МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Ф. П. ОТРАДНЫХ

МАТЕМАТИКА XVIII ВЕКА
И АКАДЕМИК
ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКАЯ НАУКА»
Москва — 1954

ОТ АВТОРА

Публикуемая лекция «Математика XVIII века и академик Леонард Эйлер» — одна из лекций, прочитанных автором студентам-математикам Ленинградского ордена Ленина государственного университета им. А. А. Жданова. Автор полагает, что его лекции далеки от совершенства и что над ними ему нужно много и упорно работать. Однако, сознавая полное отсутствие пособий по истории математики, автор согласился опубликовать некоторые из его лекций и тем самым вынести их на суд широкой советской общественности.

Автор будет благодарен за товарищескую критику его лекций и просит направлять замечания механико-математическому факультету Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова для него.

I. ВСТУПЛЕНИЕ

Математика XVII в. передала в наследство последующим векам богатейшие открытия. В этом веке были заложены основы новой отрасли математики, развитие которой заняло и занимает до сих пор умы многочисленных ученых. Кеплер и Кавальери, после перерыва почти в 1800 лет, применили в геометрии идеи бесконечного. Работы Ферма, Декарта, Паскаля, Валлиса, Барроу и многих других направили математические исследования по новому руслу. Завершение напряженной деятельности этих ученых было дано Ньютоном и Лейбницем в конце XVII в. Ими были получены блестящие практические результаты в области математики. Они и их ближайшие ученики и последователи — особенно братья Яков и Иоганн Бернулли — ввели понятия производной, дифференциала и интеграла, вычислили их для простейших выражений и функций, произвели разложения функций в бесконечные ряды и применили найденные ими алгорифмы к решению геометрических, механических, астрономических и многих других задач. В первом печатном курсе дифференциального исчисления, написанном Лопиталем и появившемся впервые в 1696 г., мы уже находим дифференциалы произведения, частного, степени и корня, определение касательных и нормалей, задачи на максимум и минимум, изучение точек перегиба и возврата, огибающих, раскрытие неопределенностей и другие фундаментальные исследования, входящие в первые главы современных учебников по анализу исчисления бесконечно малых. Также и в первой книге по интегральному исчислению, написанной Иоганном Бернулли еще в 90-х годах XVII в., но опубликованной только в 1742 г., мы находим способы вычисления разнообразных интегралов, квадратуры площадей, спрямление кривых линий, простейшие дифференциальные уравнения и ряд других задач. Все это в своих основах было уже в трудах Лейбница и Ньютона. Работой Лейбница 1684 г. и «Началами» Ньютона (1687 г.) заканчивается по существу первоначальное завершение дифференциального и интегрального исчисления и начинается новый период. Поворотный пункт, сделанный в математике трудами Лейбница и Ньютона, заставляет нас вспомнить о действии, произведенном «Геометрией» Декарта. Хотя Декарт и ввел лишь немногие отдельные новые обозначения, но он чрезвычайно расширил область применимости символических операций; по этой причине сама алгебра, а вместе с этим, и математический анализ смогли принять вид буквенного исчисления. Таким же образом Ньютон, и в особенности Лейбниц, при помощи введенных ими символов, дали надлежащий вид исчислению бесконечно малых, тем самым уделив значительно большее внимание развитию новых методов и применению их к получению новых результатов, чем логическому их обоснованию. Новые методы применения идеи бесконечного довольно быстро получили широкое распространение. Хотя ими и не легко было овладеть, но те, кто усваивали их, получали доступ к сокровищнице, полной неисчерпаемого богатства новых открытий и продвижения вперед. Важнейшими отличиями алгорифмов нового исчисления были их глубокая систематичность, удобная символика и сравнительно легкая выполнимость действий. На первых порах эти методы позволяли чуть ли не механически изобретать новые теоремы и решать новые задачи из числа простых с точки зрения нового исчисления. Это обстоятельство и, наряду с ним, значительные научно-практические приложения дифференциального и интегрального исчисления, естественно, подталкивали ученых безустанно рваться вперед в погоне за очередными все новыми и новыми достижениями. Математика XVIII в. поэтому и отличается исключительной быстротой развития, кипучестью оригинальных идей и изобилием открытий. Задачи, решение которых в древности требовало таких гениев, как Архимед, становились доступны каждому, изучившему приемы интегрального исчисления. Припоминая известный ответ Эвклида царю Птолемею, можно было теперь сказать, что новые методы исчисления бесконечно малых открывают «царский путь к математике». XVIII в. явился веком блестящих завоеваний математического анализа, и в первую очередь его центральной части — исчисления бесконечно малых. Если кратко формулировать достижения математики XVIII в. то можно сказать, что алгебра и теория чисел приобрели за это время характер систематической науки: дается общее решение неопределенных уравнений второй степени, устанавливается закон взаимности квадратичных вычетов, доказывается иррациональность чисел e, e^2 и пр. Вводится прием решения систем линейных уравнений через детерминанты и разрабатывается теория делимости многочленов. Дальнейшее развитие алгебры упирается в необходимость доказательства основной теоремы алгебры, что было сделано уже в XIX столетии. Устанавливается тот факт, что мнимые выражения всегда могут быть приведены к виду $a + ib$. Обнаруживаются замечательные соотношения между показательными и тригонометрическими функциями комплексного аргумента, что приводит к более широкому применению мнимых чисел в математическом анализе. Создается исчисление конечных разностей. Создается систематическое правило разложения функций в степенные ряды и последние становятся одним и самых мощных и гибких орудий математического анализа. В трудах ученых XVIII в. интегрируются новые типы обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков. Создаются методы для решения линейных уравнений любого порядка с постоянными коэффициентами. Рассматриваются системы дифференциальных уравнений. В этом же веке впервые математики приходят к интегрированию уравнений с частными производными. И кроме того, складываются в самостоятельные разделы математической науки вариационное исчисление, теория вероятностей и начертательная геометрия. Математическое творчество в этот период, как мы уже отмечали, развертывалось во всех странах Европы, и титанами математической мысли были: Леонард Эйлер (1707—1783), Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) и Д'Аламбер (1717—1783).

Жан Лерон Д'Аламбер воспитывался у бедной вдовы, блестяще окончил школу, изучал юридические науки, а затем целиком отдался математике. В возрасте 24 лет он был избран в члены Парижской Академии наук, а через два года ее непременным секретарем. Вместе с Дидро, Вольтером и Гольдбахом Д'Аламбер был инициатором и редактором знаменитой «Экциклопедии наук, искусств и ремесел», вышедшей в 1751 г. В 1743 г. появился «Трактат по динамике» Д'Аламбера, в котором вся механика обосновывалась им на следующем принципе: приложенные силы равны силам действующим. Этот принцип носит его имя. Д'Аламбер разработал метод интегрирования уравнений колебания струны и теорию предварения равнодействия и представил в Академию (1747 г.) решение «Задачи о трех телах». Д'Аламбер пользовался понятием предела, хотя и не вполне отчетливо понимал переход переменной к своему пределу; он считал, что бесконечность есть абсурд и что переменная никогда не достигает своего предела. Он начинает заниматься вопросом о сходимости рядов и установил известный принцип, носящий сейчас его имя. Рассматривая колебание струны, Д'Аламбер столкнулся с уравнениями в частных производных. Он рассматривал системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В ряде статей «Энциклопедии» им была изложена оригинальная точка зрения на общие принципы преподавания математики. Он рекомендовал исключить из курса геометрии аксиомы и постулаты, как очевидные истины; словом, он возражал против построения геометрии в духе «Начал» Эвклида. По его мнению, построение геометрии должно максимально использовать метод наложения, метод пределов и теорию пропорций, особенно теорему о равенстве произведений средних и крайних.

Жозеф Луи Лагранж получил образование почти самоучкой. С 17 лет он преподавал в Турине математику и основал здесь ученое общество, которое преобразовалось впоследствии в королевскую Академию наук. В журнале этого общества он напечатал ряд мемуаров, которые создали ему славу и место в ряду первоклассных математиков. С 1766 г. Лагранж провел около двадцати лет в Берлине, возглавляя физико-математический класс Академии наук, а затем все остальное время работал во Франции, имея звание академика Парижской Академии наук. В 1738 г. появилась его «Аналитическая механика», над которой он работал свыше 25 лет. Лагранж соединял в себе блестящую технику математического исследования с широкими обобщающими концепциями, что следует рассматривать не иначе, как влияние французских просветителей и материалистов XVIII в. Он дал общее решение неопределенных уравнений второй степени, изучил эллиптические интегралы (что явилось первым примером неэлементарных функций), развил общую теорию линейных уравнений любого порядка, построил общую теорию уравнений в частных производных первого порядка и явился одним из создателей вариационного исчисления. Лагранж возражал против употребления бесконечно малых, пытаясь обосновать математический анализ через производную, под которой он понимал коэффициент второго члена разложения функций в ряд Тейлора $f(x+h)$. Он ввел остаточный член для ряда Тейлора в известной форме. Во время Великой французской революции он был привлечен вместе с Лапласом и Монжем к созданию метрической системы мер и весов.

Леонард Эйлер является одним из гениальнейших математиков-мыслителей всех времен и народов. Имя Эйлера в истории науки безусловно стоит рядом с именами Галилея, Декарта, Ньютона и Лейбница. Для нас, советских людей, имя Эйлера должно быть особенно дорогим и близким, так как этот ученый и мыслитель большую часть своей поразительно плодотворной научной деятельности связал с именем Петербургской Академии наук. Россия для Эйлера стала, по существу, второй его родиной, ведь именно здесь он прожил добрую половину своей сознательной жизни, здесь, в Петербурге, он был создателем первой русской математической школы, здесь, в Петербурге, у него было и после него осталось большое число родственников, наконец, здесь, в Петербурге, на Смоленском кладбище, он похоронен. Нам хорошо известно, что русская Академия наук никогда не переставала считать Эйлера своим человеком. Здесь Эйлер часто сталкивался с М. В. Ломоносовым. Он неизменно хорошо отзывался о научных работах последнего. Эйлер пользовался почетом и уважением среди русских как во время жизни, так и после его смерти. Интересно вспомнить в связи с этим слова Кондорсе, сказанные им в речи, посвященной памяти Эйлера: «Итак, народ, которого мы в начале этого века принимали за варваров, в настоящем случае подает пример цивилизованной Европе — как чествовать великих людей при жизни и уважать их память после смерти; и другим нациям приходится в данном случае краснеть, что они не только в этом отношении не могли предупредить Россию, но даже не в силах ей подражать» (История Парижской Академии наук, 1783 г.). Слова, сказанные Кондорсе, подчеркивают то, что Эйлер в России был оценен как нигде в других странах. Он пользуется в России заслуженной славой еще и потому, что здесь он оставил после себя целую группу учеников-академиков, среди которых Котельников, Румовский, Головин, Николай Фусс и другие. Значение Эйлера для русской математики, как, впрочем, и для мировой, огромно.

II. ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Леонард Эйлер родился в 1707 г. в Швейцарии, в семье пастора местечка Риэн, расположенного вблизи Базеля. Отец Эйлера любил математику и занимался ею под руководством Якоба Бернулли. Хотя Павел Эйлер и предполагал направить Леонарда по своим стопам, он, тем не менее, счел полезным преподавать ему и математику. После домашнего образования Леонард был отправлен в Базель, чтобы пройти там курс старших классов гимназии. Успешно справляясь со схоластической премудростью старших, так называемых философских классов гимназии, Леонард стал посещать лекции по математике в университете, где профессором был Иоганн Бернулли. Знаменитый математик вскоре заметил талант юного ученика и предложил ему самостоятельно изучать творения крупных математиков прошлого, обещая помогать ему, занимаясь с ним отдельно по субботам.

