmung der Primzahlenmenge innerhalb gegebener Grenzen. — Math. Ann., Leipzig, 1870, Bd. 2, S. 636—692.
41. *Rogel F.* Zur Bestimmung der Anzahl Primzahlen unter gegebenen Grenzen.— Math. Ann. Leipzig, 1890, Bd. 36, S. 304—315.
42. *Бухштаб А. А.* Об одном соотношении для функции $\pi(x)$, выражающей число простых чисел, не превосходящих $x$.— Матем. сб. М., 1943, 12 (54) № 1, с. 152—160.
43. *Paci P.* Sul numero de numeri primi inferiori ad uno dato numero. Parma, 1878.
44. *Kronecker L.* Vorlesungen über Zahlentheorie. Vierundzwanzigste Vorlesung. Leipzig, 1901, S. 299—304.
45. *Mertens F.* Sur quelques lois asymptotiques de la théorie des nombres.— Bull. sci. math. et astron., Paris, 1874, vol. 7, p. 231—232.
46. *Романовский В. И.* О двух приближенных формулах к счету простых чисел: Протоколы заседаний Общества естествоиспытателей при Варшавском университете, 1912, с. 65—94.
47. *Романовский В. И.* О простых числах.— Варшавские университетские Известия, 1914, № 1—2, с. 1—47.
48. *Романовский В. И.* О гольдбаховых числах.— Мат. сб. М., 1913, т. 29, вып. 1, с. 1—67.
49. *Merlin J.* Sur quelques théorèmes d'Arithmétique et un énoncé qui les contient.— C. r. Acad. sci., 1911, vol. 153, p. 516—518.

50. *Hadamard J.* Un travail de Jean Merlin sur les nombres premiers.— Bull. sci. math., Paris, 1915, vol. 50, N 1/2, p. 121—136.
51. *Эльнатанов Б. А.* Применение метода решета к определению числа простых чисел.— Изв. АН Тадж. ССР. Серия физ.-мат. и геол.-хим. наук, 1981, № 2.

# О МЕТОДЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ЧЕБЫШЕВА В СЛУЧАЕ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ДАННЫХ

**Л. А. Онуфриева**

*1. Мемуар П. Л. Чебышева 1859 г.* Среди многочисленных работ Чебышева по теории интерполирования особое место занимает его мемуар «Об интерполировании в случае большого числа данных, доставленных наблюдениями», опубликованный в 1859 г. (см. [1, с. 244—313]) и предварительная краткая заметка [2, с. 239—243], представленная 30 (18) марта 1858 г. в Академию наук.

В указанных работах ни способ наименьших квадратов, ни теория ортогональных многочленов не применяются.

Вместо этого Чебышев предложил здесь новый способ интерполирования, имеющий практическое значение при обработке большого числа результатов наблюдений, возможно, заключающих в себе значительные погрешности. Применение в этом случае метода наименьших квадратов, дающего наименьшую возможную среднюю квадратическую погрешность, привело бы к значительно более длинным вычислениям.

В мемуаре [1] Чебышев начинает изложение своего метода следующими словами: «Задача: Дан ряд значений $f(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n$, соответствующих равноотстоящим и очень близким между собой значениям $x$; сочетать значения $f(x)$ исключительно путем сложения и вычитания так, чтобы окончательный результат содержал член с коэффициентом $A_l$ и чтобы этот член был по возможности наибольшим».

Приступая к решению задачи, Чебышев сразу переходит к предельному случаю, когда суммы превращаются в интегралы. В результате этого задача приобретает вид: пусть задан промежуток $[a; b]$ и целые числа $n$ и $l$, $0 \leqslant l \leqslant n$; найти числа $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu$ такие, что $a < \eta_i <$

$\eta_2 < \ldots < \eta_\nu < b$ и

$$sA_l = \int_a^{\eta_1} f(x)\,dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)\,dx + \ldots + (-1)^\nu \int_{\eta_\nu}^{b} f(x)\,dx \tag{1.1}$$

для любого многочлена $f(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_nx_n$, причем так, чтобы множитель $s$ был по абсолютной величине наибольший из возможных.

При $\nu = n$ и $f(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n$ формула (1.1) приводит к системе:

$$\begin{cases} a + 2\eta_1 - 2\eta_2 - \ldots + 2(-1)^n \eta_n - (-1)^n b = 0, \\ a^2 - 2\eta_1^2 + 2\eta_2^2 - \ldots + 2(-1)^n \eta_n^2 - (-1)^n b^2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^l - 2\eta_1^l + 2\eta_2^l - \ldots + 2(-1)^n \eta_n^l - (-1)^n b^l = 0, \\ a^{l+2} - 2\eta_1^{l+2} + 2\eta_2^{l+2} - \ldots + 2(-1)^n \eta_n^{l+2} - (-1)^n b^{l+2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{n+1} - 2\eta_1^{n+1} + 2\eta_2^{n+1} - \ldots + 2(-1)^n \eta_n^{n+1} - (-1)^n b^{n+1} = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$s = -\frac{1}{l+1}\left[a^{l+1} - 2\eta_1^{l+1} + 2\eta_2^{l+1} - \ldots \right. \\ \left. \ldots + 2(-1)^n \eta_n^{l+1} - (-1)^n b^{l+1}\right]. \tag{1.3}$$

Систему (1.2) Чебышев решает методом, который был указан им в мемуаре «О непрерывных дробях», представленном Академии наук в 1855 г.

Разлагая выражение

$$\frac{1}{x-a} - \frac{2}{x-\eta_1} + \frac{2}{x-\eta_2} - \ldots + \frac{2(-1)^n}{x-\eta_n} - \frac{(-1)^n}{x-b}$$

по убывающим степеням $x$ и принимая во внимание (1.2) и (1.3), он получает

$$\frac{1}{x-a} - \frac{2}{x-\eta_1} + \frac{2}{x-\eta_2} - \ldots + \frac{2(-1)^n}{x-\eta_n} - \frac{(-1)^n}{x-b} = \\ = -\frac{(l+1)s}{x^{l+2}} + O\left(\frac{1}{x^{n+3}}\right).$$

С другой стороны, полагая

$$(x-\eta_1)(x-\eta_3)\ldots = \varphi(x), \quad (x-\eta_2)(x-\eta_4)\ldots \\ = \psi(x), \tag{1.4}$$

находим

$$\frac{1}{x-\eta_1}+\frac{1}{x-\eta_3}+\ldots=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$
$$\frac{1}{x-\eta_2}+\frac{1}{x-\eta_4}+\ldots=\frac{\psi'(x)}{\psi(x)},$$

тогда

$$\frac{1}{x-a}-\frac{2\varphi'(x)}{\varphi(x)}+\frac{2\psi'(x)}{\psi(x)}-\frac{(-1)^n}{x-b}=$$
$$=-\frac{(l+1)s}{x^{l+2}}+O\left(\frac{1}{x^{n+3}}\right).$$

Отсюда, интегрируя, а затем потенцируя, получаем

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\sqrt{\frac{(x-b)^{(-1)^n}}{x-a}e^{s/2x^{l+1}}}+O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right). \qquad (1.5)$$

При $n$ — четном, соотношение (1.5) принимает вид

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\sqrt{\frac{x-b}{x-a}e^{s/2x^{l+1}}}+O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right).$$

Далее Чебышев рассуждает таким образом. Из соотношения (1.6) следует, что дробь $\psi(x)/\varphi(x)$ совпадает с выражением $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}e^{s/2x^{l+1}}}$ с точностью до $1/x^{n+2}$. Так как $n$ число четное, то функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определяемые формулами (1.4), имеют степень $n/2$ и в этом случае дробь $\psi(x)/\varphi(x)$ должна быть одной из подходящих дробей непрерывной дроби, получающейся при разложении $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}e^{s/2x^{l+1}}}$.

Так что узлы $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ находятся, как корни уравнений $P_{n/2}=0$ и $Q_{n/2}=0$, где $\psi(x)=c_0P_{n/2}$, $\varphi(x)=c_0Q_{n/2}$. Коэффициент $s$ Чебышев предлагает находить из того условия, что подходящая дробь со знаменателем степени $n/2+1$ должна отсутствовать в разложении выражения $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}e^{s/2x^{l+1}}}$. Из значений $s$, обладающих этим свойством, исключаются те, которые дают числа $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$, не отвечающие поставленной задаче. Из оставшихся выбирается $s$, наибольшее по абсолютной величине.

Для $n$ — нечетного соотношение (1.5) принимает вид

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \cdot e^{s/2x^{l+1}} + O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right).$$

В качестве примера проведем вычисления в случае $n = 4$, $l = 1$, $[-h; h] = [-1; 1]$, используя метод В. Висковатова [3], в изложении А. Н. Хованского [4, с. 31—34].

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot e^{s/2x^2} = \frac{e^{s/2x^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{s}{2x^2} - \frac{s}{2x^3} + \frac{s^2}{8x^4} - \frac{s^2}{8x^5} + \frac{s^3}{3\cdot 2^4 x^6} - \frac{s^3}{3\cdot 2^4\cdot x^7} + \ldots}{1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2^3x^4} - \frac{1}{2^4x^6} - \ldots},$$

$$f(x) = \frac{\alpha_{10} + \alpha_{11}x + \alpha_{12}x^2 + \alpha_{13}x^3 + \alpha_{14}x^4 + \ldots}{\alpha_{00} + \alpha_{01}x + \alpha_{02}x^2 + \alpha_{03}x^3 + \alpha_{04}x^4 + \ldots},$$

$\alpha_{00} = 1,\ \alpha_{01} = 0,\ \alpha_{02} = -1/2,\ \alpha_{03} = 0,\ \alpha_{04} = -1/2^3,$

$\alpha_{05} = 0,\ \alpha_{06} = -1/2^4,$

$\alpha_{10} = 1,\ \alpha_{11} = -1,\ \alpha_{12} = s/2,\ \alpha_{13} = -s/2,\ \alpha_{14} = s^2/8,$

$\alpha_{15} = -s^2/8,\ \alpha_{16} = s^3/3\cdot 2^4,$

$\alpha_{mn} = \alpha_{(m-1)\cdot 0}\alpha_{(m-2)\cdot(n+1)} - \alpha_{(m-2)\cdot 0}\alpha_{(m-1)\cdot(n+1)},$

$$f(x) = \cfrac{\alpha_{10}}{\alpha_{00} + \cfrac{\alpha_{20}x}{\alpha_{10} + \cfrac{\alpha_{30}x}{\alpha_{20} + \cfrac{\alpha_{40}x}{\alpha_{30} + \cfrac{\alpha_{50}x}{\alpha_{40}}}}}},$$

$$\alpha_{20} = \alpha_{10}\alpha_{01} - \alpha_{00}\alpha_{11} = 1\cdot 0 - 1\cdot(-1) = 1,$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{10}\alpha_{02} - \alpha_{00}\alpha_{12} = 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\cdot\frac{s}{2} = -\frac{s+1}{2},$$

$$\alpha_{22} = \alpha_{10}\alpha_{03} - \alpha_{00}\alpha_{13} = 1\cdot 0 - 1\cdot\left(-\frac{s}{2}\right) = \frac{s}{2},$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{10}\alpha_{04} - \alpha_{00}\alpha_{14} = 1\cdot\left(-\frac{1}{2^3}\right) - 1\cdot\frac{s^2}{2^3} = -\frac{s^2+1}{8},$$

$$\alpha_{30} = \alpha_{20}\alpha_{11} - \alpha_{10}\alpha_{21} = 1\cdot(-1) + 1\cdot\frac{s+1}{2} = \frac{s-1}{2}.$$

$$\alpha_{31} = \alpha_{20}\alpha_{12} - \alpha_{10}\alpha_{22} = 1\cdot\frac{s}{2} - 1\cdot\frac{s}{2} = 0,$$

$$\alpha_{32} = \alpha_{20}\alpha_{13} - \alpha_{10}\alpha_{23} = 1\cdot\left(-\frac{s}{2}\right) + 1\cdot\frac{s^2+1}{8} = \frac{s^2-4s+1}{8},$$

$$\alpha_{40}=\alpha_{30}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{31}=\frac{s-1}{2}\left(-\frac{s+1}{2}\right)-1\cdot 0=\frac{1-s^2}{4},$$

$$\alpha_{41}=\alpha_{30}\alpha_{22}-\alpha_{20}\alpha_{32}=\frac{s-1}{2}\cdot\frac{s}{2}-1\cdot\frac{s^2-4s+1}{8}=$$

$$=\frac{s^2+2s-1}{8},$$

$$\alpha_{50}=\alpha_{40}\alpha_{31}-\alpha_{30}\alpha_{41}=\frac{s^2-1}{8}\cdot 0-\frac{s-1}{2}\,\frac{s^2+2s-1}{8}=$$

$$=\frac{(s-1)(s^2+2s-1)}{16}.$$

Полагая $1/x=t$, запишем:

$$f(x)=\cfrac{1}{1+\cfrac{t}{1+\cfrac{\frac{s-1}{2}t}{1+\cfrac{\frac{1-s^2}{4}t}{\frac{s-1}{2}+\cfrac{\frac{(s-1)(s^2+2s-1)}{16}t}{\frac{1-s^2}{4}+\cdots}}}}}.$$

Величина $s$ находится из условия, что непрерывная дробь, получающаяся из разложения $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,e^{s/2x^2}$ не будет иметь подходящей дроби со знаменателем степени 3:

$$\frac{(s-1)(s^2+2s-1)\cdot 4}{16\cdot(1-s^2)}=0,\quad s^2+2s-1=0,$$

$$s=-1\pm\sqrt{1+1}=\pm\sqrt{2}-1.$$

Выбираем $s=\sqrt{2}-1$, так как $s=-\sqrt{2}-1$ дает мнимые корни. Составляем подходящую дробь, у которой степень знаменателя $k=2$:

$$\frac{2x^2-2x}{2x^2-(s+1)}.$$

Из уравнений $2x^2-(s+1)=0$ и $2x^2-2x=0$ находим узлы интерполирования.

1) $2x^2-(\sqrt{2}-1+1)=0,\ 2x^2=\sqrt{2},\ x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{1/2}.$

2) $2x^2-2x=0,\ x_3=0.$

Итак, $\eta_1=-\sqrt[4]{1/2},\quad \eta_2=0,\quad \eta_3=\sqrt[4]{1/2},\quad s=\sqrt{2}-1.$

полученные результаты совпадают с результатами Чебышева.

В мемуаре Чебышева сравнительно подробно рассмотрен случай $l = 0$, при $n = 0,\ 2,\ 4$. Для остальных случаев приведен только конечный результат.

Кроме того, при любом $n$, Чебышев дает решение своей задачи для $l = n$, причем для упрощения вычислений он и здесь предполагает, что $[a; b] = [-h; h]$. Этот последний результат особенно для нас интересен, и поэтому мы остановимся на нем подробнее.

Формула Чебышева для вычисления $A_n$, $n \geqslant 0$, имеет вид:

$$sA_n = \int\limits_n f(x), \tag{1.7}$$

где по определению символ

$$\int\limits_n u = \int\limits_{-h}^{\eta_1} u\,dx - \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} u\,dx + \ldots + (-1)^n \int\limits_{\eta_n}^{h} u\,dx, \tag{1.8}$$

причем $\eta_n = h \cdot \cos \frac{(n-k+1)\pi}{n+1}$ для $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$s = (-1)^n \cdot \frac{h^{n+1}}{2^{n-1}}.$$

Из формулы (1.7) следует, что

$$\int\limits_n x^m = \begin{cases} 0, & n < m, \\ (-1)^n \dfrac{h^{n-1}}{2^{n+1}}, & n = m. \end{cases} \tag{1.9}$$

Поэтому, пользуясь методом неопределенных коэффициентов, можно построить многочлен $\Theta_m(x)$ степени $m-1$ такой, что

$$\int\limits_n \Theta_m(x) = \begin{cases} 0, & n \neq m-1, \\ 1, & n = m-1. \end{cases} \tag{1.10}$$

Легко видеть, что такой многочлен $\Theta_m(x)$ единственный. С помощью остроумных вычислений Чебышев нашел явное выражение для $\Theta_m(x$:

$$\Theta_m(x) = \frac{(-1)^{m-1}}{2h} \sum_{d_1/m} \frac{\mu(d_1)}{d_1} \cdot \frac{\sin \dfrac{mt}{d_1}}{\sin t}, \tag{1.11}$$

где $t = \arccos(x/h)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, а суммирование производится по всем нечетным делителям $d_1$ числа $m$.

Здесь и в дальнейшем $\mu(n)$ обозначает функцию Мёбиуса, которая определяется для всех натуральных чисел $n$ условиями:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ делится на квадрат числа, большего единицы,} \\ (-1)^k, \text{ если } n = p_1 p_2 \ldots p_k, \text{ где } p_1, p_2, \ldots, p_k \text{ различные} \\ \qquad \text{простые числа,} \\ 1, \text{ если } n = 1. \end{cases}$$

(О свойствах функции $\mu(n)$ см. [5].) Замечая, что

$$(-1)^{n-1} \int_n u = \int_{-h}^{h} u(x) \operatorname{sign} \sin\left(n \arccos \frac{x}{h}\right) dx, \tag{1.12}$$

мы можем констатировать, что Чебышев построил систему функций, биортогональную относительно веса 1 в промежутке $[-h; h]$

$$\left\{(-1)^{n-1} \Theta_n(x); \operatorname{sign} \sin\left(n \arccos \frac{x}{h}\right)\right\}. \tag{1.13}$$

Очевидно, для любой функции $f(x)$ интегрируемой в $[-h;h]$ можно сопоставить ее «ряд Фурье» по системе (1.13):

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{n-1} f(x)\right] \Theta_n(x). \tag{1.14}$$

С помощью частичных сумм ряда (1.14) Чебышев и предлагает интерполировать функцию $f(x)$. В случае, когда $f(x)$ является многочленом, ряд (1.14) превращается в конечную сумму, а соотношение (1.14) — в тождество.

Ясно, что вычисление коэффициентов ряда (1.14) сводится к вычислению интегралов вида $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ и поэтому легко выполнимо.

Заметим еще, что оценкой погрешности данного метода интерполирования и вопросом о сходимости ряда (1.14) Чебышев не занимался.

Система функций (1.13) позволяет сопоставить любой функции $f(x)$, интегрируемой в $[-h; h]$, еще и другой «ряд Фурье»:

$$f(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \int_{-h}^{h} f(x) \cdot \Theta_n(x)\, dx \right) \times$$

$$\times \operatorname{sign} \sin \left( n \arccos \frac{x}{h} \right), \qquad (1.15)$$

члены которого являются разрывными кусочно-постоянными функциями. Ряды (1.15) не были указаны Чебышевым. О некоторых свойствах этих рядов см. [6].

В своих последующих работах Чебышев только один раз применил изложенный метод — именно, в 1876 г. на пятом съезде русских естествоиспытателей и врачей в докладе «Об определении орбиты планет по многим наблюдениям». В этом сообщении он показал, каким образом по способу интерполирования, изложенному им в мемуаре [1], «можно графически найти величины, входящие в определение элементов планеты по способу Лапласа, причем может быть обращено внимание на влияние аберрации».

К сожалению, от этого доклада сохранилась лишь краткая запись в протоколах секционных заседаний съезда [7]. Реконструкция этого сообщения Чебышева представляется весьма желательной. Мы надеемся рассмотреть этот вопрос в специальной статье.

2. *Непосредственное применение метода Чебышева.* В восьмидесятых годах астрономы О. Баклунд и П. Харцер также применяли метод Чебышева для обработки астрономических наблюдений (см. [8] и [9]).

Практическим применением метода Чебышева интересовался и Х. Брунс, изложивший некоторое видоизменение метода в своей книге [10].

Обстоятельное изложение и некоторое развитие методов Чебышева мы находим в работе Р. Радо «Этюды о формулах интерполирования» [11]. Следуя Чебышеву Р. Радо ставит следующую задачу: Пусть задан промежуток $[-1; 1]$ и целые числа $n$ и $l$, $0 \leqslant l \leqslant n$. Найти числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ такие, что $-1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m < 1$ и

$$C_l A_l = \int_{-1}^{a_1} f(x)\, dx - \int_{a_1}^{a_2} f(x)\, dx + \ldots + (-1)^m \int_{a_m}^{1} f(x)\, dx$$

для любого многочлена $f(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$, причем так, чтобы $C_l$ был по абсолютной величине наибольшим из возможных. Заметим, что $a_i = a_i(n, l)$.

Приступая к решению задачи, Р. Радо сразу же замечает, что узлы симметричны относительно нуля (в случае нечетного числа их, один узел равен нулю); следуя Чебышеву, Р. Радо принимает $m \leqslant n$. Избежав трудоемкого аппарата непрерывных дробей, Р. Радо предложил более элементарный метод определения коэффициентов, отличный от метода Чебышева.

