

Развитие идей  
ЛЕОНАРДА  
ЭЙЛЕРА



И  
современная  
наука

«НАУКА»

Развитие идей  
Леонарда  
ЭЙЛЕРА  
И  
современная  
наука

*L. Euler*

2275-25-88

1783



---

**Академия наук СССР**  
**Институт истории естествознания и техники**





*L. Euler*

Развитие идей  
ЛЕОНАРДА  
ЭЙЛЕРА  
И  
современная  
наука

Сборник статей

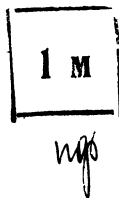
Под редакцией  
Н.Н. БОГОЛЮБОВА, Г.К. МИХАЙЛОВА,  
А.П. ЮШКЕВИЧА



Москва «Наука» 1988

УДК 51(091)

36  
Р 140



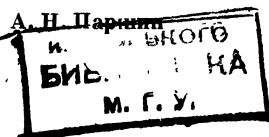
**Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука: Сб. статей.— М.: Наука, 1988.— 520 с.**

В сборнике помещены материалы, представленные на симпозиуме, посвященном 275-летию со дня рождения и 200-летию со дня смерти знаменитого ученого XVIII в. Леонарда Эйлера, а также ряд работ, специально подготовленных для этого издания. Статьи сборника освещают жизнь и творчество Эйлера в целом, его деятельность в Петербургской и Берлинской академиях наук, его вклад в алгебру, теорию чисел, многие разделы механики, астрономии, физики и т. д. В сборнике воспроизводится «Похвальная речь» Леонарду Эйлеру, прочитанная по случаю его кончины академиком Н. Фусом в Собрании Академии наук в 1783 г. Помещена также «Родословная роспись потомков Леонарда Эйлера».

Сборник представляет интерес для широкого круга специалистов в различных областях естествознания и историков науки.

Рецензенты:

В. П. Визгин, А. Н. Паршин



8275-28-88

1702010000-052  
P 042(02)-88 104-88-I

© Издательство «Наука», 1988

ISBN 5-02-000002-7



## ОТ РЕДАКЦИИ

15 апреля 1982 г. исполнилось 275 лет со дня рождения, а 18 сентября 1983 г. — 200 лет со дня смерти одного из величайших математиков и механиков всех времен Леонарда Эйлера (1707—1783), деятельность которого на протяжении свыше полувека была неразрывно связана с Петербургской академией наук. Эти памятные даты были широко отмечены научной общественностью как в нашей стране, так и на родине Эйлера — в Швейцарии и в Берлине, где он работал в течение 25 лет. В этой связи Академия наук СССР провела 24—27 октября 1983 г. торжественное заседание и симпозиум «Развитие идей Эйлера в современную эпоху». В их работе приняли участие наряду с многочисленными советскими учеными также и гости из Швейцарии, Германской Демократической Республики, Западного Берлина, Польской Народной Республики и других стран.

Торжественное заседание, состоявшееся 24 октября в Большом зале Московского Дома ученых, открыл президент Академии наук СССР академик А. П. Александров. В своем вступительном слове он ярко охарактеризовал непреходящий вклад Эйлера в развитие физико-математических наук и деятельность Петербургской академии наук в XVIII в. Затем с приветственными речами выступили заместитель Председателя Совета Министров СССР, председатель Государственного комитета СССР по науке и технике академик Г. И. Марчук, Министр высшего и среднего специального образования РСФСР академик И. Ф. Образцов и председатель Эйлеровского комитета Академии наук ГДР профессор В. Энгель. В тот же день были заслушаны доклады «Жизнь и творчество Леонарда Эйлера» (А. П. Юшкевич), «Леонард Эйлер и математический анализ» (Ю. В. Прохоров), «Леонард Эйлер и Берлинская академия» (К. Грау). На следующий день симпозиум был продолжен в Москве докладами «Основы механики и гидродинамика в трудах Л. Эйлера» (Г. К. Михайлов и Л. И. Седов), «Леонард Эйлер и механика упругих систем» (А. Ю. Ишлинский), «Леонард Эйлер и вариационные принципы механики» (В. В. Румянцев), «Вклад Л. Эйлера в развитие алгебры» (И. Г. Башмакова), «Леонард Эйлер и развитие астрономии в России» (В. К. Абалакин и Е. А. Гребеников), «„Письма к немецкой принцессе“ и физика Л. Эйлера» (А. Т. Григорьян и В. С. Кирсанов).

27 октября работа симпозиума была перенесена в старинный конференц-зал Академии наук в Ленинграде. После вступительного слова академика Л. Д. Фаддеева были прочитаны доклады «Леонард Эйлер и Петербургская академия наук» (Ю. Х. Копелевич), «Механика в трудах Эйлера первого петербургского периода» (Н. Н. Поляхов), «Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел» (Г. П. Матвиевская и Е. П. Ожигова), «Новые данные об исследованиях Л. Эйлера по астро-

номии» (Н. И. Невская), «Семья и потомки Леонарда Эйлера» (И. Р. Геккер и А. А. Эйлер).

Во время заседаний в Москве и Ленинграде были развернуты выставки старинных и новых изданий трудов Эйлера, литературы о нем, архивных документов и иллюстративных материалов. 28 октября участники симпозиума посетили памятные места в Ленинграде, связанные с жизнью и деятельностью Эйлера, а также его могилу в Ленинградском некрополе — Александро-Невской лавре.

Предлагаемый читателю сборник содержит статьи, подготовленные по материалам докладов на симпозиуме, а также ряд специально написанных для него статей. В сборник включен также перевод доклада К. Р. Бирмана, прочитанного в сентябре 1983 г. на научной конференции Академии наук ГДР в Берлине, и переработанный текст статьи о переписке Эйлера с А. К. Клеро, Ж. Даламбером и Ж. Л. Лагранжем из пятого тома четвертой серии «Полного собрания сочинений» Эйлера. В своей совокупности все эти работы служат существенным дополнением к материалам сборника памяти Эйлера, изданного Академией наук СССР в 1958 г. по случаю 250-летия со дня рождения великого ученого<sup>1</sup>.

В дополнение к работам нашего времени в сборнике помещен старинный русский перевод с французского «Похвальной речи», произнесенной в Академии в 1783 г. через полтора месяца после кончины Эйлера его ближайшим сотрудником и учеником академиком Н. И. Фусом. Перевод этот, напечатанный в «Академических сочинениях» в 1801 г. и являющийся ныне библиографической редкостью, воспроизведен в сборнике без отступлений от оригинала, за исключением некоторой модернизации орфографии. «Похвальная речь» Фуса благодаря ее высоким достоинствам в полной мере заслуживает внимания читателей нашего времени, а несколько архаичный язык перевода приближает читателя к эпохе Эйлера.

В конце сборника приложена «Родословная роспись потомков Леонарда Эйлера», представляющая собою уникальный социологический материал о развитии семьи на протяжении двух с половиной веков, а также помещены две статьи о потомках Л. Эйлера.

*Н. Н. Боголюбов, Г. К. Михайлов, А. П. Юшкевич*

<sup>1</sup> Унифицировать в тексте сборника все ссылки на сочинения Эйлера оказалось затруднительным. Поэтому ссылки даются либо по их первоначальным изданиям, либо по «Полному собранию сочинений» Эйлера (L. Euleri Opera omnia). Отсылки к последнему делаются только с указанием серии (римскими цифрами) и номера тома. Так, например, ссылка Opera II-8 указывает на то, что соответствующее сочинение опубликовано в восьмом томе второй серии «Полного собрания сочинений» Эйлера. Кроме того, упоминания сочинений Эйлера сопровождаются иногда указаниями на их номер в известном каталоге сочинений Эйлера, составленном в 1910—1913 гг. Г. Энстрёмом и воспроизведенном в сокращенном виде в вып. 17 «Трудов Архива АН СССР» (1962); ссылки на номера каталога Энстрёма даются согласно традиции путем присоединения перед соответствующим номером буквы Е (например, Е342 — сочинение Эйлера, находящееся в каталоге Энстрёма под номером 342). — *Примеч. ред.*

**ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ РЕЧИ  
НА ОТКРЫТИИ СИМПОЗИУМА  
«РАЗВИТИЕ ИДЕЙ Л. ЭЙЛЕРА  
В СОВРЕМЕННУЮ ЭПОХУ»  
24 октября 1983 г.**

АКАДЕМИК

**А. П. АЛЕКСАНДРОВ**

*президент Академии наук СССР*

Дорогие товарищи! Уважаемые гости!

Сегодня мы проводим торжественное заседание и симпозиум, на которых отмечаем 275-летнюю годовщину со дня рождения Леонарда Эйлера и 200-летие со дня его кончины.

В 1724 г. был издан указ об организации в Петербурге Академии наук. В 1727 г. в этой Академии появился двадцатилетний ученый Леонард Эйлер, уроженец Базеля. Он был приглашен президентом Академии наук Л. Блюментростом по рекомендации двух своих друзей, уже работавших в Петербурге, Николая и Данила Бернулли. Оба они были сыновьями знаменитого профессора Базельского университета Иоганна Бернулли, руководителя Эйлера в юношеские годы.

Леонард Эйлер родился в 1707 г. и уже тринадцати с половиной лет поступил в Базельский университет. Тогда это было не удивительно; например, в таком же возрасте поступил в университет и Даниил Бернулли. Леонард Эйлер сразу же проявил большую склонность к изучению математики. Там не было специального курса математики, но Эйлер получил разрешение обращаться к профессору Бернулли за консультациями по более сложным вопросам высших разделов математических наук. Бернулли назначил субботу, один день в неделю, для разъяснения трудностей, которые могли Эйлеру встретиться при чтении специальной литературы. Эти занятия сыграли очень большую роль в научной подготовке Эйлера. Уже восемнадцать лет он получил ученую степень магистра и начал искать себе сферу применения. В Западной Европе того времени довольно многие молодые ученые не могли найти себе применения по специальности на родине. В частности, так сложились обстоятельства у Эйлера, и он охотно принял предложение Петербургской академии наук занять вакантное место по физиологии. Это была не его специальность, однако он приложил много усилий для изучения физиологии и в 1727 г. приехал в Россию.

В Петербургской академии от Эйлера не потребовали, чтобы он занялся физиологией. При Академии наук была открыта гимназия для подготовки национальных кадров специалистов, и Эйлеру было предложено принять участие в этом деле, в частности написать один из учебников по математике. Эйлер составил очень хорошее руководство по арифметике, изданное по-немецки и по-русски; это был второй курс в России после известной «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Вместе с тем Эйлер продолжил начатые им в Базеле работы в области математического анализа, механики и их применений. Напомним, что еще в Базеле он принял участие в конкурсе



*Торжественное открытие симпозиума  
«Развитие идей Эйлера в современную эпоху»  
24 октября 1983 г.*

Парижской академии наук на тему о наиболее выгодной расстановке мачт на парусных кораблях. В Базеле ни моря, ни кораблестроения не было. Однако Эйлеру удалось предложить оригинальное решение задачи. Оно, правда, не было премировано, но удостоено публикации. В России он возобновил впоследствии изучение вопросов, связанных с кораблестроением и кораблевождением, двадцать лет спустя, уже будучи в Берлине, завершил капитальный труд по «морской науке», опубликованный в 1749 г. И так как сегодняшний наш симпозиум имеет своим предметом и те последствия, которые имели разработки Эйлера, то следует подчеркнуть, что современная теория устойчивости корабля, которую так блестяще разработал покойный академик Алексей Николаевич Крылов, в немалой мере восходит к эйлеровским работам по «Морской науке».

С большой энергией и успехом Эйлер развивал методы анализа бесконечно малых. Он с блеском продолжал работы Ньютона, Лейбница и его учеников, братьев Якоба и Иоганна Бернулли по дифференциальному и интегральному исчислению, дифференциальным уравнениям, разложению в ряды, динамике точки и т. д. Все это позволило ему через некоторое время приступить к таким сложным исследованиям, как теория движения Луны и планет. Это был очень большой цикл работ, причем Эйлер не-

сколько раз в течение жизни возвращался к этим проблемам. Он опубликовал две капитальные монографии по теории движения Луны и два больших труда о движении Юпитера и Сатурна.

Движение Луны и планет, уточнение земной орбиты, вопрос о возникновении приливов и отливов в океане и морях Земли — все это были актуальные вопросы, которые Эйлер решал, совершенствуя соответствующие области математического анализа и его численные методы.

Эйлер был человеком необычайной широты интересов. Он воспринимал окружающий мир именно через математическое выражение того, что он наблюдал и о чем к нему поступали сведения. Например, в своей теории музыки он пытался найти, каким математическим требованиям должна отвечать музыка, которая звучит приятно для людей, и музыка, которая звучит неприятно.

Множество других вопросов вставало перед молодым Эйлером. Проработав в Петербургской академии 14 лет, он в силу ряда внешних обстоятельств перешел в Берлинскую академию, но через 25 лет возвратился в Петербургскую академию наук. Здесь он работал уже до кончины. Он много раз возвращался к одним и тем же вопросам, применяя новые методы, новые пути исследования. Дополнительные решения часто совершенно меняли то, что было в первых публикациях.

Эйлер был необыкновенно плодовитый автор. Он создал более 800 научных трудов, в том числе около 20 крупных монографий, иные из них по два-три тома. Следует добавить, что в те времена, в XVIII в., были совершенно недостаточно развиты научные периодические издания и переписка между учеными имела очень большое информативное значение. Эпистолярное наследие Эйлера содержит огромное количество писем, было их больше четырех тысяч, и хотя многие утрачены, но значительное количество сохранилось и из них видно, сколь интересным был идейный обмен Эйлера с его современниками в письменной форме и какую роль этот обмен играл в прогрессе физико-математических наук.

Наряду со всем этим Эйлеру приходилось участвовать в исследовании многих чисто практических вопросов. Например, он возглавлял экспертную комиссию по строительству безопорного одноарочного моста через Неву. Автором проекта такого моста И. П. Кулибиным были предложены результаты исследования его модели, и предполагалось перенести результаты этих исследований на натуру.

В 30-е годы XVIII в. Эйлер возглавлял работу по картографированию Российской империи, вместе с другими академиками подготовил издание превосходного для своего времени атласа страны, изданного в его отсутствие в 1745 г. Позднее он впервые применил в картографии методы теории аналитических функций.

В 1741—1766 гг., в годы жизни в Берлине, связи Эйлера с русской Академией наук не прекращались, они были непрерывны и он регулярно посылал в Петербург как свои публикации, так и отзывы на отдельные работы, которые выполнялись в России. Он участвовал в обучении специалистов, направлявшихся в Берлин из России. Вообще это была пора его активного и плодотворного сотрудничества с Петербургской академией наук. Потом, когда он вернулся в Россию, он поддерживал связи с Берлинской академией. Эту тенденцию успешно развивают Академии наук Советского Союза и Германской Демократической Республики.

В поле зрения Эйлера были тогда не только ведущие направления математики XVIII в., но также теория чисел, теория вероятностей и ее приложения к демографическим вопросам, пенсионному обеспечению и страхованию.

Я уже говорил о работах Эйлера по теории движения Луны и планет. Астрономия вообще привлекала большое внимание Эйлера. Он опубликовал около 100 работ в разных областях астрономии, о кольцах Сатурна, об определении кометных орбит и другие. Эти работы и сегодня не потеряли свое значение.

Весьма важны работы Эйлера по различным проблемам механики, как теоретической, так и прикладной. Это и связанная с астрономией задача движения тела вокруг неподвижной точки, и исследования в области машиностроения, где Эйлер доказал, что здесь может быть достигнут существенный прогресс, если будут приняты меры к уменьшению трения, и работы по узлам трения, по подшипникам, а также по гидродинамике (правда, он не учитывал того, что вносит трение, но это было дополнено позже работами Стокса). Все эти его работы чрезвычайно интересны и стимулировали дальнейший прогресс в данной области.

Особо следует отметить его капитальный труд о движении твердых тел.

Примечательны и работы Эйлера по физике. Он всегда пытался исходить из модели, которая представлялась ему удобной для дальнейшей математической разработки. При этом он верил в то, что его модели в общем непогрешимы и действительно отвечают реальности. Хотя такого рода убеждения не всегда оправдывались, они стимулировали дальнейшие успехи физики. Сам он считал, что наука должна развиваться через гипотезы, и это развитие должно идти через постепенный отказ от гипотез менее совершенных и их замену более совершенными.

Я думаю, товарищи, что пора закончить свое вступительное слово и передать слово специалистам, которые расскажут о работах Эйлера, имеющих значение и сегодня. Я только напомню еще, что и в нынешних учебниках по высшей математике и механике очень и очень многие методы, формулы и теоремы носят имя Эйлера. Пожалуй, в этом отношении с ним никто или почти никто не стоит в одном ряду.

АКАДЕМИК

**Г. И. МАРЧУК**

*заместитель Председателя Совета Министров СССР,  
председатель Государственного комитета СССР  
по науке и технике*

**Товарищи!**

История любой науки, непрерывно и диалектически развивающейся, никогда не бывает похожей на ровный и гладкий путь. Взгляд из сегодняшнего дня ясно и зримо отмечает трудные пути развития, заторы и взлеты, века и годы критических переосмыслений и короткие промежутки резких революционных продвижений вперед. Познание истины — главная цель научного исследования — не дается человечеству в руки без огром-

ных усилий и гениальных проникновений в суть явлений. И такие прозрения, коренным образом меняющие наш взгляд на природу и ее процессы и явления, по плечу лишь великим умам.

Без сомнения, имя Леонарда Эйлера является одним из самых славных в плеяде выдающихся математиков всех времен. Сегодня, через два века после его смерти, когда все математические науки претерпели трудно предсказуемые изменения, далеко ушли от концепций, методов и результатов XVIII в., имя Леонарда Эйлера и его труды продолжают оказывать решающее влияние на прогресс всей современной математики.

Математическую деятельность Л. Эйлера отличает необыкновенная многогранность и насыщенность. Им оставлен крупный след практически во всех частях современной ему математики и математического естествознания. Анализ бесконечных, дифференциальное и интегральное исчисление, сами в то время находившиеся в периоде своего становления, в трудах Л. Эйлера значительно обогатились, систематизировались и получили перспективные направления развития. Первые, из трудных по существу, дифференциальные уравнения были проинтегрированы Л. Эйлером, и они породили новые ранее невысказанные трансцендентные функции, такие как гамма-, бета-, дзета-функции, для которых даже сегодня, с помощью мощных математических средств, продолжают получать новые свойства. Теория бесконечных рядов и произведений, теория непрерывных дробей под внимательным взглядом Л. Эйлера стали важными инструментами теории функций комплексного переменного. Новыми подходами явились разработанные Л. Эйлером методы приближенных вычислений. Мы вправе назвать Л. Эйлера создателем вариационного исчисления. Эпизодические вариационные задачи, решаемые или рассматриваемые до Эйлера, часто ставили в тупик исследователей. Создание общих приемов решения таких задач привело Эйлера к новым концепциям, с которыми он смело обращался, и эта смелость вознаграждала его новыми, неизвестными ранее решениями. Смелое оперирование разрывными функциями, комплексными числами, столь обычными сегодня, было крупнейшим делом Эйлера. Это стало базой нового понимания такого фундаментального понятия математики, как функция.

Значительны достижения Эйлера в области теории чисел. Создание теории квадратичных вычетов, вопросы представимости целых чисел заданными формами, решение очень трудных частных случаев известных проблем, обширный круг проблем теории делимости, диофантова анализа — таков далеко не полный перечень его результатов в этой классической части математики. Здесь ему удалось плодотворно применить весь багаж аналитических методов. И здесь Эйлер сумел поставить ряд проблем, часть из которых нашла свое решение лишь в самое последнее время.

Ясное понимание органического единства между различными частями математики — одна из характерных особенностей творчества Л. Эйлера. Это позволяло ему получать значительные и выдающиеся результаты в смежных с математикой науках — математической физике, механике, астрономии, картографии и оптотехнике. Отметим лишь некоторые из этих работ — изучение движения Луны, определение местонахождения в открытом море, картографирование территории России, в частности Сибири, теория кораблестроения и кораблевождения. Эйлер первым пришел к за-

ключению, что вопреки теории Пьютона возможно изготовление линз (а значит, телескопов и микроскопов) без цветорассеяния и сколь угодно большой разрежающей силы.

Л. Эйлер оставил огромное научное наследие. Он — автор более 800 научных работ.

Жизнь Л. Эйлера тесно связана с Россией. Два крупных периода своей жизни он провел в Петербурге и был активнейшим членом Академии наук. Открытие Петербургской академии наук имело большое значение не только для России, но и для всей мировой науки. Здесь нашли применение своим дарованиям многие ученые, для творчества которых были созданы благоприятные условия.

Сегодня, когда наука стала непосредственной производительной силой, достижения математики, физики, механики и других наук играют решающую роль в развитии человеческого общества. Сложный и противоречивый процесс познания, практического освоения и использования открытых наукой закономерностей и процессов, создание на этой основе новой техники и технологии — все это сегодня охватывается таким понятием, как «научно-технический прогресс».

К вопросам научно-технического прогресса приковано пристальное внимание в связи с тем, что его достижения должны послужить главным рычагом развития и преобразования экономики, промышленности, сельского хозяйства. СССР располагает сегодня большим научным потенциалом.

В стране действует широкая сеть научных центров, научно-исследовательских институтов и лабораторий. На высоком уровне проводятся фундаментальные и прикладные исследования по всем направлениям современной науки.

Коммунистическая партия и правительство принимали на всех этапах нашего развития крупные решения по науке, созданию ее материальной базы, сети научных учреждений, подготовке научных кадров, планированию научных исследований и их практическому использованию. Намечен комплекс мер, направленных на обеспечение в ближайшие годы на основе ускоренного внедрения прогрессивных технологий выпуска отечественной промышленностью машин, оборудования, приборов и другой продукции, имеющих показатели высшего мирового уровня. При этом будет осуществлено укрепление и развитие опытно-производственной и экспериментальной базы научных учреждений, исследовательских, проектно-конструкторских организаций, вузов и промышленных предприятий.

Наука — фундамент технического прогресса производства. Результативность и эффективность науки основываются на всей совокупности полученных человечеством знаний. Непреходящее значение корифеев науки прошлого, заложивших ее основы. Наш симпозиум посвящен величайшему ученому Леопарду Эйлеру, сыгравшему выдающуюся роль в мировой науке.



АКАДЕМИК

**И. Ф. ОБРАЗЦОВ***министр высшего и среднего специального образования РСФСР*

После речи академика А. П. Александрова мне остается только кратко охарактеризовать некоторые частные задачи.

Уважаемые товарищи, гости! Всякий раз, когда мы обращаемся к Леонарду Эйлеру, мы чувствуем обаяние оригинальности его работ. В некоторых областях чистой и прикладной математики изложение Эйлера настолько окончательно, а его обозначения так современны, что можно сказать: наши обозначения почти эйлеровы. Например, нынешняя тригонометрия с ее определением тригонометрических величин как отношений и принятыми обозначениями входит во «Введение в анализ бесконечно малых» Эйлера. Исследование кривых и поверхностей с помощью их уравнений ведется во втором томе этого труда, так что мы можем его рассматривать как первый учебник по аналитической геометрии.

Широта научных интересов Эйлера огромна. Его работы объемлют не только проблемы собственно математики и механики, но астрономии, гидравлики, кораблестроения, артиллерии. В трех томах по диоптрике изложена теория преломления лучей в системе линз.

Невероятная работоспособность Эйлера была и остается поводом для изумления и восхищения каждого, кто пытался изучать его труды. Можно составить длинный список известных открытий, приоритет которых принадлежит Эйлеру, и перечень его идей, которые и сейчас заслуживают разработки.

Большие математики всегда признавали, что они многим обязаны Эйлеру и усердно читали Эйлера. Лаплас не раз говорил молодым математикам: это наш общий учитель. Еще более определенно выразился Гаусс: изучение работ Эйлера остается наилучшей школой в различных областях математики, ничто другое не может этого заменить.

Если сегодня, через 200 лет после смерти Эйлера, мы обратимся к программам высших учебных заведений и современным учебникам, то мы встретим Эйлера во множестве случаев. Наши студенты изучают теоремы Эйлера о перемещении твердого тела, кинематические и динамические уравнения Эйлера теории вращения тела, пользуясь при этом углами Эйлера. Первым интегральным вариационным принципом механики является эйлеров принцип наименьшего действия. Изучение основ гидродинамики студенты начинают с общих уравнений Эйлера. В курсе гидравлики имеются формулы Эйлера для определения суммарной силы, действующей на изогнутую трубу при течении по ней жидкости. Механики сплошной среды пользуются переменными Эйлера в отличие от переменных Лагранжа, которые между прочим также введены Эйлером. Общеизвестна формула Эйлера для критической силы при изгибе колонн. Примеры оригинальных решений Эйлером теоретических и прикладных проблем могут быть продолжены и дальше.

Для России, с которой Эйлер был связан в течение почти всей своей научной деятельности, его труды имели особое значение. Даже в годы жизни в Берлине он оставался деятельным членом Петербургской академии и консультировал по различным вопросам, включая подбор сотрудников

Академии, руководил занятиями командированных к нему молодых ученых. Многие прикладные работы Эйлера, например по картографии и морскому делу, были выполнены по запросам русских правительственных учреждений.

В России печатались трактаты Эйлера и его учебники, которые значительно повысили уровень математического просвещения, а его «Универсальная арифметика» на русском языке была издана даже раньше, чем ее немецкий оригинал, и выдержала три издания.

Большое внимание Эйлер уделял подготовке ученых для Петербургской академии наук. Известна его активная поддержка Михаила Васильевича Ломоносова, на диссертацию которого он дал положительный отзыв. У него учились первые русские академики Семен Кириллович Котельников, Степап Яковлевич Румовский, выполнившие ряд интересных работ по математике и астрономии.

Во второй, более продолжительный по времени, петербургский период Эйлер становится во главе группы российских ученых. Это Николай Иванович Фус, автор многих оригинальных исследований по дифференциальной геометрии, состоявший непреременным секретарем в Петербургской академии в течение четверти века; это Лексель, известный своими работами по полигонометрии, астроном и геометр Шуберт и др.

После нашего торжественного заседания открывается симпозиум памяти Леонарда Эйлера. На нем будут рассмотрены многие интересные моменты жизни и деятельности этого замечательного ученого. Убежден, что лучшим способом отдать дань уважения великому мыслителю было бы издание хороших переводов трудов Эйлера с современными комментариями, потому что многие идеи Эйлера и сегодня составляют значительную часть общематематической и общетехнической подготовки специалистов. Это способствовало бы внедрению идей и методов Эйлера в преподавание точных наук и стимулировало научную мысль в интересах ускорения научно-технического прогресса.

АКАДЕМИК

**Л. Д. ФАДДЕЕВ**

*директор Ленинградского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Академии наук СССР*

Разрешите начать ленинградскую торжественную часть заседаний, посвященных 200-летию со дня смерти великого ученого, математика, астронома, физика, механика — Леонарда Эйлера.

Трудно переоценить значение Эйлера для мировой науки. Достаточно вспомнить, что его имя связано с огромным числом математических, механических понятий, которые входят теперь во все учебники. Я попробовал подсчитать и перечислить, с какими именно понятиями, формулами, результатами и т. д. связано имя Эйлера, — список огромный. Я напому несколько таких математических объектов, но этот список, конечно, может оказаться практически бесконечным.