Шестнадцати лет, в 1723 г., Леонард, после произнесенной им речи о сравнении философии Ньютона и Декарта, получил степень магистра, дающую право преподавать гуманитарные науки и философию. Выполняя волю отца, он продолжал изучать теологию, хотя она и не импонировала его натуре. Видя, что ничто не может оторвать Леонарда от математики, отец отступил от своих планов. Получив согласие отца, Леонард с удвоенным жаром устремился к математическим наукам. Занимаясь под руководством И. Бернулли, он подружился с сыновьями его — Николаем и Даниилом, с которыми у него завязалась искренняя и тесная дружба.

С созданием в 1725 г. Петербургской Академии наук братья Николай и Даниил Бернулли были приглашены в нее и заняли в ней должности членов, или, как говорили тогда, профессоров. Молодые профессора убеждали и Эйлера последовать их примеру, как только представится к тому возможность. Эйлер готовился в это время к поступлению на кафедру физики Базельского университета, сдал необходимую диссертацию, но попасть туда ему не удалось. После этого он соглашается на выезд в Россию, чтобы занять там кафедру физиологии Академии наук. Готовясь к занятиям физиологией, он вместе с тем работает над проблемой природы и распространения звука и над вопросом о размещении мачт на судах. Сочинение о размещении мачт было удостоено похвального отзыва Парижской Академии наук в 1727 г. и стало началом знаменитой серии работ Эйлера по навигации и вообще его первой научной работой. В том же 1727 г. Леонард Эйлер, двадцатилетним юношей, попадает в Россию, где главным образом и проходит затем его плодотворная научная деятельность, которую мы — может быть, несколько искусственно — разделим на три периода: первый петербургский, берлинский и второй петербургский.

1. Первый петербургский период деятельности Эйлера (1727—1741)

Первые же выступления Эйлера в нашей Академии наук показали, что в его лице Академия приобрела незаурядного ученого. Назначенный сразу же адъюнктом математики (занятия физиологией отпали), он с большою страстью уходит целиком в математическое творчество, и с этих пор академические «Комментарии» неизменно печатают его многочисленные статьи. В 1730 г. Эйлер занял кафедру физики, а в 1733 г., в связи с отъездом Даниила Бернулли из Петербурга, он был назначен на его место академиком математики. Ему было тогда 26 лет. Эйлер обладал невероятной работоспособностью, и в этом отношении в истории науки трудно кого-либо с ним сравнить. Следует указать поразительный факт, связанный с его исключительным трудовым напряжением. Дело в том, что Академия в 1735 г. получила правительственное задание произвести очень сложные вычислительные работы, на выполнение которых академики требовали несколько месяцев. Эйлер взялся за эту работу и выполнил ее в три дня. Биографы свидетельствуют, что в результате перенапряжения он заболел «нервной горячкой» и у него вытек правый глаз. Этот случай, как сейчас достоверно известно, был связан с напряженной деятельностью Эйлера по Географическому департаменту. Известен проект Эйлера о составлении генеральной карты России, в заключении которого он писал: «Я уверен, что география российская чрез мои и г. профессора Гензиуса труды приведена гораздо в исправнейшее состояние, нежели география немецкой земли» («Записки Академии наук», IX приложение, № 2). А что эта деятельность по географическому департаменту отзывалась на его здоровье видно из письма Эйлера Гольдбаху от 21/VIII — 1740 г., в котором мы читаем: «География мне гибельна. Вы знаете, что я за нее поплатился глазом, а теперь опять нахожусь в подобной опасности; когда мне сегодня утром прислали часть карт на просмотр, то я тотчас же почувствовал новый припадок, потому что эта работа, требуя всегда рассмотрения одновременно большого пространства, сильнее утомляет зрение, чем простое чтение или одно писание» (П е к а р с к и й, «История Академии наук», т. I, стр. 256).

Если Эйлер до 1736 г. был известен лишь в сравнительно узких кругах, то мировое место он занял в связи с выходом в 1736 г. его двухтомного трактата по механике, в котором он мастерски использовал новое исчисление. Ясность в идеях, точность формулировок, прекрасный порядок в изложении и, главное, общность и глубина трактата — сразу же поставили автора на первое место среди живущих геометров. Это было время, когда еще был жив И. Бернулли и когда еще была свежа память о Лейбнице, Гюйгенсе и Ньютоне.

Мы уже сказали, что Эйлер обогатил академические «Комментарии» своими мемуарами, число которых было огромно. В этих мемуарах содержатся глубокие изыскания по дифференциальному и интегральному исчислению, по вопросам природы целого числа, по бесконечным рядам, по движению небесных тел, по притяжению эллипсоида и другие.

Можно с уверенностью сказать, что небольшая доля открытий, содержащихся в этих мемуарах, сделала бы автора их известным ученым. Эйлер занимался и музыкой, о чем свидетельствует его теория музыки, опубликованная им в 1739 году. Труд этот не имел успеха, видимо, потому, что «для математиков там было слишком много музыки, а для музыкантов — слишком много математики» (Лузин). Необходимо добавить, что, наряду с плодотворной и многогранной научной деятельностью, Эйлер ведет работу по составлению элементарных курсов для академической гимназии. Им было составлено «Руководство по арифметике» в двух частях и опубликовано в 1738 и в 1740 гг. Это руководство сыграло большую роль в создании русской учебной литературы, так как арифметика в нем была впервые изложена на русском языке как настоящая математическая дисциплина. Создавая учебник для школы, он в это же время, т. е. в 1738 г., получает от Парижской Академии наук премию за мемуары о природе и свойствах огня. В 1740 г. Эйлер работает над объявленной Парижской Академией наук по конкурсу темой о приливах и отливах в море и получает одну третью часть премии за эту работу, разделив ее с Даниилом Бернулли и Маклореном. Интересно отметить, что в результате огромной вычислительной работы, связанной с факторами действия солнца и луны, Эйлер приходит к выводам, которые совпадают с наблюдениями и находятся в согласии с выводами Даниила Бернулли, хотя последний исходил в своих исследованиях из других принципов; Эйлер исходил из гипотезы вихрей, тогда как Бернулли ее отвергал, и, несмотря на это, их численные результаты во многом просто совпадали.

К 1740 г. в России и в Академии науки создалось такое положение, при котором Эйлер продолжать работу, повидимому, уже не мог. Он принимает предложение короля Фридриха II на переезд в Берлин. В своем официальном прошении Эйлер мотивирует просьбу на отъезд из суровых петербургских условий следующими словами: «Понеже силы моего здоровья час от часу умаляются и притом многие трудности в домашнем моем состоянии так умножаются, что я совершенно в несостояние прихожу положенную на меня должность исправлять как надлежит: того ради нахожусь принужден, как ради слабого здоровья, так и других обстоятельств, искать приятнейшего климата и принять от его королевского величества прусского учиненное мне призывание. Того ради прошу императорскую академию наук всеподданнейше меня милостиво уволить и снабдить для моего и домашних моих проезду потребным пашпортом. И как я, в бытность мою здесь, оказанную всякую великую и необычайную милость, доколе жив, с должным благодарением исповедать и повсюду прославлять буду, то обязуюсь еще притом наисильнейше всегда, по крайней возможности, о чести и пользе императорской академии наук трудиться и все оное, к чему меня оскудение сил моих до сего времени не допустило, с божьей помощью, сколько возможно дополнить. На сие мое подданнейшее прошение прошу императорскую академию наук всепокорно милостивое решение учинить, которой я с глубочайшим почтением и должною покорностью во все времена жизни своей пребываю» (Материалы для истории Академии наук, т. IV, 1887, стр. 572). 29 мая 1741 г. Эйлер был уволен от службы в Петербургской Академии наук с пожалованием звания почетного члена Академии и определением ежегодной пенсии в размере 200 рублей. В своей автобиографии Эйлер мотивирует отъезд из Петербурга тем, что там в это время «предвиделось нечто опасно» и что «После кончины достославной императрицы Анны — при последовавшем тогда регенстве, дела (в России) стали идти плохо» (Биография Эйлера. Записки имп. Академии наук, т. 6, 1865, стр. 75; или Пекарский, т. I, стр. 258). Эта причина, повидимому, сыграла не последнюю роль в отъезде Эйлера из России, так как тут дела при временщиках и бироновщине стали идти действительно плохо.

2. Берлинский период деятельности Эйлера (1741—1766)

Приглашая Эйлера в Берлин, Фридрих II имел в виду оживить пришедшую в совершенный упадок Берлинскую академию, основанную еще Лейбницем. Эйлер нашел это ученое общество умирающим и с жаром приступил к его восстановлению. Среди первых же его берлинских мемуаров мы имеем один особенно знаменательный тем, что в нем дается современный способ интегрирования рациональных дробей путем разложения их на простые дроби (идеи такого способа были высказаны еще Лейбницем в 1702—1703 гг.) и излагается обычно принятый в настоящее время способ интегрирования линейных дифференциальных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами. С этого времени начался систематический поток мемуаров Эйлера в изданиях прусской Академии наук и интересно то, что дорожа нашей Академией и сдерживая свои обещания, данные при отъезде из Петербурга, он половину своих работ направляет в ее «Комментарии».

В 1744 г. выходит в свет трактат Эйлера по изопериметрам, в котором он закладывает основания вариационного исчисления, излагающиеся до сих пор по существу в том же духе. В этом же году был опубликован трехтомный трактат Эйлера, посвященный теории движения планет и комет, где он дает способ определения орбит по нескольким наблюдениям. В том же 1744 г. он получает премию Парижской Академии наук за свою теорию магнетизма, основанную на эфирных вихрях. Состояние войны вызвало интерес к артиллерии, и он много занимается вопросом полета снаряда. Французское правительство немедленно перевело эти работы Эйлера с немецкого языка на французский и ввело в практику преподавание этой теории в военных школах. В 1746 г. печатаются три тома различных статей, посвященных артиллерии, в которых он совершенствует формулы баллистики и придает им вид, удобный для практического применения.

Эйлер выступает против ньютоновской теории света, говоря, что материальные частицы не могут двигаться со скоростью света потому, что они имели бы неустойчивую траекторию и что масса солнца была бы очень быстро истощена. Он берет за исходную точку зрения аналогию между звуком и светом, рассматривая его как вибрацию эфира. С этими вопросами связаны у Эйлера многочисленные мемуары.

Много внимания, сил и энергии Эйлер тратит на вопросы, связанные с навигацией, и это является в значительной мере данью эпохе. Мы знаем, что первая научная работа его была посвящена навигации и с тех пор он не порывал с этими вопросами в течение всей своей жизни. В 1749 г. он выпускает двухтомный труд, впервые излагающий вопросы навигации в математической форме. Устойчивость и равновесие судов, вопросы о качке на зыби, о форме судов, о движении судов силою ветра и управление судном — все это было охвачено этим произведением. Работа была опубликована нашей Академией наук. Благодаря этому труду кораблестроение обогатилось теорией, позднее (1773 г.) популяризованной им и приведенной в такое состояние, при котором выводами ее могли пользоваться непосредственно капитан и строитель. Труд его, появившийся в 1773 г., произвел огромное впечатление; его издали во Франции, Англии и Италии. Французское правительство выделило Эйлеру 6000 фунтов стерлингов за его открытия в навигационном деле. Прусское правительство, как и русское, давали Эйлеру поручения чисто инженерного характера. Так, в 1749 г. он осматривает канал между Гавелем и Одером и указывает на необходимость исправления недостатков.