В дальнейшем, используя свойства симметрических функций корней, он получает значения коэффициентов, которые совпадают с соответствующими коэффициентами, приведенными в работе Чебышева. Радо удается продолжить таблицу Чебышева до $n = 6$ и всех допустимых $l$. Результаты вычислений для $n = 6$, представляющие практический интерес, приводятся ниже:

Таблица

| $l$ | $c_l$ | Узлы | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 0,03125 | ±0,90097 | ±0,62349 | ±0,22252 |
| 5 | −0,0625 | ±0,8603 | ±0,5 | 0 |
| 4 | −0,02407 | ±0,91975 | ±0,66389 | ±0,24414 |
| 3 | 0,05901 | ±0,89945 | ±0,55589 | 0 |
| 2 | 0,06653 | ±0,93091 | ±0,72574 | ±0,29483 |
| 1 | −0,22777 | ±0,91681 | ±0,67411 | 0 |
| 0 | −0,64758 | ±0,93839 | ±0,76036 | ±,048387 |

В конце работы Радо рассматривает и второй метод Чебышева, связанный с рядом (1.14).

Он подчеркивает, что для его применения не надо заранее задаваться степенью интерполяционного полинома и приводит рекуррентные формулы, облегчающие вычисление функций $\Theta_n(x)$.

Настоящее исследование Р. Радо, а также его другие работы свидетельствуют о пристальном внимании, с которым французские математики конца XIX в. следили за работами петербургского академика П. Л. Чебышева.

*3. Результаты А. А. Маркова и некоторых других авторов.* Метод интерполирования Чебышева был существенно развит и обобщен в 1898 г. А. А. Марковым (старшим) в работе [12]. Вместо интерполирования с помощью обыкновенных алгебраических полиномов А. А. Марков рассмотрел более общую задачу интерполирования с помощью линейных комбинаций данных функций $\lambda_0(x)$, $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, ..., $\lambda_n(x)$, удовлетворяющих некоторым условиям.

К своим формулам интерполирования Марков пришел, решая экстремальную задачу о предельных значениях интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,\lambda_n(x)\,dx.$$

При условии, что известны значения интегралов $\int_a^b f(x)\cdot\lambda_k(x)\,dx (k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1))$ и границы (нижняя и верхняя), между которыми заключены значения $f(x)$. Оказывается, что функции $f(x)$, доставляющие предельные значения интегралу, будут кусочно-постоянными.

Частный случай этой задачи, а именно, вопрос о нахождении

$$\max\left|\int_a^b f(x)\lambda_n(x)\,dx\right|$$

при условии, что

$$\int_a^b f(x)\,\lambda_k(x)\,dx = 0\ (k = 0, 1, \ldots, (n-1)) \text{ и } |f(x)| \leqslant 1,$$

является обобщением задачи Чебышева, рассмотренной выше.

Очевидно, что у Чебышева $\lambda_k(x) = x^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots \ldots, n)$. Обобщая естественным образом дальнейшие рассуждения Чебышева, Марков пришел к способу интерполирования, содержащему в себе метод Чебышева.

Остановимся более подробно на тригонометрическом аналоге метода Чебышева, который Марков рассмотрел в конце своей работы [12]. Для удобства мы несколько изменим обозначения автора. Пусть

$$\psi_0(x) = 1,\ \psi_n(x) = \frac{\pi}{2}\sum_{d\mid n}\frac{\mu(d)\,\chi(d)}{d}\cos\frac{2\pi nx}{d},$$

$$\varphi_n(x) = \frac{\pi}{2}\sum_{d\mid n}\frac{\mu(d)\,\chi^2(d)}{d}\sin\frac{2\pi nx}{d}, \tag{3.1}$$

где суммирование производится по нечетным делителям $d$ числа $n$ ($n = 1, 2, \ldots$), а $\chi(d)$ — характер mod 4, т. е.

$$\chi(d) = \begin{cases} (-1)^{(d-1)/2}, & d \text{ — нечетное}, \\ 0, & d \text{ — четное}. \end{cases}$$

Далее, пусть

$$\begin{aligned} &u_0(x) = 1, \ u_n(x) = \operatorname{sign} \cos 2\pi n x, \\ &v_n(x) = \operatorname{sign} \sin 2\pi n x \ (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Марков показывает, что система функций

$$\{\psi_0, \psi_1, \varphi_1, \psi_2 (, \varphi_2, \ldots; u_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots\} \tag{3.3}$$

будет биортогональной в [0, 1] и что

$$\int_0^1 \psi_n(x) \cdot u_n(x)\, dx = 1, \int_0^1 \varphi_n(x) \cdot v_n(x)\, dx = 1.$$

Нетрудно видеть, что систему $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots; v_1, v_2, \ldots\}$ можно было бы получить с помощью замены переменной из биортогональной системы Чебышева. Поэтому всю систему (3.3) мы будем называть биортогональной системой Чебышева—Маркова.

Если функция $f(x)$ интегрируема в [0; 1], то ей можно сопоставить следующий «ряд Фурье»:

$$f(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(x) + B_n \varphi_n(x), \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} &A_0 = \int_0^1 f(x)\, dx, \ A_n = \int_0^1 f(x) \cdot \operatorname{sign} \cos 2\pi n x\, dx, \\ &B_n = \int_0^1 f(x) \cdot \operatorname{sign} \sin 2\pi n x\, dx \\ &(n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ряд (3.4) будем называть тригонометрическим рядом Чебышева—Маркова для $f(x)$ в [0; 1]. В дальнейшем будем считать, что $f(x) \in L^2[0; 1]$, тогда коэффициенты $A_n$, $B_n$ ряда (3.4) могут быть выражены через коэффициенты $a_m$, $b_m$ тригонометрического ряда Фурье, соответствующего функции $f(x)$ в $[0; 1]$:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k} a_{kn}, \quad B_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi^2(k)}{k} b_{kn}. \tag{3.6}$$

Эти формулы были указаны в 1909 г. Либманом в работе [13], посвященной упрощению некоторых исследований Чебышева.

Коэффициенты Фурье $a_m$, $b_m$, в свою очередь, можно выразить через коэффициенты $A_n$, $B_n$ ряда (3.4):

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)\chi(k)}{k} A_{km}, \\ b_m &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)\chi^2(k)}{k} B_{km} \quad (m = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Соотношения (3.7) формально получаются из соотношений (3.6) с помощью известных в теории чисел формул обращения рядов (см. [10]).

Законность этого формального преобразования легко доказывается с помощью рассуждений, которыми Н. И. Ахиезер в 1947 г. (см. [1], с. 511) доказал полноту системы функций $\{\operatorname{sign} \sin nx\}$ в $[0; \pi]$. Другое, более громоздкое обоснование формул (3.7) было дано М. Мюллером [14] в 1954 г.

Частные суммы ряда (3.4) можно пытаться использовать для приближенного представления функции $f(x)$. Это особенно удобно в практическом гармоническом анализе в том случае, когда задано большое число значений функции $f(x)$, ибо вычисление коэффициентов $A_n$, $B_n$ сводится к вычислению интегралов вида $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$. Ни Чебышев, ни Марков исследованием сходимости ряда (3.4) не занимались.

В работе [15] получены достаточные условия сходимости ряда (3.4).

Т е о р е м а I. *Пусть функция* $f(x)$, *заданная в* $[0; 1]$, *имеет ограниченную вариацию и принадлежит к* Lip $\alpha$, $\alpha > 0$, *тогда построенный для нее ряд* (3.4) *сходится в* $[0; 1]$ *абсолютно и равномерно и его сумма равна* $f(x)$.

Т е о р е м а II. *Пусть функция* $f(x)$, *заданная в* $[0; 1]$ *принадлежит* к Lip $\alpha$, $\alpha > 1/2$, *тогда построенный для* *нее ряд* (3.4) *сходится в* [0; 1] *абсолютно и равномерно и его сумма равна* $f(x)$.

В работе [15] рассматривались также ряды, которые получаются интегрированием рядов Чебышева—Маркова.

Соответствие (3.4) после интегрирования в пределах от 0 до $x$ примет вид:

$$F(x) \sim A_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^* g_n(x) + B_n^* h_n(x)], \tag{3.8}$$

где

$$F(x) = \int_0^x [f(t) - A_0]\, dt, \quad A_0^* = \int_0^1 F(x)\, dx,$$

$$A_n^* = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k F\left(\frac{k}{2n}\right) = -\frac{B_n}{4n},$$

$$B_n^* = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{4n-1} \chi(k) F\left(\frac{k}{4n}\right) = \frac{A_n}{4n},$$

$$\int_0^x \psi_n(t)\, dt = \frac{1}{4n} h_n(x),$$

$$h_n(x) = \frac{1}{4n} \sum_{d \mid n} \mu(d) \chi(d) \sin \frac{2\pi n x}{d},$$

$$\int_0^x \varphi_n(t)\, dt = -\frac{1}{4n} g_n(x) + \begin{cases} 1/4n, & n = 2^\nu, \\ 0, & n \neq 2^\nu, \end{cases}$$

$$g_n(x) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \chi^2(d) \cos \frac{2\pi n x}{d}.$$

Теорема III. *Если* $f(x) \in L^2\,[0;\,1]$; *то ряд* (3.8) *сходится в* [0; 1] *абсолютно и равномерно и его сумма равна* $F(x)$.

Из теоремы III вытекает важное следствие: функции $f(x) \in L^2\,[0;\,1]$ однозначно определяются своими коэффициентами Чебышева—Маркова $A_n$, $B_n$. Для построения $f(x)$ по ее коэффициентам $A_n$, $B_n$ всегда можно воспользоваться рядом (3.8), сумма которого $F(x)$.

Другой метод построения $f(x)$ вытекает из результатов следующего раздела.

*4. Формулы для приближенного вычисления коэффициентов Фурье.* Мы можем теперь легко доказать формулы

(3.7), указанные в разделе 3. Действительно, на основании теоремы III, для любой $f(x) \in L^2[0;1]$ имеем:

$$F(x) = \int_0^x [f(t) - A_0]\,dt = A_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* g_n(x) + B_n^* h_n(x) \tag{4.1}$$

причем ряд сходится равномерно в $[0;1]$. Умножаем обе части (4.1) на $\cos 2\pi mx$, $m \geqslant 1$ и интегрируем почленно в $[0;1]$. Пользуясь тем, что

$$\int_0^1 h_n(x)\cos 2\pi mx\,dx = 0,$$

$$\int_0^1 g_n(x)\cos 2\pi mx\,dx = \begin{cases} 0, & m \nmid n, \\ \frac{1}{2}\chi^2(k)\cdot\mu(k), & n = m\cdot k \end{cases}$$

$$\int_0^1 F(x)\cos 2\pi mx\,dx = -\frac{1}{2\pi m}\int_0^1 f(x)\sin 2\pi mx\,dx = \frac{1}{4\pi m}b_m,$$

получим

$$b_m = -2\pi m \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk}^* \chi^2(k)\,\mu(k), \tag{4.2}$$

откуда

$$b_m = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\chi^2(k)\,\mu(k)}{k}B_{mk}.$$

Аналогичным образом, умножая обе части (4.1) на $\sin 2\pi mx$, $m \geqslant 1$, и пользуясь тем, что

$$\int_0^1 g_n(x)\sin 2\pi mx\,dx = 0,$$

$$\int_0^1 h_n(x)\sin 2\pi mx\,dx = \begin{cases} 0, & m \nmid n, \\ \frac{1}{2}\chi(k)\cdot\mu(k), & n = m\cdot k \end{cases}$$

$$\int_0^1 F(x)\sin 2\pi mx\,dx = \frac{1}{4\pi m}a_m, \quad m \geqslant 1,$$

получим

$$a_m = 2\pi m \sum_{k1}^{\infty} \chi(k)\,\mu(k)\cdot B_{mk}^*, \tag{4.3}$$

откуда

$$a_m = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)\,\mu(k)}{k} A_{mk}.$$

Таким образом, формулы (3.7) доказаны для любой $f(x) \in L^2[0;\ 1]$.

Для практического гармонического анализа можно пользоваться формулами (4.2) и (4.3). Для этого необходимо предварительно составить таблицу значений функции:

$$F(x) = \int_0^x [f(t) - A_0]\,dt, \quad \text{где} \quad A_0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Отметим, что формулы (3.7) дают еще один способ фактически строить функцию $f(x) \in L^2[0;\ 1]$, исходя из ее коэффициентов Чебышева—Маркова $A_n$ и $B_n$.

Настоящая статья является развернутым историческим комментарием к работе [15] и имеет своей целью усилить внимание математиков к вопросам, поднятым в мемуаре Чебышева [1], в которых обнаружена связь между теорией приближения функций, гармоническим анализом и теорией чисел. Если говорить об отечественной послевоенной литературе, то до появления работы [15] только в работах Ахиезера [16—18] можно было найти ряд интересных кратких соображений, связанных с обсуждаемым методом Чебышева, но связь метода Чебышева с теорией чисел, вопросы равномерной сходимости биортогональных разложений Чебышева—Маркова, их связь с гармоническим анализом и проблемы, возникающие в связи с интегрированием этих разложений, у него не затронуты. Это же замечание частично относится и к появившейся в 1973 г. книге [19], хотя там и цитируются некоторые результаты [15].

О недостаточном знакомстве современных математиков с идеями, содержащимися в мемуаре Чебышева 1859 г., свидетельствует также отсутствие ссылок на этот мемуар в работах Н. П. Романова [20] и его учеников, в которых рассматриваются и применяются ортогональные и биортогональные системы функций, построенные арифметическими методами, т. е. методами, начало которым было положено П. Л. Чебышевым в работе [1].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Чебышев П. Л.* Об интерполировании в случае большого числа данных, доставленных наблюдениями.— Полн. собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947, т. 2, с. 244—313.
2. *Чебышев П. Л.* Полн. собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947, т. 2, с. 239—243.
3. *Viscovatoff W.* De la méthodé générale pour reduire toutes les séries des quantités en fractions continues.— Mém. Acad. imp. sci. Petersbourg, 1803—1806, vol. 1, p. 226—247.
4. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: Гостехиздат, 1956.
5. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М.; Л.: Гостехиздат, 1952.
6. *Киселев А. А., Нагмеджанов К. К.* О рядах по знакам синусов и косинусов. Вопросы кибернетики и вычислительной математики. Ташкент: Изд-во АН Узб.ССР, 1967, вып. 13, с. 118—123.
7. *Киселев А. А., Ожигова Е. П.* П. Л. Чебышев на съездах русских естествоиспытателей и врачей.— ИМИ. М.: Физматгиз, 1963, вып. XV, с. 307.
8. *Bäcklund O.* Sur les applications de la méthode d'interpolation proposée par P. Tchebychef.— Bull. de l'Acad. imp. sci. Pétersbourgh, 1884, vol. 29, coll. 477—498.
9. *Harzer P.* Über eine von Herrn Tchebychef angegebene Interpolationsformel.— Astr. Nachr., 1886, Bd. 115, N 2757/2759, S. 337—383.
10. *Bruns H.* Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. Leipzig, 1903.
11. *Radau R.* Etudes sur les formules d'interpolation.— Bull. astron., 1891, vol. 1, p. 66—84.
12. *Марков А. А.* О предельных величинах интегралов.— В кн.: Избр. труды. М.; Л.: Гостехиздат, 1948, с. 146—230.
13. *Liebmann H.* Vereinfachte Behandlung einiger Minimalprobleme von Tchebyscheff.— Jahresber. Dt. Math. Verein., 1909, Bd. 18, S. 433—449.
14. *Müller M.* Über die Konvergenz eines Verfahrens zur Berechnung der Fourier-Koeffizient.— Math. Ztschr., 1954, Bd. 60, S. 81—87.
15. *Киселев А. А., Онуфриева Л. А.* Применение биортогональных систем Чебышева и Маркова для приближения функций.— В кн.: Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. М.: Физматгиз, 1961, с. 183—189.
16. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
17. *Ахиезер Н. И.* Общая теория полиномов П. Л. Чебышева.— В кн.: Научное наследие П. Л. Чебышева. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945, вып. 1.
18. *Ахиезер Н. И.* Комментарии к работе Чебышева «Об интерполировании в случае большого числа данных, доставленных наблюдениями».— В кн.: П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947, т. 2.
19. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
20. *Романов Н. П.* Пространство Гильберта и теория чисел.— Изв. АН СССР, 1946, 10, № 1, с. 3—33; 1951, 15, № 2, с. 131—152.

# ОТ СКОБОК ПУАССОНА ДО АЛГЕБР ЛИ

**С. С. Демидов**

*1. Пуассон.* В 1809 г. С. Пуассон методом вариации произвольных постоянных исследовал задачу возмущенного движения [1]. Рассматривая первые интегралы $f_i(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_i$ уравнений движения некоторой системы тел ($q_j$ — обобщенные координаты, $p_j$ — обобщенные импульсы, $a_i$ — произвольные постоянные), он пришел в ходе вычислений к выражениям вида

$$\sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \frac{\partial f_l}{\partial p_j} - \frac{\partial f_k}{\partial p_j} \frac{\partial f_l}{\partial q_j} \right),$$

которые сокращенно обозначил $(f_k f_l)$*. Для этих выражений, как он заметил, очевидным образом, выполняются свойства

$$(f_k f_l) = -(f_l f_k),\ (f_k f_k) = 0.$$

«Произведенный анализ,— писал Пуассон [1, с. 281—282],—приводит нас к замечательному результату, что если взять значения произвольных постоянных $a$ и $b$ (в наших обозначениях $a_1$, $a_2$. — *С. Д.*), входящих в интегралы уравнений движения системы тел и выразить эти значения в функции независимых переменных $\varphi$, $\psi$, $\theta$ ($q_1$, $q_2$, $q_3$ — *С. Д.*) и величин $s$, $u$, $v$ ($p_1$, $p_2$, $p_3$ — *С. Д.*), то комбинация частных производных функций, представленная скобками $(ab)$, является всегда постоянной величиной.

Здесь следует заметить, что эта теорема имеет место для любого числа независимых переменных, что очевидно вытекает из хода нашего анализа, хотя мы рассматривали случай трех таких переменных».

Скобки такого вида получили впоследствии название скобок Пуассона [1], а приведенный результат стал формулировать начиная с Якоби (см. ниже) в такой форме: если $f_1$ и $f_2$ первые интегралы уравнений движения, то $(f_1 f_2)$ также представляет собой их интеграл. Это утверждение известно теперь как теорема Пуассона. Сам Пу-

---

* Мы записали здесь все формулы в современных обозначениях, несколько отличных от обозначений Пуассона.

ассон, правда, прошел мимо того обстоятельства, что его теорема может служить источником для получения новых интегралов. У него она выполняла служебную функцию. На ее роль в аналитической механике указал К. Г. Я. Якоби, а работах которого раскрылась и значимость формализма скобок Пуассона.

*2. Якоби и теорема Пуассона.* Потребности аналитической маханики привели Якоби к поиску метода интегрирования уравнения **

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \ (p_j = \partial z / \partial x_j) \quad (2)$$

$(n > 2)$ отличного от предложенного им ранее «первого метода» (несколько подробнее об этом см. [3]). Такой метод, получивший в литературе название «второго метода» Якоби, содержится в статье [4], законченной в 1838 г. и опубликованной посмертно А. Клебшем в 1862 г. Якоби сообщил его также в лекциях по динамике, читанных в Кёнигсберге в 1842—1843 гг. и опубликованных лишь в 1866 г. [5].

Согласно этому методу, к данному уравнению (2) подбирается $(n-1)$ таких независимых соотношений

$$H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_i \ (i = 1, 2, \ldots \ldots, n-1)$$

($a_i$ — произвольные константы), что если из них и из уравнения (2) извлечь $p_1, p_2, \ldots, p_n$ как функции $x_j$, $a_j$, то выражение $\sum_{j=1}^{n} p_i\, dx_i$ (3) станет полным дифференциалом при любых значениях констант $a_i$ (тогда полный интеграл уравнения (2) получится интегрированием выражения (3)).

Якоби показывает, что необходимым и достаточным условием того, чтобы полученные таким образом $p_j$ обращали выражение (3) в полный дифференциал, является тождественное обращение в нуль выражений $\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H_k}{\partial x_j}\frac{\partial H_l}{\partial p_j} - \frac{\partial H_k}{\partial p_j}\frac{\partial H_l}{\partial x_j}\right)$. Так эти выражения, введенные ранее Пуассоном, появляются и в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

В конце 30-х годов Якоби переоткрывет и теорему

** Рассматриваются уравнения, не содержащие в явном виде неизвестной функции $z$ — к такому виду легко приводится произвольное уравнение первого порядка.

Пуассона. «После того, как я нашел эту теорему,— вспоминал он впоследствии [5, лекция 34],— я сообщил об этом академиям в Берлине и в Париже, как о совсем новом открытии. Но скоро после этого я заметил, что эта теорема уже была открыта, но в течение тридцати лет оставалась в неизвестности, так как не подозревали ее истинного смысла, а употребляли ее только как вспомогательную теорему при совсем другой задаче». Якоби же увидел в этой теореме «основную теорему аналитической механики» [5, лекция 34], ибо она давала возможность по двум известным интегралам уравнений движения простым дифференцированием находить третий, затем «четвертый, пятый интеграл, и вообще достичь таким образом всех интегралов, или, что то же самое, полного интеграла проблемы» [6, с. 146].