Начнем с теории чисел. Дзета-функция, которая связана с именем Римана, была введена Эйлером. Недаром ее представление через простые числа называется эйлеровым произведением. Эйлер ввел понятие эйлеровой

характеристики в топологии. Эйлер первым последовательно сформулировал вариационное исчисление, и мы теперь говорим об уравнениях Эйлера—Лагранжа. Комплексные числа были как следует рассмотрены Эйлером. Даже символ  $i$  — корень из минус единицы — впервые был введен Эйлером. Экспонента, роль ее для уравнений с постоянными коэффициентами — опять же заслуга Эйлера. Гамма-функция, одна из важнейших специальных функций, которая вошла в анализ и теорию вероятностей как незаменимый инструмент, введена Эйлером. И так далее.

Я перечислил здесь примеры того, что мы несколько условно называем чистой математикой. Эйлер не различал прикладную и чистую математику, для него это было единое целое. Недаром он был не только математиком, но и механиком, занимался астрономией и даже картографией, в общем использовал математику действительно всюду, где она нужна для настоящих хороших приложений.

Возьмем волчок Эйлера в теории движения твердого тела. Его уравнения впервые были записаны Эйлером. Они незаменимы для гироскопа и имеют важнейшие приложения.

Уравнения гидродинамики несжимаемой жидкости опять-таки связаны с именем Эйлера. Я повторяю, что этот список можно продолжать практически до бесконечности. Эйлер является, бесспорно, крупнейшей фигурой в математике XVIII в.

Если мне позволят привести музыкальное сравнение, то я бы сравнил Эйлера с Бахом, человеком, который изменил отношение к музыке, впервые ввел действительно современную музыку, внес вклад во все разделы музыки. Ровно так же Эйлер внес свой вклад во все разделы математики и ее приложений.

Нам в Ленинграде особенно приятно, что Эйлер был петербургским математиком. Он приехал в Петербург двадцати лет и составил себе имя, будучи сотрудником петровской Петербургской академии.

После он, как известно, уезжал в Германию, но вернулся снова в Петербург, где провел большую часть жизни и написал большую часть своих работ.

Недаром «Записки Петербургской академии наук» были прославлены в значительной степени благодаря имени Эйлера. И эта Академия приобрела всемирную известность в большой мере благодаря его работам.

Традиции Эйлера естественно продолжались в Петербурге — Петрограде — Ленинграде. И мы говорим сейчас о традициях и о школе ленинградской математики. Обычно мы ведем ее от Чебышева, великого математика прошлого века, но, вероятно, правильнее было бы не забывать о XVIII в. и вести эту традицию от Эйлера.

Что характерно для нашей математической традиции? Это, в первую очередь, неразрывная связь математики и ее приложений. Хорошие математические идеи появляются, когда мы рассматриваем важные конкретные задачи, вытекающие из приложений, — в физике, астрономии, геометрии, даже в теории чисел, но важно, чтобы это были естественные объекты, а не выдуманные.

В истории математики есть разные периоды. Иногда бывает период абстракции, а иногда — период накопления новых знаний, которые основаны на решении трудных и конкретных задач. Мне приятно сознавать, что мы сейчас живем именно в период накопления математического материала,

именно в период решения трудных и конкретных задач. И в этом деле традиции, идущие от Эйлера, очень нам помогают.

Я хотел бы обратить ваше внимание на то, что в зале у нас присутствуют потомки Эйлера и старейшие из них — Александр Александрович и Никита Николаевич — сидят за столом президиума.

Разрешите открыть наше торжественное заседание.

ПРОФЕССОР Д-Р

**В. ЭНГЕЛЬ**

*председатель Эйлеровского комитета  
Академии наук Германской Демократической Республики*

От имени Эйлеровского комитета Академии наук ГДР я имею честь приветствовать участников торжественного собрания Академии наук СССР в Москве и Ленинграде, посвященного памяти Леонарда Эйлера, крупнейшего математика эпохи между Ньютоном и Гауссом и несомненно самого продуктивного математика всех времен.

Значение Эйлера определяется многогранностью его творчества. Он обогатил самые различные области математики и впервые заложил научные основания целого ряда дисциплин. Наряду с этим его работы представляют собой замечательный пример сочетания теории и практики.

Величайшей исторической заслугой Эйлера явилось создание фундаментального математического аппарата решения разнообразнейших проблем физики, астрономии и техники. Он оставил научное наследие, на котором базировалось техническое развитие последующих десятилетий и которое донныне остается неотъемлемым достоянием всей инженерной деятельности.

Воздавая сегодня честь Эйлеру, прежде всего надлежит, изучая им содеянное, продолжать и развивать его в полезном и благотворном направлении. При этом здесь вполне уместно вспомнить ту выдающуюся роль, которую он сыграл в установлении традиции дружеского сотрудничества ученых, в частности Академий наук ГДР и СССР.

В течение 30 лет своей работы в Петербурге и 25 лет работы в Берлине он выдвинул обе Академии в первый ряд европейских научных центров его времени. Деятельность Эйлера и в берлинские годы жизни была теснейшим образом связана с Петербургской академией. Об этом говорит то обстоятельство, что, будучи в Берлине, он заботился о подборе научных кадров для Петербурга и занимался повышением квалификации специально приглашенных к нему русских ученых. Об этом свидетельствует и его богатая переписка с высоко ценимым им Михаилом Ломоносовым. С другой стороны, связи с Берлинской академией продолжались и по его возвращении в Россию. Таким образом Эйлер заложил прочные основания связей между русскими и немецкими учеными, которые сохранялись при всех превратностях исторических судеб и которые достигли нового размаха в современном научно-техническом сотрудничестве ГДР и СССР.

В духе этого сотрудничества я желаю полного успеха проводимым в СССР мероприятиям в честь Эйлера. Да послужат они вкладом в дальнейшее углубление нашей дружной совместной работы на благо науки и человечества!

# ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР. ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО

---

А. П. ЮШКЕВИЧ

Среди знаменитых ученых всех времен и народов вряд ли есть хоть один, кто чаще упоминается в современных курсах математических наук, чем Леонард Эйлер. В дифференциальном исчислении имя Эйлера носит теорема об однородных функциях; в интегральном исчислении — подстановки, служащие для рационализации квадратичных иррациональностей и «эйлеровы интегралы 1-го и 2-го рода»; в теории обыкновенных дифференциальных уравнений — два класса линейных уравнений с переменными коэффициентами, а также метод приближенного интегрирования, ставший отправным пунктом известной теоремы Коши о существовании решения; в вариационном исчислении — дифференциальное уравнение, служащее для нахождения функции, сообщающей экстремальное значение данному функционалу, и один из «прямых» методов; в исчислении конечных разностей — формула суммирования Маклорена—Эйлера; в теории аналитических функций — формула Коутса—Эйлера, связывающая показательную и тригонометрические функции, а также уравнения Даламбера—Эйлера, обычно называемые уравнениями Коши—Римана; в теории бесконечных рядов — один из методов суммирования расходящихся рядов и улучшения сходимости рядов сходящихся; в дифференциальной геометрии — формула кривизны нормального сечения поверхности; в топологии — основная характеристика топологического комплекса. Это перечисление далеко от полноты и к нему можно было бы прибавить по меньшей мере функцию Эйлера в теории чисел, эйлерову постоянную, эйлеровы числа, эйлеровы углы и т. д. Здесь указаны только случаи, в которых знаменитый ученый явно упоминается в современных руководствах для университетов и высших технических школ; между тем многие методы и формулы Эйлера излагаются безымянно и даже под именами позднейших ученых. Так, например, Эйлер за 30 лет до Фурье аналитически вывел так называемые формулы Фурье в теории тригонометрических рядов. К Эйлеру восходит изложение теории логарифмов и тригонометрии в средней школе. Прочно вошли в употребление многие предложенные Эйлером математические знаки, вроде мнимой единицы  $i$ , основания натуральных логарифмов  $e$ , конечной разности  $\Delta$  и суммы  $\Sigma$ .

Все эти формулы, теоремы, методы и символы частично отражают огромный вклад Эйлера в одну лишь математику. Я оставляю, как правило, в стороне механику, астрономию, физику, географию, технику, которые все обязаны ему огромными достижениями. XVIII век часто называют веком Просвещения. В области точных наук его справедливо было бы назвать веком Эйлера, хотя тогда работали столь замечательные ученые, как Клеро, Даламбер, Лагранж, Крамер, Ламберт, Муавр, Стирлинг, Маклорен, а в России — Ломоносов.



*Вид селения Риген*

*Акварель В. И. Передерия (со старинного рисунка)*

В своем докладе я постараюсь коротко описать жизненный путь Эйлера и суммарно охарактеризовать его вклад в науку, преимущественно в математику.

Жизнь Эйлера можно разделить на четыре этапа: первые 20 лет, проведенные в Базеле, последующие 14 лет работы в Петербурге, затем 25 лет в Берлине и, наконец, второй, 17-летний петербургский период.

Леонард Эйлер родился 15 апреля 1707 г. в Базеле, в семье небогатого пастора. Детские годы он провел в местечке Риген близ Базеля, где получил приход его отец. Первые уроки математики преподавал ему отец, в студенческие годы слушавший в Базеле лекции профессора Якоба Бернулли, ближайшего последователя Лейбница; затем был нанят специальный учитель математики, бывший, правда, по специальности теологом.

В это время Эйлер проштудировал трудную, хотя и устарелую тогда «Алгебру» Х. Рудольфа (1522) в обработке другого видного алгебраиста XVI в. М. Штифеля. Осенью 1720 г., в возрасте тринадцати с половиной лет Эйлер поступил на факультет свободных искусств Базельского университета. Физико-математических факультетов тогда вообще не было, и математиков университет специально не готовил. Окончившие факультет свободных искусств могли продолжить свое образование на богослов-



*Базельский университет в XVII в.*

*По плану г. Базеля, изготовленному М. Мерианом в 1615 г. (1 — Нижняя Коллегия)*

ском, юридическом и медицинском факультетах. Лекции по математике, которые слушал Эйлер, охватывали только элементарные ее отделы и еще начала астрономии. Но читал эти лекции крупнейший тогда, если не считать престарелого Ньютона, математик мира — Иоганн I Бернулли, ученик своего старшего брата Якоба и его преемник по кафедре в Базеле. Эйлер чрезвычайно увлекся математикой и обратился к своему профессору с просьбой заняться с ним математикой в частном порядке. Бернулли отказался давать отдельные уроки, но, заметив необыкновенное дарование юноши, помог ему по-другому. Он систематически рекомендовал ему специальную литературу для проработки и разрешил приходить каждую субботу к нему домой, чтобы вместе обсуждать трудные вопросы. Для Эйлера это был лучший путь в науку, большей помощи ему не требовалось. Вскоре он сблизился с сыновьями своего руководителя Николаем II, Даниилом и Иоганном II Бернулли, а также с его племянником Николаем I Бернулли. Все они также живо интересовались математикой и имели к ней особое призвание.

Эйлер учился превосходно, активно участвовал в жизни университета и окончил факультет в 1723 г. Год спустя он произнес речь, в которой сравнил натурфилософские воззрения Декарта и Ньютона, после чего ему присвоили звание магистра искусств. По желанию отца, считавшего,



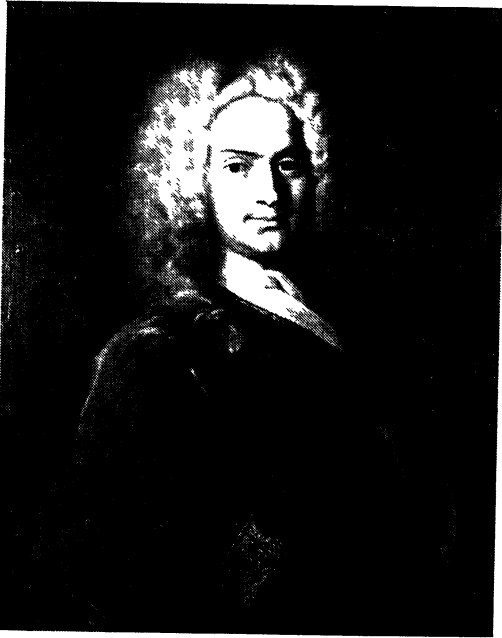
*Иоганн Бернулли — научный  
руководитель Эйлера*

что сыну лучше всего выбрать, подобно ему самому, карьере пастора, молодой Эйлер поступил на богословский факультет. Однако здесь молодому человеку было скучно и занятия шли не очень успешно. Отец не стал противиться наклонностям сына, который всецело погрузился в изучение математики, а в 1726—1727 гг. выступил с двумя первыми небольшими статьями в международном журнале «Acta eruditorum»; обе они посвящены задачам анализа, бывшим предметом изысканий членов семьи Бернулли и других ученых. Тогда же он принял участие в конкурсе Парижской академии наук на тему о наиболее целесообразной оснастке кораблей мачтами. Премии ему не присудили, но работу одобрили, и она была напечатана в Париже в 1728 г. Заметим, что в 1738—1772 гг. Эйлер был 12 раз премирован Парижской академией за

различные конкурсные работы по прикладной математике и технике.

Между тем встал вопрос об отыскании места работы. Кафедр по математике и физике в Швейцарии, да и в других странах было очень мало и вакансии появлялись обычно со смертью занимавших их профессоров. В семье Бернулли учитывали это обстоятельство, и ее члены нередко приобретали дополнительную квалификацию, помимо математики. Благодаря этому Николай I Бернулли, доктор юриспруденции, смог получить в Базеле кафедру логики и затем права. Николай II Бернулли также занял сперва место профессора права в Берне. Даниил Бернулли, став доктором медицины, дважды неудачно участвовал в конкурсе по кафедрам анатомии и ботаники и потом по логике. Эйлер, со своей стороны, сделал безуспешную попытку занять освободившееся в 1727 г. место профессора физики Базельского университета. Он даже не был допущен к участию в конкурсе, быть может, по молодости лет. Из этих затруднений обоих старших сыновей Иоганна I Бернулли, а затем и Эйлера, как и многих других ученых Западной Европы, выручило учреждение по замыслу императора Петра Великого Академии наук в Петербурге. В то время в России еще не было собственных национальных кадров ученых, и в новую академию приглашали на договорных началах активных и по возможности молодых сотрудников из-за рубежа. Официальное открытие Петербургской академии наук состоялось в августе 1725 г., через полгода после смерти Петра I. В ней тогда было 17 профессоров и адъюнктов, т. е. академиком старшего и младшего ранга, по математике, физике, астрономии, химии и другим естественным наукам, а также по ряду гуманитарных наук. Среди первых академиком были Николай II (по кафедре математики) и Даниил Бернулли (по кафедре физиологии). Благодаря их рекомен-





*Николай II Бернулли*



*Даниил Бернулли*

дации на вакансию адъюнкта физиологии в самом конце 1726 г. приглашен был и Эйлер, тотчас принявший в связи с этим за изучение этой науки. Предполагалось, что он, подобно Д. Бернулли, займется приложением математики к проблемам физиологии, в частности движения крови по сосудам тела. После упомянутой неудачной попытки устроиться на родине Эйлер 5 апреля 1727 г. навсегда простился с Базелем и через 50 дней пути сперва по Рейну, затем по немецким землям и, наконец, по морю 24 мая того же года прибыл в Петербург.

Когда 20-летний Эйлер стал адъюнктом Петербургской академии, где ему сразу предоставили возможность заняться не физиологией, а математическими науками, здесь уже велась интенсивная научная работа. Нигде в мире не имелось более благоприятных условий для дальнейшего научного роста Эйлера, чем в Петербурге. Прежде всего он оказался в коллективе ученых с общими интересами и устремлениями, и это стимулировало каждого. Два раза в неделю научные сотрудники собирались на конференции, где докладывали и обсуждали свои работы, письма зарубежных ученых и к ним, текущие вопросы академической жизни, например содержание «Записок» (Commentarii) Академии — ежегодника, первый том которых за 1726 г. был напечатан в 1728 г. (титульный лист одного из томов «Записок» приведен далее на рисунке). Особенное значение для Эйлера имели постоянные научные беседы с Д. Бернулли, с которым он жил на одной квартире до отъезда Бернулли весной 1733 г. Кроме Д. Бернулли, среди академиков были видный математик и механик Я. Герман, ученик Якоба Бернулли, геометр Ф. Х. Майер, физик и ма-

K Monsieur Laurent-Blaumentrost  
 Très Illustre Président de l'Académie  
 Impériale des Sciences 241  
 1741.

Monsieur

L'honneur que votre Excellence m'a fait de me recevoir  
 dans votre très Illustre Académie m'oblige à vous en re-  
 dire et vous faire mon compliment. Monsieur Bernoulli  
 qui est à St. Pétersbourg m'a envoyé la lettre  
 que votre Excellence lui avez écrite, où vous  
 faites connaître les conditions sous lesquelles  
 vous m'offrez l'engagement chez votre Académie  
 lesquelles je m'ay résolu de recevoir, et si la  
 tempête le permettoit, je partirois encor-  
 ce mois pour vous offrir en présence mon

241ob

devoir, et me consacrer tout à fait au service  
 de l'Académie. Mais parce que l'hiver  
 m'empêche maintenant à partir, je m'ay proposé  
 de commencer le voyage le premiers jours de  
 et même être tout au mois Mars j'il auzi

plura a votre Excellence. S'employera ce  
 pendant tous mes efforts, pour me rendre plus  
 habile à remplir mes devoirs et à bien servir  
 l'Académie. Je ne souhaite que de vous  
 en état où je pourrai à votre Excellence

241

rendre grâce auzi comme je me connois être obligé  
 et remercier cette marque de votre affection,  
 que vous m'avez fait l'honneur de me  
 donner. Si je vous pouvois faire quelq. plaisir  
 quel soit dans le chemin, que je prendrai par où  
 vous plaira, ce me sera très agréable et je tâcherai  
 de vous satisfaire de tous mes efforts. Enfin je  
 suis et je demeure avec un très profond respect  
 Monsieur

de votre Excellence

Bâle le 9 Novemb  
 1728

le très obéissant et  
 très obligé serviteur  
 Leonh. Euler.

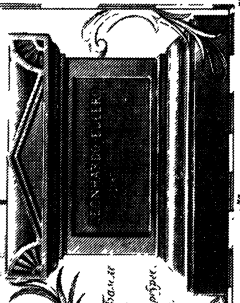
Ответ Л. Эйлера на приглашение президента Петербургской  
 академии наук Л. Блюментроста работать в Академии

Архив Академии наук СССР

тематик Г. В. Крафт, разносторонне образованный и обладавший уди-  
 вительной проницательностью, особенно в теории чисел, Х. Гольдбах,  
 известный астроном Ж. Н. Делиль и др. Важную роль сразу стала играть  
 и научная переписка Эйлера, прежде всего с его учителем И. Бернулли,  
 продолжавшаяся с осени 1727 г. почти 20 лет. При почти полном отсутст-  
 вии научных журналов и международных встреч, которыми так богата  
 теперь жизнь ученых, научная переписка служила в XVII—XVIII вв.  
 важнейшим средством быстрой взаимной информации для людей, живших  
 в разных странах или городах. Многие письма представляли собой под-  
 робные авторефераты текущих исследований. Когда Гольдбах в 1728 г.  
 должен был на несколько лет переехать в Москву, между ним и Эйлером  
 также завязалась чрезвычайно содержательная переписка, продолжав-  
 шаяся до смерти Гольдбаха в 1764 г. и содержащая 196 писем. С отъездом  
 Д. Бернулли Эйлер тоже продолжал с ним многие годы обмен идеями и  
 задачами в письмах; сохранилось 90 писем этой корреспонденции. Вообще



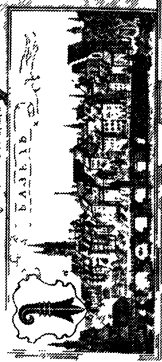
В ПЕТЕРБУРГЕ  
с 1727 по 1741 г.  
с 1766 по 1787 г.



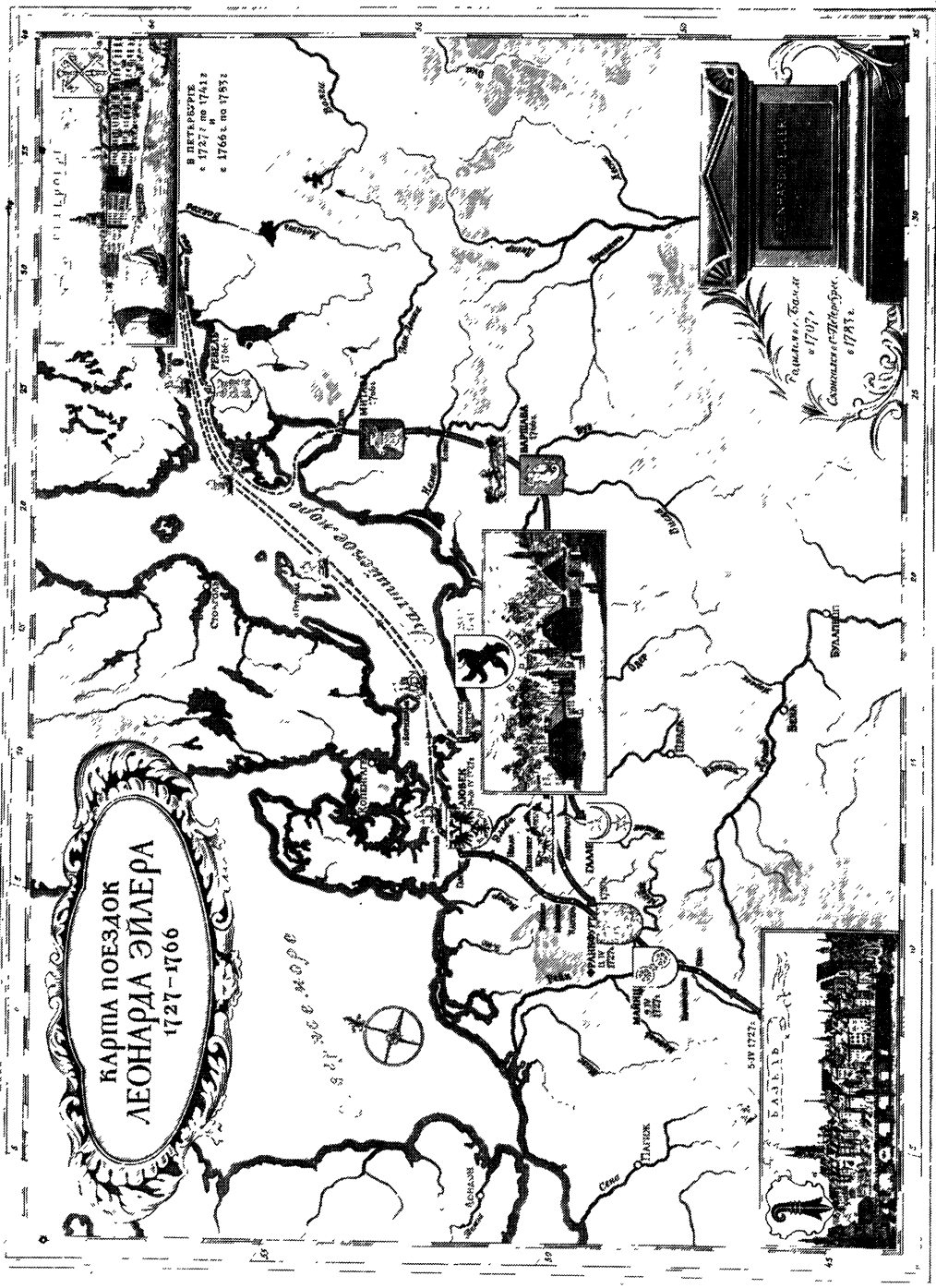
Полтавский Банкет  
в 1707 г.  
Самарский Петербург  
в 1787 г.

КАРТА Поездки  
ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА  
1727 - 1766

Среднее море



С 1727





*Здание Петербургской академии наук в XVIII в.*

*По рисунку Лепинаса*

Эйлер переписывался почти со всеми крупными математиками своего времени, кроме названных — со Стирлингом, Клеро, Даламбером, Лагранжем, Крамером, Ламбертом и многими другими. Характерно, что он весьма заботился о сохранности своей корреспонденции. Как-то он высказался о ней следующим образом: «Если кто-либо возьмет на себя труд ее прочитать, он найдет в ней многие важные вещи, публикация которых более придется по вкусу публике, чем самые глубокомысленные работы». Замечу, что Петербургская академия оплачивала почтовые расходы своих сотрудников, в то время весьма значительные.

Другим исключительно благоприятным для Эйлера условием работы в Петербурге явилась возможность регулярной публикации его статей в академических «Записках», издававшихся на латинском языке, которым в XVIII в. владели все ученые, и отдельных книг. Эйлер был самым плодовитым математиком всех времен, причем его литературная продукция со временем не ослабевала. Я в свое время посчитал по десятилетиям количество подготовленных им к печати сочинений, не различая больших книг от кратких статей и оставив в стороне сравнительно немногие работы, которые не удалось датировать. Из общего числа приблизительно 850 его сочинений (среди них свыше 20 томов больших монографий) распределение в процентах и по десятилетиям готовых работ таково:

1726—1734	гг. около	5	1755—1764	гг. около	14
1735—1744	»	10	1765—1774	»	18
1745—1754	»	19	1775—1783	»	34

Здесь следует учесть, впрочем, что во второй петербургский период жизни Эйлеру, в то время почти слепому, много помогали первоклассные ученые секретари. Нигде в мире Эйлер не смог бы опубликовать свои труды в таком масштабе, как в России, где издательская деятельность Академии наук особенно щедро финансировалась правительством.

Приведенные данные, конечно, недостаточны для суждения о ходе духовного развития Эйлера. Как это обычно у математиков, многие интересы и идеи Эйлера складывались смолоду, хотя даже на склоне лет он изобретал новые подходы и методы и оставался вполне восприимчив к открытиям младших современников. На протяжении десятилетий он возвращался к проблемам, раз привлекавшим его интерес и по каким-либо причинам отложенным или решенным не удовлетворяющим его самого способом, и его научные записные книжки, которые он вел с 1725 по 1783 г. (12 тетрадей с общим объемом около 4000 страниц хранятся в Архиве АН СССР), свидетельствуют о том, как неустанно он накапливал материалы для их последующей обработки. Всю жизнь Эйлер не успевал письменно оформлять переполнявшие его научные замыслы. Многие исследования, завершённые им в середине XVIII в. и даже позднее, уходят корнями в начальные годы первого петербургского периода и даже в базельские времена. Например, он еще в Базеле задумал изложить на языке исчисления бесконечно малых школы Лейбница механику точки, в «Математических началах естественной философии» Ньютона (1687) и в «Форономии» Германа (1716) изложенную — как он выражался сам — с помощью синтетических геометрических доказательств, гораздо менее пригодных для единообразного решения множества новых возникающих задач. Это свое намерение Эйлер осуществил десять лет спустя в двухтомной «Механике, т. е. науке о движении, изложенной аналитически» (СПб., 1736), ставшей отправным пунктом всего дальнейшего развития механики. То же можно сказать о его исследованиях по теории музыки, завершённых в «Опыте новой теории музыки, ясно изложенной на основе вернейших начал гармонии» (СПб., 1739).