Многочисленные работы Эйлера по анализу исчисления бесконечно малых, появившиеся в различное время и рассеянные по разным изданиям, были затем объединены в одном произведении. Такой план созревал у Эйлера в связи с подготовкой к изданию его знаменитого двухтомного труда «Введение в анализ бесконечно малых», изданного в 1748 г. в Лозанне. Мы будем особо говорить об этом произведении, составившем эпоху в нашей науке, сейчас же укажем, что первый том его был посвящен свойствам рациональных и трансцендентных функций. Во втором томе Эйлер исследует кривые второго, третьего и четвертого порядков и поверхности второго порядка. Здесь, с преобразованием прямоугольных координат им впервые вводятся знаменитые углы, которые называются до сих пор эйлеровыми углами и играют в наших науках (математике и механике) выдающуюся роль. Это произведение утвердило за Эйлером славу величайшего математика. Почти все, что преподается теперь в курсах высшей алгебры и высшего анализа, находится в этой книге Эйлера. Вслед за «Введением» последовал и сам трактат исчисления бесконечно малых в четырех томах. Первый том, посвященный дифференциальному исчислению, появился в Берлине в 1755 году, а три остальных тома, посвященные интегральному исчислению, изданы нашей Академией в 1768—1770 гг. Третий том посвящается автором вариационному исчислению, которым он обогатил математический анализ.

В это же время Эйлер ведет свои исследования по вопросу о прохождении света через различные среды и связанному с этим эффекту хроматизма. В 1747 г. Эйлер предложил сложный объектив, составленный из двух стекол с внутренней полостью, наполненной водой, который уничтожает вредные окраски, приведшие к забракованию рефрактора. Эти исследования Эйлера привели к величайшему открытию XVIII в. — устройству ахроматического рефрактора, значение которого в астрономической науке трудно переоценить.

К середине шестидесятых годов Эйлер снова берется за механику и в 1765 г. появляется второй его крупный трактат по этому предмету. Если в прежнем трактате (1736 г.) по механике он ограничивался изучением движения точки или системы конечного числа точек, то в трактате 1765 г. было рассмотрено движение твердого тела. Этот трактат в большой степени способствовал развитию науки о движении небесных тел и навигации. Так заканчивается его берлинский период.

За все время до вторичного возвращения в Россию Эйлер, по существу, не рвал связей с русской Академией; эта связь его поддерживалась не только тем, что он печатал свои мемуары в ее изданиях, но и тем, что он руководил занятиями русских молодых людей, о которых он неизменно давал хорошие отзывы; так, у него занимались Котельников, Румовский и другие. Мысли о возвращении в Россию не покидали Эйлера на протяжении всего периода пребывания в Берлине. Уж слишком многое связывало его с Петербургом. Эти мысли стали более настойчивыми после того, когда стало известно, что Фридрих II приглашает на пост президента (1763 г.) Д'Аламбера, с которым у Эйлера был разлад и который пользовался чрезвычайным расположением прусского короля. Хотя следует тут же заметить, что Д'Аламбер и не собирался поехать в Берлин (он также отклонил и предложение Екатерины II о поездке в Петербург) и что его отношения к Эйлеру были совсем не плохие, как об этом думал последний. Известно, что об удержании Эйлера в Берлине хлопотал именно Д'Аламбер.

Он писал Эйлеру 29 июня 1763 года из Потсдама: «Хотя мне не остается и месяца пробыть в этой стране, однако я не могу удержаться, чтобы не сочувствовать ей и особенно не жалеть академии, если она будет иметь несчастье потерять Вас. Что до меня касается, когда бы мне пришлось остаться здесь, то я бы сделал все на свете для удержания Вас. Решились ли вы окончательно? Вы должны быть уверены, что я уже говорил и буду еще говорить о вас королю со всем уважением, которого вы заслуживаете». 14 августа того же года Д'Аламбер пишет из Сан-Сусси: «Я, наконец, считаю себя столько счастливым, что сохранил королю и Академии такого человека, как вы. Вы увидите из письма маркиза Д'Аржана, что король назначает хороший пенсион для вашего сына, и не от меня будет зависеть, чтобы вы, милостивый государь, не получили все, что может желать человек таких редких достоинств, как Ваши. В этом смысле я говорил о вас королю», и еще 20 августа из Потсдама: «Я совершенно убедил его величество, что в Вас Академия понесет невознаградимую потерю, которая нанесет удар славе короля. Я полагаю еще до моего отъезда поручить его вниманию ваши интересы» (Пекарский, «Екатерина II и Эйлер», «Зап. имп. Акад. наук», т. 6, кн. 1, стр. 66). Из этого отчетливо видно, что Д'Аламбер был хорошо настроен по отношению к Эйлеру. Однако ни уговоры Д'Аламбера, ни отказы короля не заставили Эйлера бросить идею о поездке его в Россию. В мае 1766 г. Эйлер выпросил у короля разрешение на выезд и в июле уехал в Россию. Раздосадованный на Эйлера король мстил за это великому математику следующей выходкой в письме к Д'Аламберу 25 июня того же года: «г. Эйлер, до безумия любящий большую и малую медведицу, приблизился к Северу для большего удобства к наблюдению их. Корабль, нагруженный его x, его K, K, потерпел крушение — все пропало, а это жалко, потому что там было чем наполнить шесть фолиантов статей, испещренных от начала до конца цифрами. По всей вероятности, Европа лишится приятной забавы, которая была бы ей доставлена чтением их» (Пекарский, т. I, стр. 292). Так или иначе, Эйлер снова в России, где начинается его последний период.

3. Второй петербургский период деятельности Эйлера (1766—1783)

Екатерина II хотела во что бы то ни стало вернуть Эйлера в Россию и, когда он согласился на возвращение в императорскую Академию, она писала 6 января 1766 г. канцлеру графу Воронцову: «Господин граф Воронцов! Письмо к Вам г. Эйлера доставило мне большое удовольствие, потому что я узнаю из него о желании его вступить снова в мою службу. Конечно, я нахожу его совершенно достойным желаемого им звания вице-президента Академии наук, но для этого следует принять некоторые меры прежде, чем я установлю это звание — говорю установлю, так как доныне его не существовало. При настоящем положении Академии там нет денег на жалованье в 3000 рублей, но для человека с такими достоинствами, как г. Эйлер, я добавлю к академическому жалованью из государственных доходов, что вместе составит требуемые им 3000 рублей. У него будет казенная квартира и ни малейшей тени солдат.

Хотя в Академии нет свободной кафедры физики с жалованьем в 1000 рублей для его старшего сына, однако я их ему назначаю, так же как дозволяю свободную практику второму (медику) и дам место, если он пожелает поступить в службу. Третий сын (артиллерист) будет помещен без всякого затруднения... Я уверена, что моя академия возродится из пепла от такого важного приобретения, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека»... (Пекарский, «Екатерина II и Эйлер», Записки Акад. наук, 1865 г., т. 6, стр. 88).

Эйлер прибыл в Петербург 17 июля 1766 г., где и прожил до конца своей жизни. Едва приехав в Россию, он тяжело заболел и лишился второго глаза. Это была страшная утрата для Эйлера, который был еще совершенно трудоспособным. Но, к великому удивлению, это не сломило его. Изумительная память и пламенное воображение еще более усилились и заменили утрату зрения. Мальчик-слуга, приехавший с Эйлером из Берлина, не имевший математического образования, сделан был писцом, которому Эйлер диктовал свою алгебру, появившуюся в двух томах. Удивляет ясность и стройность этого произведения, не говоря уже о тех обстоятельствах, при которых составлялся этот курс. Алгебра появилась сначала в русском переводе в 1768 г., потом в немецком оригинале в 1770 г. В 1774 г. появился французский перевод с приложениями Лагранжа, а в 1812 г. акад. Висковатов приготовил новое издание этой книги со своими примечаниями, появившееся уже после его смерти.

Вместе с акад. Крафтом Эйлер собирает в один огромный трехтомный трактат все, что им было написано за 30 лет по диоптрике: здесь имеются правила наилучшего расчета рефракторов, рефлекторов и микроскопов, решаются такие вопросы, как вычисление наибольшей яркости изображения, наибольшего поля зрения, наименьшей длины инструмента, наибольшего увеличения, а также вычисление числа окуляра. Словом, здесь решалась проблема наилучшего видения во всем его объеме. Все это было опубликовано в 1769, 1770 и 1771 гг.

Еще не высохли чернила и краска на огромном труде Эйлера по диоптрике, им были уже подготовлены к печати и лежали в типографии: три тома «Писем к немецкой принцессе», три тома «Интегрального исчисления», два тома «Алгебры», «Навигация», «Новая теория луны», «Вычисление затмения солнца» и много других мемуаров. «Письма к немецкой принцессе», появившиеся в 1768—1772 гг, сразу же были переведены на русский и затем на французский языки. Эти «Письма» немало способствовали популяризации натурфилософских взглядов Эйлера в широких кругах интеллигенции, которые не всегда могли читать, да и понимать его специальных математических работ.

В этот период поистине изумительного по своему напряжению творчества Эйлер испытывает новое бедствие: в 1771 г. пожар уничтожает его дом почти со всем имуществом. Его самого едва успели вытащить из огня. Благодаря распорядительности удалось спасти от пожара большинство из его ценных рукописей. Несмотря на все эти треволнения и свой преклонный возраст, Эйлер продолжает свою интенсивную творческую деятельность. Притом следует отметить поразительный факт — его все возрастающую научную продуктивность. Если подсчитать, что сделано Эйлером по десятилетиям, то получится следующая картина, представленная Н. Н. Фуссом:

Годы	Число трудов	
1727—1733	24	756
1734—1743	49	
1744—1753	125	
1754—1763	99	
1764—1772	104	
1773—1782	355	

Хотя эти данные и не совсем точно отображают все творчество Эйлера (как выяснено сейчас, у него число работ значительно больше этого), но общее количественное соотношение его работ по десятилетиям подтверждает эту мысль. Как видно из этой таблицы, почти половина из написанного им падает на последнее десятилетие. О характере работы слепого Эйлера можно представить по письму Иоганна Бернулли (племянника Даниила Бернулли), посетившего Петербург летом 1777 года: «Здоровье его (Эйлера) довольно хорошо, и этим он обязан очень умеренному и правильному образу жизни. Зрением, по большей части утраченным, а одно время вовсе потерянным, он, однако, теперь лучше пользуется, чем многие воображают! Хотя он не может узнать никого в лицо, читать черного на белом и писать пером на бумаге, однако пишет на черном столе свои математические вычисления мелом очень ясно и порядочно в обыкновенную величину. Потом они вписываются в большую книгу одним или другим из его адъютантов Фуссом или Головиным (чаще первым из них). И из этих-то материалов составляются под его руководством статьи. Таким образом в продолжение пяти лет, которые прожил г. Фусс в доме Эйлера, приведено к окончанию 120 или 130 статей» («Русская старина», 1907 г., том 132, стр. 496).