Однако надежды Якоби решить с помощью этой теоремы задачу полного интегрирования уравнений динамики оказались несостоятельными: из двух, как правило, известных интегралов — живых сил и площадей — никаких новых получить не удавалось. Применение к ним скобок Пуассона давало либо константу, либо функцию исходных интегралов [2]. Тем не менее теорема Пуассона оказалась важным предложением аналитической механики, особое значение в которой получил формализм скобок Пуассона [3]. Мы сосредоточим наше внимание на развитии иного комплекса идей, ведущего к образованию понятия алгебр Ли. Для этого вернемся ко «второму методу» Якоби.

3. *Скобки Пуассона и уравнения с частными производными первого порядка.* Как мы уже упоминали, «второй метод» Якоби впервые появляется в печати в 1862 г. Молодой русский математик В. Г. Имшенецкий, в 1862—1864 гг. находившийся в заграничной командировке, слушает его изложение в Париже на лекциях Ж. Бертрана. Бертран, по свидетельству Имшенецкого (см. [2, Введение]), указывал, «что аналитическому построению своей теории Якоби не дал возможной простоты». Руководствуясь этим указанием, Имшенецкий предложил свое, ставшее образцовым, изложение метода Якоби, в магистерской диссертации [2] (1865) [4]. Основу метода Якоби Имшенецкий увидел в выведенном Якоби[5] для скобок Пуассона соотношении [6]

$$(A\,(BC)) + (B\,(CA)) + (C\,(AB)) = 0, \qquad (4)$$

названном впоследствии тождеством Якоби.

Согласно «второму методу», интегрирование уравнения (2) сводится к последовательному интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка специального вида [7]. Для интегрирования таких систем Якоби разработал специальный метод. Особое значение в теории Якоби систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка приобретают дифференциальные выражения типа

$$A(f) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

В 33-й лекции по динамике [5] Якоби пишет: «... Мы рассматриваем это выражение как операцию, произведенную над неизвестной функцией $f$». Мы скажем сегодня, что он трактует их как дифференциальные операторы, примененные к этой функции. Для двух таких операторов $A(f)$ и $B(f) = \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ Якоби ввел в рассмотрение выражения $A(B(f)) - B(A(f))$, которые оказывались вновь операторами того же вида. Он наметил связь этих операторов со скобками Пуассона: в 34 лекции по динамике [5] он рассматривает скобку Пуассона $(f\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right)$ как результат применения некоторого дифференциального оператора к функции $f$: $A(f) = (f\varphi)$, или, как скажет впоследствии С. Ли, как результат действия на $f$ инфинитезимального преобразования, порожденного функцией $\varphi$. Глубокий смысл этой связи и роль таких операторов полнее выяснились в теории преобразований, развитой С. Ли.

4. *Работы С. Ли.* Концепция «бесконечно малых» преобразований имеет давнюю историю, восходящую по меньшей мере ко времени возникновения исчисления бесконечно малых [15, с. 454—455]. Во всяком случае уже у Декарта мы находим ростки теории мгновенных центров вращения, когда он рассматривает «в бесконечно малом» определенное плоское движение как некоторое вращение [16, с. 341; 17, с. 249]. Подобные воззрения характерны для аналитической механики XVIII — первой половины XIX в.: вспомним вариации координат или виртуальные перемещения у Лагранжа, бесконечно малые движения в «Новой теории вращения» (1834) Л. Пуансо (см. [9,

с. 66]). «Бесконечно малые» преобразования встречаются в работах Дж. Сильвестра (1852) и А. Кэли (1854), у которых явно намечена связь таких преобразований с дифференциальными операторами вида $Af = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$ и появляется (у Кэли) коммутатор $AB - BA$ мы таких операторов [8]. Эти же операторы и коммутатор, как мы только что отметили, возникали и у Якоби при изучении систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

В мемуаре 1868 г. о группах движения [24] «бесконечно малые» преобразования с геометрической точки зрения рассматривает К. Жордан. Именно ему [15, с. 455] принадлежит идея однопараметрической непрерывной группы, «порожденной» бесконечно малым преобразованием. Эта идея предваряла открытие Ли связи таких преобразований с конечными непрерывными группами и создание его концепции «инфинитезимального преобразования».

О начальном периоде исследований теории непрерывных групп сам С. Ли в 1888 г. писал [25, т. 1, с. IV—V]: «Геометрические исследования побудили меня в 1869—71 гг. к рассмотрению конечных непрерывных групп. Разумеется, я ограничился прежде всего тем, что преобразовал некоторые важные непрерывные группы посредством подходящих аналитических (алгебраических или трансцендентных контактных) преобразований в другие известные группы; в этом отношении соответствующие работы носили специальный характер ... Более общую природу носили мои, также начатые в 1869 г. исследования о дифференциальных уравнениях, допускающих непрерывную группу. Я заметил, что большинство обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрирование которых удается старыми интеграционными методами, при определенных преобразованиях остаются инвариантными, и что эти интеграционные методы состоят в использовании этого свойства для соответствующего дифференциального уравнения... После того, как я таким образом представил с общей точки зрения ряд старых методов интегрирования, я поставил перед собой естественную задачу — развить общую теорию интегрирования для всех обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих конечные или инфинитезимальные преобразования».

Итак, лишь наметив в работах 1869—1871 гг. некоторые из подходов будущей теории непрерывных групп, Ли надолго (до осени 1873 г.) углубился в теорию дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Он тщательнейшим образом изучил литературу по этому вопросу, в первую очередь работы Якоби. В процессе этого изучения и собственных исследований он глубоко ознакомился с аппаратом скобок Пуассона, а также дифференциальных операторов $Af$ (о работах Ли по теории уравнений первого порядка более подробно см. [26]).

В октябре 1873 г. Ли возобновляет занятия непрерывными группами (см. [27, т. 5, с. 583]) и в течение зимы 1873—1874 гг. закладывает основы их теории. В маленькой заметке, датированной 3 декабря 1874 г. [27, т. 5, с. 1—8], он дает краткое резюме ряда полученных результатов, полное же их изложение появляется [9] в пяти обширных мемуарах, объединенных общим названием «Теория групп преобразований», первый из которых был опубликован в 1876 г., а последний в 1879 [27, т. 5, с. 9—223]. Содержащиеся в них результаты вошли позднее в трехтомник с тем же названием [25].

В письме к А. Майеру от 3 февраля 1874 г. Ли писал [27, т. 5, с. 585—586]: «Если я не ошибаюсь, мне удалось открыть совсем новую точку зрения, важную не только для теории дифференциальных уравнений, но и вообще для всей теории многообразий, поскольку таковые являются непрерывными. Вам будет интересно увидеть, если это вообще окажется читабельно, что я нашел прекрасные интерпретации символам $Af$, $A_iA_k - A_kA_i$, $(H_i, H_k)$ и т. д. Здесь, если я не ошибаюсь, так называемое операционное исчисление (Operationskalkul) получает неожиданно понятное содержание (к этим словам мы еще вернемся.— *С. Д.*). Замечательно, что мои прошлые исследования о группах, однородных группах и контактных преобразованиях, равно как и мои более старые работы, лежат, так сказать, готовыми составить фундамент новой теории групп преобразований».

Первоначально понятие инфинитезимального преобразования ассоциировалось у Ли[10] с системой

$$\frac{dx_i}{dt} = \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Такое преобразование переводило точку $x(x_1, x_2, \ldots$

$\ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ в точку $x' \in \mathbf{R}^n$ с координатами $x'_1, \ldots, x'_n$, где $x'_i = x_i + \xi_i(x_1, \ldots, x_n)\,\delta t$. Если взять произвольную функцию $f(x)$, то ее приращение при таком преобразовании (если пренебречь членами, содержащими степени $\delta t$ выше первой) будет $\delta f = X(f)\,\delta t$, где $X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ — дифференциальный оператор рассматривавшегося выше вида (сравни со сноской [8]).

Такой оператор Ли с 1874 г. (Christ. Forh. 1874 (75) [27, т. 3, с. 191]) стал называть символом инфинитезимального преобразования (или просто инфинитезимальным преобразованием, рассматривая его по преимуществу просто как удобное сокращенное обозначение для такого преобразования. Этот переход от старого, казавшегося естественным понятия к новому зафиксирован в только что упомянутом его письме к А. Майеру, где инфинитезимальное преобразование вводилось в первоначальном смысле, а затем на приложенных к нему листочках Ли писал: «ради краткости я говорю иногда прямо: инфинитезимальное преобразование $A_k(f)$ «[27, т. 5, с. 589]. Цитировавшиеся выше слова Ли об операционном исчислении, получившем «неожиданно понятное содержание», указывают, что уже тогда Ли пришел к мысли о самостоятельном значении новых символов (не сводящихся к соображениям простого удобства).

В ходе исследований в области уравнений с частными производными первого порядка для Ли выяснилась связь между непрерывными $r$-параметрическими группами преобразований и соответствующими им совокупностями из $r$ символов $X_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(j = 1, \ldots, r)$ инфинитезимальных преобразований[11] или, как он стал именовать их в дальнейшем, «группами инфинитезимальных преобразований $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_2 f$" (Math. Ann. 25 (1885) или [25, т. 1, с. 158]). Обозначая через $[X_i X_j]$ коммутатор $X_i X_j - X_j X_i$ операторов $X_i$, $X_j$, рассматривавшийся уже Якоби, Ли устанавливает следующие соотношения для операторов «группы»:

$$[X_i X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k X_k \quad (c_{ij}^k \text{ — константы})$$

и

$$[[X_iX_j]\,X_m]+[[X_jX_m]\,X_i]+[[X_mX_i]\,X_j]=0.$$

Последнее соотношение представляет собой форму тождества Якоби, записанного в символах коммутатора (у самого Якоби такая форма тождества отсутствует).

Связь между конечными непрерывными группами и соответствующими «группами инфинитезимальных преобразований», оформившаяся у Ли в виде трех фундаментальных теорем [12], положила основание его теории непрерывных групп, или как ее стали называть впоследствии, теории групп Ли.

5. *Алгебры Ли.* Изучение структур групп Ли, основанное на исследовании соответствующих «групп инфинитезимальных преобразований», составляет одно из важнейших направлений математики конца XIX—XX вв. Соответствующие исторические сведения можно найти, например, в [15, 28, 29, 30] [13]. Мы остановимся лишь на том, каким образом сформировалась точка зрения на «группы инфинитезимальных преобразований» как на алгебры Ли.

На связь теории непрерывных групп с теорией систем гиперкомплексных чисел обратил внимание в 1884 г. А. Пуанкаре [14], который заметил, что [38, с. 77]: проблема описания систем гиперкомплексных чисел «легко сводится к следующей — найти все непрерывные группы линейных подстановок $n$ переменных, коэффициенты которых — линейные функции произвольных параметров». Это замечание сразу привлекло внимание самого Ли и его учеников и породило значительную литературу (об этом см. [27]).

К концу 80-х годов математикам школы Ли открылся еще один аспект связи теории групп Ли с теорией гиперкомплексных чисел. Стало ясно, что «группу $r$ инфинитезимальных преобразований» можно рассматривать как особую неассоциативную гиперкомплексную систему с $r$ единицами $e_1, e_2, \ldots, e_r$ и константами $c_{ij}^k$, определяющими умножение $[e_ie_j]=\sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k e_k$, удовлетворяющее свойствам $[xy]=-[yx]$ и $[[xy]z]+[[yz]\,x]+$ $+[[zx]\,y]=0$ (т. е. тождеству Якоби). Эту точку зрения можно найти, например, у Ф. Энгеля в работе [39, с. 85—86] 1886 г. Была она, очевидно, естественно воспринята и самим Ли (если только не он сам пришел к ней первым). В третьем томе книги [25, с. 749] читаем: «Мы получим в высшей степени важный вид числовых систем, если потребуем для любых чисел системы выполнения уравнений:

$$uv + vu = 0, \quad (uv)\,w + (vw)\,u + (wu)\,v = 0.$$

$\gamma_{\mu\nu s}$ (структурные константы.— *С. Д.*) определяют тогда, очевидно, состав $n$-членной группы и инфинитезимальные преобразования этой группы окажутся комплексными числами системы».

Так сформулировался современный взгляд на «алгебры Ли». Сам этот термин был введен одним из творцов их современной теории Г. Вейлем в лекциях, прочитанных в Принстонском Институте Высших научных исследований в 1933/34 гг.[15]

*Заключение.* В комплексе идей, приведших к концепции алгебр Ли, важное место принадлежит формализму скобок Пуассона. Воспоминание об этом формализме хранит операция коммутирования алгебр Ли, которую самою иногда называют скобкой Пуассона — см., например, у Энгеля (1896, [41, с. 400]), у Н. Г. Чеботарева (1940, [31, с. 68]), у В. И. Арнольда (1974, [42, с. 179]).

Зародившийся в связи с исследованием задачи возмущенного движения методом вариации произвольных постоянных, формализм скобок Пуассона оказался не только важным элементом аппарата аналитической механики, но и оперативным средством новой теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка и их систем. Опосредованным образом через эту теорию он оказал влияние на формирование одного из важнейших алгебраических понятий современной математики, продемонстрировав тем самым сложный характер взаимодействия ее прикладных и фундаментальных разделов в их историческом развитии***.

## ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Первое использование самого термина «скобки Пуассона» мы нашли в книге В. Г. Имшенецкого [2, с. 163], речь о которой еще пойдет в дальнейшем.

[2] Как показал Ж. Бертран [7], для каждого интеграла $f(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = C$ уравнений Гамильтона существует $(2n - 1)$ таких добавочных интегралов $g_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = C_i$, что: $(f, g_1) = 1$, $(f, g_i) = 0$ $(i = 2, \ldots, 2n - 1)$.

[3] Подробнее об этом см., например, в [8], а также в [9, 10]. В [10]

*** Автор считает своим приятным долгом поблагодарить проф. А. П. Юшкевича и А. Н. Паршина, прочитавших рукопись и сделавших ряд существенных замечаний.

рассматривается также вопрос о месте скобок Пуассона в аппарате квантовой механики.

[4] Для характеристики этого сочинения приведем слова С. Ли из его письма к В. Г. Алексееву, написанного в 1895—1896 гг. [11, с. 457]: «Работа Имшенецкого о дифференциальных уравнениях с частными производными первого порядка была мне хорошо известна как первое систематическое изложение исследований, проведенных в этой области Лагранжем, Коши и Якоби. Во всяком случае я познакомился с этими теориями по книге Имшенецкого, которая отличается, по моему мнению, ясным изложением и точной формой».

О жизни и творчестве Имшенецкого см. [12, с. 429—431], а также диссертацию В. А. Кочева [13].

[5] Так как публикация работ [4, 5] сильно задержалась, то некоторые из содержащихся в них результатов оказались переоткрытыми другими учеными. В частности, тождество (4) было впервые опубликовано (с доказательством) в 1854 г. В. Ф. Донкиным [14].

[6] Как писал в отзыве на диссертацию Имшенецкого профессор Казанского университета П. И. Котельников (1809—1879) (см. [12, с. 252, 314, 492]): «Господин магистрант совершенно понял, в чем заключается суть теории Якоби, а именно он понял всю важность трехчленного тождества»,— тождества (4) [11, с. 453].

[7] Согласно «второму методу» интегрирование уравнения (2) сводится к последовательному интегрированию систем

$$(H_1H)=0, \qquad (5-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}(H_2H)=0,\\ (H_2H_1)=0,\end{array}\right\} \qquad (5-2)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{array}{l}(H_{n-1}H)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ (H_{n-1}H_{n-2})=0.\end{array}\right\} \qquad (5-(n-1))$$

Пусть $f_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)=a_1$ — один из интегралов уравнения (5—1). Положим (мы следуем далее изложению Имшенецкого) $H_1=f_1=a_1$. Ищем теперь $H_2=a_2$, удовлетворяющее системе (5—2). Первое из уравнений такой системы совпадает с уравнением (5—1). Пусть $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \mathrm{const}$ его интеграл, отличный от $H=\mathrm{const}$ и $f_1=a_1$. Строится последовательность $(\varphi H_1)=\varphi_1$, $(\varphi_1 H_1)=\varphi_2$, $(\varphi_2 H_1)=\varphi_3, \ldots$ и доказывается, что $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ удовлетворяют первому из уравнений системы (5—2). Для этой цели и используется тождество (4). Если в нем положить $A=H$, $B=H_1$, то, так как $(H_1H)=0$, $(H(H_1C))+(H_1(CH))=0$. Положим $C=\varphi$, тогда, так как $(\varphi H)=0$, $(H(H_1\varphi))=0$ или $(H\varphi_1)=0$. Аналогично доказывается, что $(H\varphi_2)=(H\varphi_3)=\ldots=0$, если положить $C=\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Так как уравнение (5—1) имеет $(2n-1)$ различных интегралов, то на каком-то шаге мы получим $\varphi_i=F(H, H_1, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1})$ $(i<2n)$. Искомый интеграл системы (5—2) ищется в виде $H_2=f_2(H, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1})$. Аналогично решаются системы (5—3), (5—4), (5—5) и т. д.

[8] В 1852 г. Сильвестр публикует большую работу «Об основах исчисления форм», в которой, в частности, рассматривает вопрос об инвариантах форм $n$-й степени от двух или трех переменных относительно некоторых подгрупп группы линейных преобразований. В седьмом примечании дополнения к первым трем разделам Сильвестр писал [18, с. 326]: «Существует принцип первостепенной важности, который не был затронут на предыдущих страницах... Этот принцип состоит во введении в теорию идеи непрерывного или инфинитезимального изменения (variation)». Суть рассуждений Сильвестра, как это следует из последующего седьмого раздела работы, сводилась к тому, что при бесконечно малом преобразовании $x_i' = x_i + \xi_i (x_1, \ldots, x_n) \delta t$ любая функция $f (x_1, \ldots, x_n)$ получает (если пренебречь членами, содержащими степени $\delta t$ выше первой) приращение

$$\delta f = f(x_1', \ldots, x_n') - f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta t.$$

Условие инвариантности функции $f$ при таком преобразовании выражается тогда уравнением $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$. «Это *мгновенно* дает необходимые и *достаточные* условия, которым удовлетворяет инвариант любого данного порядка любой однородной функции»,— пишет Сильвестр в седьмом примечании [18, с. 327], которое, однако, заключает следующими словами: «Но так как эти условия совпадают с теми, которые были сообщены мне, как полученные из других рассмотрений, джентльменом, работы которого в данной области сопутствуют моим, я чувствую себя обязанным воздержаться от публикации моих заключений до тех пор, пока он не отдаст свои результаты в печать». Но уже в седьмом разделе той же статьи (переданной, очевидно, в печать несколько позднее) Сильвестр раскрывает и имя джентльмена (А. Кэли) и содержание своих выводов. В частности, он пишет [18, с. 351—352]: «Господин Аронгольд, согласно информации, полученной частным образом, был первым, кто подумал о применении этого метода к настоящему предмету (в рукописи, представленной Кёнигсбергскому университету в 1851 г., опубликованы соответствующие его результаты были лишь в 1863 г. в [19] — *С. Д.*); но именно господин Кэли сообщил мне уравнения, которые определяют инварианты функций двух переменных. Метод, которым я достиг этих уравнений и доказал их достаточность — мой собственный, но я полагаю, он совпадает с тем, который избрал Кэли в мемуаре, который должен появиться в журнале Крелле. Я также был недавно информирован о статье господина Эйзенштейна, которая должна вскоре появиться в журнале Лиувилля и в которой появилась та же самая идея (Эйзенштейн умер в 1852 г., и эта статья, насколько нам известно, опубликована не была — *С. Д.*)... Сообщение господина Кэли ко мне было сделано в начале декабря прошлого (1851 — С. Д.) года и мой метод (результат наблюдения, сделанного задолго до этого) достижения этих и более общих уравнений и доказательство их достаточности были сообщены мною через несколько недель — я полагаю, между январем и февралем этого (1852 — *С. Д.*) года». Изложение соответствующих результатов Кэли появилось в журнале Крелле в 1854 г. [20]. В примечании к работе [21], сделанном для собрания своих трудов, Кэли привел [22, с. 601] (без какого-либо существенного комментария) только что процитированный фрагмент из Сильвестра. О направлении исследований, начатых Аронгольдом, Кэли и Сильвестром см. [23].

9 Форма, в которой результаты Ли представлены в этих мемуарах, вообще говоря, сильно отличается от той, в которой они были первоначально получены. Некоторое представление о ходе развития идей Ли дает его переписка с А. Майером, помещенная в [27, т. 5, с. 583—614]. На ее основании были сделаны соответствующие реконструкции Н. Бурбаки [15].

10 См. примечания Ф. Энгеля к работе «Краткое резюме нескольких новых теорий» 1872 (73), содержание которой показывает, что Ли «уже в эти годы свободно владел понятием инфинитезимального преобразования» [27, т. 3, с. 596].