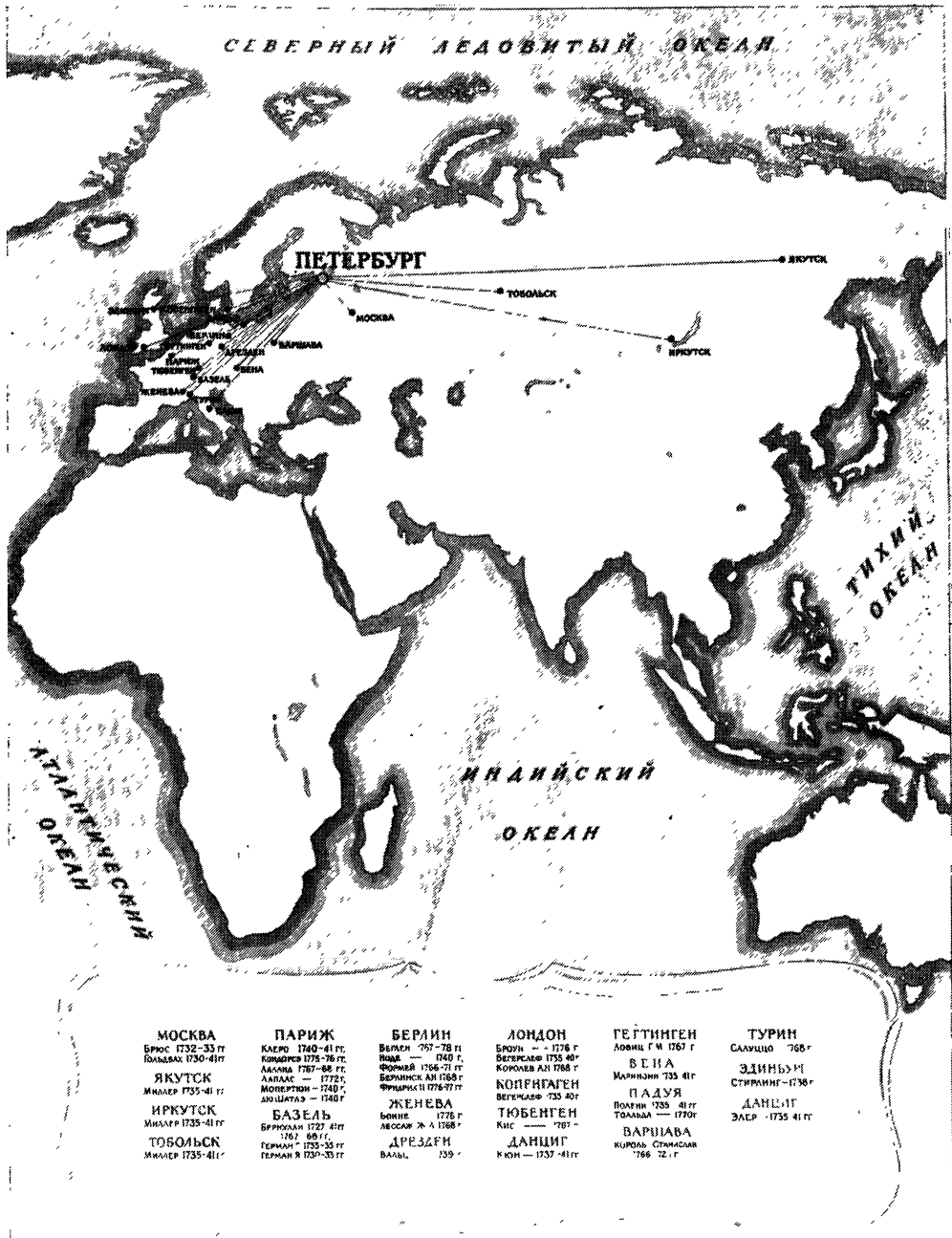
COMMENTARII  
ACADEMIAE  
SCIENTIARVM  
IMPERIALIS  
PETROPOLITANAE.

TOMVS VIII.  
AD ANNUM MDCCXXXVI.



PETROPOLI,  
TYPIS ACADEMIAE 1736.

*Титульный лист VIII тома  
«Записок» Петербургской академии  
наук за 1736 г.*



**МОСКВА**  
 Брокс 1732-33 гг  
 Бомбах 1730-41 гг

**ЯКУТСК**  
 Миллер 1735-41 гг

**ИРКУТСК**  
 Миллер 1735-41 гг

**ТОБОЛЬСК**  
 Миллер 1735-41 гг

**ПАРИЖ**  
 Клеро 1740-41 гг  
 Комарсэ 1778-78 гг  
 Лаксон 1787-88 гг  
 Лаглас — 1772 г  
 Монтерлан — 1740 г  
 Ришатель — 1740 г

**БАЗЕЛЬ**  
 Брюкман 1727-41 гг  
 1767-68 гг

**БЕРЛИН**  
 Берман 1725-35 гг  
 Герман 1725-35 гг

**БЕРЛИН**  
 Велен 1767-78 гг  
 Ниде — 1740 г

**ЖЕНЕВА**  
 Бонне 1776 г  
 Авосан Ж А 1768 г

**ДРЕЗДЕН**  
 Вальс 1759 г

**ЛОНДОН**  
 Броун — 1776 г  
 Велерсаль 1755-40 г  
 Ковель Алл 1788 г

**КОПЕНГАГЕН**  
 Велерсаль 1733-40 г

**ТЮБЕНГЕН**  
 Лис — 1787 г

**ГЕТТИНГЕН**  
 Ловиц Г М 1767 г

**ВЕНА**  
 Маринани 1735-41 г

**ПАДУЯ**  
 Полеин 1735-41 гг  
 Толальда — 1770 г

**ВАРШАВА**  
 Курвал Станислав  
 1766-72 г

**ТУРИН**  
 Сальцо 1768 г

**ЭДИНБУРГ**  
 Стирлинг — 1736 г

**ДАНЦИГ**  
 Элер — 1735-41 гг

Схема переписки, которую вел Л. Эйлер из Петербурга

Петербургская академия наук была государственным учреждением, которое привлекали к решению важных практических вопросов. В гимназии и университете при Академии велась подготовка национальных научных кадров; многие русские ученые XVIII в., в том числе великий М. В. Ломоносов, были воспитанниками этих учебных заведений, закрытых только в начале XIX в., когда необходимость в них отпала в связи с реорганизацией всей системы народного образования. В то время при Академии была сохранена, и то не надолго, только, как мы сказали бы теперь, аспирантура (вновь возрожденная при Советской власти). Академии поручали также многие технические экспертизы, но особенно важной ее обязанностью стало комплексное изучение малообследованных областей огромной империи, в частности всей Сибири до Камчатки включительно. Знаменитые академические экспедиции XVIII в. сыграли в этом деле огромную роль.

Эйлер принял деятельное участие во многих перечисленных мероприятиях, чему способствовало то, что в отличие от некоторых других иностранных академиков он хорошо изучил русский язык и мог свободно общаться с людьми, не знающими иностранных языков. Для учащихся академической гимназии он составил «Руководство к арифметике», напечатанное на немецком языке в 1738 г. и затем в русском переводе и оказавшее большое влияние на преподавание этого предмета в России и на авторов последующих учебников. В течение нескольких лет он вместе с Ж. Н. Делилем и академиком Г. Гейнзиусом, астрономом и географом, много занимался картографией, причем некоторые карты вычерчивал сам. Потребность государства в точных географических картах, ранее отсутствовавших, была очевидна, в частности для правильного определения международных границ страны. Занятия географией позднее отразились и на теоретических исследованиях Эйлера: сорок лет спустя, в 70-е годы XVIII в. он впервые применил в картографии функции комплексного переменного.

Как упоминалось, еще в Базеле Эйлер занялся проблемами кораблестроения. В Петербурге он уже в середине 30-х годов продолжил эти исследования в широком плане, причем в 1740 г. обязался подготовить специальный трактат по этому вопросу. Актуальность такого труда для России, вышедшей еще при Петре I в ряд великих морских держав, не требует пояснений. Завершил свою фундаментальную двухтомную «Морскую науку, или трактат о кораблестроении и кораблевождении» Эйлер уже в Берлине, откуда переслал рукопись в Петербург, где она и была издана в 1749 г. Названный труд имел основополагающее значение для механики в целом, и не только для гидромеханики, и но для кинематики и динамики твердого тела. Однако учебным руководством «Морская наука» по характеру изложения служить не могла, и почти через четверть века Эйлер написал для учащихся русских морских школ более доступную «Полную теорию строительства и вождения кораблей», изданную сперва на французском языке в 1773 г., вскоре, в 1776 г., переизданную в Париже, а также вышедшую в русском, английском и итальянском переводах. Русское издание 1778 г. подготовил и дополнил полезными пояснениями ученик Эйлера, адъютант М. Е. Головин, племянник Ломоносова.

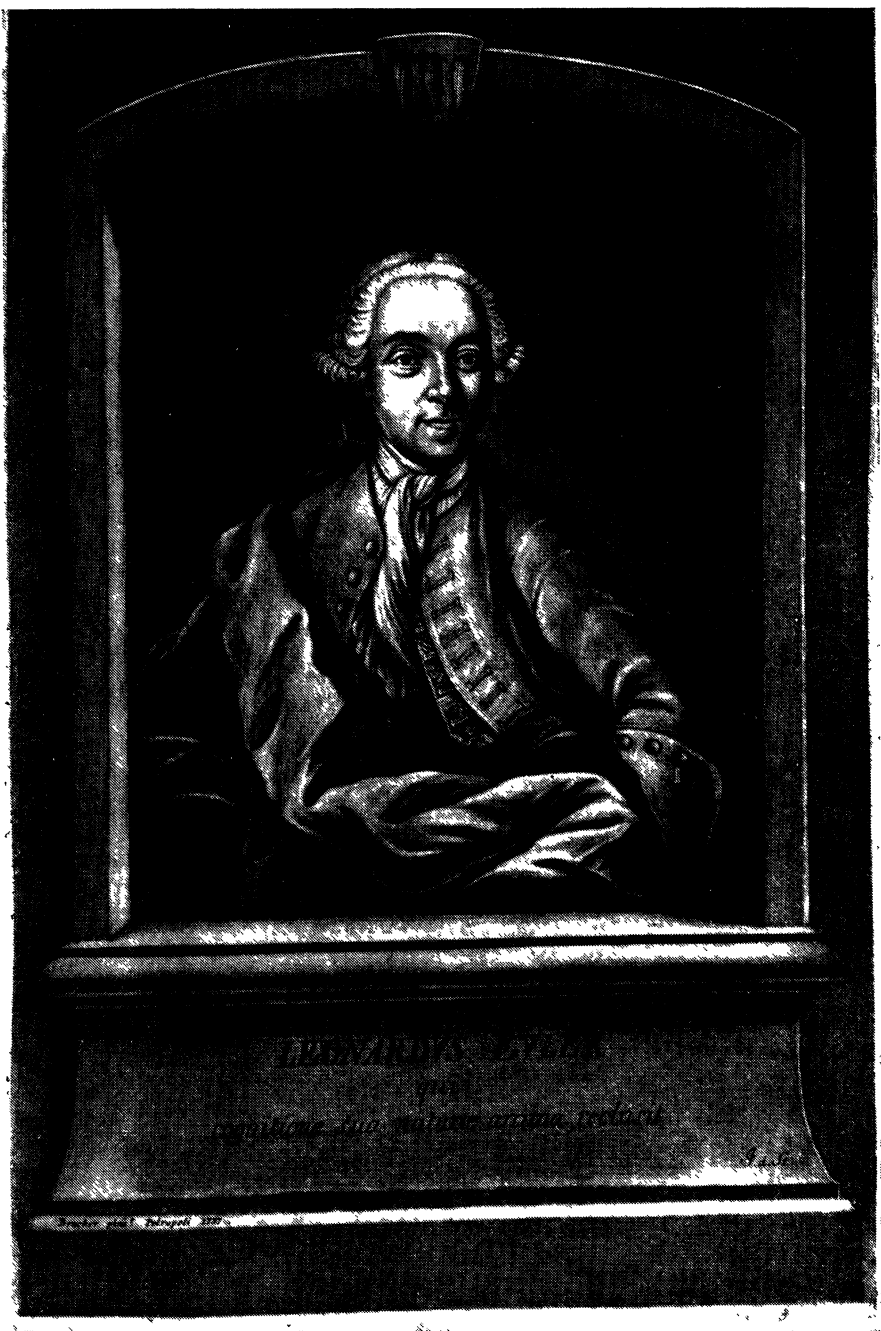
Выполнение перечисленных и других обязанностей Эйлер успешно сочетал с разработкой чисто теоретических проблем. С первым научным сообщением он выступил в академической конференции 5 августа 1727 г.

и с тех пор стал в ней самым частым докладчиком. Тогда же началась публикация его работ в ежегодном журнале академии, издававшемся в XVIII в. на латинском языке под сменявшими друг друга названиями «Записок», «Новых записок», «Трудов» и «Новых трудов». Со 2-го тома «Записок» за 1727 г., вышедшего в 1729 г., Эйлер в течение всей своей жизни постоянно помещал в академических сборниках свои статьи, иногда больше десяти в одном томе. В первый петербургский период жизни он подготовил к печати свыше 80 и опубликовал около 50 работ по различным вопросам чистой и прикладной математики. Некоторые работы непосредственно продолжали или завершали исследования, начатые в Базеле, но в большинстве случаев относились к новым направлениям, в которых его предшественники сделали в лучшем случае только первые шаги. Так было с решением ряда задач вариационного исчисления и интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, с введением гамма-, бэта- и дзета-функций, с учением о бесконечных рядах, включая асимптотические разложения, и о непрерывных дробях, с теорией чисел, топологией и т. д. К этому времени относятся и первые оригинальные исследования Эйлера по астрономии. А наряду с этим шло изучение новых проблем, которые стали предметом занятий Эйлера в следующие десятилетия.

Благоприятно складывалась и личная жизнь Эйлера, за исключением одной беды — неожиданной потери в 1738 г. зрения на правый глаз. В начале января 1734 г. Эйлер женился на Катарине Гзелль, дочери живописца Петербургской академии наук, также переехавшего из Швейцарии. В том же году родился старший сын Иоганн-Альбрехт, а в 1740 г. — второй сын Карл. Эйлер приобрел на Васильевском острове, неподалеку от Академии, собственный дом, в котором разместились и семья его младшего брата живописца Генриха. Казалось, что Эйлер прочно обосновался в русской столице. Однако после смерти в 1740 г. императрицы Анны Иоанновны и провозглашения императором трехмесячного Иоанна VI в Петербурге сложилась неустойчивая политическая обстановка, вызванная борьбой за власть различных дворцовых группировок. Вначале регентом страны был фаворит покойной императрицы Бирон, но он вскоре был отправлен в ссылку и его место заняла мать Иоанна VI Анна Леопольдовна. Однако и ее власть оказалась совершенно непрочной. Недовольство столичного дворянства и гвардии чрезмерным влиянием при дворе иностранцев предвещало дальнейшие осложнения. Все это отражалось и на деятельности Академии наук. Между тем еще летом 1740 г. Эйлер получил предложение прусского короля Фридриха II переехать в Берлин, где король хотел организовать Академию наук, не уступающую по своему значению академиям в Париже и Петербурге. Предложение Фридриха II было повторено зимой 1741 г., и встревоженный Эйлер дал положительный ответ. 19 июня он со всей семьей выехал из Петербурга и 25 июля был уже в Берлине. В России же после дворцового переворота на престол в самом начале 1742 г. взошла Елизавета Петровна, дочь Петра I.

Так закончился первый петербургский период жизни Эйлера. За 14 лет он многое сделал для прогресса науки в России и во всем мире. Вместе с тем он отдавал себе ясный отчет в решающем значении приглашения в Петербург для всей его судьбы и в этом смысле высказался в одном из писем, адресованных Петербургской академии в 1749 г.: ведь





*Леонард Эйлер в возрасте 30 лет*

*Гравюра В. Соколова с портрета работы И. Бруккера 1737 г.  
(Государственная публичная библиотека им. М. Е. Салтыкова-Щедрина, Ленинград)*

mes. die 2. Sept. 1748.

Государь Мой

а Вамъ попортивше благодарствувъ. что дѣло Гѣна Бернулли нынѣ къ его удовольствію почти окончано. а тѣмъ же поше быши радубей. что Гѣна Бернулли на мнѣ граздо срдимѣе сталъ. и мнѣ въ причину смѣху ему противнѣе случатъ въ притисалъ. по тому что онъ думалъ, аи мнѣ а оу мнѣ твердою обнадѣженіе о его намѣреніи Вамъ давалъ. и для того онъ о мнѣ ни мало у Г. Графа фонъ Кензгеринга и Г. де Мотурнуиса жаловался. Онъ своимъ гнѣвомъ на мнѣ такъ дальню пошту палъ. что мнѣ о смерти отца его не извѣстилъ. и гдѣ не мѣста еще его утопить не могъ. хотиъ ему допозналъ что всегда къ Вамъ не намиротворилъ о его намѣреніи писалъ. о чемъ у Васѣ мнѣ не надобно оправдатель. потому что онъ самъ своею резолюціею довольно показалъ. что а въ мнѣ не погрѣшилъ. по тому онъ не позволеніемъ отца своего отпозался. а не жаловался. что а лодко Вамъ о его намѣреніи доносилъ. а тамъ не сумнѣвался. что онъ въ ту пору. и мнѣ онъ мнѣ въ гдѣ о томъ писалъ. по тому намѣреніе не было. Воице къ Императорею Аннѣ. деліи приняты. потому что а она. что онъ въ то время оу мнѣ сурьветливо былъ обрѣенъ отъ Магистрата а. а знаго. и во вѣдѣннѣ о нѣмъ отъ Г. Бернулли оу каменному было. что онъ изданнѣ ушаю. о Г. Бернулли у каменному было. что онъ съ онимъ Бунтовщиномъ обрѣенъ мнѣ. и силе онъ тогда же такъ смѣе недовольнѣ. что онъ неосродимо свое отгѣство оставитъ рѣшилъ. а потомъ Магистратъ вѣдѣннѣ къ нему долне силонности показалъ. такъ что онъ свое намѣреніе советнѣ смѣнѣлъ. а мнѣ по

Из письма Л. Эйлера на русском языке адъютанту Г. Н. Теплову  
от 9.04.1748 г.

Онъ совершенно способенъ получить и мнѣ о нѣщахъ,  
 маніи мои книги о мореходствѣ и о сиротнѣ Кара,  
 Анж. и томъ ради Васѣ покорно прошу мнѣ позволенія  
 этою & моею книгою мнѣ долго у себя держать, пока  
 Т. Охлицъ и Вамѣ привезетъ. Понесъ & хотѣлъ  
 ему зятъ словесно о сѣи книгѣ многи обстоятѣльствѣ  
 и важности, которыхъ писали оуень трудно въ мнѣ,  
 & Венедикъ отъ него отвѣтъ дождетъ, которыхъ  
 Вамѣ тотчасъ сообщу. Этою онъ по полученыи денегъ  
 на переводъ немудрено оубо ханѣ могъ. А то его при,  
 вѣстѣ покорно прошу напечатаніе мои книги не  
 замедлитъ, понесъ & всѣхъ этою мои пообрѣтъ & со  
 бременіе болше новѣи не были, потому что его французъ,  
 нѣ математикѣ въ основаніи сѣи матеріи оуень  
 старатель, и убо нѣкоторые важныи дѣиствіи  
 публиковали, которыхъ & много лѣтъ прежде ихъ  
 оубо & оуень, недоволенъ это & въ негоціантахъ  
 съ Т. Кисотъ не щастливъ, ервѣгда оубо вѣннѣ  
 послѣднѣ кондичи прѣдъ оубо или турѣи мѣждоцѣи  
 пришли, то Т. Кисѣ отъидъ тотчасъ притиналъ, но  
 Т. Францъ Вамѣ сподетъ что онъ въ то время у нашего  
 президента былъ нѣ милости, а теперь съ нимъ оубо  
 переписки, & бо просилъ этою отъ мнѣ свое мнѣи  
 писменно сообщилъ, которыхъ Вамѣ зятъ приласъ,  
 между тѣмъ & ему въ надѣющу отнѣлъ, этою мнѣи  
 не достигалъ, понесъ мнѣ паратѣ, а мнѣи отъ со вѣннѣ  
 не отпалъ. Вся моя францѣи Вамѣ покорнѣише  
 попландетъ, а Васѣ прошу графу объявить, предъвѣтъ  
 его сѣи мнѣише Тостожинну Трабу объявить, предъвѣтъ  
 съ совершенноише поумнѣише.

Сверлингъ  
 9 Октяб. 1748.

Государь Мой

Ваше покорнѣише слуга  
 Л. Эйлеръ

только здесь его основным занятием смогли стать и успешно развиваться исследования в области математических наук, в которых он с юности видел свое главное призвание.

Эйлер приехал в Берлин 34-летним ученым с мировым именем, которого его старый учитель Иоганн Бернулли с полным основанием в одном адресованном ему письме 1745 г. назвал *princeps mathematicorum*, главой математиков. В Берлине Эйлер стал деятельным помощником Фридриха в организации новой академии наук. Начинать дело приходилось, правда, не на пустом месте. Еще в 1700 г. по инициативе Лейбница в Берлине было учреждено Общество наук, но члены его не были активными учеными, а сам Лейбниц жил в Ганновере. При отце Фридриха II — нежестоким и деспотичном короле-солдате Фридрихе-Вильгельме I Берлинское общество наук влачило самое жалкое существование. Фридрих II, вступивший на престол в 1740 г., был не менее милитаристским правителем, чем его отец, — достаточно вспомнить, что на первые 23 года его правления пришлось 15 военных лет: восемь лет войны за австрийское наследство 1740—1748 гг. и затем семилетняя война 1756—1763 гг. Но вместе с тем Фридрих II явился типичным представителем просвещенного абсолютизма XVIII в., поддерживавшим, отчасти из престижных соображений, науки и искусства и допускавшим в безопасных для абсолютной монархии границах умеренное философское вольнодумство. По личным вкусам Фридрих II был поклонником французской культуры, дружески переписывался с Вольтером (с которым, впрочем, позднее рассорился), писал преимущественно по-французски и даже сделал этот язык официальным в новой академии. И если первым президентом Петербургской академии наук явился немец лейб-медик Л. Блюментрост (родившийся, правда, в Москве), то на пост президента Берлинской академии наук и литературы, заменившей в 1744 г. прежнее Научное общество, Фридрих II пригласил известного французского ученого П. Л. Моро де Мопертюи, который особенно импонировал ему своими светскими манерами. В 1746 г. Мопертюи приступил к исполнению своих обязанностей, причем у него с самого начала установились наилучшие отношения с Эйлером, назначенным еще в 1744 г. директором математического класса. Иначе складывались отношения между Эйлером и Фридрихом II. Король математиков был по всему своему воспитанию типичным базельским бюргером, совершенно неспособным играть роль салонного философа, притом бюргером благочестивым и тем самым противником вольнодумства, особенно в его французском варианте, которому покровительствовал король Пруссии. Фридрих II пренебрежительно относился к математике, если только она не применялась к решению чисто практических задач. В сущности оба они не питали никакой взаимной симпатии, хотя и уживались по необходимости.

В Берлине Эйлеру пришлось вести очень большую организационную работу, а кроме того, выполнять разнообразные личные поручения короля. Только его необыкновенная работоспособность и рациональное распределение времени позволяли ему справляться со множеством возлагавшихся на него обязанностей и одновременно вести во все нарастающем темпе научные изыскания.

Как член директории Берлинской академии, фактически исполнявший во время частых отлучек Мопертюи функции президента, Эйлер занимал

ся строительством обсерватории и приобретением соответствующих приборов, руководил изготовлением и изданием карт, заказывал семена и саженцы для ботанического сада, ведал приемом, увольнением и пенсионным обеспечением служащих, а кроме того, изданием серии ежегодных календарей, доход от продажи которых составлял главную часть академического бюджета. Учитывая интересы короля, Эйлер перевел с английского лучшее в то время сочинение по баллистике, написанное Б. Робинсом и изданное в 1742 г. Немецкое издание «Новых начал артиллерии», вышедшее в 1745 г., Эйлер снабдил пояснениями и оригинальными приложениями, которые значительно увеличили объем и повысили ценность книги; все они были затем включены в новое английское издание этой книги и в ее французский перевод. Между прочим, Эйлер впервые встретился с вопросами баллистики еще в Петербурге, где в 1727 г. вместе с Д. Бернулли присутствовал при испытании артиллерийских орудий; в Архиве АН СССР долгое время хранилось его небольшое сочинение об этих опытах, напечатанное только в 1862 г.

По заданию короля Эйлеру пришлось заняться и гидротехникой, консультацией работ по нивелированию Финов-канала между реками Хафелем и Одером и по водоснабжению королевской резиденции в Потсдаме с ее многочисленными фонтанами, расположенными на различных уровнях. Ознакомившись в переписке с профессором математики в Геттингене и затем в Галле И. А. Зегнером с изобретенной им гидравлической машиной, простейшим случаем которой является известное школьникам реактивное «зегнерово колесо», Эйлер в 1750—1753 гг. внес в нее значительные инженерные усовершенствования и вместе с тем заложил основания теории гидравлических турбин. Со всем этим был связан большой цикл его теоретических работ по теории механизмов и машин, а главное по гидромеханике.

Вопросы механики жидкостей явились предметом исследований еще в древности; достаточно вспомнить закон Архимеда о телах, погруженных в жидкость. Новые успехи в механике жидкостей, сперва в гидростатике, а затем и в гидродинамике, в конечном счете обусловленные практическими задачами строительства каналов, плотин, насосов, водяных мельниц, навигации и т. д., были достигнуты в XVI—XVII вв. Стевиным, Галилеем, Торричелли, Паскалем, Ньютоном и др. Эйлер, как показывают его записные книжки, уже в 1727 г. приступил было к подготовке большого труда по гидравлике, но затем оставил это дело, чтобы не конкурировать с Д. Бернулли, уже значительно продвинувшимся в этом направлении и еще в Петербурге закончившим первый вариант большого трактата, второй вариант которого был напечатан в 1738 г. в Страсбурге под названием «Гидродинамики». В 30-е годы Эйлер также много занимался вопросами механики жидкостей как в теоретическом плане, так и с целью приложений, одним из плодов этих занятий явилась упоминавшаяся «Морская наука». Однако более глубокая разработка гидромеханики стала возможной только позднее, в берлинский период жизни Эйлера, когда он в конце 40-х годов, вслед за Даламбером, приступил к созданию аппарата теории уравнений в частных производных. Я еще вернусь к первым, решающим шагам, сделанным в теории упругости Даламбером и Эйлером; здесь же отмечу серию классических статей Эйлера 1757—1761 гг. по механике жидкостей, напечатанных и в Берлине, и в Петербурге. В этих

статьях положено начало современной теории равновесия и движения идеальной жидкости; в них содержатся уравнение неразрывности и общие дифференциальные уравнения как гидростатики, так и гидродинамики, по всей справедливости носящие имя Эйлера.

Не буду касаться другого крупного раздела математической физики, непосредственно примыкающего к гидромеханике, именно аэромеханики, в которую Эйлер также вскоре внес важный вклад, но хотя бы упомяну его исследования по небесной механике. В этих работах, в частности посвященных исследованию орбит Юпитера и Сатурна, премированных Парижской академией наук, содержатся и существенные математические результаты, по большей части относящиеся к интегрированию дифференциальных уравнений, разложениям в ряды (в частности, тригонометрические) и к численным методам анализа; эти результаты не входят в собственно математические публикации Эйлера. Отдельно следует напомнить о роли Эйлера в теории движения Луны, которое привлекло особое внимание ученого мира из-за расхождения между ее наблюдаемой орбитой и орбитой, рассчитанной Ньютоном на основании закона всемирного тяготения. Несогласие между наблюдениями и вычислениями было столь велико, что одно время Даламбер, Клеро и Эйлер полагали нужным внести поправки в закон всемирного тяготения. Когда в конце 1748 г. Клеро пришел к выводу, что расхождение объясняется недостаточной точностью основных расчетов, Эйлер посоветовал Петербургской академии наук объявить конкурс на лучшее сочинение по теории движения Луны. Одновременно он проверил и подтвердил выводы Клеро по собственному методу. Премированное Петербургской академией по отзыву Эйлера сочинение Клеро было издано в 1752 г., а сочинение Эйлера на ту же тему вышло в Берлине в 1753 г. Эйлер получил за него из Петербурга особое вознаграждение. Помимо того, Эйлеру еще выделили часть премии, присужденной английским парламентом за весьма точные лунные таблицы, составленные геттингенским астрономом И. Т. Майером, воспользовавшимся с согласия Эйлера его результатами. В те времена, да и много позднее лунные таблицы применялись для определения долготы в открытом море и таблицы Майера были включены в морские альманахи. Между прочим, сохранилась и опубликована очень содержательная переписка между обоими учеными.