Мы не можем подробнее останавливаться на остальных многочисленных работах Эйлера, их было чрезвычайно много, одно только скажем, что здесь были важные работы по гидродинамике, теории объективов, теории вероятностей, теории чисел и другим важным вопросам естествознания в самом широком смысле этого слова.

Рассказывают, что Эйлер, находясь уже в преклонном возрасте, получил предложение от лиц, стоявших близко к правительству, оставить после своей смерти столько мемуаров, чтобы можно было наполнять ими академические издания в течение 20 лет. Поэтому будто бы Эйлер и напрягал свои творческие силы и в течение семи лет представил Головину 70 мемуаров и оставил после своей смерти в готовом виде около 250 мемуаров (Лузин). Эйлер до самой смерти сохранял работоспособность; только несколько приступов головной боли было у него за неделю до смерти. В самый день смерти он беседовал с Лекселем в кругу своих сотрудников, родственников и учеников. В этой беседе его и застигла смерть. «Я умираю» — сказал он тихо и окончил свою чистую и славную жизнь или, вернее, как сказал Кондорсе, он «прекратил вычислять и жить». Это произошло 7 сентября 1783 года. Эйлеру было 76 лет. Леонард Эйлер похоронен на Смоленском кладбище, в Петербурге, — где над могилою воздвигнут памятник с надписью: «Leonardo Eulero Academia Petropolitana».

В заключение общей характеристики деятельности Леонарда Эйлера необходимо обратить внимание на характерную особенность всего творчества этого выдающегося математика XVIII в.; мы имеем в виду прикладные мотивы во всех его работах. Какую бы мы работу Эйлера ни взяли, почти всюду отчетливо выступают требования практики человека.

Работы, посвященные механике, гидродинамике, навигации, диоптрике и астрономии, в той или иной мере связаны с развивающимся транспортом. Водный транспорт с включением Нового Света в деловую жизнь Европы предъявлял к морскому транспорту серьезные требования: ориентировку в открытом море, отсюда развитие астрономических работ; устойчивости и быстроходности судов, отсюда — работы по гидродинамике и механике вообще. Астрономические исследования и ориентировка на море требовали развития диоптрики и всего того, что связано с этим. Артиллерийская практика требовала развития баллистики, учения о сопротивлении среды — и все это интересовало Эйлера. Практические проблемы, как правило, упирались в развитие нового исчисления, которому Эйлер и посвящает значительную долю своей многогранной и плодотворной деятельности.

III. ТРУДЫ ЭЙЛЕРА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Эйлеру принадлежит более 800 работ по самым разнообразным вопросам математики, механики, астрономии, физики, техники и философии, но наибольшее внимание в течение всей своей долголетней научной деятельности он уделял, несомненно, развитию методов анализа бесконечно малых и, в первую очередь, развитию учения о бесконечных рядах. Понятие функции, производной и интеграла после работ Ньютона, Лейбница и Бернулли сделались неотъемлемым аппаратом изучения вопросов техники и явлений природы. Оказалось, что законы движения земных и небесных тел могут быть выражены в виде дифференциальных уравнений, а потому механика, астрономия и физика, а также техника предъявляли огромные требования к математике в отношении разработки методов интегрирования этих уравнений. Эйлер не мог стоять в стороне от этой основной задачи математики своего века и сделал чрезвычайно многое для развития математического анализа. Можно с уверенностью сказать, что добрая половина того, что преподается теперь в курсах высшей алгебры и высшего анализа, находится в трудах Эйлера (Лузин), и в первую очередь в его классических сочинениях по математическому анализу, с которыми прежде всего нам и следует ознакомиться.

1. «Введение в анализ бесконечно малых»

Задумывая план своего фундаментального труда по математическому анализу, Эйлер писал Гольдбаху 4 июля 1744 года: «Когда я составил себе план полного трактата об анализе бесконечно малых, я заметил, что для изучения разбираемых в нем вопросов необходимо знание очень многих вещей, которые, собственно говоря, не относятся к анализу и нигде еще не разобраны. Эти-то вещи и составили мое сочинение, являющееся как бы преддверием к анализу бесконечно малых».

В предисловии к своему «Введению» он пишет примерно об этом же другими словами так:

«Нередко мне приходилось замечать, что большая часть трудностей, на которые наталкиваются в анализе бесконечно малых изучающие математику, возникает от того, что едва усвоив элементарную алгебру, они направляют свои мысли к этому высокому искусству, вследствие чего они не только как бы остаются стоять на пороге, но и составляют себе превратные представления о той бесконечно малой величине, идея которой призывается на помощь. Я не сомневаюсь, — пишет он далее, — что содержание этих книг сможет восполнить с избытком указанный пробел». («Введение в анализ», т. 1, изд. 1936, стр. 25).

Из этого видно, что одной из основных задач Эйлера при написании «Введения» было сообщение учащимся всего того, что в XVIII в. являлось необходимым для понимания анализа бесконечно малых и что отсутствовало в тогдашних курсах алгебры. Книга «Введение в анализ бесконечно малых», как указано выше, состоит из двух томов и появилась в 1748 г. Первый том книги посвящен функции и ее свойствам. Здесь дано определение функции, классификация функций и ее различные представления. В главах II и XII дается разложение дробных рациональных функций на простейшие; сначала приведены разложения функций в случае действительных, а затем мнимых корней знаменателя. Автор использует при этом метод неопределенных коэффициентов. Глава III посвящена преобразованию функций через многочисленные подстановки, уничтожающие иррациональные формы. Эти подстановки широко затем использованы автором в интегральном исчислении, при интегрировании иррациональных выражений. Главы IV и VII дают представления функции через бесконечные степенные ряды. Сначала он показывает, как получается ряд при делении полинома на полином, а затем дает представление бесконечным рядом некоторых показательных и логарифмических функций; здесь имеется у него ряд для e^x и для $log \frac{1+x}{1+x}$

В главе V автор вводит понятие функций многих переменных, а в VI дает определения и многочисленные примеры показательных и логарифмических функций. Глава VIII посвящена тригонометрическим функциям, где даются определения этих функций, их взаимная связь, выражение их через бесконечные ряды, формула Муавра, формула связывающая тригонометрические функции с показательными (формула Эйлера) и ряд для $\frac{\pi}{4}$ (ряд, известный Лейбницу). Глава VIII начинается с вычисления числа π, для которого автор дает значение с точностью 127 знаков. В главах IX, X и XI дается исследование трехчленных множителей, их применение к определению сумм бесконечных рядов и суммируются многочисленные ряды. Кроме того, в этих главах даются бесконечные произведения и их связь с бесконечными рядами. Главы XIII, XIV, XV, XVI и XVIII посвящены главным образом бесконечным рядам, где устанавливаются выражения общих членов ряда (XIII), даются выражения для синуса, косинуса, тангенса и котангенса кратных дуг через бесконечные ряды и бесконечные произведения (XIV), даются многочисленные примеры перехода от бесконечных рядов к бесконечным произведениям и наоборот (XV), ставится задача о разбиении чисел на слагаемые через бесконечные ряды и даются способы представления заданного числа на сумму n равных и неравных слагаемых, дается специальная таблица для этой цели (XVI) и, наконец, даются указания о применении бесконечных рядов к отысканию корней уравнения (XVII). Книга заканчивается главой о непрерывных дробях, где непрерывные дроби обращаются им в бесконечные ряды и наоборот, бесконечные ряды — в бесконечные дроби.

Второй том «Введения», как мы уже говорили, содержит изложение аналитической геометрии. Здесь исследуются свойства кривых по их уравнениям. Изучив прямые и кривые по уравнениям первой и второй степени с двумя неизвестными, Эйлер переходит к кривым третьего порядка, сводя их к 16 родам (вместо 72 видов, указанных Ньютоном). Затем при помощи того же метода он рассматривает кривые четвертого порядка, сводя их к 146 родам. Здесь же он дает учение о касательных к кривым, о соприкасающемся круге, рассматривает свойства некоторых трансцендентных кривых (например, циклоиды) и переходит затем к геометрии в пространстве трех измерений, где он первый дает классификацию поверхностей второго порядка.

Эйлер впервые дает развернутое изложение учения о функциях, исходя из строгого определения этого понятия, данного им в следующих выражениях: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств» (стр. 30). Такое определение функций было дано еще учителем Эйлера И. Бернулли, но первое стройное учение о функции принадлежит его ученику Леонарду Эйлеру, который подробно исследует тригонометрические функции, впервые рассматривая их как отношения длин отрезков. Он изучает все свойства этих функций аналитически, при помощи бесконечных рядов. Следует особо отметить, что Эйлер впервые вводит понятие функции комплексного переменного. Эйлер открыл неожиданную для всех, тесную и поразительную связь между тригонометрическими, показательными и логарифмическими функциями, которая выражается следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \end{aligned}\right\} \ldots (\alpha)$$

$$\operatorname{arctg}\varphi = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+i\varphi}{1-i\varphi} \ldots (\beta)$$

Тригонометрию Эйлер дал в таком виде, что она остается, вообще говоря, в том самом виде и в наше время. Все формулы им были упрощены благодаря систематическому обозначению сторон треугольника через *а, в, с*, а углов им противолежащих через *А, В* и *С*. Он внес совершенную ясность в вопрос о знаках тригонометрических функций во всех четвертях и дал формулы приведения. Выявленная Эйлером связь между логарифмическими и тригонометрическими функциями дала возможность ответить на вопрос о логарифмах отрицательных чисел, который долгое время занимал таких величайших математиков, как Лейбница, И. Бернулли и Д'Аламбера. Вопрос был решен в пользу Лейбница, который считал логарифмы отрицательных чисел мнимыми.

Эйлер дал совершенно конкретный способ разложения дроби

$$\frac{f(x)}{(x-x_1)\ (x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n)}$$

на сумму дробей вида

$$\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-x_n}.$$

«Введение» Эйлера сыграло огромную научную и методологическую роль. Популярность его сразу же стала настолько велика, что введенные Эйлером обозначения «e», «π», «i», «мантисса» и другие сразу же получили всеобщее признание. Изложение Эйлера отличается изумительной простотой и ясностью, хотя он и пользуется здесь только средствами элементарной алгебры и тригонометрии. На такой основе он сумел вложить в свою книгу столь богатое и интересное по общности методов содержание, что мы имеем полное право настойчивым образом рекомендовать слушателям ознакомиться с этим прекрасным классическим произведением математической науки. Первая часть «Введения» имеется на русском языке в переводе с латинского, сделанном Е. Л. Пацановским в 1936 г.