11 Именно в этом смысле следует понимать неоднократно высказанную Ли мысль о том, что его теория непрерывных групп возникла в связи с исследованиями по уравнениям с частными производными первого порядка. Так, например, в третьем томе «Теории групп преобразований» читаем [25, т. 3, с. 665]: «Исходной точкой для общих исследований Ли о конечных группах послужила задача: проинтегрировать линейное уравнение с частными прои водными первого порядка, которое допускает известное инфинитезимальное преобразование. Ли свел эту задачу к особому случаю, когда между известными инфинитезимальными преобразованиями существуют соотношения вида

$$(X_iX_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}X_sf \quad (i, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Этим самым давалось понятие конечной непрерывной группы и оставалось теперь только установить, как знание инфинитезимальных преобразований, оставляющих инвариантным предложенное линейное дифференциальное уравнение с частными производными и порождающее при этом непрерывную группу, может быть использовано для интегрирования этого дифференциального уравнения».

12 Эти три теоремы были опубликованы в 1874—1878 гг. и содержатся в первом и третьем томах [25] (первая теорема — т. 1, с. 34 и 72, т. 3, с. 563; вторая теорема — т. 1, с. 149 и 158, т. 3, с. 590; третья — т. 1, с. 170 и 297, т. 3, с. 597). См. также [15], [28, с. 228—229].

13 О первых работах по теории групп Ли в России Н. Г. Чеботарёв в 1940 г. писал [31, с. 385]: «Русская литература чрезвычайно бедна книгами по теории непрерывных групп. Существует одесская диссертация А. Д. Агуры [32], посвященная строгому изложению трех основных теорем Ли. Можно еще назвать книгу В. Г. Алексеева [23] по инвариантам алгебраических форм, теория которых излагается здесь при помощи непрерывных групп. Сравнительно подробное изложение теории непрерывных групп содержится также во втором томе «Оснований геометрии» В. Ф. Кагана [33].
Наконец, недавно вышла книга Л. С. Понтрягина «Непрерывные

группы» [34]». Мы добавим также, что ряд авторов рассматривал вопросы теории дифференциальных уравнений в связи со взглядами Ли, в частности, с его теорией непрерывных групп: см. например, работы Н. Н. Салтыкова по теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка ([35] и др.), книгу Д. М. Синцова [36].

[14] Пуанкаре вспоминал [37, с. 625]: «...Исследования в алгебре привели меня к занятиям непрерывными группами. На этом пути я заметил связь, которая существует между этими группами и комплексными числами: я высказал здесь теорему, доказательство которой, занявшись другими работами, я не мог опубликовать, но которая была затем доказана Штуди».

[15] Мы пользуемся здесь свидетельством слушателя этих лекций Н. Джекобсона, который в предисловии к своей книге «Алгебры Ли» писал [40, с. 8]: «Необходимо отметить также, что в этих лекциях профессор Вейль, первоначально интересовавшийся теорией Ли непрерывных групп, поставил предмет этой книги на особенную основу, введя в первый раз термин «алгебра Ли» вместо «инфинитезимальной группы», которая изучалась до сих пор».

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Poisson S. D.* Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de la mécanique.— J. Éc. Polyt. Paris, 1809, vol. 8, p. 266—344.
2. *Имшенецкий В. Г.* Об интегрировании уравнений с частными производными первого порядка. Казань, 1865; а также: *Imschenetsky V. G.* Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, 1869.
3. *Демидов С. С.* Развитие исследований по уравнениям с частными производными первого порядка в XVIII—XIX вв.— ИМИ. М.: Наука, 1980, вып. XXV, с. 71—103.
4. *Jacobi C. G.* Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variablium quemcunque propositas integrandi.— J. rein. angew. Math., 1862, Bd. 60, S. 1—181. То же: Gesamm. Werke. B., 1890, Bd. V, S. 1—189.
5. *Jacobi C. G.* Vorlesungen über Dynamik. B., 1866-Gesamm. Werke. Supplementband. B., 1884; а также: *Якоби К.* Лекции по динамике. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
6. *Jacobi C. G.* Sur un théorème de Poisson.— C. r. Acad. sci. Paris, t. 11, p. 529; то же: Gesamm. Werke. B., 1886, Bd. 4, S. 145—146.
7. *Bertrand J.* Note VII. Dans le livre: *Lagrange J. L.* Mécanique analytique. 3<sup>e</sup> éd. P., 1853, vol. I, p. 422—428; а также: *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1950, т. I.
8. *Сретенский Л. Н.* Аналитическая механика (XIX век).— В кн.: История механики с конца XVIII века до середины XX века/ /Под ред. А. Т. Григорьяна и И. Б. Погребысского. М.: Наука, 1972, с. 7—45.
9. *Визгин В. П.* Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике. М.: Наука, 1972.

10. *Полак Л. С.* Скобки Пуассона.— Тр. Ин-та истории естествозн. и техники АН СССР. М.: Изд-во АН СССР, 1957, т. 17, с. 450—472.
11. *Андреев К. А., Некрасов П. А., Жуковский Н. Е.* Жизнь и научные труды В. Г. Имшенецкого.— Мат. сб., 1896, т. XVIII, с. 348—467.
12. *Юшкевич А. П.* История математики в России. М.: Наука, 1968.
13. *Кочев В. А.* Академик В. Г. Имшенецкий: Автореф. канд. дис.... Свердловск, 1953.
14. *Donkin W. F.* On a class of differential equation, including those which occur in dynamical problems. Pt I.— Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1854, vol. 144, p. 71—113.
15. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. I—III. М.: Мир, 1976.
16. *Descartes R.* Oeuvres/Publiées par Ch. Adam et P. Tannery. Paris. 1898. Vol. 2.
17. *Декарт Р.* Геометрия/Перевод, примечания и статья А. П. Юшкевича. М.; Л.: ГОНТИ, 1938.
18. *Sylvester J. J.* On the principles of the calculus of forms.— Cambridge and Dublin Math. J., 1852, vol. VII, p. 52—97; p. 179—217; то же: The Collected Math. Pap., Cambridge, 1904, vol. I, p. 284—327, 328—363.
19. *Aronhold S. H.* Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie.— J. reine und angew. Math., 1863, Bd. 62.
20. *Cayley A.* Nouvelles recherches sur les covariants.— J. reine und angew. Math., 1854, vol. XLVII, p. 109—125. То же: The Collected Math. Pap., Cambridge, 1889, vol. 2, p. 164—178.
21. *Cayley A.* An introductory memoir upon quantics.— Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1854, vol. CXLIV, p. 244—258; то же: The Coll. Math. Pap., Cambridge, 1889, vol. 2, p. 221—234.
22. *Cayley A.* The Collected Mathematical Papers. Cambridge, 1889, vol. 2.
23. *Алексеев В. Г.* Теория рациональных инвариантов бинарных форм в направлении Софуса Ли, Кэли и Аронгольда. Юрьев, 1889.
24. *Jordan C.* Mémoire sur les groupes de mouvements.— Ann. Math., 1868/1869, vol. 11, p. 167—215, 332—345; то же: Oeuvres. P., 1964, vol. 4, p. 231—302.
25. *Lie S.* Theorie der Transformationsgruppen/Unter Mitwirkung von F. Engel. Leipzig, 1888—1893. Bd. 1—3.
26. *Демидов С. С.* К истории теории С. Ли дифференциальных уравнений с частными производными.— ИМИ. М., 1978, вып. XXIII, с. 87—117.
27. *Lie S.* Gesammelte Abhandlungen. Leipzig etc., 1922—1960. Bd. 1—7.
28. *Freudenthal H.* L'algèbre topologique, en particulier les groupes topologiques et de Lie.— In: XIIe Congr. Intern. d'Hist. Sci. Colloq. Textes des rapports. P., 1968, p. 223—244.
29. *Hawkins Th.* Hypercomplex numbers. Lie groups, and the creation of group representation theory.— Arch. Hist. Ex. Sci., 1972, vol. 8, N 4, p. 243—287.
30. *Розенфельд Б. А.* История неевклидовой геометрии. М.: Наука, 1976.
31. *Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли. М., Л: Гостехиздат, 1940.
32 *Агура А. Д.* Общая теория конечных непрерывных групв преобразований. (Основные теоремы). Одесса, 1913; то же: Зап. матем,

отд-ния Новороссийского о-ва естествоиспытателей. Одесса, 1914, т. XXII, с. 189—446.
33. *Каган В. Ф.* Основания геометрии. Исторический очерк учения об основаниях геометрии. Одесса, 1907, т. 2.
34. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. Л., М.: ГОНТИ, 1938.
35. *Салтыков Н. Н.* Исследования по теории уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции. Харьков, 1905; то же: Сообщ. Харьковского математического общества. Сер. 2, т. 9. Харьков, 1906, с. 60—292.
36. *Синцов Д. М.* Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Харьков, 1913.
37. *Пуанкаре А.* Избранные труды. М.: Наука, 1974, т. 3.
38. *Poincaré H.* Sur les nombres complexes.— C. r. Acad. sci. Paris, 1884, vol. 99, p. 740—742; то же: Oeuvres. P., 1950, vol. 5, p. 77—79.
39. *Engel F.* Zur Theorie der Zusammensetzung der endlichen Transformationsgruppen.— Ber. König. Sächs. Gesel. Wiss. Math.-Phys. Cl., 38 B., 1886, S. 83—94.
40. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
41. *Engel F.* Примечания в: *Grassmann H.* Werke. Leipzig, 1896, Bd. 1, 2.
42. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.

# К ИСТОРИИ МОСКОВСКОЙ ШКОЛЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

## О ВКЛАДЕ ГЕОРГА КАНТОРА В МАТЕМАТИКУ*

П. С. Александров

Думаю, что во второй половине XIX века не существовало математика, оказавшего большее влияние на развитие математической науки, чем создатель абстрактной теории множеств Георг Кантор, однотомник сочинений которого в настоящем издании предлагается в русском переводе вниманию советского читателя. Среди математиков, современников Кантора, только совсем немногие поняли и оценили значительность сделанного Кантором вклада в математику. Правда, среди этих немногих были величайшие представители математической науки того времени, а именно — Дедекенд, которому принадлежит немалая заслуга в создании теории множеств, Пуанкаре

---

* Публикуемый здесь по рукописи текст представляет собой первый вариант предисловия, которое недавно скончавшийся академик П. С. Александров предполагал написать для русского перевода трудов Г. Кантора по теории множеств. Подготовка к печати трудов Кантора для серии «Классики науки» сейчас заканчивается. Еще поздней осенью 1981 г. П. С. Александров намеревался подготовить более обширное по объему и содержанию предисловие, но тяжелая и продолжительная болезнь помешала ему осуществить этот замысел. Мы публикуем этот текст, датированный 14 августа 1980 г., в виде самостоятельной статьи, которую назвали «О вкладе Георга Кантора в математику». При всей краткости и сжатости изложения, эта публикация представляет собой выразительную характеристику того значения, какое приобрели основные идеи Кантора в развитии современной математики,— характеристику, данную одним из крупнейших представителей Московской математической школы, начало которой положили Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин, бывшие первыми научными наставниками П. С. Александрова на рубеже 10—20-х гг. нашего столетия.— *Примеч. редакции.*

П. С. Александров

и Гильберт. Огромное же большинство математиков той эпохи считали, что работы Кантора вообще относятся не к математике, а в лучшем случае к философии. Но история науки как и во многих более ранних аналогичных случаях, вынесла свой приговор, в силу которого сделанное Кантором, является неотъемлемой и фундаментальной частью математики. Счетные и несчетные множества и, вообще, существование бесконечных множеств различных мощностей, в частности, несчетность арифметического континуума (множества всех вещественных чисел), более того, возможность к каждому множеству закономерно построить множество большей мощности, а именно множеств всех подмножеств данного множества; далее понятие упорядоченного, в частности, вполне упорядоченного множества равно как определение и свойства основных действий над множествами, отображений множеств — без этих и подобных им понятий элементарной теории множеств нельзя себе в настоящее время представить не только так называемую высшую математику, но и сколько-нибудь научную ее трактовку.

Но Кантор не только ввел основные понятия общей (или абстрактной) теории множеств, он ввел и основные понятия, касающиеся точечных множеств, т. е. множеств, элементами которых являются вещественные числа (точки числовой прямой или, вообще точки $n$-мерного арифметического пространства): речь идет о таких понятиях как замкнутое множество, а также множества всюду плотные и нигде неплотные на прямой или в $n$-мерном пространстве. Введя эти понятия и доказав простейшие, относящиеся к ним теоремы, Кантор стал основателем так называемой теоретико-множественной топологии. Наконец, Кантор показал, что понятия, относящиеся к теории точечных множеств, могут быть предметом своеобразной геометрической интуиции, притом интуиции именно по существу геометрической: он сделал это, определив совершенное нигде неплотное на отрезке $[0; 1]$ числовой прямой множество, известное сейчас под названием канторова совершенного множества или канторова дисконтинуума. Вся важность этого действительно фундаментального открытия была вполне понята и оценена Пуанкаре, которому мы и обязаны первыми приложениями канторова совершенного множества в качественной теории дифференциальных уравнений и в небесной механике.

Сочинения Кантора принадлежат к самым первым математическим работам, прочитанным автором этого предисловия в ранней юности. Они произвели на него неизгладимое впечатление; и он надеется, чтобы работы Кантора, сделавшись в русском переводе доступными многим и многим тысячам молодых советских читателей, с увлечением будут изучаться ими и помогут выявлению среди них молодых людей, имеющих интерес и способности к математике.

# НЕОПУБЛИКОВАННОЕ ПИСЬМО Н. Н. ЛУЗИНА Ф. КЛЕЙНУ
## (из истории научных связей математиков СССР и Геттингена)

А. П. Юшкевич

В октябре 1981 г., будучи в научной командировке в ФРГ, я провел несколько часов в Библиотеке Гёттингенского университета и познакомился с хранящимися там в Отделе рукописей письмами наших отечественных математиков, астрономов и физиков. Всего таких писем 159 и охватывают они время с 1786 по 1930 гг. В своей совокупности эти письма, сведения о которых почти не появлялись в печати, отражают широкие научные контакты между русскими и гёттингенскими учеными [1], временно прервавшиеся в 1933 г., когда власть в Германии захватили нацисты, и возобновившиеся уже после Великой Отечественной войны. Несомненно, что сохранилась только часть писем: далеко не все ученые хранят полностью свою корреспонденцию; кроме того, некоторые архивные фонды погибли или были увезены из Гёттингена [2]. Следует надеяться, что письма, о которых идет речь, будут впоследствии тщательно изучены и, по крайней мере в значительной части, опубликованы вместе с соответствующими письмами гёттингенских ученых, сохранившимися в Советском Союзе. Об интересе находящихся в Гёттингене писем говорят уже одни имена корреспондентов: здесь есть 14 писем В. Я. Струве К. Ф. Гауссу (1815—1847), 2 письма Н. Е. Жуковского Ф. Клейну (1895—1896), 10 писем тому же Клейну А. А. Маркова-старшего (1880—1901), 12 писем В. А. Стеклова Ф. Клейну, А. Гурвицу и Д. Гильберту (1892—1908), 6 писем Клейну от С. Н. Бернштейна (1905—1910) и т. д. Ниже публикуется, с любезного согласия руководителя Отдела рукописей Библиотеки Гёттингенского университета д-ра К. Генеля (Hänel) русский перевод адресованного Ф. Клейну письма Н. Н. Лузина, немецкий оригинал которого хранится

---

[1] Некоторые письма адресованы математикам, в годы переписки не работавшим в Гёттингене — Р. Дедекинду и А. Гурвицу.

[2] Сказанное относится, например, к архивному наследию Э. Ландау или Э. Нётер.

в фонде Klein—Nachlass, X, № 899b. Н. Н. Лузин адресовал свое письмо не Д. Гильберту, возглавлявшему тогда Гёттингенскую математическую школу, а Ф. Клейну как старейшине гёттингенских математиков.

### Письмо Н. Н. Лузина Ф. Клейну

Москва, ул. Арбат 25 (8) 14.V.1923

Глубокоуважаемый господин тайный советник,

Настоящим позволяю себе представить Вам моих учеников, гг. приват-доцентов Павла Александрова, Семена Ковнера и Павла Урысона; эти господа занимаются главным образом теорией функций и Analysis situs, в области которых, они помимо ряда других работ, написали некоторые заметки для Comptes rendus [3].

Упомянутые господа были бы счастливы, если бы получили разрешение посещать заседания Гёттингенского математического общества.

Названные молодые ученые и я, как их учитель, были бы Вам бесконечно благодарны, если бы Вы соблаговолили оказать им Ваше любезное содействие в тех направлениях, которые сочтете целесообразными.

С глубочайшим почтением готовый к услугам и преданный Вам

*Николай Лузин*

### Пояснения к письму Н. Н. Лузина

Два рекомендованных в приведенном письме ученика Н. Н. Лузина, П. С. Александров (1896—1982) и П. С. Урысон (1898—1924), всего лишь год спустя погибший от несчастного случая при купании в Атлантическом океане, приобрели мировую известность своими основополагающими исследованиями, особенно по теоретико-множественной топологии. Третий из них, С. С. Ковнер (1896—1962) не оставил заметного следа в развитии теории функций. Профессор (1931) и доктор технических наук (1958), сотрудник различных научных институтов и Московского текстильного института, он опубликовал ряд работ по различным вопросам математики и ее приложений к задачам геофизики и техники.

Для оценки приведенного рекомендательного письма Н. Н. Лузина, его следует рассмотреть в исторической

[3] Речь идет о Comptes rendus Парижской академии наук.— *Примеч. А. Ю.*

перспективе связей между русскими и гёттингенскими учеными. Гёттингенский университет, основанный в 1734 г., начал играть крупную роль в развитии математики с конца XVIII в., сначала благодаря педагогической деятельности А. Г. Кестнера, читавшего в нем лекции с 1753 г. Слушателями Кестнера были, среди других, Бартельс (с 1808 г. профессор Казанского университета, руководивший студенческими занятиями Лобачевского), Бояи-старший, И. Иде (в 1804—1806 гг. профессор Московского университета), Гаусс. Руководства Кестнера по высшей математике принадлежали в свое время к числу лучших, их изучение оказало заметное влияние на молодого Больцано. В первые две трети XIX в. профессорами Гёттингенского университета были Гаусс, Листинг, Лежен-Дирихле, Риман. В конце XIX и особенно в первой трети XX в. Гёттинген становится крупнейшим математическим центром, привлекающим молодых ученых всего мира. В этом большую роль сыграли Ф. Клейн, получивший в Гёттингене профессуру в 1886 г., затем приглашенные им в 1895 г. Д. Гильберт и в 1902 г. Г. Минковский, преемником которого после его смерти в 1909 г. был выбран Э. Ландау. Когда Клейн по состоянию здоровья в 1913 г. оставил свою кафедру, ее получил Курант. В первой трети XX в. в Гёттингене работали и другие крупнейшие немецкие математики: Э. Нётер, Г. Вейль и др.[4] Русские ученые высоко ценили своих гёттингенских коллег, о чем говорит хотя бы избрание иностранными членами или членами-корреспондентами Академии наук СССР (прежде — Петербургской академии наук) Кестнера, Гаусса, Лежен-Дирихле, Клейна, Гильберта, Ландау и Куранта [2]. Со своей стороны ученые Гёттингена высоко ценили открытия русских математиков. Гаусс первый в мире признал заслуги Н. И. Лобачевского в создании неевклидовой геометрии, которого по его предложению избрали в 1842 г. членом-корреспондентом Гёттингенского научного общества (Академии наук). Работы П. Л. Чебышева по теории чисел стимулировали творчество Ландау. Гильберт при переиздании своих «Оснований геометрии» (1 изд. 1899 г.) учел исследования об измерении объемов многогранников одесского математика С. О. Шатуновского, и т. д.

[4] История Гёттингенской школы Клейна—Гильберта описана в книге [1].

В связи с публикуемым письмом Н. Н. Лузина особый интерес представляют контакты между московскими и гёттингенскими математиками. Б. К. Млодзеевский после защиты докторской диссертации во время заграничной командировки 1890—1892 гг. посетил Гёттинген (см. [3]), сохранились два письма его Клейну от 1891 и 1905 гг. Д. Ф. Егоров, также после докторской защиты, провел в Гёттингене летний семестр 1902—1903 гг., причем посещал лекции Клейна, Гильберта и Минковского [4, с. 170—171]; бывал он в Гёттингене и во время других своих заграничных командировок. Именно Егоров, вслед за Млодзеевским, обратил в Московском университете внимание на новые направления, разрабатывавшиеся в Гёттингене. О своей только что упомянутой поездке, в ходе которой он посетил также Берлин и Париж, Егоров докладывал на заседании Московского математического общества 28.10 (10.11). 1903 г. [4, с. 206]. В трех сохранившихся письмах Егорова Гильберту от 1905—1906 гг. речь идет о задаче вариационного исчисления, носящей имя немецкого математика Майера; эта задача является предметом статьи Егорова, напечатанной в «Mathematische Annalen», т. 62, за 1906 г.