Я отмечу еще два аспекта деятельности Эйлера в Берлине, непосредственно связанные с решением практических задач. Это, во-первых, расчеты, связанные с организацией государственных лотерей, служивших одним из источников пополнения прусской казны, и по проблемам страхования и демографии — здесь требовалось решение задач теории вероятностей и математической статистики. Много позднее пособие по страховому делу и устройству лотерей, снабженное таблицами, было подготовлено под руководством Эйлера в Петербурге его учеником Н. И. Фусом, имя которого не раз встретится далее; оно вышло из печати в 1776 г. Во-вторых, это были многолетние занятия оптикой. Согласно корпускулярной теории света и цветов Ньютона увеличение силы оптических приборов обязательно влечет за собой хроматическую абберацию, искажающую изображение предметов и ставящую, казалось, непреодолимую границу усовершенствованию телескопов-рефракторов, в отличие от рефлекторов. Исходя из собственной теории света, отличной и от теории Ньютона, и от

волновой теории Гюйгенса (но, правда, не удержавшейся в физике), Эйлер пришел к выводу, что в принципе возможны ахроматические линзы любой преломляющей силы, если изготавливать их из прозрачных материалов с различными оптическими характеристиками. Собственные инструменты Эйлера оказались в силу технических причин малоудачными, но вскоре последовали успешные опыты англичанина Дж. Доллонда, создавшего в 1758 г. ахроматические линзы большой силы из сплава кронгласа и флинтгласа. Это был решающий шаг вперед в технике изготовления телескопов и микроскопов. Эйлер произвел подробные расчеты различных диоптрических систем и итоги исследований в этой области изложил в трехтомной «Диоптрике», в основном подготовленной в Берлине, но законченной в Петербурге, где она и была опубликована в 1769—1771 гг. В Петербурге же под руководством Эйлера талантливый механик и конструктор И. П. Кулибин занялся изготовлением сильного микроскопа, а Н. И. Фус на основе только что названной «Диоптрики» составил подробную инструкцию для мастеров-оптиков, изданную в 1784 г.

Покидая Петербург, Эйлер договорился и о сохранении прочной связи с русской Академией в звании ее иностранного члена, связанном в те времена с выплатой значительной ежегодной пенсии, составлявшей 200 руб. в год. Разумеется, товарная ценность рубля за прошедшие два с половиной века сильно изменилась. Единого индекса цен за этот промежуток времени, кажется, не существует, но некоторое представление о сумме в 200 руб. можно составить, имея в виду, что в расчете на стоимость хлеба 1 руб. времен Екатерины II был равноценен приблизительно 8 руб. начала XX в. Эйлер обязывался завершить некоторые научные труды, начатые в России (о «Морской науке» уже говорилось), и присылать статьи для петербургских «Записок»; кроме того, он регулярно принимал на себя целый ряд поручений, вплоть до приобретения книг и научных инструментов. По существу Эйлер в Берлине был не столько иностранным членом Петербургской академии, сколько иногородним действительным членом и вместе с тем активным посредником между нею и Берлинской академией. О прочных контактах Эйлера с Россией свидетельствуют хотя бы три тома его переписки с сотрудниками Петербургской академии, содержащей около 800 писем, отправленных с обеих сторон за 25 лет, т. е. в среднем немногим менее трех писем ежемесячно. При этом во время семилетней войны переписка существенно сокращалась, но не прерывалась полностью. Письма посылались через лиц, проживавших в немецких государствах, не участвовавших в отличие от Пруссии в войне. Сохранилась, хотя и не полностью, переписка с М. В. Ломоносовым, труды которого по физике Эйлер высоко ценил и которого поддерживал, несмотря на прозрачные намеки этого не делать, исходившие от влиятельных врагов Ломоносова в администрации Петербургской академии.

Будучи в Берлине, Эйлер редактировал математический раздел петербургских «Записок», писал отзывы на посылавшиеся ему работы русских академических студентов и адъюнктов, составлял списки тем для международных конкурсов и отзывы на конкурсные сочинения (о конкурсе по теории движения Луны только что говорилось), сообщал новинки научной жизни в Германии и вообще в Западной Европе и т. д. По неоднократным просьбам руководства Академии в Петербурге Эйлер заботился и о подборе кандидатов на академические вакансии в ней, для которых тогда

в России все еще не хватало подходящих специалистов. Так, при его посредничестве были приглашены в 1754 г. выдающийся физик Ф. У. Т. Эпинус, в 1767 г. знаменитый физиолог К. Ф. Вольф и в 1768 г. астроном и географ Г. М. Ловиц. Важное значение имела длительная стажировка у Эйлера трех русских адъюнктов-математиков С. К. Котельникова, С. Я. Румовского и М. Софронова, которые вместе с его старшим сыном Иоганном-Альбрехтом значительно повысили под его руководством свою квалификацию в области высшей математики и механики и впоследствии стали в России видными деятелями науки и просвещения.

Научная продуктивность Эйлера достигает в это время высшего уровня по широте охвата проблем чистой и прикладной математики. В среднем он публикует по десять работ ежегодно, причем печатает их почти поровну в «Записках» Берлинской академии — на французском языке и в петербургских «Записках» — на латыни; на латыни же он выпускает в свет шесть больших монографий в восьми томах. Я уже говорил о его исследованиях по механике и для полноты картины должен назвать еще изданную в 1765 г. фундаментальную «Теорию движения твердых тел», являющуюся продолжением его «Механики» 1736 г., посвященной механике точки. С конца 40-х годов в соревновании с Даламбером и Д. Бернулли, а несколько спустя с Лагранжем резко возрастает интерес Эйлера к математической физике, которой предостояло в XIX—XX вв. великое будущее. Новые трудные проблемы естествознания потребовали громадной работы по совершенствованию анализа в многообразных связях не только между его разделами, но и с другими областями математики, как теория чисел, алгебра, дифференциальная геометрия. В круге занятий Эйлера оказываются новые главы дифференциального исчисления: дифференциальные свойства функций многих переменных, эллиптические интегралы с теоремой их сложения, специальные несобственные интегралы, важные классы обыкновенных дифференциальных уравнений, теория интегрирующего множителя и большое число типов уравнений с частными производными второго и высшего порядков, вариационное исчисление, численные методы и т. д.

Исторические взаимозависимости, вскользь мною отмеченные, редко раскрываются при изучении математики в университетах нашего времени. Ограничусь одним примером. Основная теорема алгебры была обнаружена в XVII в. в ходе естественного развития этой науки, но первые ее формулировки были неполны или неясны из-за отсутствия разработанного учения о комплексном числе. В XVIII в. и это учение и основная теорема алгебры стали необходимыми для решения задачи об интегрировании рациональных функций, к которой приводится интегрирование в конечном виде многих других типов функций. В разложимости всякого целого многочлена с действительными коэффициентами на действительные линейные и квадратичные множители в то время сомневался не один выдающийся математик: так было с Лейбницем, Николаем I Бернулли и Гольдбахом. Только Даламбер и Эйлер, независимо друг от друга, более глубоко изучили свойства поля комплексных чисел вида  $a + b\sqrt{-1}$  и около 1750 г. дали первые и притом различные доказательства основной теоремы алгебры, правда не совсем завершенные с нашей точки зрения, но принципиально верные.

Приведенный только что перечень занятий Эйлера, весьма далекий от



полноты, дает некоторое представление лишь о тех областях математики, которые обслуживали естествознание. Связь между так называемой чистой и прикладной математикой была в творчестве Эйлера непосредственной. Но математика для него представляла и глубокий самодовлеющий интерес. Чаще всего теоремы и методы, понадобившиеся ему для решения прикладных вопросов, становились исходными для упорной последующей чисто теоретической разработки и оказывались начальными звеньями новых теорий и даже целых дисциплин. В этом Эйлер глубоко отличался от таких своих современников, как Д. Бернулли, который, раз найдя математическое решение какой-либо задачи естественных наук, не стремился раскрыть все содержащиеся в этом решении возможности, хотя обладал выдающимся математическим дарованием. Нередко Бернулли ограничивался чисто физическими соображениями, находя их достаточными и даже отдавая им предпочтение перед точной математической трактовкой вопроса. Эйлер, занимаясь приложениями, оставался по преимуществу математиком; Бернулли, применяя математику в меру необходимости, оставался прежде всего физиком. Характерно, что наряду с перечисленными математическими науками Эйлер со все возрастающим увлечением занимался теорией чисел, проблемы которой более трех десятилетий обсуждал в переписке с Гольдбахом, а затем еще более десяти лет с Лагранжем. В Берлине он разрабатывал, в частности, диофантов анализ и теорию степенных вычетов. Первый толчок в этом направлении сообщило Эйлеру знакомство с открытиями Ферма.

К сожалению, время не позволяет мне остановиться на нескольких научных дискуссиях того времени, в которых участвовал Эйлер. Упомяну только две из них. Это, во-первых, долгий спор с Даламбером о свойствах логарифмов отрицательных чисел, бывший уже в начале XVIII в. предметом безрезультатной полемики между Лейбницем и И. Бернулли, обусловленной неясностями, присущими тогда самому понятию о логарифме. Лейбниц полагал, что логарифмы отрицательных чисел мнимые в каком-то неуточненном смысле этого слова, И. Бернулли, напротив, пытался доказать, что логарифм отрицательного числа совпадает с действительным логарифмом его модуля. Даламбер придумывал все новые и новые доводы в пользу мнения Бернулли. Эйлер впервые дал современное определение логарифмической функции и, опираясь на учение о комплексных числах, построил полную теорию этой функции в комплексной области.

Во-вторых, я назову знаменитую дискуссию о природе произвольных функций, входящих в интегралы уравнений математической физики, в которой приняли участие Эйлер, Даламбер, Д. Бернулли, Лагранж — вообще чуть ли не все выдающиеся математики второй половины XVIII в. и которая оказала огромное влияние на прогресс не только самой математической физики, но и анализа в целом. Этот спор часто называют спором о колеблющейся струне, так как дискуссия началась в 1749 г. с анализа предложенного Даламбером решения задачи о малых поперечных колебаниях идеальной струны при заданных граничных и начальных условиях, позволяющих определить те две произвольные функции, суммой которых выражается общее решение дифференциального уравнения задачи. Не входя в детали, скажу, что Даламбер наложил на начальные условия, т. е. на функции, выражающие исходные форму струны и распределение скоростей ее точек, жесткие ограничения в отношении их дифференцируемости,

необходимые, по его мнению, для возможности аналитического решения задачи. Эйлер, учитывая физические особенности задачи и привлекая геометрические соображения, нашел ограничения Даламбера неоправданно стеснительными и до некоторой степени превосхитил идею решения задачи при наличии тех или иных негладкостей начальных функций — идею, получившую глубокое развитие и строгое обоснование уже в XX в. в теории обобщенных функций С. Л. Соболева (1935), подробно развитой затем Л. Шварцем под названием «теории распределений». Разумеется, трактовка вопроса Эйлером не была удовлетворительной с точки зрения науки XX в. и даже его собственного времени. Тем более восхищают смелость и прозорливость его математической мысли. Добавлю, что итог спора о струне в рамках XVIII столетия был подведен интересным сочинением французского ученого Л. Арбогаста о природе произвольных функций, входящих в решения уравнений с частными производными, премированным на специальном конкурсе Петербургской академии наук и напечатанном по-французски в Петербурге в 1791 г.

Новый мощный метод математической физики — разложение решения по собственным функциям соответствующих краевых задач предложил в начале XIX в. Ж. Б. Фурье в своей теории теплоты, возродив идею, выдвинутую в частном случае Д. Бернулли, считавшим возможным представить все решения задачи о струне суммами тригонометрических рядов по синусам и косинусам. В пользу этого утверждения Бернулли мог, однако, выдвинуть только физические аналоги, которые ни Эйлер, ни Даламбер не считали доказательными, и которые только Фурье сумел облечь в надлежащую аналитическую форму, что повлекло за собой интенсивное развитие теории тригонометрических рядов и в прямой связи с этим теории интеграла, а потом общей теории функции действительного переменного.

Я только что говорил об удивительной смелости и прозорливости мысли Эйлера. Другим примером этого является разработанная им в середине XVIII в. концепция суммирования бесконечных рядов. Различение сходящихся рядов от расходящихся было тогда общеизвестно и многие математики XVII в. считали допустимым применение только первых. Эйлер, получивший с помощью расходящихся рядов некоторые замечательные результаты, например, в теории дзета-функции, считал нецелесообразным исключить такие ряды из обихода и разработал в той мере, в какой позволяли средства тогдашнего анализа, оригинальную теорию, покоящуюся на некотором обобщении понятия суммы ряда и особом методе преобразования рядов, позволяющем при определенных условиях вычислять такие обобщенные суммы, а также улучшать сходимость рядов. В XIX в. применение расходящихся рядов было подвергнуто критике и отвергнуто несколькими выдающимися математиками, среди них Н. Х. Абелем. В порядок дня стала задача построения общей теории сходимости рядов, ранее отсутствовавшей. Но после того, как эта теория была построена О. Коши и его преемниками, а затем высокого развития достигла теория аналитических функций, идеи Эйлера получили недостававшее им точное обоснование и вошли в состав общей теории суммирования рядов, успешно развивающейся на протяжении последних ста лет.

Огромные накопленные к середине XVIII в. математические знания, прежде всего в области анализа, нуждались в систематизации, заполне-

нии еще наличных пробелов, уточнении основных понятий и т. д. Эйлер взял на себя создание серии монографий, подводящих итог всех трудов в этой области с тем, чтобы облегчить другим дальнейшее движение вперед. Такой замысел созрел у Эйлера годами, и еще в Петербурге он приступил к его осуществлению, но публикация такой серии началась в берлинский период, а завершилась только по возвращении в Россию.

Покидая Петербург, Эйлер обязался закончить некое сочинение, в официальных бумагах называемое «Высшей алгеброй». Алгеброй в Берлине Эйлер действительно занимался, однако здесь, как это следует из различных документов, речь шла об обширном труде по математическому анализу. В 1744 г. Эйлер опубликовал в Швейцарии «Метод отыскания кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума». Это сочинение содержало первый метод отыскания экстремумов некоторых классов определенных интегралов, значения которых зависят от выбора неизвестной входящей в них функции (теперь их называют функционалами), путем сведения задачи к интегрированию дифференциальных уравнений. Примечательно, что само это сведение Эйлер производил с помощью одного из так называемых теперь прямых методов, получивших развитие только в XX в., и позволяющих обходиться без интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений. Несколько задач такого рода были поставлены и решены Иоганном и Якобом Бернулли, но оба они были очень далеки от общей трактовки вопроса, принадлежащей всецело Эйлеру.

В приложениях к названной книге Эйлер решил несколько задач механики, уточнив попутно формулировку принципа наименьшего действия, весьма частную у Мопертюи; здесь же он вывел формулу критической нагрузки колонн, известную под его именем в учении о сопротивлении материалов. В середине 50-х годов молодой Лагранж, введя понятие и символ вариации, предложил новое формально аналитическое изложение вопроса, свободное от геометрических соображений, игравших важную роль в конструкции Эйлера, и легко распространяемое на более широкие классы функционалов. Эйлер, со своей стороны, дал общедоступное изложение метода Лагранжа. Так были заложены классические основы исчисления, которое по примеру Эйлера стали называть вариационным.

Одновременно с этой книгой Эйлер готовил многотомный труд, который должен был охватить все разделы математического анализа. В год издания «Метода отыскания кривых линий» он отправил, опять-таки в Швейцарию, первую часть этого труда — двухтомное «Введение в анализ бесконечных», напечатанное в 1748 г. Первый том содержал чисто аналитическую трактовку начал анализа как общего учения о функциях, развернутую настолько, насколько это было возможно в то время без применения дифференциального исчисления. Главным средством исследования в этом являются бесконечные степенные ряды (а также бесконечные произведения и суммы простых дробей). Необыкновенно изящное и вместе с тем доходчивое изложение теории элементарных функций, впервые систематически рассматриваемых не только для действительных, но и для комплексных значений независимого переменного (кроме логарифмической функции, которой Эйлер посвятил отдельную работу и несколько беглых замечаний во II томе «Введения»), и красота примеров выделяют эту книгу во всей литературе по математическому анализу. Ее можно

и сегодня, два с половиной века спустя, рекомендовать для увлекательного чтения начинающим любителям математики. Второй том «Введения» — геометрический, в основном он посвящен кривым 2-го и 3-го порядка и первой подробной теории поверхностей 2-го порядка с некоторыми экскурсами в область трансцендентных плоских кривых. Через несколько лет последовало фундаментальное «Дифференциальное исчисление», изданное в 1755 г. в Берлине на средства Петербургской академии. В Берлине же была подготовлена большая часть рукописи трехтомного «Интегрального исчисления», завершено и издано в Петербурге в 1768—1770 гг. Коротко описать все богатство содержания этих обоих сочинений невозможно. Нужно пояснить только, что под интегральным исчислением Эйлер понимал не только вычисление интегралов в узком смысле слова, которое занимает лишь половину первого тома трехтомника 1768—1770 гг., но и решение дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными; в этом сочинении он дал также новое, более совершенное изложение вариационного исчисления. Геометрические приложения в обоих этих трудах отсутствуют; они содержатся в многочисленных его статьях.

Эта шеститомная трилогия Эйлера сыграла исключительно большую роль в развитии анализа и математики в целом. Уже она одна в полной мере оправдывает слова Лапласа: «Читайте, читайте Эйлера, он учитель всех нас». Монографии Эйлера были широко использованы авторами практически всех руководств последующего времени, вплоть до наших дней.

Семейные обстоятельства жизни Эйлера и его семьи складывались в Берлине вполне благоприятно. В 1753 г. он приобрел в Шарлоттенбурге усадьбу, хозяйкой которой стала приехавшая к нему из Базеля мать. Сын Иоганн-Альбрехт был избран членом Берлинской академии наук. Младший сын Христофор, родившийся в Берлине, стал офицером прусской армии. Многие премии Парижской академии наук Эйлер получил как раз в этот период жизни, а в 1755 г. она избрала его своим иностранным членом. Лондонское королевское общество избрало его еще ранее — в 1746 г. С Петербургской академией наук отношения были налажены; в Берлинской Эйлер пользовался высоким научным авторитетом, в том числе в управлении ею, годами замещая Мопертюи. Даже деловые отношения с королем, более всего озабоченным военными операциями, были удовлетворительными.

Однако со смертью Мопертюи ситуация начинает меняться к худшему. После отказа Даламбера занять президентский пост в Берлинской академии король берет управление академией на себя и с 1762 г. все чаще и больше вмешивается в ее дела, в том числе в назначение новых членов, отчетливо проявляя свои профранцузские личные симпатии. Отношения между Эйлером и королем теперь, с окончанием семилетней войны, уже постоянно проживающим в своей резиденции близ Берлина, все более ухудшаются. В 1763 г. Эйлер предусмотрительно продает Шарлоттенбургскую усадьбу, укрепляет контакты с Петербургской академией и представителями русского правительства. Рассматривая финансовые дела Берлинской академии, подведомственные Эйлеру, король выражает неудовлетворенность их состоянием и создает специальную комиссию для их проверки; по мнению короля, продажа календарей могла бы приносить большие доходы. Все это угнетает и оскорбляет Эйлера.

В 1766 г. разногласия ученого с королем приводят к тому, что Эйлер требует отставки. Он идет на это тем легче, что ему и раньше, а теперь все чаще предлагают вернуться в Петербург. Король нехотя лишился столь полезного консультанта и организатора, но должен был отпустить Эйлера, за спиной которого стояло русское правительство. 9 июня 1766 г. Эйлер со всей семьей, кроме младшего сына, служившего в армии, выехал в Петербург, куда прибыл 28 июня. Через некоторое время король отпустил и его сына Христофора. А в Берлинской академии место Эйлера занял Лагранж, который, впрочем, в 1787 г. навсегда переехал в Париж.

Эйлер вернулся в Россию в возрасте 60 лет, обогащенный новым житейским опытом, с большим числом еще неизданных или незаконченных трудов и богатым запасом творческих сил. В Петербурге он был принят с радостью и почетом, какого заслуживал его гений. Почти сразу же по приезде он был принят императрицей Екатериной II. Вместе с сыном Иоганном-Альбрехтом он был включен в консультативный совет при тогдашнем «директоре» Петербургской академии наук, графе В. Г. Орлове, выполнявшем функции официального президента графа К. Г. Разумовского, удалившегося от двора. Когда несколько лет спустя из-за некоторых несогласий с Орловым оба Эйлера вышли из состава совета при нем, это совершенно не отразилось на их положении в целом: Иоганн-Альбрехт остается на посту конференц-секретаря, на который назначается в 1769 г. Вообще начиная с этого времени семья Эйлера в течение почти ста лет играла большую роль в руководстве деятельностью Академией в целом. После кончины Иоганна-Альбрехта Эйлера в 1800 г. пост конференц-секретаря, т. е. неперменного секретаря Академии, перешел к ученику Эйлера Н. И. Фусу, зятю Иоганна-Альбрехта, а после кончины Н. И. Фуса в 1825 г. — к его сыну, математику П. Н. Фусу, исполнявшему эту должность опять-таки до смерти, последовавшей в 1855 г.

Русское правительство неизменно оказывало Эйлеру щедрую финансовую поддержку. Для семьи Эйлера, насчитывавшей 16 человек, был выстроен большой дом на набережной Невы, неподалеку от помещения Академии наук. Когда этот дом весной 1771 г. сгорел, дом возвели заново, и он в несколько перестроенном виде сохранился до наших дней. Но два тяжелых события омрачили последние 17 лет жизни ученого. Осенью 1766 г. он почти полностью потерял зрение на оставшийся здоровым левый глаз. Теперь он мог лишь различать крупные предметы и читать большие буквы, написанные мелом на черной доске. Это, к счастью, мало повлияло на его творческую активность, но изменило форму его работы. Он готовил теперь труды с помощью секретарей, должности которых исполняли квалифицированные специалисты, способные под его общим руководством выполнять необходимые вычисления и редактировать диктуемые им тексты. Такими секретарями были сперва его сын Иоганн-Альбрехт, затем физик-академик Л. Ю. Крафт, сын его коллеги 30-х годов, талантливый математик А. И. Лексель, а затем уже упоминавшиеся ученики М. Е. Головин и Н. И. Фус, приглашенный еще юношей из Базеля по рекомендации Д. Бернулли. Это позволяло Эйлеру при неизменной свежести ума и полной сохранности его поразительной памяти интенсивно работать до конца дней. Он только резко сократил свою переписку, в частности с Лагранжем, так как не мог сам перечитывать и проверять встречавшиеся в письмах последнего сложные рассуждения и выкладки.



*Дом, где жил Л. Эйлер в 1766—1783 гг. (реконструкция)*



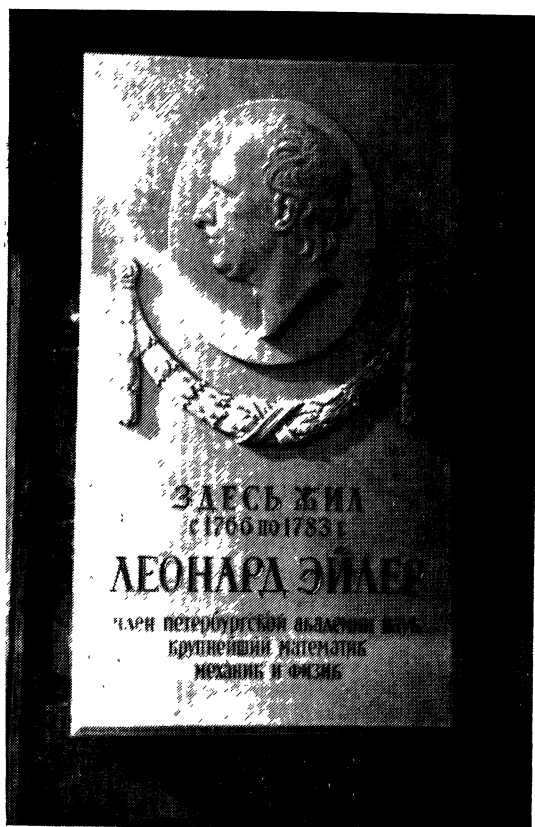
*Дом Л. Эйлера (современный вид)  
Набережная Лейтенанта Шмидта, д. 5. Фотография 1956 г.*

Другим горестным событием явилась кончина в 1773 г. жены, с которой он прожил почти сорок лет. Но большая семья нуждалась в хозяйке, и три года спустя Эйлер вторично женился на Саломее-Абигайль Гзелль, единственной сестре его первой супруги. Вообще же семья жила в полном довольстве. Старший сын, квалифицированный, хотя и не крупный ученый, занял, как говорилось, ответственный пост в Академии. Второй сын Карл стал преуспевающим врачом, а младший, Христофор, был зачислен в русскую армию и многие годы работал директором оружейного завода в Сестрорецке, близ Петербурга, закончив свою карьеру в генеральском чине. Сыновья Эйлера приняли русское подданство (сам Эйлер всю жизнь оставался гражданином Базеля); некоторые прямые потомки Эйлера живут и сейчас в Ленинграде и Москве. Эйлер долгое время сохранял крепкое здоровье и работоспособность. Только незадолго до кончины начал страдать головокружениями, а 18 сентября 1783 г. скоропостижно скончался от инсульта. 22 сентября в Общем собрании Академии с речью памяти Эйлера выступил старейший академик Я. Штелин, а 3 ноября Н. И. Фус произнес похвальное слово, отличающееся высокими достоинствами. Наконец, великому ученому была посмертно оказана особая почесть: 25 января 1785 г. его бюст, изготовленный незадолго перед тем известным французским скульптором Д. Рашеттом, был торжественно установлен на постаменте в большом конференц-зале Академии. Теперь этот бюст украшает помещение Президиума Академии наук СССР в Москве.

Эйлера похоронили на лютеранском Смоленском кладбище, где в 1837 г. Петербургская академия наук воздвигла массивный памятник с надписью на латыни: «Леонарду Эйлеру — Петербургская академия». Когда в 1957 г. отмечалось 250-летие со дня рождения Эйлера, могила и памятник были перенесены в Ленинградский некрополь, по соседству с местом погребения М. В. Ломоносова, а на доме Эйлера была установлена памятная мраморная доска.

На второй петербургский период жизни Эйлера, с 1767 по 1783 г., приходится публикация 250 работ, в том числе нескольких больших книг, частью подготовленных в Берлине и теперь дополненных и отредактированных. Но в академических «Записках» и других изданиях не успевали печатать всю научную продукцию Эйлера. После его смерти осталось еще около 300 ненапечатанных статей, из которых около 200 успел опубликовать в академических «Записках» Н. И. Фус, а еще около 50 в двух томах «Посмертных математических и физических сочинений» Эйлера, изданных в 1862 г., П. Н. Фус. Многие работы этого периода открывали новые перспективы исследований в области математики и механики, получившие развитие только в XIX в.; некоторые работы, долгое время не замеченные потомством, содержали результаты, вновь открытые позднее. Лишь, для примера, укажу чисто аналитический вывод упомянутых «уравнений Коши—Римана», вычисление целого ряда специальных определенных интегралов с помощью функций комплексного переменного (метод, к которому пришел одновременно Лаплас) и еще элементарный вывод формул так называемых коэффициентов Фурье в теории тригонометрических рядов. Любопытно, что Фурье их вывел заново и по-другому, не зная, очевидно, о работе Эйлера.