2. «Дифференциальное исчисление»

«Дифференциальное исчисление» Эйлера появилось, как мы уже говорили, в 1755 г. Это большой том, в русском переводе, составляет 579 страниц большого формата. Все сочинение состоит из двух частей: в первой он излагает основы дифференциального исчисления, а во второй его аналитические приложения, в которых значительную долю занимают бесконечные ряды, вопросы максимума и минимума функций, применения дифференциального исчисления к решению уравнений и другие. Книга начинается изложением учения об исчислении конечных разностей и приложения этого учения к нахождению сумм данного числа и передовых членов разного рода рядов. Затем он переходит к вопросам о бесконечно больших и бесконечно малых величинах, о природе дифференциалов, о технике дифференцирования функций и, наконец, к вопросу о дифференциальных уравнениях. Этим заканчивается первая часть. Интересно отметить понимание Эйлером основных положений дифференциального исчисления — бесконечно малой величины, дифференциала, производной и диференциального уравнения. Еще в своем «Введении» Эйлер ставит проблему о бесконечном, хотя вопроса о дифференцировании он там и не разбирает. Так, на стр. 115 упомянутого труда, говоря о выражении показательных и логарифмических количеств при помощи рядов он пишет: «Так как $a^0 = 1$, и при возрастании показателя числа a одновременно увеличивается значение степени, если только a есть число, большее единицы, то отсюда следует, что когда показатель бесконечно мало превышает нуль, то сама степень также бесконечно мало превзойдет единицу. Если ω будет числом бесконечно малым, т. е. столь малой дробью, что она только-только не равна нулю, то

$$a^{\omega} = 1 + \psi,$$

причем ψ будет число также бесконечно малым». Из этого видно, что бесконечно малая для Эйлера здесь не равна нулю, и это вполне гармонировало со взглядами его учителя Иоганна Бернулли. Но в «Дифференциальном исчислении» Эйлер становится на другую точку зрения, считая бесконечно малые чистыми нулями. Для уяснения этой точки зрения Эйлера на бесконечно малую следует ознакомиться с III главой «Дифференциального исчисления». В § 83 этой главы (стр. 91) мы читаем: «Учение о бесконечном станет более понятным, если мы разъясним, что такое бесконечно малое в математике. Нет никакого сомнения, что всякое количество может уменьшаться до тех пор, пока совсем не исчезнет и не обратится в ничто. Но количество бесконечно малое есть не что иное, как количество исчезающее, и потому оно **точно равно нулю**. С этим согласуется и такое определение бесконечно малых, согласно которому они меньше всякого могущего быть заданным количества. Действительно, если количество будет столь мало, что оно меньше всякого могущего быть заданным количества, то оно заведомо не может быть неравным нулю, ибо, если бы оно не было равно нулю, то можно было бы задать количество, равное ему, что противно предположению. Итак, если кто спросит, что такое бесконечно малое количество в математике, то мы ответим, что оно точно равно нулю». Дальше разъясняется техника операций с бесконечно малыми. Если, говорит он, dx—бесконечно малое, то

$$a + dx = a.$$

На стр. 92 он дает

$$dx \pm dx^2 : dx = \frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1,$$

где применяется тот же принцип отбрасывания бесконечно малых при наличии конечной. Говоря о бесконечно больших, Эйлер приходит к тому, что «между бесконечными количествами может иметь место какое угодно отношение», что, например, $\infty < 3\infty$. Об этом мы можем читать в той же III главе «Дифференциального исчисления». Принимая бесконечно малые за нули и различая бесконечно большие, Эйлер должен был преодолеть при построении своего исчисления довольно большие затруднения. Ведь $3dx$, $2dx$, dx, — все это, по Эйлеру, нули и тем не менее $2dx : dx = 2$; $3dx : dx = 3$ и т. д. Получаются разные нули. Это затруднение Эйлер обходит введением равенства «арифметического» и «геометрического». Он говорит, что два нуля всегда равны арифметически и вообще говоря не равны геометрически (стр. 91). Следует сказать, что таким разделением нулей в дальнейшем он не пользуется. Эйлер избегает понятия предела и рассматривает бесконечно малые как постоянные, что неизбежно приводит его к нулям.

Дифференциал Эйлер определяет как бесконечно малую разность. На стр. 103 разбираемого сочинения мы читаем: «Для того чтобы случай, с которым имеет дело анализ бесконечно малых, отличать от метода исчисления разностей, целесообразно воспользоваться для обозначения бесконечно малых разностей как особыми наименованиями, так и особыми символами. Итак, — продолжает он, — назовем вместе с Лейбницем бесконечно малые разности дифференциалами, и так как в первой главе мы уже установили различные порядки разностей, то теперь нетрудно будет понять, что такое первые, вторые, третьи и т. д. дифференциалы какой-либо функции». Далее он дает знак Δ (кстати, впервые им введенный для обозначения прироста переменной) для дифференциала заменяет его через d.

Главы V, VI, VII и VIII посвящены технике дифференцирования, которое ведется им, по существу, так, как это делалось у Лейбница и его учеников.

Производная $y=f(x)$ Эйлером определяется как функция от x. Ни физического, ни, тем более, геометрического толкования производной он не дает. Он рассуждает так: если y есть какая-нибудь функция от x, то ее дифференциал dy будет иметь вид $dy=Pdx$, где выражение для Р может быть всегда найдено по изложенным правилам и представляет собой также функцию от x (129 стр.). Здесь он разбирает дифференцирование функций многих переменных (VII). Он останавливается особо на однородных функциях, которые им были определены еще во «Введении» как функции, все члены которых имеют одну и ту же степень. Излагается теория полного дифференциала. Эйлер говорит, что если $dv=Pdx+$ $+Qdy$ то P и Q связаны соотношением $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, которое нужно понимать $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$. Это соотношение он считает необходимым и достаточным, чтобы dv было полным дифференциалом. В VIII главе ведется изложение вопросов, связанных с учением о замене переменных; все здесь принадлежит Эйлеру. Последняя глава первой части посвящена дифференциальным уравнениям, где широко применяется изложенное им о полном дифференциале.

Вторая часть «Дифференциального исчисления» посвящена, как мы уже сказали, приложениям того, что изложено в первой части к вопросам анализа и алгебры. Заглавие «Дифференциального исчисления, часть вторая, содержащая применение этого исчисления в анализе конечных, а также в учении о рядах», говорит именно об этом. Одним из важных применений дифференциального исчисления является, безусловно, вывод необходимых и достаточных условий максимума и минимума функций от одной и многих переменных. Здесь рассмотрено большое количество примеров и даны практические указания для решения задачи об экстремальных значениях функций. Материал о максимумах и минимумах функций многих переменных излагается здесь впервые. Имеются применения дифференциального исчисления к отысканию корней уравнений (XIII), где используется, в основном, то положение, что между двумя корнями уравнения $f(x)=0$ должен существовать корень уравнения $f^1(x)=0$. Но главное, на что обращает более всего внимание Эйлер во второй части, да и вообще в своих работах по математическому анализу, — это бесконечные ряды. Им он посвящает значительную часть своего «Введения», они его занимают в большой мере и здесь в «Дифференциальном исчислении».

В третьей главе «Дифференциального исчисления» вопрос о рядах начинается с примера:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots,$$

где он обращает внимание на то, что сумма первых n членов этого ряда отличается от $\frac{1}{1-x}$ на величину $\frac{x^n}{1-x}$ и, стало быть, при увеличении числа n она приближается к $\frac{1}{1-x}$, если остаток $\frac{x^n}{1-x}$ приближается к нулю. Затем он переходит к ряду

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \dots,$$

и, полагая здесь $x = 1, 2, 3 \dots$, он получает такие равенства:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1/2$$
$$1 - 2 + 4 - 8 + \dots = 1/3$$
$$1 - 3 + 9 - 27 + \dots = 1/4.$$

Он замечает после этого, что эти равенства, очевидно, не верны; например, второй ряд «не может равняться $1/3$, ибо чем больше членов мы берем, тем более их суммы удаляются от $1/3$. Между тем сумма каждого ряда всегда должна быть пределом, к которому мы тем ближе подходим, чем больше членов складываем» (стр. 100). Следует заметить, что ряд, члены которого убывают, Эйлер называет сходящимся в отличие от современных понятий. Вся принципиальная установка Эйлера в теории рядов обнаруживается из заключительных строк главы III первой части его «Дифференциального исчисления». Здесь на стр. 100 после приведенных рядов из $\frac{1}{1+x}$ он пишет: «Из этого некоторые заключили, что такие ряды — они называются расходящимися — вообще не имеют никакой определенной суммы, ибо, выполняя сложение членов, мы не имеем приближения к какому-либо пределу, который можно было бы принять за сумму бесконечного ряда. Так как эти суммы уже потому, что мы пренебрегаем последними остатками, являются, как было показано, ошибочными, то это мнение полностью согласуется с истиной. Однако против него можно с полным правом возразить, что упомянутые суммы, хотя они и оказываются совершенно несогласными с истиной, однако, никогда не приводят к ошибкам и что, напротив, приняв их, мы получаем множество замечательных вещей, которых мы должны были бы лишиться, если бы пожелали совсем отказаться от этих суммирований. Но ведь эти суммы, если они были бы ложными, не могли бы всегда приводить нас к истинным результатам, тем более, что они уклонились бы от истины не на малое, а на бесконечно большее количество, и, следовательно, они должны были бы бесконечно далеко уводить нас от истины. Так как этого, однако, не происходит, то нам остается развязать этот труднейший узел» (100—101 стр.). И дальше он пытается «развязать» этот узел следующими соображениями: «И вот я говорю, что вся трудность кроется в названии «сумма». Действительно, если под «суммой» ряда понимать, как это обычно делается, результат сложения всех его членов, то нет никакого сомнения, что суммы можно получить только для тех бесконечных рядов, которые являются сходящимися и дают результаты, тем более близкие к некоторому определенному значению, чем больше членов складывается. Расходящиеся же ряды, члены которых не убывают, могут обнаруживать чередование знаков $+$ и $-$, в противном же случае они вообще не будут иметь никаких определенных сумм, если только слово «сумма» понимается в смысле результата сложения всех членов. Но в тех случаях, в которых мы упомянули, из неверных сумм получаются верные результаты не потому, что конечное выражение, скажем $\frac{1}{1-x}$ есть сумма ряда $1+x+x^2+x^3+\ldots$ и т. д., а потому, что это выражение, если его разложить, дает именно такой ряд. Таким образом здесь можно было бы вовсе отказаться от наименования «сумма». Этих затруднений и кажущихся противоречий мы совершенно избежим, если мы припишем слову «сумма» значение, отличное от обычного. А именно, мы скажем, что сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возничает этот ряд. В этом смысле у бесконечного ряда $1+x+x^2+x^3+\ldots$ и т. д. истинная сумма будет равна $\frac{1}{1-x}$, ибо этот ряд происходит из разложения этой дроби, какое бы число не подставлять вместо x. При этом соглашении, если ряд будет сходящимся, то новое определение слова «сумма» совпадет с обычным, а так как расходящиеся ряды не имеют никакой суммы в собственном смысле этого слова, то из этого нового наименования не проистечет никаких неудобств. Приняв это определение, мы сможем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и в то же время защититься от всяческих обвинений» (стр. 101).