Несомненно, что как раз по совету Егорова Н. Н. Лузин во время своей трехлетней второй заграничной командировки (первая, полугодичная, была в Париж, она началась в декабре 1905 г.), прежде всего побывал в Гёттингене, где занимался с осени 1910 до конца 1912 или начала 1913 г., когда переехал в Париж, откуда вернулся в Москву в начале 1914 г. Научные интересы Лузина относились более всего к теории функций, в то время особенно культивировавшейся парижскими учеными, но и пребывание в Геттингене сыграло большую роль в его становлении как ученого. Лузин мало посещал лекции, которые давали ему гораздо меньше, чем беседы, очень много времени проводил в чрезвычайно богатой университетской библиотеке и занимался собственными исследованиями по теории тригонометрических рядов. Здесь же он написал, по настоянию Ландау, свою первую научную работу «Об одном степенном ряде», напечатанную на немецком языке в «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo», т. 32, за 1911 г. [5, с. 17—18].

После поездки Лузина связь московских математиков с Гёттингеном в силу вскоре наступивших политических событий на ряд лет прекратилась. Поездка П. С. Александрова, С. С. Ковнера и П. С. Урысона явилась первым посещением Гёттингена советскими математиками. Об этой поездке подробно и красочно не так давно рассказал П. С. Александров [6; 7, с. 245 и след.]. Здесь следует отметить только два обстоятельства. Во-первых, идея поездки в Гёттинген принадлежала самим П. С. Александрову и П. С. Урысону; Н. Н. Лузин только содействовал осуществлению их замыслов. Во-вторых, связи П. С. Александрова с Гёттингенской математической школой, существовавшие в течение 10 лет, а также П. С. Урысона, прерванные его неожиданной кончиной, носили двухсторонний характер. Советские математики многое получили от гёттингенских, но и сами внесли значительный вклад в развитие математики в Гёттингене своими лекциями и публикациями. Здесь нет необходимости входить в детали, прекрасно рассказанные в названных работах П. С. Александрова. О том, какое значение придавали немецкие математики прямым контактам с Александровым и другими советскими учеными и об успехе лекций и семинаров Александрова в Гёттингене, читатель может узнать из биографии Р. Куранта, написанной К. Рид [9, с. 105—107].

Поездка трех советских ученых, о которых идет речь, явилась началом возобновления контактов между московскими и гёттингенскими математиками. Позднее в Гёттинген в разное время приезжали в научные командировки А. О. Гельфонд, А. Н. Колмогоров, Л. А. Люстерник, Л. С. Понтрягин и Л. Г. Шнирельман. Ярко описал свое пребывание в Гёттингене и Берлине весной 1930 г. А. О. Гельфонд [8], на конкретных примерах показавший, сколь плодотворными были научные связи между московскими и гёттингенскими математиками той поры.

Однако в 1930 г. уже явственно были признаки приближавшихся в Германии перемен. Я помню, как по возвращении из Гёттингена А. О. Гельфонд с тревогой рассказывал о нарастающей здесь волне шовинизма и все усиливающейся активности нацистов, о шествиях по улицам немецких городов хулиганствующих молодчиков с фашистской эмблемой на рукавах. Визит П. С. Александрова в Гёттинген осенью 1932 г. был последним на долгие годы вперед; в 1933 г. Гёттингенская научная школа была разгромлена. Годы спустя после окончания Великой отечественной войны к работе приступило новое поколение гёттингенских ученых и ныне развитие математики находится на подъеме. Восстановились научные контакты с советскими математиками. В 1958 и последующие годы Гёттинген не раз посещал П. С. Александров. Приятно отметить, что в большой аудитории Математического Института в Гёттингене среди портретов выдающихся математиков имеется и его портрет.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Рид К.* Гильберт/Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
2. *Юшкевич А. П.* Немецкие математики — члены Академии наук СССР.— ИМИ, 1982, вып. XXVI.
3. *Россинский С. Д.* Болеслав Корнелиевич Млодзеевский. 1858—1923. М.: Изд-во МГУ, 1952.
4. *Кузнецов П. И.* Дмитрий Федорович Егоров: (к 100-летию со дня рождения).— Усп. мат. наук, 1971, т. XXVI, вып. 5.
5. *Голубев В. В.* и *Бари Н. К.* Биография Н. Н. Лузина.— В кн.: *Лузин Н. Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
6. *Александров П. С.* Воспоминания о Гёттингене.— ИМИ, 1977, вып. XXII.
7. *Александров П. С.* Страницы автобиографии.— Усп. мат. наук, 1979, т. 34, вып. 6; 1980, вып. 3.
8. *Гельфонд А. О.* Некоторые впечатления о научной поездке в Германию в 1930 г.— ИМИ, 1977, вып. XXII.
9. *Reid C.* Courant in Göttingen and New York. New York — Heidelberg — Berlin, Springer — Verlag, 1976.


## ПИСЬМО Н. Н. ЛУЗИНА К М. ФРЕШЕ [1]

**(Публикация и примечания А. П. Юшкевича)**

4, ул. Турнефора<br>(около Пантеона)<br>Пансион «Паризиана»<br>Париж V<br>24 июня 1926 г.

Высокочтимый господин и дорогой коллега,

я весьма счастлив, что получил Ваше столь любезное и столь желанное для меня письмо [2]. К несчастью, это письмо пришло, когда мы оба, моя жена и я, совершали небольшую поездку по прекрасным городам французских провинций.

Я получил Ваши весьма важные работы и весьма благодарен за Ваше внимание и Вашу любезность. Я весьма счастлив иметь Ваши оттиски, так как Вы, дорогой коллега, проникаете с таким успехом в столь таинственную область Множеств.

Уже давно я хотел установить с Вами прямой контакт, но я почти не знаю французский язык, во всяком случае настолько, чтобы суметь вполне свободно написать письмо: подготовить статью и написать письмо — вещи совсем различные!

Лишь это незнание языка [3] всегда являлось подлинной причиной моего молчания, между тем стремление и даже необходимость вступить с Вами в непосредственный контакт все время сохранялись: я имею столь многое сказать Вам!

Буду крайне рад, дорогой коллега, если Вы сможете не обращать внимание на мои многочисленные ошибки и если между нами установится постоянный контакт.

Я уезжаю в Варшаву 2 июня и, полагаю, буду в Москве 12 июля [4]. Мой постоянный московский адрес:

Москва, улица Арбат, 25 (квартира 8).

Весьма признателен Вам за Ваше столь любезное приглашение побывать у Вас в Страсбурге. К сожалению, это для нас сейчас невозможно, ибо наш отъезд в Москву является неотложным.

В настоящее время я изучаю множества, определяемые с помощью операции **проектирования** и **дополнения** [5].

$PC\ PC \ldots E$ и $CP\ CP\ C \ldots E$.

Меня отпугивают эти множества, углубленное изучение которых станет, думаю, роковым для теории множеств [6].

Примите, дорогой коллега, уверение в моем самом глубоком уважении

*Николай Лузин.*

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Французский оригинал данного письма хранится среди бумаг М. Фреше в Архиве Академии наук Института Франции. Редакция «Историко-математических исследований» благодарна архивариусу г. П. Бертону за разыскивание этого письма, которое причинило ему немало хлопот (так как оно оказалось не в той папке, как было указано в описи бумаг Фреше), и за любезное разрешение опубликовать его русский перевод.

Морис Рене Фреше (1878—1973) — французский математик, автор ценных исследований в областях абстрактной топологии, функционального анализа и теории вероятностей; член Академии наук Института Франции (1956) и многих других научных учреждений и обществ. В 1920—1927 гг. был профессором университета в Страсбурге.

**Н. Н. Лузин**
**(1925 г.)**

У меня нет никаких возражений против изложенной Вами классификации. Но вполне ли Вы уверены, что она является тою же самой, что и моя, и что она заслуживает наименования классификации Бэра—де ла Валле Пуссена, которое Вы дали ей? [3]

К классу $\alpha$ я отношу множества $E$, характеристическая функция $\theta$ которых принадлежит классу $\alpha$ Бэра. В этом случае $\theta$ является пределом функций классов $<\alpha$, на которые не накладывается никаких ограничений (моя книга «Интегралы и т. д.», № 36) [4].

Вы относите к классу $\alpha$ множества, являющиеся пределами множеств классов $<\alpha$. В том случае, когда $\theta$ (характеристическая функция множества $E$) принадлежит классу $\alpha$ Бэра, $\theta$ является пределом функций классов $<\alpha$, принимающих лишь значения 0 и 1.

Действительно, именно последнее определение Вы явно приписываете мне в сноске на с. 53 [5].

Однако мне не удалось установить эквивалентность этих двух определений. Вполне возможно, что доказательство является очень простым, но тогда мне было бы очень полезно ознакомиться с ним.

Что Вы думаете об этом?

Примите, уважаемый господин и коллега, выражение наших самых искренних и самых преданных чувств.

*Ш. де ла Валле-Пуссен*

Проф. университета. 155 авеню Союзников, Лувен.

II

Лувен, 8 марта 33 г.

Господину Н. Лузину.

Дорогой и славный коллега,

Я, право, смущен тем трудом, который Вы затратили на столь длинный ответ. Но Вы не зря потратили Ваше время, так как заставили меня значительно лучше понять Вашу точку зрения, а вопрос, который я задал Вам, полностью решен. Две классификации множеств эквивалентны даже на обычном континууме, за исключением первого класса $\alpha = 1$ (что несущественно) [6].

Разве что, мне не удалось доказать Вашу глубокую теорему о несуществовании двусторонних классов (о которой я не думал) [7]. Я рассматриваю лишь множества $F$ и $O$ класса $\alpha$ (Лебега), пользуясь теоремами пп. 131 и след. моей книги [8]. Фактически, я непосредственно получаю следующую теорему:

Пусть $E$ — множество класса (абсолютного) $\alpha + 1$, т. е. его характеристическая функция принадлежит классу (абсолютному) $\alpha + 1$; тогда это множество $E$ является одновременно произведением множеств $O$ класса $\alpha$ и суммой множеств $F$ класса $\alpha$ (Лебега). Предполагается, что $\alpha \geqslant 1$ [9].

В самом деле, характеристическая функция $\theta(x)$ множества $E$ является пределом последовательности функций класса (абсолютного) $\leqslant \alpha$

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

Пусть $0 < a < b < 1$. Множество $E$ является пределом последовательности множеств $O$ класса $\alpha$ (Лебега)

$$O_n = E\,(a < f < b)\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

и одновременно пределом множеств $F$ класса $\alpha$ (Л.[ебега])

$$F_n = E\,(a \leqslant f \leqslant b)\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Имеем, следовательно,

$$E = \lim O_n = (O_1 + O_2 + O_3 + \ldots)(O_2 + + O_3 + \ldots)(O_3 + \ldots)\ldots,$$

$$E = \lim F_n = F_1F_2F_3\ldots + F_2F_3\ldots + F_3\ldots + \ldots,$$

что и доказывает предложение, поскольку сумма множеств $O$ есть тоже некоторое множество $O$, а произведение [пересечение] множеств $F$ есть некоторое $F$ того же класса (Л.[ебега]).

Из предыдущей теоремы непосредственно следует, что как $E$, так и $CE$, являются суммами множеств $F$ класса $\alpha$ (Л.) [10].

Благодаря Вам я теперь сразу же получаю доказательство окончательной теоремы, которая такова:

Множество $E$ класса (абсолютного) $\alpha + 1$ является пределом множеств $E_n$ самое большее класса (абсолютного) $\alpha$.

Действительно, ввиду сделанного Вами замечания

$$E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots, \qquad CE = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots,$$

где множества $\varepsilon$ и $\eta$ являются множествами $F$ класса $\alpha$ (Л.), а значит пределами множеств $O$ класса $\alpha - 1$ (Л.), причем последние являются множествами самое большее класса (абсолютного) $\alpha$ (№ 133 моей книги). Тогда, как и на странице 59 Вашей книги [11], $E$ является пределом множеств $E_n$ самое большее класса (абсолютного) $\alpha$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$E_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^n C\eta_1^n C\eta_2^n \ldots C\eta_n^n.$$

Вопрос решен.

Перехожу теперь к другим соображениям.

Мне кажется, что вся Ваша теория структуры множеств сохраняется, с небольшими исключениями, на обычном континууме. С другой стороны, можно возразить против рассмотрения множеств на области $I$ Бэра: это вводит в вопрос некий метрический элемент, который здесь недопустим. В самом деле, всякое наложение континуума на континуум преобразует множество, измеримое ($B$), в другое множество, строящееся в точности также, исходя из интервалов.

Такое же соображение возникает у меня в связи с параметрическим изображением множеств. Для построения этой теории достаточно исключить счетное множество точек, являющееся всюду плотным на континууме. Выбор рациональных точек является произвольным и не дает самую простую систему, ибо еще проще был бы выбор дробей со знаменаталем $2^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Привлечение непрерывных дробей (определяемых сложными арифметическими вычислениями!) тоже довольно искусственно. Эти дроби позволяют определить лишь решетки и ячейки (интервалы Бэра), а тогда нельзя относительно просто арифметически определить a priori сети [12]. Готовится второе издание моей книги, и именно это заставило меня обратиться к данным вопросам; у меня есть возможность добавить туда приложение о параметрическом изображении множеств, измеримых $(B)$, где я изложу указанным образом абсолютно фундаментальные результаты, которые Вы установили [13].

На странице 2 Вашей книги Вы цитируете такой отрывок из работы Бореля:

«Ясно, что все числа, которые можно определить эффективно, образуют счетное множество. Под словами «определить эффективно» следует понимать: определить при помощи конечного числа слов...» [14].

Эта фраза недостойна для такого математика, каким является Борель. Понятие «числа, которые можно определить конечным числом слов», абсолютно неясно и неопределенно, а множество их не существует. Это все равно, что спрашивать, является ли счетным множество различных смыслов, которые можно придать одной и той же фразе, или будет ли счетным множество различных языков.

К тому же, если мы пожелаем придать некий смысл утверждению Бореля, то получим, что это утверждение смутно и противоречиво в себе.

Действительно, предположим, что мы перенумеровали множество чисел, определимых при помощи конечного числа слов. Тогда эта нумерация позволяет определить при помощи конечного числа слов число, не содержащееся в указанном множестве (посредством рассуждения, каким доказывают, что континуум несчетен) [15].

Единственное, что я допускаю, так это то, что множество чисел, которые можно определить индивидуально, всегда будет конечным.

Спасибо, наконец, за интересную «Заметку», присоединенную к Вашему письму, в которую, однако, у меня еще не было времени вникнуть. Вы ставите вопрос: является ли заданной последовательность целых чисел? Если принимать слово «заданная» в строгом смысле, то я ответил бы нет.

Извините, пожалуйста, за этот небольшой математический кавардак в связи с Вашей книгой, которая чрезвычайно замечательна во всех отношениях, которую я изучил и с удовольствием, и с выгодой для себя. Примите, в заключение, самые лучшие чувства и самые искренние пожелания полного и совершенного здоровья от преданного и признательного Вам

*Ш. де ла Валле-Пуссена*

P. S. Не знаю, когда появится новое издание моей книги. Я еще не держал корректуру, но Вы будете одним из первых, кто получит эту книгу.

## III

Уважаемый господин и коллега,

Я только что получил Ваше второе письмо от 14 марта. Я уже ответил на предыдущее, однако мое письмо не дошло по назначению. Сожалею об этом, ибо в нем я особенно хотел выразить свою благодарность за труд, который Вы вложили в то, чтобы ответить мне столь подробно. Впрочем, у меня теперь полная ясность в вопросе, который Вы поставили. Это довольно важно, так как я посвятил несколько недель тексту второго издания моей книги у Готье—Виллара.

1. Ваша классификация множеств при помощи перехода к пределу и моя, основанная на характеристических функциях, являются идентичными, за исключением $\alpha = 1$ (что несущественно). Отрывки из моей книги, которые Вы цитируете, явно свидетельствуют, что я поставил этот вопрос в 1916 г., не решив его [16]. Вся заслуга в его решении принадлежит Вам, и это решение таково.

Теперь доказательство идентичности определений почти очевидно. Нужно доказать, что некоторое множество класса $\alpha$ в моем смысле, т. е. некое $A$ класса $\alpha$ [17], является пределом множеств $A$ меньших классов (или характеристических функций меньших классов). Требуется, следовательно, показать, что предложение $3^0$ на странице 137 моей книги справедливо для $\alpha$ первого рода. Сейчас я это докажу.

Пусть $E$ есть некое $A$ класса $\alpha$ первого рода. $CE$ также является некоторым $A$ класса $\alpha$, и оба они являются суммами множеств $F$ класса $<\alpha$. Итак, пусть

$$E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots, \quad CE = \eta_1 + \\ + \eta_2 + \ldots + \eta_n + \ldots;$$

$\varepsilon_i$ и $\eta_i$ суть множества $F$ классов $<\alpha$, а значит пределы множеств $\varepsilon_i^n$ и $\eta_k^n$, представляющих собой множества $O$ класса $<\alpha - 1$, а потому и $A$ принадлежит классу $\alpha - 1$. Эти обозначения находятся на странице 59 Вашей книги, а $E$, которое Вы строили на той же странице, оказывается пределом множеств $E_n$ класса $<\alpha$. Доказательство применимо и в случае $\alpha = 2$.

Последнее показывает, что для проведения доказательства у меня не хватало именно построения множеств $E_n$ [18]. Следовательно, это построение оказывается существенным элементом теории и оно принадлежит Вам.

Помимо этого, я полностью согласен с Вами в том, что классификация при помощи перехода к пределу более логична и более философична, чем классификация при помощи характеристических функций, и что характеристические функции представляют собой лишь удобный инструмент доказательств. Но этого я в 1916 г. не заметил.

2. Я хорошо понял тесную связь между Вашими концепциями множеств, достижимых сверху и снизу, с множествами $F$ и $O$ Лебега и моими множествами $A$, и я отмечу это в новом издании книги, находящейся в печати. Однако, как мне кажется, множества $A$ класса $\alpha$ второго рода не обязательно будут двусторонними [19].

Преимущество множеств $O$ и $F$ Лебега заключается в том, что они несомненно существуют для классов нуль и один.

Я убежден также, что вся Ваша классификация может быть выражена через $F$, $O$ и $A$. Вот почему Ваши теоремы справедливы как для естественного континуума, так и для континуума Бэра. Однако рассмотрение области $I$ Бэра мне кажется досадным, поскольку метрическое понятие вносится в вопрос, не требующий его. Строение множеств, измеримых $(B)$, остается инвариантом наложения одного пространства на другое,— это суть дескриптивные свойства (мне кажется, что было бы точнее говорить «топологические свойства») [20].

3. Вы предлагаете модифицировать определения множеств $O$ и $F$ класса $\alpha$. Вы говорите, что $F$ принадлежит классу $\alpha$, если оно является общей частью счетного множества множеств класса $<\alpha$. И т. д.

Эта модификация приводит к изменению определения Лебега лишь тогда, когда $\alpha$ является числом второго рода. Множество $F$ класса $\alpha$ в смысле Лебега может быть общей частью бесконечного множества множеств $A$ того же класса, но не меньших классов.

Отсюда проистекает некоторое раздвоение класса $\alpha$ второго рода, которое фактически естественно при систематическом построении множеств последовательных классов.

4. Соображения, которыми Вы заканчиваете Ваше письмо и которые относятся к характеру зависимости между классификациями функций и множеств, мне кажутся интересными и глубокими. Они, несомненно, заслуживают того, чтобы Вы занялись ими более основательно. Что касается меня, то боюсь, что у меня сейчас слишком мало времени, чтобы заняться ими, да к тому же это та область, в которой, к сожалению, у меня нет навыков.

5. Результаты, полученные Вами по параметрическому изображению множеств, измеримых $(B)$, кажутся мне столь важными, что я не смог отказаться от того, чтобы не посвятить им приложение в конце нового издания моей книги, которая вскоре появится [21]. Я расхожусь с Вами лишь в одном пункте: провожу рассуждения не для области $I$ Бэра. Ясно, что нужно исключить счетное множество точек, плотное на континууме, однако выбор рациональных точек является произвольным. Я довольствуюсь определением произвольных сетей, ячейки которых образуются с помощью интервалов Бэра, не заботясь ни о каких арифметических свойствах [22].

6. С удивлением я прочел на странице 2 Вашей книги (в сноске), что Вы, как кажется, одобряете утверждение Бореля, будто множество чисел, определимых конечным числом слов, является счетным [23]. Речь идет о действительных числах.

Несомненно, автор хочет сказать, что множество фраз, которые можно построить из конечного числа слов словаря французского языка, является перечислимым. Но это очевидное утверждение не имеет ничего общего с предыдущим.

Понятие числа, определимого при помощи конечного числа слов, является неясным и неопределенным, а множество этих чисел не существует. Это все равно, что спрашивать, является ли счетным множество всевозможных языков, или будет ли счетным множество различных смыслов, которые может получать одна и та же фраза.

Впрочем, если мы придадим некий смысл утверждению Бореля, то оно окажется противоречивым. Действительно, если мы предположим, что рассматриваемое множество является счетным, то само его перечисление дает определение (при помощи конечного числа слов) числа, которое не содержится в нем. Из перечисленной последовательности $S$ мы извлекаем новую последовательность $S_1$, записывая сначала два первых числа множества $S$, затем первое число из $S$, расположенное между двумя последними уже выписанными числами из $S_1$. Предельные числа последовательности $S_1$ определенно не содержатся в $S$.