Я укажу теперь некоторые крупные монографии, опубликованные Эйлером в последний период его жизни, кроме уже упомянутых ранее трех



*Мемориальная доска,  
установленная  
на доме, в котором  
жил Л. Эйлер  
Барельеф работы  
Ю. Клюгге.  
Мрамор, 1957 г.*

*Надгробие Л. Эйлера  
в Ленинградском  
некрополе*





томов «Интегрального исчисления» и трех же томов «Диоптрики». В 1768—1769 гг. из печати вышло в русском переводе двухтомное «Введение в алгебру» (в немецком оригинале изданное в 1770 г.); Эйлер целиком продиктовал его прислуживавшему юноше немецкого происхождения. Это оригинальное изложение алгебры, с одной стороны, в значительной степени определило — разумеется, в сокращении — содержание всех последующих русских гимназических учебников алгебры, но, кроме того, Эйлер привел в нем многие свои открытия в теории неопределенных уравнений, далеко выходящие за пределы гимназического курса. Французское издание этого труда (переведенное одним из членов семьи Бернулли), вышедшее с ценными дополнениями Лагранжа в 1774 г. в Жене, явилось крупным шагом вперед в развитии диофантова анализа. Почти одновременно в 1768—1772 гг. вышли по-французски три тома «Писем к одной немецкой принцессе по разным вопросам физики и философии» (1768—1772), тогда же появившихся и в русском переводе С. Я. Румовского. «Письма» стали наиболее читаемым широкими кругами произведением Эйлера; они выдержали десятки изданий на французском, английском, немецком, русском, голландском, шведском, датском, испанском и итальянском языках. Эти «Письма», написанные в начале 60-х годов, представляли собой популярное изложение основных вопросов физики, философии, логики, этики, богословия и т. д. В научном отношении это популярное сочинение соответствовало для своего времени самым высоким требованиям. Вместе с тем оно отражало и глубокую религиозность Эйлера и его отношение к некоторым основным философским системам XVII—XVIII вв. Как известно, он был противником монадологии Лейбница. В «Письмах» он выразил также отрицательное отношение к субъективному идеализму и солипсизму и занял промежуточную позицию в спорах между сторонниками натурфилософии Декарта и Ньютона (во многом, впрочем, будучи ближе к Декарту). Несомненно, что «Письма» оказали влияние на Канта в первом периоде его философского творчества. Я бы не решился сказать, что Эйлер выработал какую-либо целостную философскую систему, впрочем о «Письмах к принцессе» говорится на данной конференции в докладах А. Т. Григорьяна и В. С. Кирсанова, а также К. Грау.

К перечню больших монографий следует добавить «Теорию движения Луны, разработанную по новому методу», напечатанную в 1772 г. Этот труд имел еще большее значение в развитии небесной механики, чем посвященная тому же вопросу книга 1753 г. Подготовили его к печати под общим руководством Эйлера три академика: его старший сын Иоганн-Альбрехт, Крафт и Лексель, которым пришлось провести очень трудоемкие вычисления.

В заключение я постараюсь охарактеризовать в общих чертах творчество Эйлера, которое поражает всех, знакомых с ним, своим объемом, разнообразием и оригинальностью. Недаром Даламбер как-то назвал его «человеком-дьяволом». С 1911 г. Швейцарское общество естествоиспытателей начало издавать полное собрание его сочинений, за прошедшие 70 с лишним лет вышло 69 больших томов трех серий издания «Труды по математике», «Труды по механике и астрономии» и «Труды по физике и другие» и остается издать еще четыре тома. Между прочим, два тома первой серии вышли под редакцией академика А. М. Ляпунова. В 1975 г. началось издание четвертой серии, в подготовке которого участвует Академия наук

СССР. 4-я серия делится на две группы. Из восьми томов первой группы, содержащей научную переписку Эйлера, пока издано три, еще один печатается и завершается подготовка к печати еще одного. Во второй группе должны быть помещены в пяти или шести томах неопубликованные научные рукописи и фрагменты: эта работа находится в начальной стадии и продлится ряд лет.

Вряд ли хоть один математик или физик мира опубликовал столько работ, сколько Эйлер, но не менее поражает широта диапазона его творчества. Оно охватило буквально все разделы современной ему математики и математического естествознания, а также многие проблемы техники, философии и даже теологии. Если считать по томам, которые, впрочем, иногда имеют смешанный характер, то на долю математики и механики с астрономией приходится почти по 43%, а всего издано 86%. Необходимо, однако, учесть, что труды Эйлера по механике и астрономии полны решениями дифференциальных уравнений, разложениями функций в сходящиеся или асимптотические бесконечные ряды и т. п. и очень часто содержат совершенно оригинальные математические результаты, не выделенные в самостоятельные работы.

Таким образом, при всем тематическом разнообразии исследований Эйлер всегда был прежде всего математиком. Академик А. Н. Крылов полвека назад отметил, что в сущности Эйлер сделал свою механику из науки физической наукой математической. Следуя Эйлеру, Лагранж в 1787 г. заявил, что механика стала новой отраслью анализа, а Фурье в 1822 г. — что анализ столь же обширен, как сама природа.

Естественно, что в большинстве работ по математике Эйлер выступал как аналитик. В рамках так называемой чистой математики труды по анализу занимают около 60%, далее следует геометрия, преимущественно дифференциальная 17%, алгебра, комбинаторика и теория вероятностей 13% и, наконец, теория чисел 10%. Приведенные данные, конечно приближенные, отражают органическую связь математического творчества Эйлера с науками о природе. К созданию многих методов его привели поиски решения поддающихся математической формулировке задач естествознания. Но в том-то и состояла особенность его математического гения, что он не ограничивался решением отдельных конкретных задач, прикладных или чисто математических, но, постоянно возвращаясь к дальнейшему углубленному и обобщенному исследованию вопроса, нередко создавал таким образом полноценные математические теории. На этом пути он не только гигантски расширил рамки математического анализа Ньютона, Лейбница, старших братьев Бернулли, но и создал новые отрасли анализа — вариационное исчисление, начала теории функций комплексного переменного, важнейшие части теории специальных функций, целую систему приемов интегрирования дифференциальных уравнений и т. д. Доказательства Эйлера в смысле строгости не превосходили возможностей XVIII столетия. Но его отказ от чрезмерного ригоризма, за который его нередко упрекали, особенно в первой половине XIX в., явился исторически оправданным. От принципиальных ошибок его уберегала интуиция, а многие смелые идеи, как, например, изобретенные им методы суммирования расходящихся рядов, смогли быть должным образом оценены и развиты на новой, более совершенной и строгой основе только в конце про-

шлого и начале настоящего столетия. И было бы глубокой ошибкой думать, что одни лишь прикладные вопросы служили источником открытий Эйлера; очень многие идеи его возникали в ходе размышлений над проблемами самой чистой математики, начиная с введения им таких важных классов специальных функций, как функции бэта, гамма и дзета, и кончая всеми проблемами теории чисел, которой он неотступно занимался с начала 30-х годов и до конца жизни.

Отношение Эйлера к теории чисел, быть может, особенно убедительно свидетельствует о поистине математическом стиле его мышления. После гениальных прозрений П. Ферма теория чисел долгие десятилетия оставалась в загоне. Она не интересовала таких выдающихся ученых, как Д. Бернулли, А. Клеро, Ж. Даламбер, да и большинство современников Эйлера, который, по выражению П. Л. Чебышева, впервые создал теорию чисел как науку. Конечно, теория чисел привлекала Эйлера красотой и вместе с тем трудностью многих ее теорем, столь просто формулируемых и вместе с тем требующих для своего открытия острой наблюдательности, а для своего решения и доказательства чрезвычайно тонких средств. Но главное было в том, что Эйлер сознавал глубокую органическую зависимость всех частей математики друг от друга. Он воспринимал математику как единое целое, неотъемлемой частью которого является теория чисел, и в продвижении математики по всему фронту видел предпосылку ее скорейшего прогресса.

К типологии математиков можно подходить с различных точек зрения. В частности, всегда были математики отчетливо выраженного прикладного направления, как Х. Гюйгенс или Ньютон, или уже упомянутые Д. Бернулли, Клеро и Даламбер, или Ж. Б. Фурье и С. Д. Пуассон, М. В. Остроградский и В. А. Стеклов и т. д. С другой стороны, издавна существует традиция «чистой» математики, яркими представителями которой являлись Н. Абель и Э. Галуа, скончавшиеся, правда, в юности, Б. Больцано, позднее Р. Дедекинд и Г. Кантор и Л. Брауер, Е. И. Золотарев и И. М. Виноградов, Н. Н. Лузин и П. С. Александров. Эйлер принадлежал к типу математиков, органически сочетавшему обе тенденции, имманентно математическую и прикладную, представителями которой были в древности Архимед, а в последние столетия Ж. Л. Лагранж, К. Ф. Гаусс, О. Коши, Б. Риман, П. Л. Чебышев, А. Пуанкаре, Д. Гильберт и др. Вероятно, следовало бы особо выделить математиков философского склада мысли, таких, как Р. Декарт и Г. В. Лейбниц и некоторых из только что названных; я бы отнес к ним и Н. И. Лобачевского.

Следует добавить еще несколько слов об отношениях Эйлера с современниками. Как правило, если не считать нескольких острых дискуссий, он был к другим ученым неизменно благожелателен и никогда не давал чувствовать своего превосходства. Он не завидовал тем, кто его опережал в каком-либо открытии и — если употребить слова, сказанные ранее Б. Фонтенелем о Лейбнице, — радовался, наблюдая, как в чужих садах расцветают растения, семена которых он доставил. Общий учитель, он охотно до поздних лет учился у других и в своих трудах нередко излагал их открытия в более удобной и доступной форме. Но, разумеется, в целом он неизмеримо более давал другим, чем брал у них. Влияние его отразилось на творчестве многих поколений математиков, а особенно близ-

кой по духу оказалась основанная П. Л. Чебышевым Петербургская математическая школа второй половины XIX и первой четверти XX в. Как выразился несколько лет назад ныне покойный Б. Н. Делоне, бывший активным участником Эйлеровских дней в 1957 г., в творчестве только что названной школы руководящим был принцип Эйлера—Чебышева: отправляясь от трудной математической задачи, нередко поставленной другой наукой или техникой, строить большие и глубокие математические теории, а решения математических задач всегда доводить до требуемого практикой числового результата.

Я хотел бы закончить словами, произнесенными 200 лет назад Н. И. Фусом в Собрании Петербургской академии наук, посвященном памяти только что скончавшегося Эйлера: «Таковы были труды г. Эйлера, таковы его права на бессмертие. Его имя сможет погибнуть только вместе с самой наукой». И я добавлю: да не совершится это никогда!

# ЭЙЛЕР — ЧЛЕН ПЕТЕРБУРГСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК, ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ И ПОЧЕТНЫЙ

Ю. Х. КОПЕЛЕВИЧ

Совершенно естественно, что торжественное собрание, посвященное юбилею Леонарда Эйлера, проводится не только в Москве, ставшей с 1934 г. резиденцией Академии наук СССР, но и в Ленинграде, с которым была связана вся его жизнь как ученого на протяжении 56 лет, от первых самостоятельных шагов в науке до последнего вздоха. Сюда, в Петербургскую академию наук, он прибыл в 1727 г. почти безвестным двадцатилетним юношей и здесь за немногие годы стал тем великим Эйлером, имя которого приобрело широкую известность во всем ученом мире.

Тема «Эйлер и Петербургская академия наук» проходит через все биографии Эйлера, почти через все труды по истории нашей Академии XVIII в. За последнее 25-летие, прошедшее после празднования 250-летнего эйлеровского юбилея, введено в оборот много новых материалов, освещающих эту тему. Усилиями советских архивистов и историков науки при участии исследователей ГДР и Швейцарии изучено, описано и частично опубликовано более тысячи документов и писем, в той или иной мере раскрывающих нам судьбу Эйлера в тесной связи с историей Петербургской академии наук его времени [1]. Более обстоятельно исследована также ранняя история нашей Академии, ее возникновение и становление как одного из ведущих научных объединений всего мира. Все это позволяет нам сегодня несколько яснее, чем прежде, увидеть связь между формированием Эйлера как выдающегося ученого и условиями, в которых происходило это формирование.

Уже не раз цитировались слова Эйлера из его письма в Петербург, написанного из Берлина 18 ноября 1749 г., т. е. уже после восьмилетнего пребывания его в Германии: «...Я и все остальные, имевшие счастье служить в Российской императорской академии, должны признать, что всем, чем мы являемся, мы обязаны тем благоприятным условиям, в каких мы там находились. Ибо что касается лично меня, то не будь этого счастливого случая, я был бы вынужден посвятить себя какому-нибудь другому занятию, в котором я по всей вероятности стал бы только кропотливым. Когда его королевское величество [т. е. Фридрих II. — Ю. К.] недавно спросил меня, где я научился тому, что знаю, я ответил в соответствии с истиной, что всем обязан своему пребыванию в Петербургской академии» [2]. Сделаем попытку раскрыть реальное значение этих слов.

Историю переезда в 1725 г. в Петербург братьев Николая II и Даниила Бернулли, которые вскоре исхлопотали приглашение в Академию своему младшему товарищу, ученику их отца Леонарду Эйлеру, оказавшемуся не у дел у себя на родине в Базеле, можно было бы рассматривать как цепь случайностей. Однако из анализа обширной переписки периода создания Академии [3] можно заключить, что при том размахе, с каким был организован подбор ученых для будущей Академии, когда к поиску

подходящих кандидатур были привлечены авторитетнейшие ученые Европы и был взят курс на комплектование нового учреждения именно из молодых, но многообещающих кадров, было не столь уж случайным, что юные сыновья знаменитого Иоганна I Бернулли, не нашедшие применения своим силам в Швейцарии, попали в орбиту этих поисков.

Май 1727 г., когда Эйлер прибыл в Петербург, пожалуй, был последним месяцем того относительно счастливого времени, какое переживала молодая Академия в начале своего существования. Императрица Екатерина I осыпала Академию, детище ее супруга Петра Великого, всяческими милостями. Недаром Христиан Вольф, один из патриархов европейской науки этого времени, узнав о предстоящей поездке Эйлера в Россию, напутствовал его словами, что он едет в «рай для ученых» [4]. На берегу Невы, напротив Адмиралтейства, для Академии достраивались два больших здания — Кунсткамера с библиотекой, анатомическим театром и обсерваторией и рядом с ней отданный Академии дворец, строился он для вдовствующей супруги Ивана V, единокровного брата Петра и до 1696 г. его номинального соправителя, царицы Прасковьи Федоровны, предназначенный для собраний и других служб. Полным ходом шли научные заседания, читались публичные лекции. С большой торжественностью проводились публичные собрания Академии в присутствии высшей знати, а августовское собрание 1726 г. посетила сама императрица с дочерьми — таким вниманием едва ли могла в то время похвастаться какая-либо из европейских академий. Оборудовалась академическая типография, которая уже выпустила свои первые издания. Президент Академии Лаврентий Блюментрост, лейбмедик императрицы, пользовался большим влиянием при дворе и не раз употребил это влияние в интересах Академии. Был составлен текст регламента Академии, который должен был гарантировать новому учреждению и его членам различные привилегии. Сохранившиеся письма академиков этого времени, написанные из Петербурга их прежним коллегам, исполнены самых радужных надежд [5]. Словом, в эти первые годы наилучшим образом проявились все преимущества, которые были заложены в петровском замысле организации Академии, но еще не дали о себе знать опасности, коренившиеся в слишком большой зависимости научной корпорации от прихотей и интриг императорского двора.

Когда Эйлер прибыл в Петербург, город был в трауре и смятении. За неделю до того скончалась императрица [6]. Вокруг малолетнего императора Петра II обострялась борьба враждующих группировок. Через полгода двор переехал в Москву, со двором уехал и Блюментрост, туда же вскоре отправился и конференц-секретарь Академии Христиан Гольдбах, выполнявший обязанности наставника при императоре и его сестре. Таким образом Академия была обезглавлена. Полновластным распорядителем в ней остался ее библиотекарь И. Д. Шумахер, изворотливый и энергичный администратор. В свое время он пользовался большим доверием Петра I и вместе с Блюментростом деятельно помогал в создании Академии, а теперь он искусно обращал к своей выгоде то обстоятельство, что академики плохо знали русскую государственную систему и оказались в зависимости от него, уже давно жившего в России и знакомого с ее порядками. Академия не имела Регламента — Екатерина I так и не успела его утвердить, — положение ее было шатким, Шумахер рассчитывал укрепить ее позиции за счет расширения вспомогательных учреждений — типогра-

фии, инструментальных и художественных мастерских, что при ограниченности академических финансов создавало дополнительные трудности и вызывало недовольство профессоров, в особенности старших. Разрастание академического хозяйства, необходимость постоянно обращаться в различные государственные ведомства породили и в самой Академии так называемую Канцелярию, административное учреждение, в котором безраздельно хозяйничал Шумахер. Профессора же не желали признавать власти Канцелярии и сопротивлялись насаждаемым ею порядкам. Положение мало изменилось с вступлением на престол в 1730 г. Анны Иоанновны и с возвращением двора в 1732 г. в Петербург. Блюментрост, вернувшись в столицу, фактически не управлял больше Академией, а вскоре вовсе был отстранен от президентства. Улучшение наступило лишь с назначением в октябре 1734 г. президентом И. А. Корфа. Пять с половиной лет Корф исполнял свою должность с большим рвением, лично вел заседания академической Конференции, осуществил ряд полезных организационных преобразований, но и он не смог добиться утверждения штата Академии и стабилизации ее финансового положения. Кое-как удавалось сводить концы с концами за счет единовременных субсидий от императрицы. Не удалось также обуздать бюрократического рвения Шумахера и его Канцелярии. Процветавший при дворе Анны Иоанновны фаворитизм, власть и смена временщиков, политическая неустойчивость, эстетственно, тоже не способствовали нормальной работе научного учреждения.

Все это, казалось бы, находится в противоречии с высокой оценкой, данной Эйлером тем условиям, в которых начиналась его научная карьера. Однако именно судьба Эйлера свидетельствует о том, что все названные выше обстоятельства не играли все же решающей роли, ибо более существенным для научного творчества оказались позитивные стороны организации Академии и того положения, в котором находились ее члены. Это были прежде всего общие черты академии как новой формы научного объединения, а затем и то воплощение, которое эти черты получили в новаторских замыслах Петра I и в конкретных условиях, создавшихся при его преемниках.

На первое место среди этих черт можно поставить характер академического собрания как научного коллектива. Наличие такого коллектива было главным, что отличало исследовательскую работу в Петербургской и других академиях от труда профессоров западно-европейских университетов, действовавших обычно в одиночку. Хотя по задуманному Петром I штату Академии она включала одиннадцать специальностей, по каждой — один академик или профессор (в начальный период истории Академии больше было в ходу второе из этих названий), на деле же большинство из первого состава академиков, будучи учеными широких познаний и интересов, образовали вместе с адъюнктами физико-математический коллектив, в котором постоянно велись совместные исследования и обсуждения проблем чистой математики, астрономии, механики, физики. Заседания академической Конференции, проводившиеся дважды в неделю, были местом постоянного обмена мнениями и идеями, местом «взаимообучения», особенно важного для молодых, в числе которых был Эйлер. В штате Академии сложилось удачное возрастное соотношение — больше половины вступило в нее в возрасте моложе тридцати, но были и «маститые»,



*Якоб Герман*

такие, как математик Якоб Герман, астроном Жозеф Никола Делиль. При этом в собрании отсутствовала такая иерархия, какая соблюдалась, например, в Парижской академии, члены которой даже рассаживались в собраниях по ранжиру, адъюнкты за спиной своих руководителей-академиков. Для Петербурга была характерна научная демократия и участие каждого в собрании определялось лишь тем, что он мог в него внести. Эйлер, хотя и был принят в Академию «элевом» (буквально «учеником»; слово «адъюнкт» вошло в употребление позднее), с первых же дней стал выступать в Конференции с докладами наравне с академиками. За весь период его первого пребывания в России, т. е. до лета 1741 г., активность Эйлера в Конференции среди всех членов Академии была наивысшей: он выступал с докладами в среднем 10 раз в год, остальные — от одного до пяти раз. На собиравшихся во второй половине 1735 г. заседаниях так назы-

ваемой Математической конференции заслушивались почти исключительно сочинения и отзывы Эйлера (на 21 из 23 заседаний).

Коллективный характер работы выражался не только в заседаниях Конференции, но и в совместном проведении наблюдений и экспериментов, каковыми были, например, опыты в августе—сентябре 1727 г. по исследованию полета пушечного ядра, в коллективных экспертизах по заданию различных государственных ведомств, в выполнении больших поручений, каким было в эти годы, например, составление Генеральной карты России — в этой работе, начатой под руководством Ж. Н. Делиля, Эйлер к концу 30-х годов занял одно из ведущих мест. О коллективных исследованиях по астрономии и участию в них Эйлера речь пойдет в статье Н. И. Невской и К. В. Холшевникова в настоящем сборнике [7].

Существенное значение имела, далее, господствовавшая в Академии большая свобода в выборе области исследований. Ученый не был ограничен специальностью, по которой он числился в штате, и даже адъюнкты не были связаны тематикой работы своих официальных руководителей. Так, например, Даниил Бернулли, принятый в Академию по кафедре физиологии, занимался преимущественно математикой и гидродинамикой, а приглашенный на ту же кафедру Эйлер с самого начала, обнаружив в первых же выступлениях яркое математическое дарование, получил полную возможность посвятить себя тому, к чему был более склонен.



В Петербургской академии, где в XVIII в. ученые зачислялись по контракту, как в университетах, на определенный срок, по истечении которого иногда по разным причинам увольнялись, молодежь имела больше шансов продвинуться, чем, например, в Парижской академии с ее пожизненным избранием. Так, назначение Эйлера профессором физики в 1731 г. было связано с возвращением Я. Германа в Швейцарию и Г. Б. Бильфингера в Германию, а назначение профессором математики в 1733 г. — с отъездом Д. Бернулли. Но надо полагать, что, даже не случись этих отъездов и передвижений, Эйлер все равно не «засиделся» бы в адъюнктах. Для таких случаев, когда адъюнкт заслуживал повышения, но вакансии по подходящей специальности отсутствовала, администрация ввела не предусмотренную петровским штатом категорию экстраординарных профессоров. А в отдельных случаях допускалось и назначение двух профессоров на одну кафедру, например, когда нужен был один астроном для работы в Академии, другой — для Камчатской экспедиции. Благоприятствовал исследовательской работе и созданный в Петербурге своеобразный статус ученого, который материально обеспечивался как университетский профессор — жалование, казенная квартира (или оплата квартиры), дрова, свечи, но имел, как мы сказали бы сегодня, очень небольшую педагогическую нагрузку. Что же касается Эйлера, то он еще к тому же не раз пользовался существовавшей в Академии системой надбавок и вознаграждений за выполнение отдельных заданий. Все это позволило ему обзавестись семьей, приобрести собственный дом и, при свойственной ему бережливости, жить если не богато, то во всяком случае без нужды.

Круг занятий Эйлера в Петербургской академии в 30-е годы широко иллюстрируют протоколы академической Конференции и многочисленные служебные документы из Архива Академии наук СССР, описание которых опубликовано [8]. Дополнительной иллюстрацией, дающей своего рода «поперечный срез» на 1737 г., т. е. по прошествии ровно десятилетнего пребывания Эйлера в Петербурге, может служить еще не вошедший в описание, обнаруженный недавно отчет Эйлера, написанный 28 августа 1737 г. По требованию президента И. А. Корфа академикам надлежало доложить, что они обязаны были сделать по контракту, что действительно сделали за годы своей службы и что намечают на будущее. Эйлер писал:

«По условиям своей службы в Императорской академии наук я обязан был выполнять следующее:

1. Посещать заседания Конференции, что я с усердием исполняю и всегда имею наготове сочинения, чтобы их там зачитать.

2. Читать студентам лекции по высшим разделам математики. Это я также всякий раз, как объявляются такие студенты, которые желают обучаться этому предмету, по их возможностям исполняю.

3. Мне также поручено участвовать в работе по географии России, и в этом я тоже тружусь в меру своих сил, насколько мне это позволяют другие занятия.

Что же касается других моих трудов в настоящее время, а также в будущем, то сейчас я работаю над арифметикой, которая будет использоваться в здешней гимназии. Кроме того, я имею намерение, если этому не помешают другие мои дела, довести до конца некоторые уже начатые мною сочинения, в которых речь идет о музыке, статике, анализе бесконечных и о движении тел в воде» [9].

Работа в Петербургской академии благоприятствовала развитию прикладных исследований Эйлера, хотя по своим основным интересам он был больше теоретиком. В обязанности академиков входило выполнение различных поручений государственных учреждений, в частности экспертизы трудов, написанных вне Академии, разного рода машин, изобретений и проектов. По-видимому, первым таким поручением Эйлеру было рецензирование присланной из Морской академии рукописи книги лейтенанта русского флота Степана Малыгина по навигации [10]. О выполнении этого поручения Эйлер писал Шумахеру 14/25 сентября 1731 г. [11]. Отзыв был зачитан в Конференции 19/30 октября [12]. Оригинал его обнаружить не удалось, но на основании отзыва Эйлера Академия выдала Малыгину «аттестат», напечатанный на последней странице книги. В нем сказано: «Империяльная Академия наук предимьянованную книжицу вручила Леонгарду Эвлеру Академии члену и физики профессору ординарному, который, подлинно пересмотря все в этой книжице содержимое, предложил Академии, что там ничего правилам навигацкия науки противного не имеетца, но все проблемы чинно и правильно решены, и полезна есть оная книжица, чтоб по ее предводительству обучение производить...» Этот эпизод характерен для ранней истории Академии, когда она, стремясь поддержать среди государственных учреждений престиж «ученой коллегии», не отказывалась от поручений, даже если не имела у себя нужных специалистов, но постепенно себе таких специалистов создавала. Случайно ли выбор пал на Эйлера или при этом было учтено, что он еще в Базеле написал на конкурсе Парижской академии работу об оснастке кораблей (опыты для этой работы он производил в тазу с водой), но несмотря на то, что Эйлер видел море лишь в качестве пассажира по пути из Любека до Петербурга при своем переезде в Россию, его отзыв считался авторитетным для книги моряка, плававшего около 15 лет. Как бы то ни было, не исключено, что Эйлер, составляя данный отзыв, впервые вплотную столкнулся с «морской наукой», в которой ему было суждено совершить столь многое.

Особенно много экспертиз такого рода поручалось Эйлеру в 1735—1740 гг. при президенте Корфе. Среди рукописей Эйлера этого периода сохранилось около двадцати отзывов и предложений технического характера, относящихся к проверке различных мер и весов, испытанию механизмов и машин, чертежных и измерительных инструментов, магнитов, противопожарных устройств. Немало подобных отзывов Эйлера напечатано в «Материалах для истории имп. Академии наук» [13], в том числе на механизм для подъема большого колокола в Московском Кремле, на «пильную мельницу», изготовленную академическим механиком И. Брукнером для Адмиралтейства. Техническое содержание этих отзывов еще ждет своего исследования. Хотелось бы лишь отметить, что их хронология указывает на их связь с некоторыми теоретическими работами Эйлера, для которых, вероятно, эти отзывы послужили поводом и толчком. Представляется не случайным, что именно в феврале 1738 г., когда Эйлер был занят проверкой одновременно нескольких комплектов весов петербургской таможни, он представил в Конференцию теоретическую работу «Исследование о всех» [14], а написанию статьи «Об использовании машин, как простых, так и сложных» [15], поданной в Конференцию в апреле того же года, предшествовали экспертизы при участии Эйлера различных

механизмов А. К. Нартова и И. Брукнера. От этих работ идет линия, приведшая Эйлера к созданию новой теории машин, первой попытке приложить к работе машин новейшие достижения математического анализа. Если с вопросами навигации Эйлеру пришлось столкнуться еще в 1731 г. в связи с книжкой Малыгина, то не исключено, что на написание большого трактата по морской науке, который он закончил уже в Берлине и опубликовал в Петербурге в 1749 г. [16], его натолкнули два отзыва, составленные им в 1735—1736 гг., на «Очерк о механизме движения плавающих тел» генерального комиссара французского флота Делакура [17]. Несомненно, что позднейшие статьи Эйлера по картографии, основополагающие в развитии этой науки, были, в конечном счете, следствием активного его участия на протяжении 1735—1741 гг. в создании Генеральной карты России.