Исходя из этих установок, Эйлер совершенно спокойно оперирует с бесконечными рядами, не обращая внимания на радиус сходимости их. Такое ошибочное представление на природу бесконечных рядов и в особенности небрежное оперирование с ними как с конечными суммами продолжалось вплоть до Гаусса, Коши и Абеля, которые установили известные нормы пользования такими рядами при непременном условии предварительного исследования сходимости их совсем в ином смысле. Однако Эйлер, несмотря на сказанное, с успехом использовал бесконечные ряды к различным задачам. В шестой главе второй части «Дифференциального исчисления» он дает специальную формулу суммирования и применяет ее к многочисленным частным случаям, получая при этом много поразительных и изящных результатов (Выгодский). Он находит здесь суммы для тысячи и миллиона членов гармонического ряда (задачи 1 и 2, стр. 305), здесь же он получает ряды:

$$1 + (^1/_2)^1 + (^1/_3)^2 + (^1/_4)^2 + \cdot \cdot \quad = \frac{\pi}{6},$$

$$1 + (^1/_2)^4 + (^1/_3)^4 + (^1/_4)^4 + \cdot \cdot \cdot = \frac{\pi^4}{90},$$

$$1 + (^1/_2)^6 + (^1/_3)^6 + (^1/_4)^6 + \cdot \cdot \cdot = \frac{\pi^6}{945},$$

и много других. Следует сказать, что бесконечные ряды, введенные в математику Меркатором, Ньютоном, Лейбницем, Тейлором, получили исключительное и во многом плодотворное развитие в трудах Эйлера. Хотя никто при этом не пробовал по-настоящему говорить о погрешностях при применении бесконечных рядов за весь XVIII в., включая сюда, как мы уже говорили, Эйлера и даже Лагранжа. Вместе с этим следует сказать, что оперируя с расходящимися рядами, Эйлер в некотором смысле предвосхитил тем самым теорию суммирования, развитую позднее Чезаро, Борелем, Вороным и др.

Все «Дифференциальное исчисление» Эйлера, — говорит А. Н. Крылов,—«остается в высшей степени поучительным по превосходному подбору примеров, по изяществу многих выводов и преобразований и по оригинальности и богатству содержания», и, стало быть, оно является золотым фондом в сокровищнице нашей математической науки. Все это безусловно оправдывает перевод на русский язык и издание у нас этой книги в 1949 г., почти через 200 лет.

3. «Интегральное исчисление»

Интегральному исчислению Эйлер посвятил три основных тома, вышедших в 1768—1770 гг. и один дополнительный том, появившийся в 1794 г. Этим колоссальным трудом заканчивается его знаменитая трилогия, посвященная математическому анализу и развитию нового исчисления. «Интегральное исчисление» Эйлера явилось первым полным руководством по интегральному исчислению, оно не только охватывает предмет в его полном объеме и систематизирует все тогда известное, в значительной части принадлежащее самому Эйлеру, но многие вопросы там развиваются заново, так что самое сочинение содержит много совершенно нового. Все изложено с таким совершенством, что стало классическим, перешло во множество последующих руководств и изучается по сей день в форме, приданной Эйлером, начиная от самого начертания формул.

Интегральному исчислению Эйлер ставит такую задачу: «Интегральное исчисление есть метод нахождения по данному соотношению между дифференциалами соотношения между самими количествами; действие, которым это достигается, называется интегрированием». «Дав обозрение предмета, — пишет А. Н. Крылов, — он прямо переходит к интегрированию функций одной переменной и устанавливает те классы, когда оно выполняется в конечном виде. Все здесь приведено в такую стройную и законченную систему и последовательность, что изложение Эйлера целиком сохранилось и поныне, причем в этой области к созданному Эйлером ничего существенного за 150 лет не прибавлено» (Сборник «Леонард Эйлер», стр. 16, изд. 1935 г.). Первая часть первого тома заканчивается многочисленными типичными интегралами, которые стали потом классическими. Вторая часть этого тома содержит интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка, и здесь практическая часть осталась до сих пор в том виде, в каком она была у Эйлера. Здесь мы имеем учение об интегрирующем множителе, метод приближенного численного интегрирования уравнений первого порядка. Во втором томе «Интегрального исчисления» содержится учение об обыкновенных дифференциальных уравнениях второго и высших порядков. Практические приемы и здесь мало изменились с времен Эйлера. Теоретические вопросы, связанные с интегрированием дифференциальных уравнений, Эйлером не затрагиваются. Все, что мы имеем, есть труд авторов, живших после Эйлера. Интегрирование систем дифференциальных уравнений Эйлер также не затрагивал. В третьем томе он излагает учение об интегрировании уравнений в частных производных как первого, так и высших порядков. В заключении этого тома он излагает вариационное исчисление. Так как он не рассматривал систем обыкновенных уравнений и ему недоставало понятия об интеграле такой системы, то, естественно, он не мог связать вопроса об интегрировании уравнений в частных производных первого порядка с интегрированием систем уравнений обыкновенных и потому не дал этому учению той законченности, которая была ему придана отчасти в трудах Лагранжа, и затем в работах Коши, Якоби и других математиков XIX в.

После выхода в свет третьего тома «Интегрального исчисления» (1770 г.) Эйлер пишет много статей, развивая и дополняя то, что им изложено было в его «Интегральном исчислении». Все эти статьи были потом объединены и вышли четвертым дополнительным томом в 1794 г. «Появление «Интегрального исчисления», — говорит А. Н. Крылов, — произвело на современных ему математиков не только глубокое, но, можно сказать, ошеломляющее впечатление, недаром Д'Аламбер в одном из своих писем Лагранжу называет Эйлера «Этот диавол», как бы желая высказать этим, что сделанное Эйлером превышает силы человеческие» («Сборник», стр. 18) [1]. Своим «Интегральным исчислением» и всеми другими работами, о которых мы уже говорили, Эйлер с большим успехом разрабатывает и систематизирует новое исчисление, созданное в XVII в. Он с большим успехом развивал и совершенствовал анализ исчисления бесконечно малых в целом, но особенно много он сделал в интегральном исчислении. «В то время, как дифференциальное исчисление в отношении общих правил дифференцирования, —

---

[1] См. литературу к брошюре.

пишет акад. Н. Лузин, — было доведено до конца еще Лейбницем, интегральное исчисление и до сих пор не имеет, как известно, никаких общих правил, которые бы позволили отличить неинтегрируемую функцию от интегрируемой и найти фактические интегралы в этом последнем случае. Следует тут же заметить, что вся мощь гения Эйлера как раз и выразилась в том, что доведенные им до конца многочисленные интеграции и найденные им квадратуры еще до сих пор образуют рамки всех современных курсов и трактатов по интегральному исчислению: математика в течение 150 лет после смерти Эйлера не могла пробить бреши в том кольце интеграций, которое было выковано Эйлером и, таким образом, добавить новые квадратуры. Без всякого преувеличения можно сказать, что, несмотря на все попытки сильнейших математиков и педагогов, живших после Эйлера до наших дней и желавших или расширить рамки выполненных интеграций, или просто сказать новое слово в самом изложении интегрального исчисления, — это последнее все еще остается в том же самом виде, каким его дал Эйлер, и все новейшие усилия вращаются попрежнему в том же замкнутом кругу. В отношении интегрального исчисления современные учебники являются лишь переделками трактата Эйлера, только подновлением этого труда в отношении языка, но самая материя остается неизменной, такой, какой ее дал Эйлер. Слава Эйлера заключается еще в том, что он раздвинул границы интегрального исчисления до пределов, о которых не мечтали его основатели — Ньютон и Лейбниц» (Н. Лузин, «Эйлер», стр. 16).

При этом следует заметить, что в трудах Эйлера математический анализ во многом развивается и складывается в анализ конкретных функций. Мы уже говорили, что круговые функции подробнейшим образом исследуются Эйлером в его «Введении». Он занимается исследованием показательных и логарифмических функций. Большое внимание он уделяет рациональным функциям, и, наконец, он первый создает специальные функции. Известно, что, занимаясь интегралами вида:

$$\text{(I)}\ B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}\ (1-x^{q-1})\,dx\ ,\ \text{где}\ p,\ q>0$$

$$\text{(I')}\ B(p,q)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}}$$

$$\text{(II)}\ \Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx\ ,\ \text{где}\ p>0,$$

из которых (I) называется интегралами Эйлера первого рода и (I') — интегралами Эйлера второго рода, он открывает функцию гамма. Эта функция, определяющаяся через интеграл

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx,$$

после элементарных является одной из важнейших для анализа и его приложений. Открытие и исследование свойств этих функций принадлежит Эйлеру и является одним из примеров творческих методов знаменитого математика XVIII в.

IV. ТРУДЫ ЭЙЛЕРА В ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Зародыши вариационных проблем, как и анализа исчисления бесконечно малых, появляются в глубокой древности. Уже греческая математика до Эвклида знала, что из всех плоских фигур равного периметра максимальную площадь имеет круг и что среди тел равной поверхности наибольшим объемом обладает шар. Архимед был одним из тех, кто уделил значительное внимание изопериметрическим задачам; он доказал, что из всех шаровых сегментов полушар имеет наибольший объем. Изопериметрическими задачами много занимался Апполоний, который, как известно, в своих «Конических сечениях» решает задачу о том, какие есть самые короткие и длинные отрезки прямой, проведенные из произвольной точки плоскости к коническому сечению. Занимаются такими задачами, как известно, затем и комментаторы. В пятой книге «Математических коллекций» Папп Александрийский ставит задачи на максимум и минимум; здесь он, между прочим, устанавливает, что из двух правильных многоугольников, имеющих равные периметры, площадь многоугольника с бо́льшим числом сторон больше площади многоугольника с ме́ньшим числом сторон, что площадь правильного многоугольника, имеющего периметр, равный окружности круга, меньше площади круга и что из всех треугольников данного периметра, построенных на одном основании, наибольшую площадь имеет равнобедренный. Герон Старший в своей «Катоптрике» устанавливает, что путь, проходимый падающим и отраженным светом является минимальным только тогда, когда угол падения равен углу отражения. Фигурируют задачи об изопериметрах и в средние века (Брадвардин, XIV в.), и затем они с новой силой всплывают в эпоху Возрождения и в особенности в новое время. Мы отмечали, что Пьер Ферма занимался вопросами максимума и минимума, привлекая при этом понятие производной, хотя это слово в математике еще не было и произнесено. А затем эти вопросы явились основными при создании дифференциального исчисления почти у всех математиков нового времени, вплоть до Ньютона и Лейбница. В «Анализе бесконечно малых» Лопиталя имеется уже специальная глава, трактующая вопросы максимума и минимума с использованием дифференциального исчисления в полном его объеме. Восемнадцатый век явился веком бурного развития нового исчисления. Задачи максимума и минимума в математике стали занимать одно из самых почетных мест. Исследование функций одной независимой переменной, а затем и функции многих переменных на максимум и минимум привело в этом веке к развернутой теории (труды Эйлера и Лагранжа). И если до XVIII в. задачи на максимум и минимум в математике не выделялись особо, то к началу этого века они приводят к обобщениям и созданию специальной науки — вариационному исчислению. Задачи вариационного исчисления, хотя и имеют много общего с задачами на максимум и минимум из дифференциального исчисления, они в то же время существенно от них отличаются. Основным понятием дифференциального исчисления, как мы знаем, является понятие функции переменной, значения которой определяются численными значениями одного или нескольких независимых переменных. Однако понятие функции во многих случаях не может отобразить более сложные зависимости, существующие в реальном мире. Приходится обобщать понятие функции. Важнейшим обобщением понятия о функции является понятие о функционале. Существенное отличие функционала состоит в том, что аргументами его являются не числа, как у обычной функции, а функции одного или нескольких переменных. Словом, функционал представляет такого рода зависимость, что каждой функции (или паре функций) определенного класса ставится в соответствие число-значение функционала

$$I = I[f(x)].$$

Геометрически эта разница между функционалом и функцией, как известно, состоит в том, что обычная функция одного или нескольких переменных есть функция точки на прямой, плоскости или в пространстве, функционал же есть функция более сложных геометрических образований: линий, поверхностей и т. д. Решение отдельных задач на отыскание минимума или максимума функционалов и привело к созданию вариационного исчисления, предметом которого и является исследование общих методов определения экстремумом функционалов. Создание этой новой математической дисциплины произошло, понятно, не сразу. Первой типичной вариационной задачей была задача, поставленная еще Ньютоном в 1687 г. в его «Математических началах натуральной философии». Эта задача сводилась к тому, чтобы найти форму тела вращения, обладающего наименьшим сопротивлением при движении в жидкости. Задача, как не трудно понять, имела большое практическое значение. Однако всеобщее внимание к вариационным проблемам было привлечено задачей, предложенной И. Бернулли в 1696 г. В июне этого года в журнале «Acta eruditorum» появилось такое письмо:

«Остроумнейших математиков всего мира приветствую я, Иван Бернулли! Людей высокого ума нельзя ничем больше привлечь к работе, как указав им трудную и вместе с тем полезную задачу, решением которой возможно и славу приобрести и оставить по себе вечный памятник. Я надеюсь, что заслужу благодарность всего ученого мира, если я по примеру Паскаля, Ферма и др. предложу лучшим математикам нашего времени задачу, которая даст им возможность испробовать, хороши ли те методы, которыми они владеют, и как велика сила их ума. Если кто-нибудь найдет решение предложенной задачи и сообщит об этом мне, то я объявлю ему публично заслуженную хвалу».