Примите, дорогой коллега, мою благодарность и мои извинения за доставленные Вам хлопоты, а также выражение самых лучших и самых преданных чувств.

*Ш. де ла Валле-Пуссен.*

21 марта 33 г. 155 авеню Союзников, Лувен.

### Примечания

¹ Шарль Жозеф де ла Валле-Пуссен (Charles Joseph de la Vallée Poussin, 1866—1962) — известный бельгийский математик. Его работы относятся к классическому анализу, теории функций (действительного и комплексного переменного), теории чисел, теории потенциала и механике. Заслуженное признание получил его «Курс анализа бесконечно малых», появившийся впервые в 1899 г. в литографированном виде, а затем изданный в двух томах в 1903—1906 гг. и многократно переиздававшийся впоследствии; первый том был переведен на русский язык в 1922 г., а оба тома появились в русском переводе [1] в 1933 г. О жизни и научной деятельности Валле-Пуссена см. [2].

² Валле-Пуссен ссылается на французское издание. В русском переводе [4] (в «Собрании сочинений»; страницы далее указываются по этому изданию) данная классификация изложена на с. 52—67.

³ Во французском издании [4] классификация измеримых множеств обычно называлась «классификацией Бэра—де ла Валле-Пуссена» (с. 54, 61, 64 *и др.*). В русских переводах она названа только «классификацией Валле Пуссена» [4, с. 53—56 и др.]. В примечании на с. 52 Н. Н. Лузин указал, что Бэр дал лишь классификацию измеримых *B* функций, что первую классификацию измеримых *B* множеств предложил Лебег, но что Валле-Пуссен в своей книге [3] более верен идее Бэра. Об этих классификациях см. [5, с. 147—158; 6, с. 55—64], где указана и соответствующая литература.

⁴ Символ $\alpha$ означает здесь порядковое число Кантора первого или второго числового класса и служит для обозначения класса множеств. Характеристической функцией множества $E \subset [a, b]$ называется функция $\theta(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, равная 1 для точек $x \in E$ и равная 0 всюду вне $E$. В общем виде такие функции ввел

Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен в 1915 г. [7, с. 440] и широко пользовался ими в книге [3]. В сн. 2 на с. 11 французского издания книги [4], опущенной в русских переводах, Н. Н. Лузин высказал предположение, что первым такие функции рассмотрел Э. Борель, приводя две цитаты из работ последнего 1898 и 1912 гг.

5 [4, с. 52, сноска].

6 В отличие от Ш. де ла Валле-Пуссена, изучавшего множества, образованные из точек обычного евклидова континуума, Н. Н. Лузин рассматривал в [4] множества, образованные только из иррациональных точек этого континуума. Множество всех иррациональных точек он обозначал через $I$, $I_x$, $I_y$ и т. д., называл его основной областью и связывал с фамилией Бэра [4, с. 12].

7 В книге [4] Н. Н. Лузин не вводил понятия «двустороннего класса». Скорее всего здесь описка, и речь идет о «двусторонних множествах». Множество $E$, принадлежащее классу $K_\alpha$, Лузин назвал достижимым сверху, если $E$ является пересечением множества множеств классов, меньших $\alpha$. Достижимым снизу он назвал множество $E$ класса $K_\alpha$, если оно является суммой счетного множества множеств классов, меньших $\alpha$. Двусторонним названо всякое множество класса $K_\alpha$, достижимое одновременно сверху и снизу. По-видимому, теорема, о которой пишет Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен, это теорема, сформулированная Н. Н. Лузиным так: «Классы первого рода не могут содержать двусторонних множеств» [4, с. 56]; здесь под классом первого рода понимается класс $K_\alpha$, индексом которого служит порядковое число $\alpha$ первого рода, т. е. трансфинитное число второго класса, имеющее непосредственно предшествующее порядковое число.

8 Множества $F$ и $O$ ввел А. Лебег в 1905 г. [8, с. 156—157], определив их так. Точечное множество называется множеством $F$ класса $\alpha$, если его можно рассматривать как множество $E$ $(a \leqslant \leqslant f \leqslant b)$ для некоторой функции $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, класса $\alpha$, причем такое представление невозможно для функций из классов с меньшим индексом. Точечное множество называется множеством $O$ класса $\alpha$, если его можно рассматривать как множество $E$ $(a < < f < b)$ для некоторой функции $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, класса $\alpha$, причем такое представление невозможно для функций из классов с меньшим индексом. Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен определил $F$- и $O$-множества несколько иначе [3, с. 133]: «Множество $E$ является замкнутым или множеством $F$ класса $\alpha$, если существует функция $\theta$, определенная на $P$, класса $\leqslant \alpha$ и такая, что

$$E = E(\theta = 0),$$

т. е. такая, что $E$ будет множеством точек из $P$, в которых функция $\theta$ обращается в нуль.

Множество $E$ является открытым или множеством $O$ класса $\alpha$, если существует функция $\theta$, определенная на $P$, класса $\leqslant \alpha$ и такая, что

$$E = E(\theta \neq 0)».$$

Здесь $P$ означает совершенное множество.

9 Чтобы отличать свойства множеств, образуемых из точек всего континуума, от аналогичных свойств множеств, образуемых из точек какого-либо подмножества континуума, вроде основной области I Лузина, Валле-Пуссен указывал (в скобках) вид рас-

сматриваемых множеств; слово «абсолютного» означает здесь классы множеств первого вида.

10 $CE$ означает дополнения множества $E$.

11 [4, с. 56].

12 Термины «решетка» (le gril), «ячейка» (la maille) и «сеть» (le résau) Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен ввел [3, с. 61] при рассмотрении дифференцирования функций множеств. Они означали у него в одномерном случае, соответственно, совокупность точек разбиения вещественной оси на равные части, получаемые при этом интервалы и суперпозицию последовательности таких утончающих разбиений.

Н. Н. Лузин считал, что рассматривать множества в области $I$ проще, чем в обычном континууме, потому что континуум образован из разнородных элементов — рациональных и иррациональных точек [4, с. 12, сноска]. Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен правильно подметил здесь неубедительность данного соображения Н. Н. Лузина. См. [9, с. 725, прим. 2].

13 Второе издание книги [3] появилось в 1934 г. В ней содержится специальное приложение, посвященное лузинской теории аналитических множеств.

14 В русских переводах [4] указанные Ш. Ж. де ла Валле-Пуссеном слова, а также продолжение цитаты из книги Э. Бореля [10], приведенной Н. Н. Лузиным во французском издании, опущены. Продолжение цитаты таково: «В геометрическом континууме определенно существуют (если применение здесь глагола «существовать» не является злоупотреблением) элементы, которые нельзя определить: таков реальный смысл важного и знаменитого предложения Г. Кантора, что континуум несчетен. Тот день, когда эти неопределимые элементы будут действительно отброшены и когда мы совсем не будем прибегать к ним более или менее неявно, несомненно приведет к значительному упрощению методов анализа» [4, с. 2 французского издания, сноска]. В той же сноске Н. Н. Лузин утверждал, что проблема исключения объектов, «имеющих бесконечные определения», является самой важной в математике и что ее открыл Э. Борель.

15 Здесь, по-видимому, имеется в виду известный парадокс Ришара. О нем см., например, [6, с. 122—130].

16 Речь идет о цитатах из книги [3], приведенных в письме Н. Н. Лузина Ш. Ж. де ла Валле-Пуссену. Характер вопроса виден из последующего текста письма Валле-Пуссена.

17 Множества $A$ класса $\alpha$ Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен определил так: «Мы скажем, что множество $E$ является двусторонним [ambigu] или множеством $A$ класса $\alpha$, если оно одновременно есть $F$- и $O$-множество класса $\alpha$» [3, с. 135]. Ср. прим. 7 и 8.

18 См. предыдущее письмо Ш. Ж. де ла Валле-Пуссена и прим. 11.

19 См. прим. 7, 8, 13, 17. Трансфинитное число $\alpha$ второго рода — это число, не имеющее непосредственно предшествующего.

20 См. вторую часть прим. 12.

21 Н. Н. Лузин много внимания уделял различным способам задания множеств. Одним из них было введенное им параметрическое изображение множеств, т. е. представление их в виде непрерывных образов пространства $I$ Бэра [4, с. 99—104]. См. также прим. 13.

22 См. прим. 12.

23 См. прим. 14.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Валле-Пуссен Ш. Ж. де ла.* Курс анализа бесконечно малых/ Пер. с франц. под ред. и с прим. Г. М. Фихтенгольца. Л.; М.: ГНТИ, 1933, Т. I—II.
2. *Burkill J. C.* Charles Joseph de la Vallée Poussin.— J. London Math. Soc., 1964, vol. 39, p. 165—175.
3. *Vallée Poussin C. de la.* Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire. P.: Gauthier-Villars, 1916.
4. *Lusin N.* Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. P.: Gauthier-Villars, 1930; то же: *Н. Н. Лузин.* Лекции об аналитических множествах и их приложениях/Пер. Н. К. Бари, ред., предисловие, прим. Л. В. Келдыш и П. С. Новикова. М.: Гостехиздат, 1953; *Н. Н. Лузин.* Собр. соч. Дескриптивная теория множеств. М.: Изд-во АН СССР, 1958, т. II, с. 9—269.
5. *Медведев Ф. А.* Очерки истории теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1975.
6. *Медведев Ф. А.* Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX—XX вв. М.: Наука, 1976.
7. *Vallée Poussin C. de la.* Sur l'intégrale de Lebesgue.— Trans. Amer. Math. Soc., 1915, vol. 16, p. 435—501.
8. *Lebesgue H.* Sur les fonctions représentables analytiquement.— J. math. pures et appl. Sér. 6, 1905, vol. 1, p. 139—216.
9. *Новиков П. С., Келдыш Л. В.* Комментарии к работам Н. Н. Лузина.— В. кн.: *Н. Н. Лузин.* Собр. соч. Дескриптивная теория множеств. М.: Изд-во АН СССР, 1958, т. II. с. 725—739.
10. *Borel É.* Leçons sur la théorie des fonctions. 2e éd. P.: Gauthier—Villars, 1914.


# ВОСПОМИНАНИЯ О МОЛОДЫХ ГОДАХ И О ВОЗНИКНОВЕНИИ МОСКОВСКОЙ ШКОЛЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

**Д. Е. Меньшов**

*От редакции.* В основу текста «Воспоминаний» чл.-корр. АН СССР Д. Е. Меньшова легла магнитофонная запись его беседы с А. П. Юшкевичем в марте 1980 г. в санатории АН СССР «Узкое». Текст записи, переписанный с ленты Е. И. Славутиным и отредактированный А. П. Юшкевичем, был в ноябре того же года дополнен и проверен Д. Е. Меньшовым. В беседе участвовал также С. С. Демидов. «Воспоминания» публикуются в форме вопросов и ответов, какую они имели вначале; вопросы и ответы помечены буквами *В.* и *О.*

Редакция благодарна академикам П. С. Александрову и А. Н. Колмогорову, которые частично познакомились с согласия Д. Е. Меньшова, с его текстом и внесли в него несколько уточнений.

*В.* — Дмитрий Евгеньевич. Вы один из очень немногих ныне здравствующих математиков, являющихся свидетелями и участниками становления Московской школы теории функций. С Вашей стороны весьма любезна готовность рассказать, что Вы помните о жизни Математического отделения Московского университета в 10-е и 20-е годы нашего столетия. Быть может, Вы сперва расскажите о своих гимназических годах?

*О.*— Я родился в Москве 18 (6) апреля 1892 г. Мой отец, Евгений Титович Меньшов, уроженец Тулы, был врачом Ново-Екатерининской больницы, что около Петровских ворот [1], а заодно врачом Лазаревского института восточных языков, находившегося в Армянском переулке [2]. Он умер в 1904 г., 52 лет от роду. Мать, Александра Николаевна, была из дворянской семьи Татищевых. Она свободно говорила по-французски и обучила меня этому языку еще в детстве. Все же, когда я оказался в 1927 г. в Париже, то заметил, что мое произношение отличается некоторым акцентом и постарался от него избавиться. Скончалась моя мать 62 лет в декабре 1918 г.

Среднее образование я получил в гимназии при Лазаревском институте. Арифметика была мне скучна, а вот алгебра и геометрия заинтересовали. Отчасти я был этим обязан преподавателю обоих предметов В. Н. Седашеву, который умер от туберкулеза. Сменивший его учитель сильно уступал Седашеву, но мои склонности уже определились. В последнем, восьмом классе я изучил очень полную и строго написанную «Алгебру» Н. М. Билибина, вышедшую третьим и последним изданием в 1899 г.; Билибин был директором Петербургского реального училища [3].

Кроме математики и физики меня занимала грамматика французского, немецкого и латинского языков, кото-

---

[1] Эта больница теперь называется 24-й Клинической.— *Примеч. ред.*

[2] Ныне в этом здании помещается Институт Востоковедения.— *Примеч. ред.*

[3] О Н. М. Билибине см. в книге: *Лачков А. В.* К истории развития передовых идей в русской методике математики. М.: Учпедгиз, 1951.— *Примеч. ред.*

Д. Е. Меньшов

рые входили в гимназическую программу, и даже армянского, хотя этим языком я не овладел. Но математика стояла на первом месте.

Когда в 1911 г. я окончил гимназию, встал вопрос о выборе высшего учебного заведения. В то время окончившие университет математики шли главным образом в учителя, а меня это совершенно не устраивало, так как я чувствовал, что не сумею следить за дисциплиной учащихся. Я решил пойти в Инженерное училище [4], думая, что там все-таки буду достаточно подробно знакомиться с высшей математикой. Я выдержал конкурсный экзамен, но через полгода убедился, что и это меня не устраивает, что я там как бы задыхаюсь. Через полгода я оттуда ушел, и в течение еще полугода нигде не учился, но стал самостоятельно изучать дома главным образом анализ и частично дифференциальную геометрию.

*В.* — По каким книгам?

---

[4] Московское инженерное училище.

*О.*— Был такой курс К. А. Поссе [5], написанный для технических училищ повышенного типа [6]. Затем по какому-то другому курсу, не помню уже по какому, усвоил основы аналитической геометрии. В общем я изучил таким образом значительную часть того, что преподается на первом и втором курсе Математического отделения Университета.

Тогда я предполагал, что после окончания университета буду зарабатывать на жизнь частными уроками. Революции я в то время, конечно, не предвидел. Это был еще только 1911 г.

И в самом деле, будучи уже студентом, я стал давать частные уроки.

*В.*— Когда же Вы поступили в Московский университет?

*О.*— Осенью 1912 г., причем без вступительных экзаменов, которых в те времена не было. Достаточно было иметь гимназический аттестат зрелости. Желающих поступить было не так много.

*В.*— Какова была тогда обстановка в университете? Кто были Ваши первые лекторы, профессора?

*О.*— На первом курсе анализ читал профессор Л. К. Лахтин, а аналитическую геометрию и высшую алгебру — профессор К. А. Андреев. Лахтин читал очень четко, ясно, но материала давал немного, во всяком случае меньше, чем я уже знал. В общем, его изложение было довольно близко по содержанию к учебнику Поссе.

*В.*— Каков был уровень строгости курса Л. К. Лахтина? Когда я слушал введение в анализ у того же Л. К. Лахтина в 1923 г., изложение было довольно упрощенное, быть может, применительно к уровню подготовки многих тогдашних студентов.

*О.*— Нет, в мои студенческие годы Лахтин читал лекции достаточно строго, конечно, по тем временам. В них не доказывались многие теоремы, которые считались очевидными и которые теперь доказываются на первом же курсе

---

[5] Основные биографические сведения о большинстве упоминаемых в «Воспоминаниях» лиц читатель может найти в книге: *Бородин А. И., Бугай А. С.* Биографический словарь деятелей в области математики. Киев: Радянська школа, 1979. В отдельных случаях указаны и другие биографические источники.— *Примеч. ред.*

[6] *Поссе К. А.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. СПб., 1891.

(например, существование максимума и минимума у функции, непрерывной на отрезке; обращение непрерывной функции, имеющей на концах отрезка разные знаки, внутри отрезка в нуль и т. п.). По содержанию курс Л. К. Лахтина был даже более сжатый в сравнении с учебником Поссе, и я узнал из него мало нового. Все же я с удовольствием все прослушал по второму разу. Помню, что определение предела Лахтин давал с $\varepsilon$ и $\delta$, чего у Поссе не было. Правда, такие определения предела я прочитал раньше в учебнике Билибина.

*В.*— Существовали ли семинарские упражнения?

*О.*— Конечно, они были. Вел их, кажется, А. А. Дмитровский, который еще долго преподавал (впоследствии в звании доцента) в Университете.

*В.*— Заинтересовали ли Вас лекции по механике и другим предметам?

*О.*— В то время было вольное посещение лекций. По физике и по химии я прослушал только по одной лекции. Но сдавать экзамены по этим предметам, как и по механике, было обязательно. Добавлю, что первая же лекция по физике представилась мне скучной, и я больше не слушал этот курс, который читал К. П. Яковлев и который был небогат новыми идеями. О теории относительности в курсе не было и речи. А ведь шел 1912 г., теория же эта — я имею в виду специальную теорию относительности, была создана в 1905 г.

*В.*— Я прослушал несколько лекций того же К. П. Яковлева в 1924 г. По-видимому, он читал в том же духе, что и десятью годами ранее.

Изучали ли Вы что-либо сверх обязательной программы?

*О.*— Поскольку все, что читалось на лекциях первого курса, я уже знал, я стал штудировать первый том известного курса анализа Э. Гурса, который незадолго перед тем, в 1911 г., вышел в русском переводе А. И. Некрасова под редакцией нашего профессора Б. К. Млодзеевского. Здесь я нашел и неизвестные мне вещи, например доказательство теоремы о существовании неявной функции. В прослушанном мною университетском курсе она не доказывалась.

На втором году обучения я впервые прослушал один из курсов профессора Д. Ф. Егорова, именно его лекции по дифференциальной геометрии. Читал он очень точно и четко, но нетемпераментно. Писал на доске так же четко, как говорил. Я слушал у него и другие курсы, например теорию чисел и вариационное исчисление.

*В.*— Когда Вы стали участвовать в семинаре Д. Ф. Егорова?

*О.*— Этот семинар, существовавший к тому времени уже ряд лет, я стал посещать во втором семестре второго курса, т. е. в первом полугодии 1914 г.

Желающих работать в семинаре Егоров распределил на шесть групп. Две группы изучали теорию расходящихся рядов, одна группа — теорию рядов измеримых функций, главным образом, ортогональные ряды. Остальные темы я не помню. Я участвовал в группе, изучавшей теорию функциональных рядов, в основном ортогональных рядов, там мы познакомились с теоремой Фишера—Рисса. Попасть в эту группу желающих было очень много, так что Егоров принял далеко не всех и оставшихся перевел в другие группы. Я был принят в названную группу, так как на экзамене по дифференциальной геометрии воспользовался теоремой о неявной функции, что произвело на экзаменовавшего меня Егорова хорошее впечатление и он убедился, что я серьезно интересуюсь математикой. В этой же группе были Д. К. Казаринов, М. Орбек [7], Л. И. Поливанов, который потом переехал в Нижний Новгород (ныне Горький), А. Я. Хинчин и еще некоторые другие студенты [8].

Д. Ф. Егоров указал нам основную литературу для чтения, прежде всего первый том известного курса Ш. Ж. де ла Валле-Пуссена, в мелком шрифте содержавшем обширный круг сведений по теории функций действительного переменного (русский перевод 3-го французского издания вышел в 1922 г.), а затем различные статьи Ф. Рисса и других математиков. Трудностей с языками у меня не было: французский и немецкий я достаточно изучил в гимназии, а английский — самостоятельно еще до поступления в университет.

---

[7] О М. Орбеке, французском подданном, окончившем Московский университет в 1916 г. и уехавшем затем во Францию, см.: Историко-математические исследования, 1977, вып. XXIII, с. 336.— *Примеч. ред.*

[8] Ср. о семинаре Д. Ф. Егорова воспоминания П. С. Александрова, начавшего в нем работу весной 1914 г.: *Александров П. С.* Страницы автобиографии.— Усп. мат. наук, 1979, т. 34, вып. 6(210), с. 232.— *Примеч. ред.*

Помимо посещения лекций по математике, я ежедневно по шесть часов занимался ею дома, причем перемежал два часа занятий с двухчасовыми прогулками. В то время я проработал вторые тома курсов Гурса и Валле-Пуссена.

*В.*— Как проходили занятия Вашего семинара?

*О.*— Каждая группа собиралась на квартире одного из участников, моя, в частности, у Орбека, жившего на Пречистенке (ныне улица Кропоткина). Мы обсуждали вместе все трудные вопросы. Если что-нибудь было не понятно, мы могли обратиться к Д. Ф. Егорову. Один раз в неделю Егоров обязательно принимал каждую группу у себя на квартире. Но, по-моему, фактически трудных вопросов у нас не было. Скорее мы ставили и обсуждали с руководителем различные вопросы сверх того, что было нам задано. Подготовив таким образом сообща доклад, мы сами намечали докладчика. В моей группе делал доклад С. Н. Кузьмин. Это был исключительно хороший докладчик, который, вероятно, потом стал прекрасным лектором, но мне неизвестно, вел ли он какую-либо творческую работу. Позднее он был профессором втузов в Москве.