Одним из условий, благоприятствовавших научному росту сотрудников Петербургской академии, было официальное поощрение их научной переписки. В отличие от аналогичных зарубежных учреждений Академия обеспечивала бесплатную корреспонденцию не только конференц-секретаря, который вел служебную переписку от ее имени, но и всех своих членов, если письма были не личного, а научного характера. Полученные письма и наброски ответов представлялись и зачитывались в Конференции, копировались для Архива. Особенно расширились письменные контакты с зарубежными коллегами в президентство И. А. Корфа. Это можно ясно увидеть по переписке Эйлера. До 1735 г. она почти ограничивалась Базелем, куда он писал своему учителю Иоганну Бернулли, а позднее еще Даниилу Бернулли и Якову Герману, бывшим своим сотрудникам по Петербургу. С 1735 г. круг корреспондентов быстро растет, в него включаются астрономы Дж. Полени в Падуе, Дж. Дж. Мариони в Вене, математик в Лондоне Дж. Стирлинг, датский морской офицер Ф. Вегерслёф, математики в Гданьске Г. Кюн и К. Л. Элер. Переписка позволяла обмениваться еще не опубликованными открытиями и идеями, быть постоянно в курсе развития западно-европейской науки. Этим целям служили также регулярные связи Академии с научными журналами в Лейпциге, Амстердаме, Нюрнберге и т. д., которые очень оперативно реферировали петербургские издания, стараясь опережать друг друга и получать информацию «из первых рук» [18]. Академия заботилась о быстром распространении в заинтересованных кругах Европы своих изданий. Это видно на примере рассылки изданной в 1736 г. «Механики» Эйлера [19], которая была отправлена безвозмездно в десятки адресов: в крупные библиотеки, в отдельные научные общества и академии, издателям журналов, посланникам при европейских дворах [20]. Следует заметить также, что пути распространения научной информации, например время от выхода книги в Петербурге до появления рецензии на нее в Амстердаме и получения этого журнала в академическую библиотеку, нередко оказывались более короткими, чем в наши дни. Петербургские академики вовсе не были «на отшибе», а, наоборот, находились в самой гуще научной жизни своего времени, что ярко видно из быстрого распространения славы Эйлера.

Немаловажным стимулятором научного творчества были также созданные в Петербургской академии очень широкие возможности публикации трудов. Такими возможностями не располагала в то время ни одна

европейская академия. Здесь нельзя не отдать должное упомянутому выше Шумахеру, который был главным организатором академического издательства и книготорговли и повел дело с большим размахом. Издательство с самого начала не рассматривалось как коммерческое предприятие, его расходы оплачивались из общего бюджета Академии, научные издания продавались примерно по себестоимости, иногда даже ниже, а убытки покрывались доходами от популярных многотиражных изданий. Выход главного академического журнала «Записки» (*Commentarii*) в 30-е годы, правда, запаздывал из-за финансовых и других неурядиц, но монографии, одобренные Конференцией, издавались без промедления. Эйлер, во всяком случае, не испытывал никаких затруднений с изданием своих трудов. До 1741 г. в Петербурге вышло более 50 его работ, и еще 31, оставленные здесь в рукописях, были напечатаны после его отъезда в Берлин. В сравнении с печатной продукцией Эйлера последующих лет это не очень много, но едва ли кто-нибудь из ученых его времени за такой же период опубликовал больше.

Если изданные в Петербурге монографии Эйлера и его статьи в академических «Записках» хорошо известны, то до сих пор остается неясным его участие в другом журнале, в «Примечаниях на Ведомости», издававшихся Академией на немецком и русском языках как приложение к газете «Санктпетербургские ведомости» в 1728—1742 гг. Статьи в этом журнале печатались анонимно, а с 1738 г. — с инициалами. Рукописи статей не сохранились. До сих пор было точно известно только, что перу Эйлера принадлежала статья «О внешнем виде Земли» (1738, ч. 27—32, 103, 104). Недавно по письму Г. Ф. Миллера к И. Д. Шумахеру удалось установить [21], что большая статья «О бывшем великом тому недавно Северном сиянии» (1730, ч. 14—17, 21, 25, 32, 35, 77, 78), написана Г. Ф. Миллером, Г. В. Крафтом и Л. Эйлером. Эйлеру, по-видимому, принадлежит средняя часть. С полной достоверностью устанавливается также принадлежность Эйлеру статьи «О том, как должно примечать морской прилив и отлив» (1740, ч. 9, 10). Она была напечатана (в отличие от других статей этого года — без инициала) как раз в то время, когда Эйлер трудился над конкурсным сочинением о физической причине приливов и отливов для Парижской академии наук [22] и по его просьбе производились наблюдения этих явлений на Белом море. Статья идентична рукописи Эйлера «Необходимые замечания, которые должно принимать во внимание при наблюдениях приливов и отливов на море» [23], в ней воспроизводится имеющийся в рукописи его рисунок измерительной штанги и образец журнала наблюдений.

В конце 30-х годов многообразное творчество Эйлера находилось на подъеме и, как это представляется из его переписки, у него не было причин для недовольства своим положением. Но политическая неустойчивость в последние годы правления Анны Иоанновны, еще более обострившаяся после ее внезапной смерти, и очень почетные условия, предложенные Эйлеру Фридрихом II, склонили его переехать с семьей в Берлин, где он впоследствии стал одной из центральных фигур, директором математического класса Королевской академии наук и словесности, оставаясь почетным членом Петербургской академии. Рассказать здесь обо всех многообразных нитях, связывавших Эйлера с Петербургской академией на протяжении 25 лет его пребывания в Берлине, невозможно. Придется

ограничиться хотя бы кратким перечнем тех сфер деятельности, в которых Эйлер, находясь в Германии, проявил себя как активнейший сотрудник Академии в Петербурге.

Эйлер все эти годы оставался главным консультантом Академии по физико-математическим вопросам. Например, к нему обратились как к судье в возникшем в 1745 г. разногласии между академиками Г. В. Рихманом и И. Вейтбрехтом относительно оценки научной позиции лондонского ньютонианца Дж. Джурина, а также в споре 1753 г. между академиками Х. Г. Кратценштейном и Н. Поповым по поводу решения Кратценштейном «морской задачи» о действии ветра на воду. Мнение Эйлера в подобных случаях подводило черту под всяким спором. Эйлер был фактически ответственным лицом за уровень статей математического класса журнала «Новые записки» (*Novi commentarii*) и сам писал редакционные резюме многих статей. Выступая в роли главного судьи по оценке физико-математических сочинений, он оказал огромную услугу русской науке, поддержав и одобрив первые шаги на научном поприще М. В. Ломоносова, которому он помог укрепить его позиции в Академии и с которым в течение многих лет, до самой смерти Ломоносова, поддерживал дружескую переписку [24]. В берлинские годы Эйлер значительно расширил свои связи с европейскими академиями и со многими выдающимися учеными, и тем самым он открыл и для Петербургской академии дополнительные каналы общения, помогал получать информацию о новейших достижениях науки, о событиях научной жизни.

Когда Академия с 1749 г. начала объявлять ежегодно конкурсные задачи, Эйлер привлекался в качестве судьи конкурсных сочинений по астрономии и физике. От Эйлера исходили многие темы конкурсных задач, не раз он присылал целые списки таких тем [25]. В целом можно сказать, что больше половины конкурсов по физике и астрономии, объявленных Академией в 1749—1783 гг., проводились по темам, предложенным Эйлером.

Если в годы пребывания в Петербурге Эйлеру не удалось подготовить ни одного русского математика — Василий Адодуров сначала делал заметные успехи, но потом переключился на работу переводчика и на создание русской грамматики, — то ему больше повезло в этом отношении в Берлине, где в его доме в 1752—1756 гг. жили и учились присланные к нему Академией С. Котельников, С. Румовский, М. Софронов. Судьба последнего сложилась неудачно, двое же первых заняли достойное место в русской науке и в математическом образовании. Кроме того, Эйлер был деятельным посредником и консультантом при подборе и приглашении ученых на вакантные места в Академии, в переписке с ним обсуждались десятки кандидатур. Суммарно можно сказать, что больше половины поступивших на службу в Академию за берлинский период Эйлера приняты по его рекомендации и при его посредничестве, в их числе физики Х. Г. Кратценштейн, И. А. Браун, Ф. У. Эпинус, механик И. Э. Цейгер, химик И. Г. Леман, ботаник А. Гюльденштедт, физиолог К. Ф. Вольф. Переписка свидетельствует о высоких требованиях, которые Эйлер старался предъявлять, подбирая ученых для Петербургской академии.

Не поддаются краткому описанию многочисленные разовые поручения Академии, которые Эйлер выполнял, по выписке и покупке книг, по зака-

зу и пересылке инструментов и т. п. Можно предположить, что Эйлер принимал на себя всю массу трудоемких и хлопотных дел, связанных с Петербургом [26], не только ради жалования почетного члена (200 рублей в год) и не только из благодарности к стране и к Академии, где он вырос как ученый, но еще и потому, что роль «полномочного представителя» Петербургской академии была важна и для его собственного престижа, для его значения как одного из ведущих организаторов европейских научных связей.

Однако главной формой сотрудничества Эйлера с Петербургской академией в его берлинский период была присылка в Петербург для публикации своих работ. Всего их за эти 25 лет, присланных из Берлина и опубликованных в Петербурге, было около ста, примерно столько же, сколько Эйлер за эти годы напечатал в Берлине. Совершенно справедливо сказано по этому поводу А. П. Юшкевичем: «Сил его с избытком хватало для совершенно полноценного «совместительства» в обеих академиях. Свои сочинения Эйлер в эти годы публикует почти поровну в изданиях обеих академий: ни одна из них по отдельности не успевала делать, и даже обе вместе они не справлялись с неиссякаемым потоком его сочинений» [27].

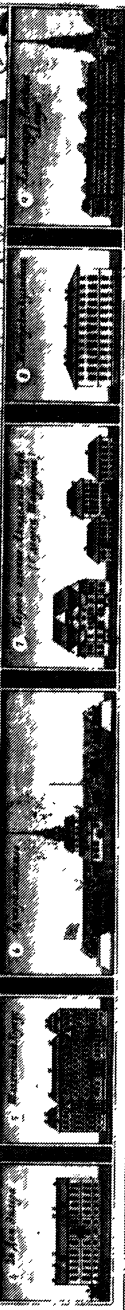
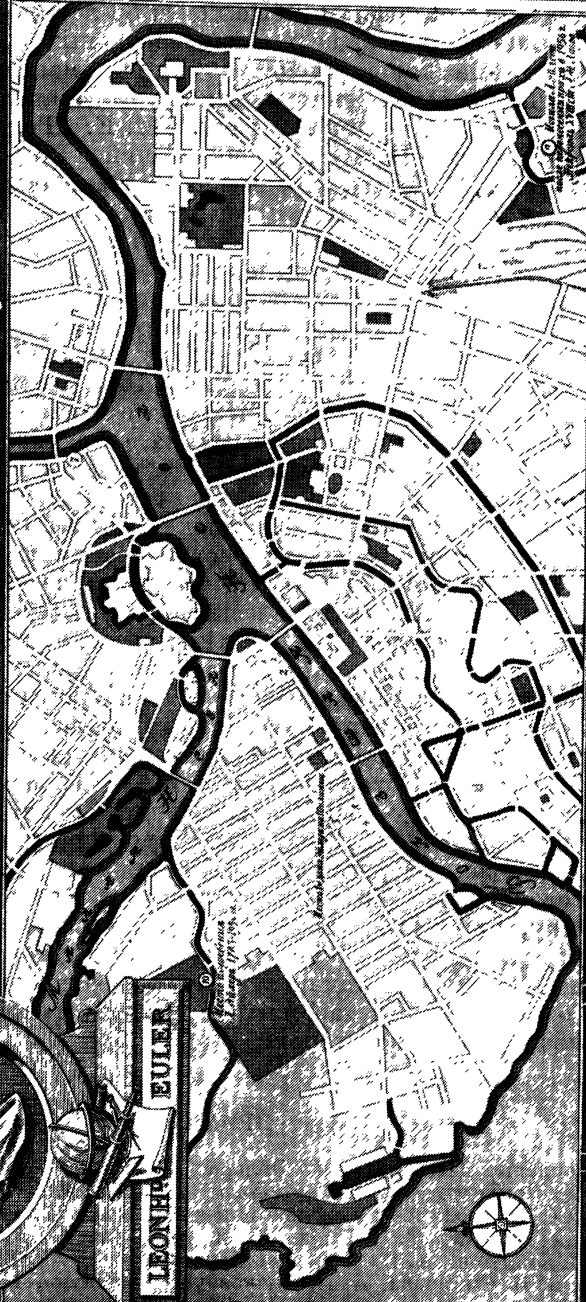
Интересным представляется не только общее число статей Эйлера за берлинский период, опубликованных в петербургском журнале, но и доля их в общем составе этого издания. Укажем состав математического класса журнала за годы 1744—1765, когда этот класс был особенно «оголен». Цифра слева по каждому тому означает количество статей Эйлера, цифра справа — количество статей всех других авторов: «Commentarii», том XIV: 4—1; «Novi commentarii», том I: 4—2, II: 2—3, III: 7—2, IV: 4—1, V: 7—1, VI: 11—1; VII: 5—1; VIII: 10—6; IX: 10—0; X: 9—2; XI: 9—0. Притом среди немногочисленных статей других авторов часть — работы учеников Эйлера Котельникова и Румовского. Отсюда видно, что Эйлер в свои берлинские годы продолжал, как и прежде, быть основным автором математического раздела в академическом журнале, можно даже сказать — почти заполнял своими статьями этот раздел. Едва ли он мог бы печатать здесь больше, если бы даже находился все это время в Петербурге. Неудивительно поэтому, что место Эйлера все 25 лет оставалось вакантным и Академия не очень стремилась его кем-то заполнить. Фактически оно было занято Эйлером, хотя и заочно. Благодаря Эйлеру академический журнал сохранял свою репутацию одного из ведущих физико-математических изданий Европы. Но важна и другая сторона этого факта — не будь этих возможностей, многие открытия Эйлера, вероятно, остались бы неопубликованными, а многие статьи и ненаписанными.

Когда Эйлер возвратился в Россию, из тех, с кем он служил здесь в молодые годы, в Академии оставались лишь единицы. Но все же на должности конференц-секретаря был его прежний коллега Я. Штелин и профессорами к этому времени стали его ученики Котельников и Румовский. Профессором физики в Академии стал старший сын Эйлера Иоганн-Альбрехт. При первом же посещении Собрания 7 августа 1766 г. Эйлер представил рукопись первых двух томов своего трехтомного «Интегрального исчисления». С тех пор и до самой его смерти рукописи его шли в Собрание непрерывным потоком, иногда по пять-шесть в одном

ПАМЯТНЫЕ  
ЭЙЛЕРОВСКИЕ МЕСТА В ЛЕНИНГРАДЕ



ЛЕОНХАРД  
EULER



заседании, а однажды даже 13 (18 мая 1772 г.). Больше 500 работ было представлено за этот период или осталось у него в запасе после его смерти — Академия издавала их еще почти 80 лет, до 1862 г. Такая продуктивность, по-видимому, не имеет себе равных в истории науки. Среди этих работ — несколько фундаментальных монографий. И все это при почти полной потере зрения, когда его глазами стали его сыновья и его ученики — Н. Фус, В. Л. Крафт, М. Е. Головин, А. И. Лексель, П. Б. Иноходцев. Н. Фус, породнившийся с семьей Эйлера, и его сыновья Н. и П. Фусы, правнуки Эйлера, сыграли большую роль в сохранении и публикации его наследия.

Как и в годы своей петербургской молодости, Эйлер и в поздние годы не раз выступал как эксперт от Академии по разным практическим вопросам, например об устройстве вдовьих касс (1769), о проекте И. П. Кулибина постройки одноарочного моста через Неву (1776), об определении уклона и скорости течения Невы (1780).

Будучи старейшим из академиков, Эйлер теперь руководил работой академического Собрания. Он был также членом комиссии при директоре — нового административного органа, созданного взамен упраздненной Канцелярии. Эйлер принимал живое участие в организации крупных академических экспедиций, в особенности экспедиции 1769 г. по наблюдению прохождения Венеры по диску Солнца. Однако не все его идеи, изложенные в записке «План реорганизации Императорской академии наук» (1766?) [28], оказались осуществимыми, в частности его предложения по поднятию доходов академического издательства или об отказе от постоянного числа членов Академии и от фиксированного размера жалований, чтобы принимать в Академию только гениальных ученых и обеспечить им высокую оплату. Поддерживаемая Эйлером идея хотя бы частичного академического самоуправления также воплотилась лишь ненадолго — из-за деспотизма графа В. Г. Орлова, директора Академии в 1766—1774 г., Эйлер и его сын Иоганн-Альбрехт в 1774 г. демонстративно вышли из комиссии по управлению. Позднее Эйлеру приходилось также бороться против произвола С. Г. Домашнева, директора Академии в 1775—1782 гг. И только ставшая директором в 1783 г. княгиня Е. Р. Дашкова, занимавшая этот пост до 1796 г., проявила глубокое почтение к старейшему академику, но это было уже в последние месяцы его жизни.

Вся научная судьба Эйлера, судьба его рукописного наследия, двухсотлетние труды Академии по изданию его сочинений — все это свидетельствует о том, что встреча Эйлера с Петербургской академией наук была счастливой для обеих сторон.

#### ПРИМЕЧАНИЯ

1. Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР / Сост. Ю. Х. Копелевич, М. В. Крутикова, Г. К. Михайлов, Н. М. Раскин. М.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1: Научное описание; *Эйлер Л.* Переписка. Аннотированный указатель / Сост. Т. Н. Кладо, Ю. Х. Копелевич, Т. А. Лукина, И. Г. Мельников, В. И. Смирнов, А. П. Юшкевич при участии К. Р. Бирмана, Ф. Г. Ланге; Под ред. В. И. Смирнова, А. П. Юшкевича. Л.: Наука, 1967; Leonhardi Euleri Commercium epistolicum / Eds A. P. Juškevič, V. I. Smirnov, W. Habicht (Opera IVA-1); Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften in Briefwechsel Leonhard Eulers. Berlin: Akad.-Verl., 1959, 1961, 1976. Bd. 1—3. Тома вышли под



- ред. и с предисл. Э. Винтера и А. П. Юшкевича при участии П. Гофмана, Т. Н. Кладо, Ю. Х. Копелевич.— Далее сокращенно: Briefwechsel.
2. Briefwechsel. Bd. 2. S. 182.
  3. См.: *Копелевич Ю. Х.* Основание Петербургской академии наук. Л.: Наука, 1977. С. 65—79.
  4. Письмо Х. Вольфа Л. Эйлеру от 20 апреля 1727 г. // ЛО Архива АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 6, л. 271.
  5. См.: *Копелевич Ю. Х.* Письма первых академиков из Петербурга // Вестн. АН СССР. 1973. № 10. С. 128—133.
  6. В своей автобиографии, написанной в 1767 г., Эйлер ошибочно указал, что прибыл в Петербург как раз в день смерти Екатерины I. См.: *Копелевич Ю. Х.* Материалы к биографии Леонарда Эйлера в Петербурге // Ист.-мат. исслед. 1957. Вып. 10. С. 13—17; *Митайлов Г. К.* К переезду Леонарда Эйлера в Петербург // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1957. № 3. С. 1—37.
  7. См. новые материалы по этому вопросу в кн.: *Невская Н. И.* Петербургская астрономическая школа XVIII века. Л.: Наука, 1984.
  8. В кн.: Рукописные материалы Л. Эйлера . . . (См. примеч. 1).
  9. ЛО Архива АН СССР, ф. 3, оп. 1, № 860, л. 9. Документ (на нем. яз.) обнаружен М. А. Алексеевой.
  10. *Мальгин С.* Навигация (сокращенная) по карте де редюксон. СПб., 1733 (термин «де редюксон» означает, что карта приведена к определенному меридиану).
  11. Briefwechsel. Bd. 2. S. 52.
  12. Протоколы заседаний Конференции имп. Академии наук с 1725 по 1803 г. СПб.: Изд-во Акад. наук, 1897. Т. 1. С. 51.
  13. Материалы для истории имп. Академии наук: В 10 т. СПб., 1885—1900. Т. 2. С. 709—710; Т. 3. С. 29, 412—416, 631—634; Т. 4. С. 120—121, 173, 212, 301—302.
  14. *Euler L.* Disquisitio de bilancibus // Opera II-16.
  15. *Euler L.* De machinarum tam simplicium quam compositarum usu // Opera II-16.
  16. *Euler L.* Scientia navalis seu tractatus de construendis et dirigendis navibus // Opera II-18, 19.
  17. *De la Croix.* Extrait du mecanisme des mouvements des corps flotans. Paris, 1735.
  18. *Копелевич Ю. Х.* И. А. Корф и международные связи Петербургской академии наук // Из истории естествознания и техники Прибалтики. Рига: Зинатне, 1976. Вып. 5 С. 14—23.
  19. *Euler L.* Mechanica sive motus scientia analytice exposita // Opera II-1,2.
  20. ЛО Архива АН СССР, ф. 3, оп. 1, № 436, л. 558—559 об.
  21. ЛО Архива АН СССР, ф. 21, оп. 3, № 308/30, л. 9—9 об.
  22. *Euler L.* Inquisitio physica in causam fluxus et refluxus maris // Rec. pièces remp. prix Acad. sci. Paris (1738—1740). 1741. Т. 4. P. 235—350; Opera II-31.
  23. *Euler L.* Nötige Erinnerungen, welche bei Beobachtungen der Ebbe und Fluth des Meeres in Acht zu nehmen // Архив АН СССР, ф. 136, оп. 1, № 121, л. 1—3.
  24. Briefwechsel. Bd. 3. S. 2—4, 187—206; *Ломоносов М. В.* Полн. собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1957. Т. 10. С. 435—438, 439—457, 464—467, 500—503, 515—518, 595—598.
  25. Briefwechsel. Bd. 2. S. 21—22, 437—439; Bd. 3. S. 236—238; *Юшкевич А. П., Винтер Э.* О переписке Леонарда Эйлера с Петербургской академией наук в 1741—1757 гг. // Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР. 1960. Т. 3 (34). С. 428—491.
  26. Briefwechsel. Bd. 1—3.
  27. *Юшкевич А. П.* Жизнь и математическое творчество Леонарда Эйлера // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 4 (76). С. 12.
  28. *Пекарский П. П.* История имп. Академии наук в Петербурге. СПб., 1870. Т. 1. С. 303—308.

# ОБ УЧАСТИИ ПЕТЕРБУРГСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (АКАДЕМИИ НАУК СССР) В ИЗДАНИИ ТРУДОВ Л. ЭЙЛЕРА

*Е. П. ОЖИГОВА*

В течение многих лет в Петербургской академии наук выдвигалась идея издания собрания сочинений Леонарда Эйлера. Об этом говорил еще Н. И. Фус, ученик и помощник Эйлера, непреходящий секретарь Петербургской академии наук с 1800 по 1826. На таком издании настаивал М. В. Остроградский. В 1843 г. непреходящий секретарь Академии наук П. Н. Фус, правнук Л. Эйлера, с помощью своего брата Н. Н. Фуса, опубликовал на языке оригинала два тома «Математической и физической переписки нескольких прославленных математиков XVIII века». Когда это издание вышло из печати, П. Фус попросил Академию командировать его в Западную Европу по делам Академии. Одним из дел было — ознакомиться с «Перепиской» крупнейших ученых, узнать их мнение об издании и заручиться их содействием для нового предприятия — публикации собрания сочинений Л. Эйлера. К этому времени Фус обнаружил в Архиве Академии наук и в частных архивах потомков Эйлера, в том числе своем собственном, много рукописных материалов Эйлера. Наиболее существенные из этих записей он также хотел включить в собрание сочинений.

П. Н. Фус выехал из Петербурга 22 мая 1843 г. (ст. ст.). В отчете о поездке он писал: «Математическая корреспонденция знаменитых геометров прошлого века: Эйлера, Гольдбаха и Бернулли, опубликованная Академией, была восторженно принята учеными всех стран». В Париже Фусу удалось приобрести ценное собрание неопубликованных писем Эйлера к Лагранжу и переписку между Лагранжем и Даламбером, «имеющую своим предметом почти исключительно труды ... бессмертного геометра, а в Базеле — добавление к переписке между Эйлером и Николаем Бернулли, в высшей степени интересное» [1]. Фус передал в дар Академии хранившиеся у него эйлеровские рукописи. Доказывая необходимость публикации рукописных материалов Эйлера, Фус говорил: «Прежде чем решить вопрос, надо или не надо публиковать эти рукописи, я позволю себе заметить, что новое издание полного собрания сочинений Эйлера не только очень желательно и ожидается с большим нетерпением геометрами всех стран, но его рассматривают в некотором роде как естественный долг, который Россия обязана отдать памяти великого гения, который нашел у нас вторую родину, как само собой разумеющееся обязательство, еще не выполненное по отношению к ученому миру. Общество бельгийских геометров уже пробовало опередить нас в этом отношении [2], но предприятие, неумело задуманное и начатое, потерпело неудачу после выпуска пятого тома.

Во время поездки, которую я предпринял в прошлом году, я не встречал ни одного геометра, который не спросил бы меня при первой же встрече — не думает ли Академия об издании сочинений Эйлера? Я назову вам лишь корифеев науки: гг. Гаусса, Бесселя, Якоби. Последний в особенности столько раз возобновлял свои настояния по этому вопросу, что я дал ему слово предложить это Академии. Г-н Крелле, сообщивший в последнем выпуске своего журнала о «Математической переписке ...» [3], выражает публично то же мнение» [4; 5, с. 154]. По предложению Фуса была образована комиссия, которая должна была составить план издания полного собрания сочинений Эйлера, оценить его стоимость и составить хорошо обоснованное представление министру и президенту Академии С. С. Уварову. В состав комиссии вошли П. Н. Фус, М. В. Остроградский, В. Я. Струве, В. Я. Буняковский, Б. С. Якоби. Комиссия выполнила свою задачу, ее предложение было передано Уварову, но тот не считал возможным испросить довольно большую необходимую субсидию, и предприятие было отложено на более подходящее время.

Потеряв надежду на издание полного собрания сочинений, Физико-математическое отделение Академии решило издать на средства Академии «Арифметические труды» Эйлера, включив туда и некоторые рукописи. В заседании 23 октября 1846 г. (ст. ст.) было постановлено опубликовать труды в двух томах тиражом 600 экз. in-4°. Печатание было рассчитано на два года. В отчете за 1848 г. Фус сообщил, что печатание обоих томов подходит к концу.