Вскоре эта задача была решена Лейбницем и прислана Бернулли; причем в конце письма была сделана такая приписка, которая потом была опубликована в том же журнале и где Лейбниц выражал уверенность, что существует не более трех математиков (Лопиталь, Гудде и Ньютон), которым эта задача окажется по силе. Интересно отметить, что эта приписка Лейбница сыграла большую роль в разгоревшемся споре между Ньютоном и Лейбницем о приоритете в открытии анализа бесконечно малых. В этом споре принимал активное участие математик Николай Фацио де Дуилье (1664—1753), обидевшийся на Лейбница за то, что тот не упомянул его в числе математиков, могущих решить названную задачу.

Задача, предложенная И. Бернулли и называемая ныне задачей о брахистохроне, состояла в том, чтобы найти вид плоской кривой, по которой тяжелая материальная точка скатится из одной данной точки M_1 в другую данную точку M_2 в наименьший промежуток времени, или, другими словами, как строить крышу здания, чтобы капли дождя скатывались по ней в наименьший промежуток времени. Вскоре за решением Лейбница было опубликовано еще три решения этой задачи; первое принадлежало Якобу Бернулли, второе — Лопиталю и третье появилось в одном из английских журналов без подписи автора, однако И. Бернулли узнал в авторе Ньютона, по «его львиным когтям». Решением оказалась, как известно, циклоида. Решив задачу о брахистохроне (кривой наискорейшего ската), Якоб Бернулли дал принцип для решения довольно широкого класса экстремальных задач и выдвинул со своей стороны проблему об изопериметрах. Эта проблема состоит в том, чтобы указать кривую, которая при заданном периметре дает максимум или минимум какого-то требуемого свойства (например, заключать фигуру наибольшей площади). Затем в 1697 г. И. Бернулли была поставлена еще одна экстремальная задача о геодезических линиях. Все эти задачи сводятся к простейшим задачам вариационного исчисления, которые можно формулировать следующим образом: среди кривых, выражаемых уравнениями $y=f(x)$ и проходящих через заданные точки B и A, определить ту, вдоль которой интеграл

$$\int_{a_1}^{a_2} F(x,y,y^1)dx$$

принимает наибольшее или наименьшее значение. Функция $f(x)$ является непрерывной вместе со своею производной y^1 в промежутке

$$a_1 \leq x \leq a_2.$$

Развитие теории решения вариационных проблем принадлежит в значительной степени ученику И. Бернулли Леонарду Эйлеру, который начинает заниматься этими задачами (по предложению И. Бернулли) в молодые годы и в 1728 г. дает свой первый мемуар по вариационному исчислению. К этому времени были созданы предпосылки для создания вариационного исчисления. Многочисленные экстремальные задачи выдвигали проблему систематизации и обобщения, или, другими словами, проблему создания специального исчисления. Это и было сделано Эйлером. Вариационное исчисление в ряде замечательных трудов петербургского академика Эйлера приняло вид общего метода. Совершенствованию этого метода Эйлером посвящено много лет упорного труда (1728—1744 гг.). Уже в мемуаре 1732 г. он развивает общий метод решения «задачи, где отыскиваются кривые, обладающие максимальным или минимальным свойством». В 1736 г. в своей «Механике» Эйлер разбирает целый ряд механических задач на применение метода максимума и минимума, и, наконец, в 1744 г. он дает свой знаменитый мемуар по вариационному исчислению, назвав его так: «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи». В этом труде Эйлер собрал вместе свои исследования предыдущих лет, дополнил их многими примерами и приложениями и тем самым, можно сказать, завершил создание самостоятельной ветви математической науки — вариационного исчисления. Книга Эйлера состоит из шести глав и в русском переводе под редакцией Н. С. Кошлякова содержит 600 страниц. В первой главе он подробно останавливается на самой постановке задачи нахождения таких линий, которые сообщают какому-нибудь выражению экстремальное значение, а в остальных главах развивает теорию нового исчисления. Написана она, как и другие его работы, живо и представляет большой интерес для математиков и в наше время. Название «Вариационное исчисление» было дано Ланагражем, который является вместе с Эйлером создателем этого исчисления. Лагранжем создается специфический для вариационного исчисления алгоритм и само это исчисление принимает более совершенную форму. Мы не можем излагать вариационное исчисление, да в этом и нет нужды, одно только скажем, что методы его были позднее обобщены и усовершенствованы Гауссом, Пуассоном, Якоби и Остроградским, а затем в 70-х годах прошлого столетия получили обоснование в трудах Дарбу и Вейерштрасса.

V. ЭЙЛЕР И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Известно, что вопросами теории чисел люди занимались уже до нашей эры. Этими вопросами занимались в школе Пифагора, где изучение чисел было затемнено мистикой. Уже Эвклид в своих «Началах» дает определение многим основным понятиям теории чисел; он устанавливает алгоритм для нахождения общего наибольшего делителя двух чисел, доказывает, что все числа вида $2^n(2^{n+1} - 1)$ — совершенные, если $2^{n+1} - 1$ есть число простое, и, наконец, дает фундаментальное положение о том, что число простых чисел бесконечно. Во втором веке до нашей эры, вскоре после Эвклида, Эратосфен предлагает способ для выделения простых чисел из натурального ряда. Большое значение в истории математики имел Диофант с его неопределенными уравнениями первой и второй степени, решение которых он ищет в виде рациональных чисел. Примерно в то же время, что и Диофант, индусские математики предлагают способы решения неопределенного уравнения первой степени $ax + вy = c$ в целых числах. Все это явилось начальным периодом в развитии теории чисел. Средние века не внесли в теорию чисел ничего существенно нового и не повлияли на характер и направление ее в это время. Расцвет теории чисел начинается в новое время с Ферма. Развивая идеи Диофанта, он исследует решения неопределенных уравнений в целых числах, в том числе и знаменитое уравнение $x + v = z$, относительно которого он утверждает, что оно не имеет решений в целых положительных числах при $n > 2$. Ферма доказывает, что всякое простое число вида $4n + 1$ есть сумма двух квадратов. Он дает основной результат складывающейся теории сравнений — положение (малая теорема Ферма), утверждающее, что число вида $a^{p-1} - 1$ всегда делится на p, если p есть число простое и если a не делится на p. Эта теорема Ферма была обобщена вскоре Эйлером и послужила для него исходным пунктом многочисленных исследований. Эйлер доказал почти все теоремы Ферма, данные последним без доказательств, установил, кроме того, множество новых фактов и указал направление, следуя которому, Лагранж, Гаусс и другие ученые создали то, что называется классической теорией чисел. Эйлер устанавливает арифметическую функцию $\varphi(n)$, которая обозначает число чисел, меньших чем n, и взаимно простых с n, т. е. не имеющих с n ни одного общего делителя, кроме 1 (например, $\varphi(10)=4$); Он доказывает, что $a^{\varphi(n)} - 1$ всегда делится на n, если a и n числа взаимно простые. Из последнего видно, что малая теорема Ферма является частным случаем указанной теоремы Эйлера и получается из нее при n простом. Эйлер доказывает, что если число $N = 4n + 1$ представляется только одним способом через сумму $x^2 + y^2$, то оно является простым числом. Прямое положение, как мы уже сказали, было доказано Ферма. Вторая группа работ Эйлера относится к решению в целых числах неопределенных уравнений. Сюда относятся работы его по исследованию уравнения вида $x^2 - ay^2 = 1$ (уравнение Пелля), где a — данное число не равное квадрату. Он занимается также решением уравнения $Ax^2 + 2Dxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. В своей «Алгебре» он доказывает теорему Ферма $x^n + y^n = z^n$ для $n = 3$ и в одном из мемуаров 1738 г. — для $n = 4$. Все это доказывается Эйлером арифметически, т. е. различными преобразованиями данных чисел или уравнений и рассуждениями над целыми числами.

Следует сказать, что Эйлером положено начало аналитическому методу в теории чисел. Суть указанного метода состоит в применении анализа бесконечно малых к вопросам теории чисел. Здесь, прежде всего, мы укажем одно чрезвычайно важное соотношение, рассмотренное Эйлером среди многочисленных бесконечных произведений еще в его «Введении в анализ». Это соотношение

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4^s}} \cdots \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \cdots = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots$$

$$\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad (\alpha)$$

где произведение слева распространено на все простые числа p, а сумма справа — на все натуральные числа, — справедливо при любом $s > 1$. Выражение, стоящее справа, представляет собою аналитическую функцию от s, подробно изученную Риманом и названную им дзета-функцией $\zeta(s)$. Приближая s к единице, правая сторона (α) беспредельно растет, что свидетельствует о том, что простых чисел p бесконечно много. Равенство (α) сыграло большую роль в развитии аналитической теории чисел. Это же равенство послужило исходным пунктом замечательных исследований Чебышева и Римана в вопросах о простых числах. Свой мемуар о простых числах в 1859 г. Риман начинает выражением (α) и здесь же он вводит название «дзета-функция» для правой стороны этого выражения (Б. Риман, Сочинения, 1948, стр. 216). Мы не можем останавливаться сколько-нибудь подробно на работах Эйлера в области теории чисел, они многочисленны и тематика их разнообразна. Краткий и вместе с тем содержательный очерк этих работ, с указаниями на источники, дан профессором Ленинградского университета Б. А. Венковым в «Сборнике», посвященном 150-летию со дня смерти Леонарда Эйлера, напечатанном в 1935 г.