*В.*— Вы сами выступали с докладами?

*О.*— На этом семинаре я еще не выступал с докладами. Тогда я вообще не умел хорошо рассказывать.

Продолжаю далее. Каждый доклад,— всего их было по числу групп шесть, делался на собрании всех групп вместе. Кроме студентов присутствовали и начинающие молодые ученые, например И. И. Привалов и В. В. Степанов. Когда я был на втором курсе, Привалов, окончивший университет в 1913 г., проходил первый год занятий в качестве оставленного при университете для подготовки к профессорскому званию,— это примерно соответствовало нашей аспирантуре. Когда я был на первом курсе, я прослышал от товарищей, что Привалов — самый выдающийся молодой математик в Московском университете. Познакомился я с Приваловым, когда приехал Н. Н. Лузин. Знакомство стало близким, и я нередко бывал у Привалова дома. Степанов, окончивший университет годом ранее Привалова, заканчивал такую подготовку. При университете в то время оставляли на два года, в течение которых следовало сдать магистерские экзамены и подготовить магистерскую диссертацию. Присутствовали на собраниях семинара и многие другие университетские профессора и преподаватели математики.

Доклад на собрании групп проходил в университетском здании. Обстановка была довольно официальной, особенно оживленного обсуждения докладов я не помню; аудитория была пассивной. Все они были тщательно подготовлены и обсуждены с руководителем. Задавались только отдельные вопросы, а делать какие-либо дополнения было не принято.

Добавлю, что темы докладов Д. Ф. Егоров от года к году несколько разнообразил, сохраняя те же формы работы.

*В.*— Расскажите, пожалуйста, о Вашем первом знакомстве с Н. Н. Лузиным.

*О.*— Н. Н. Лузин вернулся из заграничной командировки весной 1914 г., а увидели мы его впервые в сентябре, с началом нового учебного года. Он стал читать факультативный курс теории функций действительного переменного. Слушать его было очень интересно, а еще интереснее были беседы с ним, в которые он охотно вступал со студентами.

Читал он этот курс вполне гладко и очень увлекательно. Не знаю, готовился ли он специально к этим лекциям: ведь он как раз занимался теорией функций. Быть может, перед лекциями он просто припоминал, что будет рассказывать; для этого не требовалось много времени. Но если по ходу изложения он встречался с каким-либо пробелом в памяти, то просто восполнял его, хотя иногда с некоторым напряжением. Соображал на ходу он довольно быстро, хотя нельзя сказать, что очень быстро. Иногда он привлекал на помощь и слушателей, особенно при чтении специальных курсов, это был интересный педагогический прием, активизировавший слушателей. Однако в том первом курсе, который я слушал осенью 1914—1915 уч. года, никаких пробелов и запинок не было.

Замечательны были не только лекции Н. Н. Лузина, но и последующие за ними беседы в университете и на его квартире. Помню, что ему пришла мысль организовать семинар, посвященный сравнению двух интегралов — Данжуа и Бореля. Я стал усиленно над этим вопросом думать и вскоре решил поставленный вопрос, установив, что интеграл Данжуа более общий, чем интеграл Бореля. Н. Н. Лузин сказал, что тема мною исчерпана, так что незачем организовывать особый семинар по данному вопросу.

Н. Н. Лузин в своей диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд», защищенной и изданной в 1915 г., указал, что функция, интегрируемая по Борелю, интегрируемая и в смысле Данжуа, причем высказал предположение, что интегралы в смысле Бореля и Данжуа эквивалентны. Я, однако, привел пример функции, не интегрируемой по Борелю, но интегрируемой по Данжуа. Этот пример приведен в моей первой научной работе «Взаимоотношения между определениями интеграла Borel'я и Denjoy», вскоре напечатанной в 30 томе «Математического сборника» за 1916 г.

*В.*— Насколько помню, теорией интеграла Данжуа занимался тогда же А. Я. Хинчин?

*О.*— До сих пор я говорил об интеграле Данжуа в узком смысле слова, введенном в 1912 г. Мой сокурсник А. Я. Хинчин дал важные обобщения понятия интеграла Данжуа. О своем обобщении он впервые объявил в печати в «Comptes rendus» Парижской академии наук в 1916 г.; впоследствии это обобщение получило название интеграла Данжуа—Хинчина. При построении своего обобщения А. Я. Хинчин применил введенное им осенью 1914 г. понятие асимптотической производной, сведения о которой впервые привел в упомянутой диссертации 1915 г. Н. Н. Лузин. Тогда это более широкое понятие производной называли еще просто обобщенной производной. А. Я. Хинчин получил этот свой результат в ответ на вопрос, поставленный профессором Б. К. Млодзеевским в одной лекции по теории функций действительного переменного, прочитанной в 1904 г. (об этом говорится в диссертации Н. Н. Лузина). Млодзеевский не работал творчески в этой области, но наряду с Д. Ф. Егоровым, был одним из первых инициаторов московских исследований по теории функций и в 1901 г. прочитал первый курс по этому вопросу в Московском университете. Добавлю, что заметку, озаглавленную уже «Sur la dérivation asymptotique» А. Я. Хинчин напечатал в парижских «Comptes rendus» в 1917 г.

*В.*— Как развивались дальше Ваши взаимоотношения с Н. Н. Лузиным?

*О.*— Когда я занялся поставленным Н. Н. Лузиным вопросом, он пригласил меня к себе домой. Жил он в то время вместе со своими родителями в Токаревском подворье, где-то поблизости от начала Пятницкой улицы. Подворье представляло собой нечто вроде гостиницы, постояльцы которой нередко проживали здесь подолгу. Сам Н. Н. Лузин занимал одну комнату, а его родители, которых я видел только мельком, другую. Вскоре умерли мать Н. Н. Лузина, и вслед за нею отец, и осенью 1915 г. Лузин снял комнату на Арбате, д. 25, кв. 8, у вдовы врача А. Г. Малыгиной, сдававшей комнату. На дочери своей квартирохозяйки, Н. М. Малыгиной, Лузин впоследствии женился. В этой квартире он прожил многие годы, до Второй мировой войны. При первых же личных встречах с Лузиным мы подолгу увлеченно беседовали по вопросам теории функций.

Вот в это время вокруг Н. Н. Лузина образуется небольшое еще ядро будущей Московской школы теории функций действительного переменного. Со старшими представителями ее, И. И. Приваловым и В. В. Степановым, он был близок уже ранее, а в 1914—1915 гг. к его кругу примкнули тогда еще студенты П. С. Александров, А. Я. Хинчин и я, а также В. С. Фёдоров, М. Я. Суслин и еще несколько человек; потом, уже после Октябрьской революции число их значительно увеличилось. Непринужденный, дружеский характер встреч и собеседований с Н. Н. Лузиным сохранялся у многих из нас долгие годы.

На общем университетском семинаре по теории функций обстановка была, как я упоминал, гораздо более официальной и даже торжественной, а сами собрания более многочисленными. Об одном из них, состоявшемся в октябре 1915 г., рассказывает в своих воспоминаниях П. С. Александров, сделавший тогда доклад о полученном им незадолго перед тем замечательном результате о мощности [9] множеств, измеренных по Борелю, или короче $B$-множеств.

Из предыдущего рассказа, видно, что в 1914—1916 гг. младшие представители Московской школы теории функций уже получили и частью опубликовали свои первые открытия. К уже перечисленным результатам добавлю построенный мною пример тригонометрического ряда с коэффициентами, не равными нулю, сходящийся к нулю почти всюду,— в позднейшей терминологии пример $M$-множества меры нуль.

Таким образом, я внес свой первый вклад в изучение проблемы единственности разложения функций в тригонометрический ряд, восходящий к работам немецких мате-

---

[9] См.: *Александров П. С.* Страницы автобиографии.— Указ. соч., с. 234—235.— *Примеч. ред.*

матиков Э. Гейне и Г. Кантора 1870-х годов и живо интересовавшей тогда, да и потом многих специалистов по теории функций действительного переменного.

Н. Н. Лузин отнесся к моему результату с большим интересом: летом 1916 г. я жил у родственников в Тульской губернии, а Н. Н. Лузин гостил в Казани в семье профессора механики А. Л. Лаврентьева, отца недавно скончавшегося М. А. Лаврентьева, также ставшего уже после Октябрьской революции членом «Лузитании», так прозвали группу товарищей и учеников Лузина. Я послал Лузину письмо со своим примером. В ответе Лузин поздравил меня и писал, что считает мой результат неожиданным. Я и сам думал так и даже просил Лузина проверить, не ошибся ли я. Слишком уж странным казался тогда этот пример. По предложению Лузина я изложил свой пример со всеми требуемыми доказательствами в статье «Sur l'unicité du développement trigonométrique», напечатанной в «Comptes rendus» в 1916 г.; Н. Н. Лузин помог мне при редактировании французского текста и послал со своей рекомендацией парижскому академику Ж. Адамару, которому направлял для представления в этот журнал и уже упомянутые статьи, и другие статьи моих товарищей. От Адамара проблематика теории функций действительного переменного была далека, но он вполне доверял Лузину. Помню, что в ответном письме Адамар выразил удовлетворение тем, что в Москве ведется серьезная научная работа, и было видно, что он высоко ценит роль Н. Н. Лузина в ее организации. Любопытно, что статьи в «Comptes rendus» строго не должны были превосходить некоторого размера, а у меня получилось немного больше. Но в то время — это был разгар первой мировой войны,— отношение к России и русским во Франции было особенно хорошее и мою статью не сократили.

В одно время со мной послал для «Comptes rendus» свою работу о мощности борелевских множеств «Sur la puissance des ensembles mesurables $B$» П. С. Александров, напечатанную в том же 1916 г. Для вывода своей основной теоремы о том, что всякое несчетное $B$-множество содержит совершенное подмножество и, значит, имеет мощность континуума, П. С. Александров применил так называемую теперь $A$-операцию, получившую вскоре же приложения, чрезвычайно важные для дальнейшего развития теории множеств, а также для топологии. Подробно изложить все доказательство теоремы о мощности $B$-множеств в короткой заметке П. С. Александрова для «Comptes rendus» было невозможно, но идейное влияние ее оказалось очень велико. Не знаю, дал ли П. С. Александров где-либо вывод своей теоремы со всеми подробностями (такой вывод можно найти в позднейших курсах теории функций). В моей заметке, как и в заметках А. Я. Хинчина, можно было дать более детальное изложение доказательств.

*В.*— Выделил ли Адамар в своих письмах Лузину какую-либо из присланных ему статей особо?

*О.*— Насколько знаю, нет. Он и не мог бы сделать этого, не будучи специалистом по теории функций. На мой взгляд, наиболее результативной была работа П. С. Александрова.

Мне хотелось бы отметить еще один момент. К обобщению интеграла Данжуа, данному А. Я. Хинчиным, независимо пришел сам А. Данжуа. Разница во времени представления и появления их работ по этому вопросу была очень невелика. Адамар писал, что приоритет хронологически принадлежит Хинчину. Не знаю, быть может, это было сделано только из вежливости. Во всяком случае, никаких споров здесь не возникло и оба математика имеют, полагаю, в данном случае равные заслуги.

*В.*— Из Вашего рассказа, кажется, следует, что первые задачи перед молодыми членами Московской школы поставил Н. Н. Лузин.

*О.*— В основном так оно и было, правда, одна задача (обобщение понятия производной) восходит к курсу лекций Б. К. Млодзеевского. Естественно, что мы на первых порах еще не умели самостоятельно ставить вопросы в области математики, которой только начинали заниматься. Лично мои работы представляли собой ответы на вопросы Н. Н. Лузина. Самостоятельно я научился ставить перед собой вопросы с 1923 г. П. С. Александров и А. Я. Хинчин в этом меня опередили.

*В.*— Не поделитесь ли Вы своими воспоминаниями о М. Я. Суслине?

*О.*— С ним я встретился впервые, кажется, осенью 1915 г. После того, как П. С. Александров опубликовал свою работу о $B$-множествах, он к этой теме не возвращался. Он говорил мне, что решение проблемы об их мощности потребовало от него чрезвычайного напряжения. Кроме того, он полагал, что все главное в теории $B$-множеств теперь уже сделано. После того, как $B$-множества были введены в 1898 г. Борелем, их теория была довольно подробно разработана в мемуаре Лебега «Sur la représentation des fonctions analytiques», напечатанном в 1905 г. Конечно, Александров изучал этот мемуар, изучал его и я. Первую часть мемуара я прочитал еще до того, как познакомился с Н. Н. Лузиным, она довольно легкая и написана совершенно ясно. Поскольку теория $B$-множеств меня непосредственно не интересовала, я вторую часть изучать не стал. Между тем оказалось, что в этой части имелась несомненная оплошность. М. Я. Суслин глубоко заинтересовался и мемуаром Лебега и статьей П. С. Александрова в «Comptes rendus», тщательно разобрал вторую часть мемуара и обнаружил в ней следующую ошибку. Лебег утверждал, по существу, что в математике не существует точечных множеств, кроме борелевских. Суслин, при помощи введенной в статье Александрова операции над множествами, о которой я сказал ранее, эффективно построил множества, не являющиеся $B$-множествами и назвал их $A$-множествами. Эту букву $A$ он взял потому, что применил в своей конструкции операцию, изобретенную Александровым. Насколько помню, Суслин не сделал доклад о своем замечательном открытии, но сперва лишь рассказывал о нем в частных беседах. Н. Н. Лузин проверил результат Суслина, высоко оценил его и предложил написать о нем статью. Эта статья «Sur une définition des ensembles mesurables $B$ sans nombres transfinis», напечатанная в «Comptes rendus» за 1917 г., содержит и несколько существенных предложений о свойствах $A$-множеств. Посылая работу Суслина в Париж, Лузин заодно письменно известил Лебега об ошибке в его мемуаре 1905 г., найденной автором работы. Лебег ответил, что лишь теперь узнал о допущенной им некогда глупой ошибке, и что сейчас этим вопросом больше не занимается. Его письмо было выдержано в этой части в шутливом тоне; заканчивалось оно пожеланием нам успеха и в науке, и в войне. Не знаю, сохранилось ли это письмо.

$A$-множества, по предложению П. С. Александрова часто именуются теперь суслинскими. К сожалению, сам Суслин, скончавшийся в 1919 г., не смог принять участия в дальнейшей разработке теории $A$-множеств и, если получил какие-либо новые результаты, то не успел их опубликовать. В дальнейшем теория $A$-множеств была глубоко разработана Н. Н. Лузиным, польским математиком В. Серпинским, который в то время находился в Москве, немецким математиком Ф. Хаусдорфом и многими другими учеными.

Таковы были начальные плоды деятельности первых учеников и последователей Н. Н. Лузина. Как видно, он сильно стимулировал наши исследования, вводя в близкую ему проблематику теории функций, поощряя нас к самостоятельной работе и содействуя быстрейшему выходу в свет наших первых статей. При этом он неизменно держался с нами почти как равный, выделяясь только большой эрудицией и особого рода сообразительностью, как я уже говорил не очень быстрой, но весьма глубокой и проникновенной, своего рода пробивной способностью или проницательностью. Правда, некоторые наши результаты оказывались для него неожиданными и опровергали его первоначальные предположения.

*В.*— А как работал Н. Н. Лузин?

*О.*— Работал он с упоением, сидел часто ночами. Конечно, при таком стиле занятий он чрезвычайно переутомлялся. Когда он достигал желательных результатов, наступали периоды долгой усталости и научной пассивности. У меня была другая манера научной работы, более регулярная и ровная. Всю жизнь я соблюдал примерно тот же режим, в каком я изучал математику в юности. Я никогда себя не перегружал и мне доставляло удовольствие постепенное преодоление препятствий и трудностей.

Я рассказал, пожалуй, недостаточно о Д. Ф. Егорове. Личный научный вклад его в теорию функций ограничился одной важной теоремой о сходящейся последовательности почти всюду измеримых функций и так называемой теоремой Егорова. Зато его семинар по теории функций сыграл огромную роль на первом этапе формирования Московской школы теории функций. Первая специальность Егорова была дифференциальная геометрия и здесь ему принадлежат существенные открытия. А вообще он был чрезвычайно широко образованным математиком, внимательно следил за развитием математики в странах Западной Европы и содействовал появлению в Москве ряда новых направлений. Достаточно сказать, что учениками его были, среди других, Н. Н. Лузин и И. Г. Петровский. Д. Ф. Егоров читал лекции по очень широкому кругу наук, в том числе, кроме ранее названных, по дифференциальным уравнениям с частными производными, интегральным уравнениям, теории инвариантов и т. д. Наконец, Егоров помогал ряду математиков на их жизненном пути. О себе могу рассказать, что когда в 1916 г. я окончил университет, он содействовал моему оставлению при университете. С этим нужно было торопиться, иначе меня бы мобилизовали — ведь шла война. Здесь и сыграл решающую роль Д. Ф. Егоров, который, очевидно, считал, что я нужнее в университете, чем в армии. Он приложил огромные усилия, чтобы меня отстоять. Тут же была составлена программа магистерских экзаменов, ну а научную работу я уже вел.

Мне, конечно, приходилось встречаться в то время и с другими математиками, однако о них я мало что могу рассказать. Так, я был знаком с С. С. Бюмгенсом, окончившим университет еще в 1906 г. Это был очень культурный математик и близкий товарищ Н. Н. Лузина. Вначале казалось, что Бюмгенс ученый почти такого же масштаба, как Лузин, но это не оправдалось. Более всего известны его работы по дифференциальной геометрии.

Возвращаюсь к своему жизненному пути. Вслед за Великой Октябрьской Социалистической революцией наступило несколько лет гражданской войны и войны с иностранными интервентами. Продовольственное, да и топливное положение в Москве, уже подорванное империалистической войной, стало очень тяжелым, многие студенты покинули университет, и ряд математиков временно уехали работать, как тогда выражались, в провинцию, где открывались новые высшие школы.

По совету Н. Н. Лузина я занялся было тогда проблемой сходимости ортогональных рядов функций с интегрируемым квадратом. Кое-что у меня получалось, но трудные материальные условия в Москве мешали научным занятиям. Я поехал в 1919 г. в крупный текстильный центр Иваново-Вознесенск, но тут же получил приглашение в Нижегородский университет, которое, по совету Лузина, принял. Вскоре, однако, я убедился, что в Нижнем Новгороде (ныне Горький) условия для моей научной работы неблагоприятны, и Лузин отозвал меня обратно в Иваново, где я до 1922 г. преподавал в Педагогическом, а затем в Политехническом институте. Эти институты открылись в 1918 г.

Вообще математическая жизнь в Иванове тогда очень оживилась. Здесь работал сам Н. Н. Лузин, часто выезжавший и в Москву, А. Я. Хинчин, В. С. Фёдоров, окончивший Московский университет в 1915 г., и еще несколько ученых. Недолго работал здесь и М. Я. Суслин, вскоре уехавший к себе на родину в Саратовскую губернию. В Иванове мы, ученики Лузина, часто собирались и образовали нечто вроде математического общества. Сам Лузин, помнится, в этих собраниях не участвовал.

Покинули тогда Москву и еще некоторые математики. Так, И. И. Привалов, опубликовавший в 1918 г. диссертацию «Интеграл Коши», в которой, развивая работы Н. Н. Лузина и свои собственные, блестяще применил методы теории функций действительного переменного к актуальным задачам теории аналитических функций, несколько лет проработал в Саратовском университете и вернулся в Москву в 1922 г. Замечу тут же, что В. С. Фёдоров, занявшийся аналогичной тематикой, так и остался в Иванове. П. С. Александров ненадолго вообще отошел от математики и уехал из Москвы, но уже осенью 1920 г. возвратился в Московский университет. Д. Ф. Егоров и В. В. Степанов из Москвы не выезжали.

Сравнительно недолгое время, проведенное в Иванове, было для меня временем очень интенсивной научной работы. Именно тогда я получил все свои основные результаты по общей теории ортогональных рядов.

Между тем Математическое отделение Московского университета окончили ряд блестящих математиков, пополнивших ряды нашей школы теории функций: в 1919— П. С. Александров, в 1921 г.— Н. К. Бари, в 1922 г.— М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник и т. д. Когда я в 1922 г. вернулся в Москву и вновь приступил к работе в университете, где мне прежде всего поручили чтение факультативного курса теории тригонометрических рядов, я нашел здесь огромную, исполненную энергии школу так называемой «Лузитании». Я назвал сейчас только немногих ее молодых представителей, составлявших, вместе с моими сверстниками, главное ядро. Несколько особняком был А. Н. Колмогоров. Ему было тогда всего 19 лет и университет он окончил позднее: в 1925 г., но он сразу произвел на меня — и не только на меня — сильнейшее впечатление. Хотя у него еще не было ни одного опубликованного результата и его первые статьи по теории рядов Фурье—Лебега были напечатаны в 1923—1924 гг., мне было ясно, что это самый сильный математик, какого я когда-либо встречал. Вообще, он являлся наиболее крупным в мире молодым математиком той поры. По существу, А. Н. Колмогоров не нуждался в руководстве. Колмогоров не был в числе прямых учеников Н. Н. Лузина, а занимался с В. В. Степановым. В 1925—1929 гг. (в аспирантуре) официальным руководителем А. Н. Колмогорова был Н. Н. Лузин, которого во время его заграничной командировки заменял я. Вообще же А. Н. Колмогоров шел им самим выбранным путем. Конечно, некоторые работы он готовил совместно с другими математиками. Одно время он заходил ко мне каждую неделю, и в ходе наших бесед возникла одна совместная работа.