Горячо поддержал подготовку публикации «Переписки» и «Арифметических трудов» Эйлера К. Г. Я. Якоби. 28 февраля 1841 г. Якоби писал П. Н. Фусу: «Было бы большим благодеянием, оказанным Вашей Академией математическому миру, предприятием, служащим к величию и чести России, если бы Академия издала статьи Эйлера, расположенные по предметам... Надо было бы составить план всего издания в отношении расположения по содержанию и содержания отдельных томов, что, несомненно, трудная работа. Категории подразделения следовало бы выводить из самого содержания, и мне этот труд кажется столь огромным, что он, конечно, должен быть разделен между многими лицами. Тогда исполнение его было бы постепенным, а если его распределить на целый ряд лет, то и стоимость издания ежегодно была бы не столь уж велика. В ожидании этого Вы сделали бы нечто очень полезное, переиздав и дополнив список сочинений Эйлера, который Ваш отец приложил к биографии (Эйлера)...» [6, с. 6—7]. Фус ответил, что такой список он составил уже лет 20 назад для собственного употребления с указанием, где и когда работы были напечатаны и когда представлены Академии.

Якоби дал ценные советы относительно систематического указателя, которым следовало снабдить издание трудов Эйлера [6, с. 50—73].

Узнав о печатании «Переписки», Якоби обрадовался, но тем не менее добавил: «Но более важным я считаю, чтобы Вы вернулись к мысли об издании сочинений Эйлера... Мне кажется, что Вы не могли отказаться от своего большого плана. Подумайте, как он тесно связан с Вами лично и что он никогда не будет осуществлен, если этого не сделаете Вы» [6, с. 18]. Якоби начал поиски эйлеровских материалов в Архиве Берлинской академии наук, сообщал о своих находках и посылал результаты своих поисков Фусу. В частности, он установил по протоколам день (именно

23 декабря 1751 г.), чрезвычайно важный для истории математики, когда Академия [Берлинская. — *Е. О.*] поручила Эйлеру рассмотреть присланную ей статью Фаньяни... Из этого рассмотрения возникла теория эллиптических функций» [6, с. 23]. Якоби советовал и как распределить материал по томам.

В письме от 9 января 1848 г. (ст. ст.) Фус сообщил, что посылает Якоби первый том «Арифметических сочинений» Эйлера (пока что без титульного листа и предисловия), и далее пишет: «Вы имеете право получить его раньше других, и сообщите мне свои замечания, особенно такие, которые можно учесть при печатании второго тома» [5, с. 45]. Судя по ответному письму Якоби, том был послан ему без «Систематического указателя», составленного П. Л. Чебышевым и В. Я. Буняковским, поэтому неизвестно, как отнесся к нему Якоби, который и сам составлял план распределения арифметических сочинений Эйлера.

Большую работу по подготовке публикации арифметических трудов провел П. Фус: он выбрал статьи и расположил их в хронологическом порядке; оставалось аннотировать их и систематизировать по содержанию. Это сделали в «Систематическом указателе» Буняковский и Чебышев.

Работа над арифметическими сочинениями Эйлера принесла большую пользу и самому молодому П. Л. Чебышеву. Одновременно с изданием «Арифметических сочинений» Эйлера вышла в свет докторская диссертация Чебышева «Теория сравнений», где он систематически изложил теорию чисел и дал три прибавления; одно из них «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» принесло ему громкую известность.

Чебышев с огромным уважением относился к Эйлеру и постоянно советовал своим ученикам изучать труды Эйлера. Его ученик К. А. Поссе писал: «Эйлера Чебышев считал гениальнейшим математиком после Ньютона. Он часто высказывал ту мысль, что большая часть вопросов, разрабатываемых математиками в настоящее время, была намечена Эйлером, и с удовольствием отмечал те результаты, которые приписываются кому-нибудь из позднейших математиков, а между тем оказываются принадлежащими Эйлеру» [7, с. 13—14].

П. Н. Фус не ограничился изданием двух томов «Арифметических сочинений» Эйлера, он подготовил с помощью Н. Н. Фуса и П. Л. Чебышева еще два тома трудов Эйлера (E805), которые были изданы уже после смерти П. Н. Фуса, в 1862 г. [8]. После этого публикация трудов Эйлера прекратилась.

В апреле 1907 г. должно было отмечаться 200-летие Леонарда Эйлера. В связи с приближением этого юбилея в Петербургской академии наук снова началось обсуждение вопроса о том, каким образом Академия может отметить эту дату. Вначале речь шла о сооружении памятника Эйлеру в Петербурге. Это предложение не нашло поддержки в Общем собрании Академии. Тогда вновь, как и в XIX в., заговорили о необходимости издания полного собрания сочинений великого ученого.

В начале 1902 г. членом Академии наук был избран А. М. Ляпунов, питавший, как и его учитель П. Л. Чебышев, огромное уважение к Эйлеру. С неменьшим почтением относился к памяти и творчеству Эйлера и А. А. Марков. По предложению этих академиков Академия признала желательным издание полного собрания сочинений Эйлера в ознамено-

вание 200-летия со дня его рождения. В октябре 1902 г. была образована комиссия по изданию сочинений Эйлера, куда вошли академики А. С. Фаминцын, К. Г. Залеман, А. А. Марков, Б. Б. Голицын и А. М. Ляпунов. При этом Марков и Ляпунов заявили, что в силу сложности дела Академия не может одна выполнить эту задачу, но именно ей должен принадлежать почин в этом деле [9]. По поручению Академии наук Фаминцын в январе 1903 г. обратился к неперемемному секретарю Берлинской академии наук А. Ауверсу с вопросом: согласна ли Берлинская академия наук принять участие в издании собрания сочинений Эйлера. Историю этого вопроса рассмотрел К. Р. Бирман [10, с. 489—500]. В Берлинской академии наук математику представляли Г. Фробениус, Ф. Шоттки и Г. А. Шварц. Они приветствовали начинание Петербургской академии наук и рекомендовали Берлинской академии принять участие в этом издании. Но окончательное решение должно было быть принято только после выяснения требуемых расходов [10, с. 496—497].

Петербургская комиссия составила смету. Расходы на издание должны были, по мнению академика Залемана, составить около 70 000 руб.: 52 000 на типографию, бумагу и пр., 2 000 на изготовление таблиц и гравюр, 16 000 на редакторов. Петербургская академия могла взять на себя 40 000, а 30 000 предстояло принять на себя Берлинской академии [11]. О результатах подсчетов информировали неперемемного секретаря Берлинской академии наук. При этом Фаминцын заметил, что для уменьшения расходов можно было бы включить в число томов два вышедших в 1862 г. тома посмертных сочинений Эйлера [8], к юбилею опубликовать пока лишь один том, а в дальнейшем включить в собрание сочинений только статьи, печатавшиеся в журналах, не публикуя книг.

Поскольку речь шла о трудах Эйлера не только по математике, но и по астрономии, механике, физике, в берлинскую комиссию включили, кроме трех уже названных математиков, физика М. Планка и астронома А. Ауверса. В ответе Берлинской академии от 31 июля 1903 г. говорилось, что принципиально она согласна участвовать в издании сочинений Эйлера, но никто из берлинских академиков не может взять на себя редактирование сочинений Эйлера. А для оплаты редакторов со стороны требуются дополнительные средства. По расчетам Ауверса на издание надо было запросить у министерства духовных дел и просвещения (Kultusministerium) субсидию по 3500 м. в год в течение 12 лет. Министерство отказало, и Ауверс сообщил об этом в Петербург. В отчетах Петербургской академии наук за 1905 и 1906 гг. говорится, что приступить к изданию трудов Эйлера не удастся, так как Берлинская академия наук до сих пор не получила согласия министерства на выделение средств для этой цели.

31 января 1907 г. состоялось заседание эйлеровской комиссии Берлинской академии наук. Планк извинился за свое отсутствие; в записке его между прочим говорилось: «Что касается обсуждаемого обстоятельства, то я могу дать пояснение, что, по моему мнению, публикация физических статей Эйлера не представляет интереса для физической науки, и я со своей стороны поэтому и особенно настойчиво заступался за это» [10, с. 497]. Мнение знаменитого Планка, конечно, оказало влияние на комиссию. 7 февраля 1907 г. Ауверс ответил Фаминцыну, что издание было бы заслуженным памятником Эйлеру, но наука не смогла бы из-

влекать из него пользы, соразмерной с затратами труда и средств. Получив такой ответ, Петербургская академия наук решила распустить свою комиссию.

Но в том же самом 1907 г. идея издания собрания сочинений Эйлера была снова выдвинута Швейцарским обществом естествоиспытателей, а в 1908 г. единодушно поддержана IV Международным конгрессом математиков в Риме. Академии Петербурга и Берлина одобрили эту инициативу и решили принять участие в издании полного собрания сочинений Эйлера.

Швейцарское общество естествоиспытателей направило в академию циркуляр с просьбой поддержать предпринимаемое им издание трудов Эйлера путем пожертвований или подписки. 2 мая 1909 г.<sup>1</sup> Общее собрание Петербургской академии наук заслушало письмо профессора Ф. Рудио от 30 апреля 1909 г. к академику Н. Я. Сониному, где говорилось: «Позавчера я имел честь приветствовать в своем доме г. Баклунда и передал ему просьбу: прислать нашей Эйлеровской комиссии находящиеся в Петербурге рукописи Эйлера. Таким образом, Академия предупреждена об этом желании, и, следовательно, я могу ожидать этой ценной посылки» [12].

На заседании выступили директор Пулковской астрономической обсерватории академик О. А. Баклунд и Н. Я. Сонин. Общее собрание обсудило вопрос о поддержке издания и постановило следующее: 1) ассигновать на печатание полного собрания сочинений Эйлера 5 000 фр. с рассрочкой платежа (согласно указанию Рудио) на 20 лет; 2) признать желательным, чтобы Академия наук по примеру Парижской академии наук подписалась на 40 экземпляров Полного собрания сочинений Эйлера; 3) уполномочить представителей Академии академиков Залемана и Рыкачева на ближайшем заседании Международного союза академий [13] довести до сведения Собрания о принятых Академией решениях и выяснить различные детали вопроса о том, в какой форме Академия наук могла бы лучше всего оказать материальную помощь предприятию; 4) избрать комиссию в составе академиков Баклунда, Залемана, Маркова, Сонины, Голицына и Ляпунова для рассмотрения подлежащего передаче в Эйлеровскую комиссию материала, хранящегося в Архиве Академии и касающегося ученой деятельности Эйлера. Кроме того, было решено войти в сношения с университетами и другими высшими учебными заведениями, библиотеками и пр. по вопросу об участии в подписке на полное собрание сочинений Эйлера, причем организацию всего дела должна взять на себя Академия наук [14]. Общее собрание одобрило эти предложения, утвердило предложенный состав комиссии, председателем ее был избран Баклунд. Он уведомил Рудио о принятых решениях.

20 мая 1909 г. Рудио писал Баклунду: «Ваше сообщение доставило мне чрезвычайную радость. Теперь мы действительно сделали в нашем предприятии большой шаг вперед! Если, как можно ожидать, Ассоциация [13] примет благоприятное решение и если Ваше письмо г. Ауверсу, за которое я Вас многократно благодарю, произведет действие на Бер-

<sup>1</sup> Далее документы Петербургской академии наук и письма из России (до 1918 г.) датируются по старому стилю; письма из-за границы и материалы зарубежных учреждений — по новому.

линскую академию, то издание Эйлера будет достаточно обеспечено. Во всяком случае Петербургская академия оправдала мои надежды в самой высокой степени» [15].

В сентябре 1909 г. Швейцарское общество естествоиспытателей на годичной ассамблее в Лозанне приняло **постановление об издании «Полного собрания сочинений» Эйлера (Leonhardi Euleri Opera omnia)**, чтобы тем самым «выполнить неоднократно повторявшееся пожелание всего математического мира» [16].

Ряд подробностей о дальнейшем участии петербургских академиков в подготовке полного собрания сочинений Эйлера имеется в письмах Рудио к Баклунду и Ляпунову.

Баклунд присутствовал на ассамблее Швейцарского общества естествоиспытателей в Лозанне [16], где, по-видимому, вел переговоры относительно издания Эйлера. 16 октября 1909 г. Рудио писал Баклунду: «Вы, вероятно, уже вернулись из своего большого путешествия, так что я могу, видимо, позволить себе снова войти в сношения с Вами. Я имею честь послать Вам от имени Эйлеровской комиссии несколько экземпляров Штеккелевского проекта [17] (можно предоставить в Ваше распоряжение сколько угодно), и присоединяю к этому просьбу, чтобы Ваша комиссия расположила материалы Эйлера в том порядке, какой указан в этом проекте. Этим она значительно облегчила бы нашу работу... Как только будет избрана редакционная комиссия, она приступит к выработке основных положений, на которых будет основываться издание Эйлера. Затем мы предложим план трем большим академиям. Я имел возможность многое подготовить... вместе с гг. Штеккелем и Крацером.

Подтверждая с некоторым опозданием получение первого эйлеровского взноса в 50 фр., остаюсь с глубочайшим уважением преданный Вам Ф. Рудио» [18].

Заметим, что впоследствии профессора А. Крацер, П. Штеккель и Ф. Рудио участвовали в редактировании нескольких томов Полного собрания сочинений Эйлера и вошли в состав редакционного комитета.

Эйлеровская комиссия в Петербурге провела в течение 1909 г. пять заседаний. Первое заседание состоялось 31 декабря 1909 г. (ст. ст.) Присутствовали Баклунд, Залеман, Ляпунов и Сонин. Постановили: 1) просить Академию передать в ведение комиссии все дела, касающиеся Эйлера, и среди них дело о подписке на новое издание сочинений Эйлера; 2) просить Швейцарскую эйлеровскую комиссию высылать в Петербургскую комиссию по 6 экземпляров корректурных листов составляемого Энестрёмом списка сочинений Эйлера во время его печатания [19]; 3) сообщить председателю Швейцарской эйлеровской комиссии Рудио, что в нашей библиотеке имеется 17 томов статей Эйлера и что о наличии рукописей в архиве будет сообщено впоследствии по окончании разборки его; 4) просить тайного советника В. Е. Фуса сообщить комиссии все данные относительно Эйлера, имеющиеся в его распоряжении. Сонин заявил на этом заседании, что будто бы существует руководство Эйлера по геометрии (в переводе М. В. Ломоносова) и что в Публичной библиотеке имеется письмо Эйлера [20].

В письме Рудио к Баклунду от 23 ноября 1909 г. говорилось: «Выражаю Вам свою глубочайшую признательность за письмо и содержащиеся в нем важные сообщения. Я тотчас же дал заказ Тойбнеру [21] в Лейпциге

послать вам 6 экземпляров корректурных листов списка Энестрёма [19]. До сих пор появилось 4 листа, которые, наверное, уже у Вас. Я с нетерпением ожидаю сообщения о ходе Вашей работы. До того как она будет окончена, мы вряд ли сможем приступить к редактированию статей.

Помимо того, что ожидаемые из Вашего Архива неопубликованные материалы надо будет располагать заново, надо еще будет уже печатавшиеся статьи сравнить с имеющимися рукописями. Готова ли Академия предоставить их нам? Сравнение лучше всего могли бы провести редакторы отдельных томов. Это, разумеется, возможно, если материал можно будет разъединить. Я хотел бы также задать вопрос: не возьмут ли на себя, кроме Вас, еще некоторые русские ученые подготовку томов? Я был бы Вам признателен, если бы Вы при случае могли назвать мне два или три имени. Окончательное распределение всего материала между разными сотрудниками можно было бы предпринять только тогда, когда список их будет в некотором роде окончательным. Поэтому было бы целесообразно заблаговременно высказать пожелания. Вы сами любезно согласились взять на себя подготовку «*Theoria motuum planetarum et cometarum*» [22], но может быть, Вы решитесь взять на себя весь 14-й том второй серии (по проекту Штеккеля)? Я прикажу послать Вам несколько экземпляров этого проекта [17]. При желании в Ваше распоряжение можно предоставить и другие экземпляры» [23].

Это письмо вызвало в комиссии оживленную дискуссию. На совещании 28 ноября 1909 г. были высказаны разные соображения о принципах редактирования томов. Сонин считал, что редактор должен проделать заново не только выводы формул, но и проверить все вычисления, исправив все опечатки и ошибки, какие могут при этом обнаружиться. Залеман придерживался противоположного мнения: не надо делать никаких изменений, кроме исправления опечаток, и даже сохранить правописание оригинала. Ляпунов полагал, что повторение выводов формул желательно, но не считал возможным требовать от редактора повторения всех вычислений. Марков и Голицын придерживались того же мнения. Баклунд также считал необходимым повторение вывода формул, а относительно численных приложений находил возможным предоставлять решение вопроса в каждом отдельном случае на усмотрение редактора.

В заключение было решено спросить у председателя швейцарской издательской комиссии, какие принципы положены в основу решения рассмотренного вопроса [24].

Залеман поручил одному из помощников библиотекаря составить опись сочинений Эйлера, содержавшихся в 17 томах, принадлежавших Академии, с тем, чтобы ходатайствовать перед Общим собранием об оплате этому лицу 50 руб. за труд. Заведующего Архивом Академии наук Б. Л. Модзалевского попросили доложить комиссии о его поисках «Геометрии» Л. Эйлера на русском языке [20]. Его же попросили составить опись всех рукописей Эйлера, найденных в Архиве и продолжить при содействии Залемана дальнейшие поиски в Архиве. Сонин сообщил, что послал Г. Энестрёму список опечаток, обнаруженных им в первых четырех корректурных листах «Списка» Энестрёма [19]. Ляпунов заявил, что нашел в «Списке» И. Хагена [25] сочинения, не упомянутые в списке Энестрёма. Об этом решено было написать профессору Рудио. Кроме того, решили послать ему четыре тома Протоколов Академии [26]. Отно-



сительно 17 томов статей Эйлера было решено просить швейцарскую комиссию не разъединять их, если они будут посланы в Швейцарию.

В ответ на сообщение об этом заседании петербургской комиссии Рудио писал Баклунду 23 декабря 1909 г.:

«Большое спасибо за Ваше столь драгоценное письмо ко мне. Я ожидаю присылки обещанного указателя с большим нетерпением.

Тем временем мы привели здесь в порядок все организационные дела: избрали необходимые комитеты, установили регламенты их деятельности, их компетенцию. Конечно, это вещи побочные (äusserliche), которые к тому же потребовали большого труда и заседаний, но их тоже необходимо было привести в порядок. Теперь мы сможем, наконец, приступить к собственно редакционной работе. Прежде всего избран (в прошлое воскресенье в Берлине) Редакционный комитет. Генеральный редактор Рудио, соредакторы: гг. Штеккель и Крацер из Карлсруэ. То, что по крайней мере два редактора живут в одном и том же месте, очень полезно. Далее, для печатания и издания избран Тойбнер [21].

Редакционный комитет использует сейчас рождественские каникулы для того, чтобы выработать точный редакционный регламент, которым должен будет руководствоваться каждый из сотрудников. При этом мы, конечно, коснемся и затронутых вами вопросов об информации и прочем [см. выше о заседании Эйлеровской комиссии 28 ноября 1909 г. — *Е. О.*].

Я, в частности, придерживаюсь Вашей точки зрения, что все алгебраические формулы и вычисления, кроме астрономических, таких, как, например, Лунные таблицы, следует проверять.

Когда мы выработаем наш регламент, мы напечатаем его и предложим академиям и другим большим учреждениям на одобрение. Сделанные при этом предложения мы тщательно рассмотрим и обработаем.

Мне неизвестно, что у Хагена имеются работы, которые отсутствуют у Энестрёма. Но все же было бы полезно, чтобы г. Ляпунов пожелал перечислить их поименно» [27].

В следующем письме Рудио Баклунду (13 января 1910 г.) говорилось о получении некоторых материалов из Петербурга, в том числе «Перечня», составленного Б.Л. Модзалевским [28]. Рудио писал, что ездил в Карлсруэ в связи с подготовкой редакционного плана издания. Вместе со Штеккелем и Крацером они распределили все будущие тома в три серии и примерно наметили редакторов отдельных томов. Баклунду предлагалось поручить подготовку 14-го тома второй серии. Рудио сообщал, что для работы Баклунду будет послан уже в основном готовый том, так что речь пойдет только о критическом прочтении текста и корректуре. Астрономические тома (пять томов второй серии) распределены были предварительно так: т. 12 — английский астроном Уиттеккер (его адрес Рудио спрашивал у Баклунда), т. 13 — Баушингер, т. 15 и 16 — Баушингер и Кобольд.

Рудио повторил свою просьбу заполучить кого-либо из членов Петербургской академии наук или другого выдающегося русского математика, физика или астронома, чтобы он смог взять на себя один из томов какой-либо из серий издания [29].

Баклунд в неизвестном нам письме от 7 февраля 1910 г. сообщил, что на это предложение дали согласие академики Ляпунов и Марков. Рудио 13 февраля ответил:

«...я не хотел бы упустить случай поблагодарить Вас немедленно за Ваше дружеское письмо от 7 числа и сказать Вам, как я рад, что Вы приняли окончательное решение взять на себя весь 14-й том. В то же время благодарю Вас за приятное сообщение, касающееся гг. Ляпунова и Маркова. Я сразу же написал обоим соредакторам, Штеккелю и Крацеру, и предложил им указать тома, предназначенные этим господам. Как только получу, напишу непосредственно гг. Ляпунову и Маркову и попрошу их взять на себя указанные тома. Для издания Эйлера весьма желательно, чтобы Ваша Академия была представлена в нем тремя участниками... Проект редакционного плана находится в типографии и скоро будет Вам отправлен» [30].

Следующее письмо Рудио Баклунду посвящено составленному П. Н. Фусом сборнику сочинений Эйлера (видимо, речь идет о подобранных и переплетенных по его заказу печатных статьях Эйлера) (27 февраля 1910 г.): «Сегодня я пишу Вам специально по поводу «Конспекта» [31], составленного г. П. Фусом собрания трудов Эйлера. Это собрание, конечно, очень ценно для издания, почти необходимо. Если я правильно понимаю, оно было составлено Фусом специально для печатного издания и теперь сможет сыграть свою прежнюю роль. Так как, если не обращать внимания на копии, помеченные «Ms», а касаться только печатных текстов, которые все имеются в Вашей библиотеке, то использованию собрания в качестве печатного оригинала ничто не препятствовало бы. С другой стороны, нашему редакционному комитету едва ли, причем с непропорционально большими жертвами, удалось бы еще раз составить такое собрание.

После того как Ваша Академия приняла решение представить в распоряжение Эйлеровского комитета весь имеющийся в ее владении материал, который может служить для лучшего выполнения издания Эйлера, я могу лишь направить Вашей Академии просьбу: передать нам собрание Фуса как печатный подлинник. После окончания печатания, само собой разумеется, все сочинения были бы возвращены; естественно, что могли бы быть небольшие повреждения, какие случаются в типографии. Их не всегда удается избежать, но после успешного печатания, собственно говоря, оригиналы были бы бесполезны. В надежде, что Ваша Академия согласится на нашу просьбу, которая является почти вопросом жизни для Эйлеровского издания, остаюсь с глубочайшим уважением преданный Вам Ф. Рудио» [32].

По-видимому, экземпляр сочинений Эйлера, составленный П. Фусом, был послан в Цюрих, поскольку 22 июня 1910 г. Рудио писал: «Я еще не получил, к сожалению, официального полномочия от имп. Академии расчленить фусовский экземпляр и использовать его как оригинал для печатания. До тех пор пока мы не получим такого разрешения, мы не сможем приступить к работе. Конечно, с использованием экземпляра в качестве оригинала для печатания связано то, что будут делаться пометы, исправления и пр. Но комитет предусматривает, что этот экземпляр будет затем снова приведен в прежний порядок.

Представляется все более настоятельным, чтобы рукописи, список которых Вы мне любезно передали, Академия прислала в Цюрих. Кажется невозможным печатать том статей, не имея возможности сравнить их с рукописями. Четыре недели назад я написал об этом непременно секретарю вашей Академии г. фон Ольденбургу и сейчас осмеливаюсь вновь

передать Вам лично это пожелание в надежде, что Вам, возможно, удастся ускорить это дело. Я направил подобную просьбу о рукописях и в Берлинскую академию» [33].

В сентябре 1910 г. Рудио разослал от имени редакционного комитета редакторам томов собрания сочинений Эйлера следующие материалы: редакционный план (проект, на немецком и французском языках) [34]; два варианта проекта составленного Штеккелем распределения материала Эйлеровского собрания сочинений по томам и сериям [17]; список редакторов с адресами [35]; пробный лист из «Механики» Эйлера в качестве образца отпечатков шрифта, набора формул, расположения материала и пр. и образец оглавления и обложки [36]; упоминание о том, что фирмой Тойбнер еще раньше был выслан «Список сочинений Эйлера» Г. Энстрёма (корректурка первого выпуска) [19].

Рудио писал: «Предложенный Вам материал позволит Вам судить, содержит ли том, который Вы любезно согласились обработать, соответствующие его содержанию статьи, или в распределении материала требуются еще какие-то изменения (§ 26 редакционного плана). В самой природе вещей заложено, что многие статьи могли бы быть помещены в каком-либо другом томе, но ясно также, что этот вопрос нельзя решать независимо, сам по себе, и что в конечном счете решать должно собрание сочинений.

Принятое в просмотренном проекте Штеккеля распределение материала сложилось в результате давно идущих обсуждений и потому я хотел бы от имени редакционного комитета просить Вас ограничиться предложением изменений, которые покажутся Вам совершенно необходимыми. Я прошу Вас прислать мне Ваши сообщения до 15 ноября с.г. В то же время прошу Вас написать мне, до какого времени Вы желали бы держать у себя Ваш том (§ 27 редакционного плана) и за какой срок Вы предполагаете закончить его обработку» [37].

К этому письму были приложены указанные материалы.

Согласно редакционному плану предполагалось публиковать все работы Эйлера, как уже печатавшиеся, так и рукописные; его письма научного содержания; работы И. А. Эйлера, написанные под влиянием отца, Л. Эйлера, или самим Эйлером. Намечали также включить резюме статей Эйлера, напечатав их мелким шрифтом перед самими статьями; включить также сочинения Эйлера, изданные отдельными книгами; работы, премированные Парижской академией наук. Кроме того, должны были быть опубликованы «Похвальные слова» в честь Эйлера, написанные Н. Фусом и Кондорсе, а также предисловие об истории издания трудов Эйлера.

Статьи предполагалось печатать с первого оригинального издания, о других изданиях упоминать в примечаниях. Книги печатать по последнему изданию, отредактированному самим Эйлером. Отдельные книги надлежало печатать полностью. Сборники статей предполагалось расчленять на отдельные статьи и помещать их в соответствующих томах собрания сочинений.

Предусмотрены были примечания двух видов: подстрочные, связанные с соответствующим местом текста и исправлениями формул или текста, и в конце статьи, касающиеся всей работы в целом. При этом примечания должны ограничиваться необходимым и не превращаться в истори-

ческие экскурсии. В то же время нельзя обходить молчанием важные вопросы, такие, как, например, закон взаимности или риманову дзета-функцию. Статьи нумеруются по списку Энестрёма.

В § 27 редакционного плана говорилось, что классификацию всего материала по томам в соответствии с проектом Штеккеля проводит редакция. Каждый редактор тома получает уже готовый том, присланный редакционным комитетом. Он должен проверить текст статей, внести исправления и дополнения и отослать том в редакционный комитет. Он может внести предложения об изменении порядка расположения статей в этом томе или предложить включить в этот том другие статьи.

Печатание работ предполагалось вести на языке оригинала. Исправления текста должны были касаться лишь опечаток, заметных с первого взгляда (вставка пропущенных слов в угловых скобках, исправление ссылок на другие работы и рисунки и пр.). Примечания к статье даются на языке этой статьи. Предисловия к томам — на языке, выбранном автором предисловия.