Аналитическая теория чисел Эйлера, появившаяся в России, развитая затем Гауссом, Дирихле, Абелем и Коши, совершенствуется затем снова на русской почве Буняковским, Чебышевым, Сониным и в наше время замечательными работами И. М. Виноградова.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении обзора жизни и деятельности Леонарда Эйлера мы должны сказать, что, подобно Галилею, Декарту, Ньютону и Ломоносову, он был универсальным мыслителем. Открытия Галилея, Декарта, Ньютона и Лейбница последовательными шагами привели к идее математического анализа. В руках Эйлера математический анализ получил совершенную форму и стал математическим аппаратом всего естествознания, и в первую очередь механики, астрономии и физики. В вопросах философии он резко выступил против монадологии Лейбница и развивал материалистические представления в своих математических и физических трудах. Основой для Эйлера является объективная реальность протяжений, материальной субстанции. Философы-идеалисты до сих пор не могут простить Эйлеру его твердой уверенности в реальном существовании мира, уверенности в вопросе соответствия научных законов и объективной реальности и того, что наука ищет и находит объективную истину. Все для Эйлера было необходимой предпосылкой его научного творчества. Он сделал математический анализ стройной системой описания природы и развил его, как никто. Эйлер допускал в принципе беспредельную делимость вещества и пространства и тем самым становился на точку зрения потенциальной бесконечности. Он утверждал, что мы никогда не дойдем при делении до последних элементов. Это лежит у Эйлера в основе построений анализа бесконечно малых. Подробности, связанные с установкой Эйлера в вопросе о делимости вещества, можно выяснить, читая его «Письма к немецкой принцессе» и статьи об Эйлере, написанные С. Я. Лурье (1935 г.) и Б. Г. Кузнецовым (1948 г.). В этих же материалах можно выяснить и вопрос о религиозности Эйлера. Известно, что в 1747 г. Эйлер выпустил брошюру «Спасение божественного откровения против упреков свободомыслящих», в которой он, между прочим, писал, что «чем меньше вмешивать бога и божественные силы в светские дела, в том числе и в науку, тем лучше и для науки и для авторитета бога». Он верил в два резко противоположных друг другу мира — мир материальный и божественный духовный мир. Нельзя обойти молчанием любопытную историческую параллель между Эйлером и Кавальери; оба в значительной мере религиозны, и тот и другой считают дифференциал равным нулю и, наконец, оба считают, что допущение и отрицание последних частиц приводит к неразрешимым трудностям. Повидимому, те же религиозные мотивы, как бы их Эйлер ни откладывал в особую сферу, руководили им, когда он говорил в своем вариационном исчислении, что «так как здание всего мира совершенно и произведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума; поэтому нет никакого сомнения, что все явления мира с таким же успехом можно определить из причин конечных при помощи метода максимумов и минимумов, как и из самих причин производящих» (Эйлер, Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума. Изд. 1934 г., стр. 447). Из этого между прочим видно, как закономерность, выведенная первоначально в качестве следствия из опытных данных, была затем под видом вариационных принципов поставлена в виде «Начала» во главу угла при рассмотрении вопросов естествознания. Ведь это мало чем отличается от числовой мистики пифагорейцев, считавших число сущностью вещей, шар — совершеннейшим телом, окружность — идеальной кривой.

Вопросы обоснования анализа исчисления бесконечно малых в работах Эйлера хотя и занимали какое-то место, но отнюдь не первое и не самое важное. Напротив, ознакомившись с его трудами, каждый заметит недостаточную строгость с точки зрения современной математики. Следует сказать, что довольно неясное и даже таинственное представление о природе бесконечно малых было уделом большинства математиков XVIII в. Новое исчисление давало блестящие результаты и в самой математике и ее приложениях к исследованиям явлений природы и техники; жизнь требовала все новые и новые факты, и новый метод давал их. Нельзя сказать, что логическая природа вопроса не интересовала математиков той поры, однако это было не первостепенной задачей.

То же мы можем наблюдать и в определениях основных понятий нового исчисления. Мы возьмем понятие функции. Определение этого понятия, с которым знакомит современная математика через университетские курсы, как некоторой переменной, приведенной по определенному правилу в соответствие с другой переменной изменяющейся в данной области (Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1947, стр. 114) создано в математике, за довольно продолжительное время и не без трудностей. Эйлер определяет функции в своем «Введении», как мы уже видели, совсем иначе. Он говорит: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств» (гл. I, стр. 30). Из этого видно, что понятие функции претерпело значительную эволюцию, которая проходила при достаточно длительной и временами ожесточенной борьбе. Борьба вокруг понятия функции началась более двухсот лет тому назад в знаменитом споре о звучащей струне, и с тех пор она продолжается фактически до настоящего времени. Спор, в котором выступают Д. Бернулли, Эйлер и Д'Аламбер, на первых же порах приводит к различному пониманию самого смысла слова «функция» у Эйлера и Д'Аламбера. Для Д'Аламбера «функция» — произвольное аналитическое выражение, тогда как Эйлер к этому присоединял еще и геометрическое истолкование, выдвигая его на первое место. Развивая свое определение функции, Эйлер писал, что «природа всех функций лучше всего может быть представлена кривыми линиями» и притом «совершенно безразлично, есть ли уравнение, определяющее непрерывную кривую, алгебраическое, или трансцендентное, известное или даже неизвестное, нужно лишь иметь ввиду, что существует некоторое уравнение, выражающее природу такого рода кривой; мы при этом совсем не обращаем внимания на непрерывность хода кривой, или ее ветвей» (XI том Комментариев Петерб. Акад. наук, 1765—1767, стр. 4—27). «Но возникает вопрос, весьма важный, что следует думать о разрывных функциях, и нельзя ли найти им какого-либо места в анализе». И здесь Эйлер указывает на теорию уравнений в частных производных, содержащую между прочим вопросы колебания звучащих струн. Из рассуждений Эйлера и его противников по вопросу о сути функции видно, что если для Д'Аламбера это было произвольное аналитическое выражение, то для Эйлера это была произвольно начертанная кривая. Д'Аламбер старался показать, что произвольные функции в интеграле уравнения колебания струны должны на всем протяжении этой струны подчиняться одному и тому же закону непрерывности. Все его возражения Эйлеру сводятся по существу к тому, чтобы на всем протяжении кривой, изображающей форму струны, не было скачков в изменении ее кривизны, или внезапных переходов этой кривизны от одной величины к другой.

В 1759 г. в спор вступает Лагранж, затем Фурье и много других математиков XVIII и XIX вв. Не вдаваясь в детали этого длинного спора, одно мы скажем, что трудно было дать формальное определение понятия функции так, чтобы оно могло охватить собою все содержание этого понятия. Отсюда многочисленные определения функции и тот длительный спор, который не умолк и в наши дни. Ясно, что определение функции, данное Эйлером, было несовершенно, много несовершенного и даже ошибочного было в творчестве этого гиганта. Многое его отличало от современников и последователей. В своем творчестве он встречался с другими талантливыми математиками, например с Даниилом Бернулли. Сравнивая Эйлера с другом его Даниилом Бернулли, акад. Лузин пишет: «Даниил Бернулли имел то преимущество, что давал физическим принципам большую точность, чем Эйлер; Д. Бернулли имел терпение освобождать себя от вычислений тем, что предварительно с большими проницательностью и искусством ставил опыты и на основании их делал выбор между гипотезами, которые, иначе, потребовали бы гигантских вычислений. Наоборот, Эйлер, нисколько не тяготился вычислениями, и никакие формулы, как бы они ни были необъятны, никогда не стесняли его: такова была прозорливость, что самая громоздкая формула гнулась в его сильных руках, как мягкий воск, и послушно давала под его усилиями все, что угадывала в ней его проницательность. В этом отношении Эйлер не знает себе соперников и по наши дни. Его инстинкт алгебраиста и геометра непосредственно чувствовать в формулах истину и ложь, его искусство комбинировать формулы, оценивать их численно, преобразовывать, мгновенно разгадывать природу результата — были поистине изумительны. Можно без преувеличения сказать, что в глазах Эйлера математические формулы жили своею собственною жизнью и рассказывали глубочайшие вещи о явлениях природы, и что ему достаточно было только прикоснуться к формулам, чтобы они из немых превращались в говорящих и дающих ответы, полные глубокого смысла» [1].

Таков был знаменитый Эйлер. Он оказал большое и плодотворное влияние на развитие математического просвещения в России XVIII в. Возглавлявшаяся им первая петербургская математическая школа, в которую входили академики Котельников, Румовский, Фусс, Головин, Гурьев, Гамалея и многие другие русские математики XVIII в., проделала огромную просветительную работу. Словом, значение Эйлера в истории русской математики и математического просвещения в России огромно. Слова, сказанные Лапласом: «Читайте, читайте Эйлера — он наш общий учитель», сохраняли силу долгое время. В XIX в., русские математики пошли новыми и самобытными путями в анализе (М. В. Остроградский), в геометрии (Н. И. Лобачевский) и теории вероятностей, теории чисел, конструктивной теории функций (П. Л. Чебышев и его школа), однако Эйлер в нашей науке оставил глубочайшие следы. Имена Эйлера, Лобачевского, Остроградского и Чебышева перекликаются с достойными продолжателями передовой советской математики наших дней.

---

[1] См. литературу к лекции.

VII. ЛИТЕРАТУРА,

использованная автором при составлении лекции

а) Основная

1. Б. Гнеденко, Очерки по истории математики в России, 1946
2. А. Юшкевич, Эйлер и русская математика XVIII века. «Труды Института истории естествознания», III, 1949.
3. «Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти Эйлера», 1935.
4. Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, 1936.
5. Л. Эйлер, Дифференциальное исчисление (со вступительной статьей М. Я. Выгодского, 1949.
6. А. Юшкевич, Идеи обоснования анализа в XVIII в. Вступительная статья к книге Лазаря Карно «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых», 1936.
7. К. Рыбников, Первые этапы развития вариационного исчисления. «Истор. мат. исслед.», вып. II, 1949.
8. И. Тимченко, Основания теории аналитических функций. Записки Мат. отд. Новороссийск. общества естеств., т. XII, XVI, XIX, 1892—1898.
9. А. Маркушевич, Очерки по теории аналитических функций, 1951.
10. В. Гусов, Работы русских ученых по теории гамма-функции. «Истор. мат. исслед.», вып. V, 1952.

б) Дополнительная

1. П. Таннери, Исторический очерк развития естествознания, 1934.
2. Г. Цейтлин, История математики в XVI и XVII веках, 1933.
3. А. Васильев, Целое число, 1922.
4. Б. Кузнецов, Физика Эйлера и учение Лейбница о монадах. «Труды института истории естествознания», II, 1948.
5. Н. Лузин, Эйлер. Журнал «Социалистическая реконструкция и наука», вып. В, 1933.
6. Л. Эйлер, Метод нахождения кривых линий, 1934.
7. Л. Эйлер, Алгебра, 1812.
8. П. Пекарский, История императорской Академии наук, т. I, 1870.
9. П. Пекарский, Екатерина II и Эйлер. Зап. имп. Акад. наук, т. 6, 1865
10. А. Саткевич, Леонард Эйлер. «Русская старина», т. 132, 1907.
11. Е. Литвинова, Лаплас и Эйлер, 1892.
12. А. Хинчин, Вариационное исчисление. Б.С.Э., т. 8.
13. Л. Эйлер, Письма к немецкой принцессе, 1790—1791.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор *И. С. Сорокин*

Сдано в набор 12/V 1954 г. **Подписано к печати 30/VII 1954 г.**
Бумага $60\times92/_{16}$ = **2,5 печ. л.**, 2,6 уч.-изд. л. **Тираж 20000.** Т-03523
Издательство «Советская наука» Зак. 85. Цена 70 коп.

Типография изд-ва «Советская наука», Неглинная, 29/14. Зак. 1041