Расскажу об этом сотрудничестве немного подробнее. В одной статье, напечатанной в 1923 г., я доказал, что для любой функции $w(n)$, растущей медленнее, чем $\lg^2 n$, существует ортогональная система функций $\varphi_n(x)$ и числа $c_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, для которых ряд Фурье $\sum\limits_1^\infty c_n\varphi_n(x)$ расходится всюду, хотя ряд $\sum\limits_1^\infty w(n)c_n^2$ сходится. При этом система функций $\varphi_n(x)$ не была ограниченной в совокупности. Возникла мысль, что теорема верна и для функций, ограниченных в совокупности. Мы с Колмогоровым занялись вопросом совместно и нашу работу можно сравнить с прорытием туннеля сквозь гору, ведущимся с двух концов, причем встреча происходит где-то посередине. У каждого из нас кое-что получалось, а кое-что нет, но вдвоем мы нашли полное решение, доказав существование расходящегося ряда Фурье и в случае ограниченной системы ортогональных функций $\varphi_n(x)$. Нашу статью, озаглавленную «Sur la convergence des séries des fonctions orthogonales», я послал Г. Вейлю, который поместил ее в «Mathematische Zeitschrift» за 1927 г. Редактировал статью А. Н. Колмогоров. Он умел это делать лучше меня. Попутно, используя один мой прием, он доказал, что в любом тригонометрическом ряде функции с интегрируемым квадратом можно переставить члены так, что получится ряд, сходящийся почти всюду. Он решил поместить теорему в нашей общей статье, причем хотел даже, поскольку применил мой прием, считать теорему общей. На это я заявил: «Я Вашу теорему не доказывал и доказательства ее не знаю, так что пишите отдельную работу». Он ответил: «Отдельная работа не выйдет, да я и не соберусь ее написать». Тогда мы приняли компромиссное решение. Теорему мы поместили в совместной работе, а в сноске написали, что доказана она Колмогоровым. А. Н. Колмогоров мне рассказал неполное доказательство, на что я обратил его внимание. В ответ он сказал: «Ах, да, я полного доказательства не дал, но это можно сделать». Насколько мне известно, такое полное доказательство Колмогоров не опубликовал.

Проблемой сходимости ортогональных рядов занимались многие, и моя совместная с А. Н. Колмогоровым статья повлекла за собой ряд исследований. Упомянутую теорему Колмогорова уже после второй мировой войны полностью доказал польский математик З. Загорский, а вскоре затем П. Л. Ульянов распространил ее на любые полные ортогональные системы.

Среди названных ранее молодых математиков Московской школы теории функций особо выделялся своим дарованием еще П. С. Урысон, приступивший в 1920—1921 гг. вместе со своим другом П. С. Александровым к исследованиям по теоретико-множественной топологии. Об этом подробно рассказано в воспоминаниях П. С. Александрова [10]. Здесь хочу сказать только, что первый результат в этой области, полученный в Москве, как утверждает сам П. С. Александров, принадлежит мне. В ноябрьские дни 1917 г. я доказал следующую теорему. Как известно, канторовой кривой называется замкнутое связное множество без внутренних точек. Спрашивается, может ли быть на плоскости несчетное множество попарно непересекающихся канторовых кривых? Некоторые математики полагали, что их может быть только счетное множество, я же доказал, что их может быть множество мощности континуума. Соответствующая статья «Sur un ensemble de courbes cantoriennes» увидела свет в 32 т. польского журнала «Prace Mat.-Fiz.» за 1922 г. Содействие в ее публикации оказал В. Серпинский, в 1915 г. интернированный в России как австро-венгерский подданный. Д. Ф. Егорову и Б. К. Млодзеевскому удалось исхлопотать Серпинскому право жительства в Москве, где он стал свидетелем и в некоторой степени соучастником создания Московской школы теории функций. В 1918 г. Серпинский вернулся в Польшу, именно, в Варшавский университет и здесь стал одним из организаторов и руководителей Польской математической школы, идейно тесно связанной с Московской школой теории функций, а также журнала «Fundamenta mathematicae», начавшего выходить

---

[1] *П. С. Александров.* Страницы автобиографии.— Усп. мат. наук, 1979, т. 34, вып. 6 (210); 1980, т. 35, вып. 3 (213).— *Примеч. ред.*

в 1920 г.; этот журнал вначале был посвящен главным образом теории функции и в нем появилось немало статей советских ученых. Из польских математиков, активно работавших тогда в области теории функций и смежных областях назову еще в алфавитном порядке А. Зигмунда, С. Качмажа, К. Куратовского, И. Марцинкевича, А. Райхмана, С. Сакса — этот список далек от полноты. Так вот, Серпинский вспомнил как-то, что вскоре после Октябрьской революции Н. Н. Лузин показал ему мою статью о канторовых кривых и, когда это стало возможным, предложил послать для публикации в польский журнал, что я и сделал. Впрочем, сказанным и ограничились мои занятия топологией. Создателями большой советской топологической школы явились П. С. Александров и преждевременно скончавшийся П. С. Урысон.

Скажу отдельно еще о Н. К. Бари, которую считаю одной из самых сильных в мире математиков женщин, уступавшую, быть может, только знаменитой Эмми Нётер. Бари некоторое время занималась проблемой единственности тригонометрических рядов, одной из первых, какие я изучал в начале своей научной деятельности. С Н. К. Бари у меня неизменно были очень хорошие товарищеские отношения. Она была весьма общительна и пользовалась всеобщей симпатией окружающих. Характер ее отличался большим благородством. Н. Н. Лузин высоко ценил ее математическое дарование и личные достоинства. У меня с Н. К. Бари есть две общие статьи об интеграле Лебега—Стилтьеса и свойствах абсолютно-непрерывных функций, напечатанных в «Comptes rendus» в 1924 г. и в «Annali di mathematica» за 1927 г.

Ко всему сказанному о молодых представителях «Лузитании», начавших свою творческую работу, когда я был еще в Иванове, хочу добавить, что с некоторыми из них я познакомился еще до возвращения в Москву. Это произошло в Петрограде (Ленинграде) в июне 1921 г. на конференции в честь столетия со дня рождения П. Л. Чебышева, куда приехали из Москвы Н. Н. Лузин со многими учениками. Состоявшаяся таким образом встреча двух школ, в то время существенно различавшихся по своим интересам, оказала немалое влияние на дальнейшее развитие математики в Советском Союзе.

*В.*— Расскажите, пожалуйста, о своей работе по возвращении в Москву из Иванова.

*О.*— Я уже сказал, что вернулся в Московский университет в 1922 г., почти в одно время с И. И. Приваловым. Некоторое время я преподавал также — вел практические упражнения — по совместительству в Лесотехническом институте, где тогда читали лекции Н. Н. Лузин и О. Ю. Шмидт. В научной области мои интересы расширились. Кроме теории ортогональных рядов я стал заниматься теорией конформных отображений. В 1923 г. я познакомился с одной статьей датского математика Гаральда Бора, брата знаменитого математика, в которой автору удалось ослабить достаточные условия конформности отображения при растяжении фигур. Я нашел более слабые условия при повороте фигур, что было, по-видимому, труднее. Заметку на эту тему я послал Г. Бору, который ответил, что в моей постановке задача действительно трудная, что он безуспешно пытался ее решить и что он переслал мою статью «Sur la représentation conforme des domaines plans» в «Mathematische Annalen», где она и была напечатана в 95 томе за 1926 г. Потом я еще более ослабил найденные мною условия. Я продолжал заниматься тем же вопросом во время парижской командировки 1927 г., в августе 1928 г. сделал на эту тему доклад на Международном математическом конгрессе в Болонье, а закончил работу над этой проблемой уже в Москве. Так возникла целая серия статей и заметок, печатавшаяся с 1926 по 1933 г. Затем я окончательно возвратился к теории тригонометрических и общих ортогональных рядов.

*В.* — Каковы Ваши впечатления от упомянутой Парижской поездки?

*О.* — В Париж я поехал в январе 1927 г. на годичный срок в качестве стипендиата Рокфеллеровского фонда. Такие стипендии предоставляются специальным научным комитетом ученым не старше 35 лет; мне было тогда 34 года. Стипендия составляла 100 долларов в месяц, тогда этого вполне хватало на жизнь: ведь доллар в то время не был так обесценен, как ныне. Жил я в Париже в небольшом отеле «Parisiana» близ Пантеона, в д. 4 по улице Турнефора. Там обычно останавливался Н. Н. Лузин, который мне рекомендовал эту гостиницу. Здесь устроились приехавший вскоре после меня, только на более короткий срок М. А. Лаврентьев, а также приехавшие весной того же года Н. Н. Лузин с женой.

По приезде в Париж я прежде других математиков посетил А. Данжуа. Он сказал, что хорошо знает мои работы и у нас сразу установились дружеские отношения. А. Данжуа был очень дружен с Н. Н. Лузиным. Впрочем, этот талантливый французский математик в то время мало работал творчески.

Тут же я стал регулярно посещать известный семинар Ж. Адамара в Collège de France. Здесь ставились и обсуждались доклады по самым разнообразным вопросам математики и ее приложений. Например, один французский ученый сделал на нем сообщение о работах Э. Шрёдингера по квантовой механике. Сам я выступил на семинаре с двумя докладами о своих работах — по теории конформных отображений и по теории ортогональных рядов. При этом я убедился, что Адамар действительно мало знаком с современной теорией функций: он попросил меня напомнить определение меры множества. Упрекать за это Адамара нельзя: ему было тогда 62 года, и он продолжал научную работу в избранных им ранее классических областях анализа. Встречался я с П. Монтелем, занимавшимся теорией функций комплексного переменного; но у него, естественно, установился более тесный контакт с М. А. Лаврентьевым, с которым его связывали общие научные интересы. Разумеется, я посетил также Э. Бореля и А. Лебега, но они оба уже не работали творчески; был и у Фреше, занятого далекими от моих проблемами. Все это были, что называется, визиты вежливости. Некоторое время я слушал лекции по дифференциальной геометрии Э. Картана. Однако это была совсем далекая от меня область, к тому же приехал я в середине учебного года, когда половина курса была прочитана. Зато мне удалось получить запись лекций Картана, которую я передал в Москве профессору С. П. Финикову, издавшему их перевод. Вообще же я в Париже очень много работал, читал новейшую литературу и подготовил материалы для ряда статей.

Часть лета 1927 г. Н. Н. Лузин с женой и я, а также приехавшая тогда во Францию Н. К. Бари, провели, по приглашению А. Данжуа, с его семьей на о. Олерон. Как я сказал уже, Данжуа и Лузина связывали глубокое взаимное уважение и дружба. И другие французские математики весьма уважали Лузина, например, Адамар или Лебег, как это видно из его предисловия к французскому изданию книги Лузина по теории $A$-множеств [11].

---

[11] См.: Историко-математические исследования, вып. XXIII. с. 341—342. В этом выпуске опубликованы сохранившиеся письма Н. Н. Лузина к А. Данжуа (с. 314—348), а в XXIV вып. обзор писем А. Данжуа к Н. Н. Лузину (с. 362—368).— *Примеч. ред.*

Подведя итог нашей беседе, хочу прежде всего сказать, что развитие теории функций действительного переменного успешно продолжалось и далее, как в метрическом, так и в дескриптивном направлениях. При этом школа вышла за пределы Московского университета и приобрела всесоюзный характер. Не менее успешно расцвело уже не раз упоминавшееся другое направление — применение методов теории функций действительного переменного в области комплексного переменного.

Вместе с тем, уже в первом пятилетии 20-х годов от школы теории функций отделяются новые направления, вскоре оформляющиеся в большие самостоятельные школы (например, топологическая школа); одновременно теоретико-функциональные методы и идеи получают все более широкое и плодотворное приложение в других областях математики — теории чисел, теории вероятностей, вариационном исчислении, теории дифференциальных уравнений и т. д. и т. п. Но это уже предмет истории советской математики, а не моих личных воспоминаний. Заканчивая же свои воспоминания, отнюдь не полные и ограниченные первыми 10—12 годами моей научной работы, я хочу сказать, что, как видно, моя научная жизнь оказалась тесно связанной с ранним этапом возникновения и становления Московской школы теории функций, главными вдохновителями и организаторами которой были Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин.

# ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

УДК 512(091)

Мельников И. Г. **Удобные числа в рукописном наследии Эйлера.** — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Рассматриваются фрагменты из записных книжек Эйлера, содержащие удобные числа.
Библиогр. 12 назв.

УДК 512(091)

Матвиевская Г. П. **Заметки о многоугольных числах в записных книжках Эйлера.** — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Статья представляет собой комментированный перевод текста некоторых заметок Эйлера, касающихся теории многоугольных чисел.
Ил. 1. Табл. 2. Библ. 25 назв.

УДК 512(091)

Ожигова Е. П. **Функция Эйлера в его записных книжках.** — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Рассматриваются неизучавшиеся ранее фрагменты из записных книжек Эйлера, касающиеся функции $\varphi(n)$.
Библ. 8 назв.

УДК 512(091)

Майстров Л. Е. **О простых значениях многочлена $x^2 + x + 41$.** — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Рассматриваются результаты Л. Эйлера, Ч. Беббиджа, Э. Троста и др. относительно простых значений указанного многочлена.
Табл. 1. Библ. 7 назв.

УДК 512(091)

Лавриненко Т. А. **Решение неопределенных уравнений 3-й и 4-й степени в поздних работах Эйлера.** — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Рассмотрены поздние работы Л. Эйлера о решении неопределенных уравнений 3-й и 4-й степени.
Библ. 11 назв.

УДК 512(091)

Юшкевич А. П. **О неопубликованной рукописи Л. Эйлера «Дифференциальное исчисление».** — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Речь в статье идет о ранней латинской рукописи Эйлера «Дифференциальное исчисление», предназначавшейся, судя по всему, для учебных целей.
Библ. 6 назв.

УДК 512(091)

Белый Ю. А. **Геометрия треугольника в неопубликованных материалах Эйлера.** — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Рассмотрены неизвестные ранее результаты Эйлера по геометрии треугольников, содержащиеся в его неопубликованных рукописях.
Ил. 4. Библ. 17 назв.

УДК 512(091)

Малых А. Е. **О создании Эйлером комбинаторной теории латинских квадратов.** — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Анализируются комбинаторные исследования Эйлера, относящиеся к разработке основ теории латинских квадратов, выполненные им в последние годы жизни.

Библ. 3 назв.

УДК 512(091)

Невская Н. И. **Неизвестные работы Л. Эйлера по астрономии.** — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Рассматриваются найденные недавно в архиве неизвестные материалы о деятельности Эйлера в области астрономии.

Табл. 1.

УДК 512(091)

Серпинский В. **Приветственная речь на приеме, организованном Академией наук СССР 17 апреля 1957 г., в дни Юбилейной Сессии, посвященной 250-летию со дня рождения Л. Эйлера.** — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Короткая речь на приеме, организованном АН СССР, произнесенная выдающимся польским математиком В. Серпинским.

УДК 512(091)

Фреше М. **Приветственная речь на приеме, организованном Академией наук СССР 17 апреля 1957 г., в дни Юбилейной Сессии, посвященной 250-летию со дня рождения Л. Эйлера.** — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Речь на приеме, организованном АН СССР, произнесенная выдающимся французским математиком М. Фреше.

Ил. 1.

УДК 512(091)

Розенфельд Б. А. **Об одной системе линейных уравнений у Диофанта и ал-Караджи.** — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Рассматриваются задачи $\mathrm{II}_{18}$ «Арифметики» Диофанта и $\mathrm{III}_{40}$ трактата «ал-Фахри» ал-Караджи, представляющие собой системы 3 линейных уравнений с 3 неизвестными. В «Арифметике» Диофанта решение отсутствует, в трактате «ал-Фахри» задача решается оригинальной комбинацией «метода алгебры» с одной неизвестной и метода двойного ложного положения. Возможно, что этот метод применялся и Диофантом.

Библ. 5 назв.

УДК 512(091)

Токарева Т. А. **Об «Историческом и практическом трактате по алгебре» Джона Валлиса.** — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Рассматриваются «Всеобщая математика» или полный курс арифметики» (1657) и «Исторический и практический трактат» по алгебре» (1685), в которых органически сочетаются исторический и конкретно-дисциплинарный анализ математических проблем.

Ил. 1. Библ. 8 назв.

УДК 512(091)

Сорокина Л. А. **О работах Лежандра по теории эллиптических интегралов.** — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Рассматриваются мало известные работы Лежандра по теории эллиптических интегралов. Показывается их связь с работами Эйлера и Лагранжа.
Библ. 18 назв.

УДК 512(091)

К о х  Х. К 175-летию со дня рождения И. П. Г. Лежен-Дирихле.— В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Рассматривается влияние важнейших открытий Дирихле на развитие математики вплоть до современности.
Библ. 8 назв.

УДК 512(091)

В л э д у ц  С. Г. К истории комплексного умножения. II. Гаусс, Эйзенштейн и Кронекер.— В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Данная статья является продолжением работы, опубликованной в XXVI выпуске. Она посвящена вкладу Гаусса, Эйзенштейна и Кронекера в теорию комплексного умножения.
Библ. 49 назв.

УДК 512(091)

Э л ь н а т а н о в  Б. А. Краткий очерк истории развития эратосфенова решета.— В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Рассматривается история развития метода эратосфенова решета от античности вплоть до исследований нашего времени.
Библ. 51 назв.

УДК 512(091)

О н у ф р и е в а  Л. А. О методе интерполирования Чебышева в случае большого числа данных.— В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Рассмотрены вопросы, поднятые в мемуаре Чебышева 1859 года, об интерполировании в случае большого числа данных, в которых обнаружена связь между теорией приближения функций, гармоническим анализом и теорией чисел.
Табл. 1. Библ. 20 назв.

УДК 512(091)

Д е м и д о в  С. С. От скобок Пуассона до алгебр Ли.— В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Рассматривается развитие идей, связывающих формализм скобок Пуассона, с понятием алгебр Ли.
Библ. 42 назв.

УДК 512(091)

А л е к с а н д р о в  П. С. О вкладе Георга Кантора в математику.— В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Посмертно публикуемая статья академика П. С. Александрова содержит общую оценку теории множеств Г. Кантора в развитии современной математики.
Ил. 1.

351—1

УДК 512(091)

Юшкевич А. П. Неопубликованное письмо Н. Н. Лузина Ф. Клейну (Из истории научных связей математиков СССР и Геттингена).— В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

О неопубликованном письме Лузина к Клейну от 1923 года, положившем начало особенно плодотворному десятилетию научных контактов между московскими и гёттингенскими математиками. Библ. 9 назв.

УДК 512(091)

Письмо Н. Н. Лузина к М. Фреше. (Публикация и примечания А. П. Юшкевича.) — В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Публикуется первое письмо Н. Н. Лузина к М. Фреше (1926 г.), где идет речь о занятиях Лузина теорией аналитических и проективных множеств и обнаруженных им при этом логических трудностях. Библ. 6 назв.

УДК 512(091)

Письма Ш. Ж. де ла Валле-Пуссена к Н. Н. Лузину. Введение, перевод и примечания Медведева Ф. А. В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Три письма Валле Пуссена к Н. Н. Лузину. Главный вопрос, обсуждаемый в этих письмах, о взаимоотношениях различных классификаций измеримых по Борелю множеств.
Библ. 10 назв. Ил. 1.

УДК 512(091)

Меньшов Д. Е. Воспоминания о молодых годах и о возникновении Московской школы теории функций.—В кн.: Историко-математические исследования. М.: Наука, 1983, вып. 27.

Воспоминания члена-корреспондента АН СССР Д. Е. Меньшова о годах учения и начале творческого пути.
Ил. 1.

**Историко-математические исследования**

Выпуск XXVII

Утверждено к печати

Институтом истории естествознания и техники Академии наук СССР

Редактор А. Ф. Лапко. Редактор издательства И. М. Столярова
Художествен. редактор Т. П. Поленова. Технич. редактор Н. Н. Плохова
Корректоры Н. Г. Васильева, В. С. Федечкина

ИБ № 27024

Сдано в набор 17.03.83. Подписано к печати 24.06.83. Т-10462.
Формат 84×108¹/₃₂. Бумага типографская № 1. Гарнитура обыкновенная
Печать высокая. Усл. печ. л. 18,06. Уч.-изд. л. 19,3. Усл. кр.-отт. 18,06
Тираж 1600 экз. Тип. зак. 2870. Цена 3 руб.

Издательство «Наука» 117864 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90
2-я типография издательства «Наука» 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

3руб.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

XXVII