В соответствии с тем, что решили петербургские академики, говорилось, что текст и формулы надо проверять, все формулы пересчитать. Желательно проверять и вычисления, особенно в работах по чистой математике. Астрономические таблицы не пересчитывать (§ 31).

Надлежало сравнивать печатные тексты с рукописными. В формулах требовалось исправлять опечатки и ошибки, заметные с первого взгляда, а ошибки оригинала указывать в примечаниях (текст статьи давался уже исправленным).

Ошибки, которые приводили к неверным результатам и исправление которых требовало больших исправлений в оригинале, оставались. При первом появлении такой ошибки надо было дать подстрочное примечание и по возможности указать верный результат, а то и вывод.

Кроме ошибок, упомянутых в предыдущих пунктах, имелись ошибки «неизлечимые». Например, связанные с употреблением расходящихся рядов, которые могли приводить к верным результатам. В этих случаях, кроме подстрочных, в конце работы полагалось дать общее примечание и в нем указать на другие работы Эйлера и верные исследования, вышедшие позже (§ 34). Вообще следовало указывать наиболее важные работы, где рассмотрены указанные проблемы.

Были также оговорены условия работы редакторов отдельных томов и редакционного комитета. С каждым редактором тома редакционный комитет заключал договор. Если редакторов у тома было несколько, договор заключался с их представителем, но на титульном листе указывались фамилии всех редакторов тома (§ 24).

Проект, составленный Штеккелем, был рассмотрен редакционным комитетом, исправлен и подписан Рудио, Крацером и Штеккелем.

Видимо, Ляпунов и Марков обратились к Рудио за некоторыми разъяснениями, так как в письме Рудио (без имени адресата), сохранившемся в фонде академика А. Н. Крылова [38], говорилось: «Поскольку невозможно было упомянуть все мельчайшие подробности в редакционном плане, позволю себе сообщить Вам, что совершенно не обязательно делать специальную рукопись. Вы можете сделать *в самом томе*, на полях или внизу страницы, те исправления и примечания, какие сочтете нужным. Если в пункте 44 идет речь о большом значении материалов, то этим хо-

тели только сказать, что *ничто не должно пропасть*. Тома предназначены для того, чтобы ими пожертвовать, следовательно, можно в них вписывать рукописные замечания, пометы, исправления и пр. После того как работа над томом будет окончена, так что он будет подготовлен к печати, Вы отошлете его главному редактору, т. е. мне. В соответствии с пунктом 45 Вы *позднее* отошлете г. Крацеру или г. Штеккелю корректуры, которые Вы проверите, а также материалы, предоставленные в Ваше распоряжение... Надеюсь, что рассеял Ваши сомнения, прошу Вас, милостивый государь и дорогой коллега, принять выражение моего глубокого уважения. Ф. Рудио» [38].

Материалы из Архива Академии наук были отобраны, снабжены перечнем [28] и отправлены Рудио в Цюрих. Вместе с ними были посланы две доски с гравированными портретами Эйлера.

29 октября 1910 г. Рудио писал Баклунду: «Сердечное спасибо за Ваше любезное письмо от 23 числа и за Ваши энергичные усилия по поводу рукописей. Как только они придут, я сообщу Вам и, конечно, Вашей Академии. Меня очень радует, что Вы в состоянии быстро подготовить свой том. Обратите внимание на то, что астрономия в пересмотренном штеккелевском проекте занимает несколько другое место, чем в первоначальном.

Руководящим для нас при этом было предложение К. Г. Я. Якоби объединить все работы, относящиеся к задаче трех тел (см. переписку К. Г. Я. Якоби и П. Н. Фуса [5, с. 55]). Так появились тома 13 и 14. Затем появилось желание предпринять более узкое, чем раньше, разделение. Прежний том 16 теперь разделен на три части, а том 15 — на две, так что этот том 15 содержит «Theoria motuum» (Берлин, 1744 (E66)), которую Вы выбрали, поэтому Вам теперь достанется том 15, хотя его содержание не вполне совпадает с прежним томом 14. Я надеюсь, что Вы согласитесь с изменениями и что Вам можно будет послать для работы том 15. Но это можно будет сделать лишь после 15 ноября, так как тогда мы получим все ответы на наш циркуляр 36» [39].

С редакторами отдельных томов редакционный комитет заключил договоры. Вот, например, как выглядит договор с Ляпуновым [40]:

«Договор с редактором отдельного тома  
издания Эйлера

Между Швейцарским обществом естествоиспытателей, представленным председателем редакционного комитета г. профессором Ф. Рудио в Цюрихе, с одной стороны, и г. профессором доктором А. Ляпуновым, с другой стороны, сегодня заключен следующий договор, местом выполнения которого является Цюрих.

§ 1. Для издаваемого Швейцарским обществом естествоиспытателей собрания сочинений Эйлера профессор доктор А. Ляпунов выражает готовность подготовить следующие части: т. I-13 (Интегралы) и обязуется проводить работу в соответствии с редакционным планом, а в случае необходимости вносить изменения по желанию редакционного комитета.

§ 2. Г. профессор доктор А. Ляпунов получает материалы для работы от редакционного комитета и обязуется представить свою работу этому комитету *in vide, вполне подготовленном для печати*. Срок представления работы — июнь 1913 г. Все посылки между договаривающимися сторонами совершаются бесплатно.

§ 3. Швейцарское общество естествоиспытателей обязуется со своей стороны после окончания печатания выплатить г. сотруднику гонорар в размере 30 фр. (тридцати франков) за печатный лист из 8 страниц и прислать ему 10 экземпляров подготовленного им раздела.

§ 4. В случае смерти г. сотрудника или в случае невыполнения им своего обязательства редакционный комитет вправе заключить договор с другим сотрудником. Все претензии первого сотрудника при этом аннулируются.

Цюрих, 10 октября 1911 г., профессор доктор Ф. Рудио.

С.-Петербург, 10 октября 1911 г. А. Ляпунов» [40].

А. М. Ляпунов немедленно приступил к работе над присланным ему томом Эйлера (см. ниже) и в апреле 1912 г. уже отправил подготовленный к печати том Рудио. Тот ответил 2 мая 1912 г. (н. ст.): «Милостивый государь и глубокоуважаемый коллега! Имею честь подтвердить получение материалов, относящихся к Вашему тому, и спешу повторить мои поздравления и мою благодарность. Но было бы бесполезно вступать в переписку по поводу Вашей работы в настоящий момент, так как в этом году еще невозможно будет передать материалы в типографию. Она очень загружена сейчас сразу четырьмя томами. Я, возможно, поеду в Кембридж [41] и тогда буду иметь удовольствие поведаться с Вами» [42].

В 1913 г. Рудио обратился в Петербургскую академию наук с просьбой одобрить новый редакционный план. По-видимому, такое одобрение им было получено. 20 ноября 1913 г. Рудио писал Баклунду: «Прежде всего я должен подтвердить получение четырех взносов по 50 фр. Этот повод я хотел бы использовать для того, чтобы сердечно поблагодарить Вас за энергичную поддержку, которую Вы каждый раз оказываете эйлеровскому изданию. Дело бодро продвигается вперед. Через несколько дней появится десятый том [43]. Мы вполне обеспечены обработанным материалом на ближайшее время, так что с томом, который Вы любезно взяли на себя, можем ждать сколько потребуется. Как только Вы пожелаете, я могу Вам предоставить материал.

Одновременно с этим письмом посылаю Вам циркуляр вновь образованного Общества Леонарда Эйлера [44], так как Вы должны иметь представление о финансовом положении предприятия. Я не хотел бы посылать циркуляр, принимая во внимание тот ценный вклад, который Вы уже внесли, но циркуляр должен быть разослан всем сотрудникам» [45].

Баклунд согласился вступить в это новое Общество, чтобы поддержать финансами издание сочинений Эйлера. В ответ на его письмо (вероятно, от 19 декабря 1913 г.) Рудио 23 января 1914 г. писал: «Большое спасибо за Ваше милое письмо от 19 числа и за Ваше вступление в Эйлеровское общество. Вашим эйлеровским томом Вы можете заниматься любое нужное время. Было бы вполне достаточно, если бы он прибыл в течение 1915 г.» [46]. Но, видимо, по состоянию здоровья и по другим причинам (началась первая мировая война) Баклунд не смог приступить к работе над эйлеровским томом. Он скончался в 1916 г.

Предложенное в новом редакционном плане изменение распределения материала между томами коснулось и тома, над которым работал А. М. Ляпунов. 19 июня 1914 г. Рудио писал ему: «Как Вы помните, разделение, принятое вначале для издания сочинений Эйлера, должно было быть изменено. В соответствии с первоначальным планом трактаты по интег-

ралам должны были выйти в двух томах — 12 и 13. Новое разделение, на которое имп. С.-Петербургская академия наук дала свое согласие, предусматривает большее число томов и, следовательно, трактаты по интегралам появятся в трех томах: тома 17, 18, 19. Том 17 будет содержать номера с 59 по 464 по списку Энестрёма [47]; том 18 — номера с 475 по 640 [48], том 19 — номера с 651 по 819 [49].

Том, отредактированный г. Гутцмером из Галле, появится через несколько недель: два других тома — 18 и 19 — должны вскоре последовать за ним. Но в томе 18 трактаты с 475 по 594 были подготовлены г. Гутцмером, а трактаты с номера 606 по 640 — Вами. Нам остается лишь указать на фронтисписе тома 18: «подготовлен Августом Гутцмером и Александром Ляпуновым», в то время как том 17 подготовлен только г. Гутцмером, а том 19 — только Вами. В коротком предисловии можно еще упомянуть специально, что трактаты с 475 по 594 были просмотрены г. Гутцмером, а с 606 по 640 — Вами. Отдельные примечания можно обозначить «А. Г.» для первых трактатов и «А. Л.» для вторых так, чтобы не могло произойти никаких недоразумений.

Гутцмер заявил, что он согласен с таким способом действий, который к тому же кажется единственно возможным, и я прошу Вас дать согласие, чтобы я мог передать в типографию том 19, в котором Вы сотрудничаете» [50].

О том же писал В. А. Стеклов А. А. Маркову: «В Cambridge'e видел Рудио. Он передал Вам поклон. Говорит, что в 43-х томах Эйлер не поместится, не хватит средств на печатание. Придется некоторые тома разделить на два, иначе очень толсты выйдут. Опасается, как бы подписчики не запротестовали. Делал об этом доклад на съезде. В октябре будет в Цюрихе, Вы его там застанете. Прошу передать ему от меня поклон» [51].

Видимо, Марков побывал в Цюрихе и побеседовал с Рудио относительно томов, в которых он должен принять участие.

К сожалению, все тома, в которых участвовали А. М. Ляпунов и А. А. Марков, вышли в свет уже после их кончины. Из томов с участием Ляпунова том 18 вышел в 1920 г., т. 19 — в 1932 г. В 18-м томе осталось упоминание о сотрудничестве Ляпунова в том виде, как это намечал Рудио [52]. В томе 19 появились, кроме фамилии Ляпунова, еще две: А. Крацер и Г. Фабер. В предисловии к этому тому, написанном Рудио [53], сказано, что на долю этого тома выпала нелегкая судьба. Сначала — 3 ноября 1918 г. — умер А. Ляпунов, затем — 10 мая 1924 г. — Гутцмер, который успел еще вместе с Рудио и Крацером довести до конца том 18. Но для подготовки 19-го тома требовалось проверить корректуры [которых, кстати сказать, было несколько! — *Е. О.*]. Крацер составил обзор статей, содержавшихся в этих трех томах. Он был напечатан в 19-м томе. Это был последний научный труд Крацера. Место Крацера занял Г. Фабер, который довел этот том до конца, проверил корректуры, сделал ряд примечаний. Он же закончил и опубликовал обзор, сделанный Крацером. Поэтому под ним стоят две подписи: Крацер и Фабер. Корректуры 18-го тома начал проверять Ляпунов, а закончили Рудио, Гутцмер и Крацер.

В предисловии к т. 18 Рудио писал: «Швейцарское общество естествоиспытателей будет с благодарностью помнить о его [Ляпунова. — *Е. О.*] сотрудничестве и живом интересе к изданию Эйлера» [52, т. 18, с. VII].

Примечания Ляпунова, помеченные его инициалами «А. Л.», разнообразны и многочисленны. Иногда это просто ссылки на соответствующие работы Эйлера, помещенные в этом или других томах. Таковы примечания на с. 263, 283, 293, 322, 375, 399, 466 и др. в томе 18. Имеется много исправлений в тексте предыдущих изданий. На с. 288 тома 18 Ляпунов пишет, например: «В предыдущем издании неверно повторяется № XII». В таких случаях в текст внесено соответствующее исправление, а о том, что было неверно, сказано в примечании. Иногда изменен текст предыдущего издания, в таких случаях в подстрочных примечаниях говорится, как он выглядел раньше. Имеются исправления вычислений. На с. 271 т. 18 более серьезное примечание: «Эта формула имеет значение только тогда, когда  $0 < \omega < 2\pi$ , откуда следует такое условие:  $0 < \theta < 2\pi$ ».

Большое существенное примечание имеется на с. 314—315 т. 18. Оно относится к статье Эйлера «Об использовании исчисления мнимых величин в анализе» (E621) Ляпунов пишет: «Этот ряд расходится, но формула, данная Эйлером в § 37, может быть доказана следующим образом...» И дает свой вывод формулы Эйлера. В примечании на с. 278 т. 18 сказано: «Хотя это не вполне доказано, но здесь на самом деле можно положить  $p = q\sqrt{-1}$ , поскольку, когда значения  $p$  остаются по абсолютной величине достаточно малыми, интеграл может быть разложен в ряд по степеням  $p$ . А. Л.». На с. 383 в примечании говорится: «Если величина  $f$  отрицательна, то интегралы не существуют». На с. 401: «Очевидно, это условие не является необходимым». В примечаниях на с. 318 даны ссылки не только на работы Эйлера, но и на книгу Л. Маскерони, изданную в Павии в 1790—1792 гг. В т. 19 на с. 318 Ляпунов ссылается на «Дифференциальное исчисление» Эйлера и другие его труды, а на с. 316—317 — на работу Н. Бернулли о суммировании ряда обратных квадратов и письма Н. Бернулли к Эйлеру от 13 июля и 24 октября 1742 г., опубликованные П. Н. Фусом в 1843 г.

Таким образом, Ляпунов основательно поработал над своим томом и следовало бы посвятить специальное исследование его работе над сочинениями Эйлера. Нескольким примечаниям его относится к использованию расходящихся рядов Эйлером. Вероятно, § 31 и 32 в редакционном плане были вызваны замечаниями Ляпунова, сообщенными им Рудио.

А. А. Марков участвовал в подготовке к печати двух томов первой серии — т. 4 и 5 (Арифметические сочинения, т. 3 и 4). Оба тома изданы после смерти Маркова: т. 4 — в 1941 г., т. 5 в 1944 г. На титульном листе т. 4 сказано, что его редактировал Р. Фютер. Но в предисловии Фютера говорится, что этот том был просмотрен сначала Ф. Рудио, потом обработан для печати А. Марковым с использованием рукописей этих статей. К несчастью, смерть помешала Маркову закончить эту работу. Все примечания помечены инициалами их составителей [54, с. VII].

Примечания Маркова также разного характера. Есть ссылки на работы Эйлера. Ряд примечаний посвящен исправлению текста первоначального издания. Они выглядят так: «Editio princeps: R. Correxit A. M.» (В первоначальном издании: R. Исправил А[ндрей] М[арков]) (Т. 4, с. 131). Исправлено много ошибок в вычислениях, в том числе и при составлении таблиц. На с. 47 т. 5, например, исправлены числа, для которых формула  $x^4 - tx^2y + y^4$  может быть сведена к квадрату. В ряде случаев исправлены значения неизвестных, дающие решения уравнений. Вставлены



решения, пропущенные Эйлером. Исправлены некоторые формулы. На с. 269 т. 4 дается ссылка на одну работу Ф. Грубе, где, как замечает Марков, доказательство Эйлера дополнено. Имеются и более существенные замечания.

В т. 5 особенно много примечаний Маркова, причем большинство относится к сравнению печатного текста с рукописным.

На титульном листе т. 5 помещено только имя Р. Фютера, но в предисловии к тому, написанном Фютером, говорится: «А. Марков провел первоначальный просмотр всех статей этого тома». К сожалению, смерть помешала окончанию им этой работы. В т. 5 напечатано также предисловие А. Шпайзера ко всем томам по теории чисел.

Таким образом, А. М. Ляпунов и А. А. Марков провели огромную работу по редактированию эйлеровских сочинений, которая обычно не упоминается в их биографиях и которая до сих пор еще не исследована.

О. А. Баклунд, как указывалось, ничего сделать не успел, однако, как видно из переписки его с Рудио и протоколов заседаний Петербургской эйлеровской комиссии, ему принадлежит большая заслуга в оказании помощи изданию полного собрания сочинений Эйлера на первом этапе и в привлечении к участию в этом издании петербургских академик А. М. Ляпунова и А. А. Маркова.

Дальнейшее участие русских ученых в издании трудов Эйлера прервала война. Начало возобновления связей между Академией наук и Швейцарским обществом естествоиспытателей после окончания первой мировой войны отражено в переписке академиком А. Н. Крылова и В. А. Стеклова.

2 мая 1921 г. А. Н. Крылов, находившийся в это время в заграничной командировке, писал В. А. Стеклову, вице-президенту Российской академии наук (так называлась Академия наук с 1917 по 1925 г.):

...ректор Цюрихского университета проф[ессор] Fueter (матема[тик]), руководящий теперь изданием сочинений Эйлера, весьма заинтересован, будет ли Петерб[ургская] академия продолжать участвовать в этом издании и в подписке на 40 экземпляров его.

Я переговорил с представ[ителями] Н. Т. Отд[ела] и указал, что Академия получила уже по 40 экземп[ляров] вышедших 11 томов, следовательно, отказ от дальнейшей подписки недопустим и независимо от ассигнований на Матем[атический] кабинет мне уже разрешено приобрести вышедшие с 1914 г. 5 томов по 40 экз. каждого для Академии наук. Кроме того, я списался с проф[ессором] Fueter'ом относительно возможности продолжения издания, которое теперь встречает финансовые затруднения как вследствие вздорожания, так и вследствие отказа Парижской академии не только от субсидии, но и от подписки на 30 экз[емпляров], которые она получала, «вследствие того что издание производится германской фирмой».

Я думаю, что если наша Академия выяснит Совету Народных Комиссаров международный характер такого издания, как труды Эйлера, и научное его значение, необходимость поддержать это издание и дать возможность довести его до конца, то Совнарком не откажет в необходимых средствах. Вы лучше меня знаете, как составить надлежащий доклад, и я думаю, это дело такое, что для него можно обратиться и к самому Влад[имиру] Ильичу.

Я получил приглашение проф[ессора] Fueter'а приехать в Цюрих (он исключител мне необходимые разрешения, трудно получаемые), чтобы переговорить по этому поводу и затем доложить это дело Академии. Я о всех моих переговорах (причем, само

... б ой разумеется, я не буду принимать на себя никаких обязательств, ибо не имею полномочий Акад[емии] буду немедленно доносить Вам.

Кроме того, проф[ессор] Fueter прислал мне прилагаемое письмо Комиссии по изданию сочинений Эйлера на имя Петерб[ургской] акад[емии] наук от 12 янв[аря] 1921 г. с уведомлением, что за время войны вышло 5 томов, которые в числе 10 экземпляров подносятся в дар Академии, и доставку их принял на себя г. Charles Moog. До моего отъезда из Петрограда я ничего не слышал об этом письме в Академии; от Вас тоже никаких об этом уведомлений не получал, следовательно, Ch. Moog еще не приехал в Петроград [56].

К письму Крылова было приложено следующее обращение Швейцарского общества естествоиспытателей:

Эйлеровск ая комиссия

Петроградская академия наук                      Гельветического общества естествоиспытателей  
Базель, 12 января 1921 г.

Господа, большое предприятие Гельветического общества естествоиспытателей — издание полного собрания сочинений Леонарда Эйлера — испытало, как и все другие, разрушительное действие большой войны и ее последствий. Мы не только должны были преодолеть чрезвычайные трудности с печатанием, но нам оказалось невозможно разослать уже оконченные тома своим подписчикам из воюющих стран. Несмотря на трудности всякого рода, комиссии удалось опубликовать в течение прошедших лет пять томов сочинений Эйлера.

Петроградская академия с самого начала была самой благородной и самой могущественной опорой нашего предприятия, стремящейся увековечить славу и заслуги одного из наиболее знаменитых своих членов. И в знак глубокой признательности мы позволим себе предложить вам в подарок 10 экземпляров этих томов. Господин Шарль Моор, член Большого совета города Берн, любезно предложил отвезти эти тома в Петроград. Пожалуйста, окажите ему любезный прием. В надежде, что наши отношения скоро нормализуются, просим вас, господа, не отказать в продолжении вашей ценной благосклонности к нашему предприятию и принять выражение нашего глубочайшего уважения.

Подписали: Фриц Саразин (Fritz Sarazin), президент Эйлеровской комиссии Гельветического общества естествоиспытателей [57].

В. А. Стеклов ответил на письмо А. Н. Крылова и обращение Швейцарского общества естествоиспытателей письмом от 12 мая 1921 г.: «Получил, уважаемый Алексей Николаевич, ... Ваше «донесение» и письмо от комитета по изданию Эйлера. Во-первых, Академия еще при Вас решила продолжать свое содействие изданию трудов Эйлера и в комитет вместо А[лександра] Мих[айловича] [58] избрала меня. В заседании 9 мая по почину А. А. Маркова опять был поднят вопрос о сношении с комитетом в Цюрихе. Я предложил составить подробное заявление от нашего Отделения, указать членов от нашей Академии и прошу Цюрихский комитет уведомить нас о ходе работ и дальнейшем предлагаемом их направлении. Заявление это я переслал в Ревель Гутману, дабы тот направил его по принадлежности. Как раз на другой день после этого решения получил Ваше донесение. Хорошо было бы, чтобы Вы при поездке в Цюрих лично передали наше заявление и изъяснили подробности. Мы с Серг[еем] Федор[овичем] [Ольденбургом] командированы опять Общим собранием в Москву и 16 мая уезжаем; одно из дел — устроить для Академии обмен

изданиями и книгами с заграницей. Конечно, примем все меры, чтобы получить нужные кредиты по изданию и покупке 40 экземпляров Эйлера, и думаю, в этом успеем. Своевременно сообщим Вам. Опасаюсь только, что Вы раньше уедете в Париж...» [59].

15 июня 1921 г. А. Н. Крылов описал Стеклову свою поездку в Цюрих. «В Цюрихе я пробыл 10 дней: было создано заседание комиссии по изданию Эйлера, для чего из Базеля приехал председатель *Naturforschende Gesellschaft* [Швейцарского общества естествоиспытателей. — *Е. О.*] Fr. Sarazin. Комиссия особенно благодарна Петрогр[адской] академии за живое участие в издании сочинений Эйлера и за предоставление рукописных материалов. Все рукописи были мне показаны, находятся в полном порядке и сохранности в особом помещении в университете.

Я обещал комиссии, что доложу Академии о состоянии дел по изданию, а пока постараюсь и со своей стороны похлопотать перед нашим Научно-Техническим отделом в Берлине, ведающим приобретением книг и журналов за границей и научным издательством, и убедить его, что издание сочинений Эйлера является истинно международным предприятием, в котором Россия особенно заинтересована, поэтому приобретение 40 экз[емпляров] томов по *номинальной* цене 25 фр. = 250 гер[манских] марок за том оказывает поддержку этому изданию и вполне соответствует задачам Н. Т. О. [60]. Председатель Н. Т. О. проф[ессор] Н. М. Федоровский и его ближайшие сотрудники А. А. Третлер и Е. Г. Лундберг [60] со мною вполне согласились и сегодня отправили фирме Teubner чек на 60 000 марок за 6 вышедших томов по 40 экз[емпляров] каждого. Teubner пришлет это все в Берлин, в Н.Т.О., и на возвратном пути я все это захвачу с собой для доставки в Академию» [61].

За годы войны были изданы: в первой серии т. 2 (1915), т. 3 (1917), т. 13 (1914), т. 17 (1915), т. 18 (1920) — и должен был выйти в 1921 г. еще один том — т. 14 второй серии.

А. Н. Крылов сообщил также, что в связи с кончиной профессора Штеккеля нет редактора для тома с «Теорией движения твердых тел» и Рудио был бы рад (Рудио был главным редактором издания) предложить эту работу кому-либо из членов Петроградской академии наук. «Я обещал сообщить об этом Вам, и или Вы сами возьмите этот труд на себя, или Яков Викторович [62], и я охотно бы Вам в этом помогал: впрочем об этом потолкуем при встрече» [61].

В. А. Стеклов согласился взять на себя подготовку тома, посвященного теории движения твердого тела. Узнав об этом, А. Н. Крылов пообещал ему достать у антикваров оригинал этой работы Эйлера, помимо того, который пришлет Рудио, чтобы был лишний экземпляр, если потребуется привлечь к работе молодых сотрудников для проверки выкладок, корректуры и пр. [63]. В августе 1922 г. Крылов телеграфировал Стеклову, что на пароходе «Красный Профинтерн» с курьером Шюте отправлены на адрес Академии 12 ящиков сочинений Эйлера (6 томов по 40 экземпляров) [64].

В. А. Стеклов не успел поработать над трудами Эйлера. Работа на посту вице-президента Академии наук отнимала много времени, а время было трудным. В 1974 г. была напечатана «Записка» А. Н. Крылова, в которой дано краткое изложение истории издания «Opera omnia» и участия в нем русских ученых [65] (см. также [66]).

## ПРИМЕЧАНИЯ

1. С. г. Acad. sci. St.-Petersb. ann. 1844 // Rec. actes séance publ. Acad. sci. Pétersb., 1845.
2. Oeuvres complètes en français de L. Euler. Bruxelles, 1839. T. 1—5 (E786).
3. Anzeige // J. für reine und angew. Math. 1843. Bd. 26. S. 368.
4. ЛО Архива АН СССР, ф. 1, оп. 1-а, № 70, л. 67—67 об.
5. Ожигова Е. П. Математика в Петербургской академии наук в конце XVIII — первой половине XIX в. Л.: Наука, 1980.
6. Briefwechsel zwischen С.-G.-J. Jacobi und P.-H. von Fuss. Leipzig, 1908.
7. Поссэ К. А. Чебышев Пафнутий Львович // Венгеров С. Критико-биографический словарь русских писателей и ученых. СПб., 1897—1904. Т. 6. С. 1—23.
8. Euler L. Opera postuma. Petropoli, 1862. Vol. 1, 2.
9. Отчет о деятельности имп. Академии наук по Физико-математическому и Историко-филологическому отделению за 1907 г. СПб., 1907. С. 168—172.
10. Biermann K.-R. Aus der Vorgeschichte der Euler-Ausgabe 1783—1907 // Leonhard Euler. 1707—1783. Basel, 1983. S. 489—500.
11. Отчет о деятельности имп. Академии наук... за 1907 г. С. 170—171.
12. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 2, № 29, л. 1.
13. Международный союз академий (МСА) (или Международная ассоциация академий) был основан в 1900 г. В 1901 г. под председательством Г. Дарбу в Париже прошло первое Общее собрание этой организации. Каждые три года правление организации находилось в другой стране. Представителями Петербургской академии наук в МСА вначале были К. Г. Залеман и А. С. Фаминцын. В 1912—1914 гг. правление Союза находилось в Петербурге, представителем был О. А. Баклунд. В 1914 г. правление должно было переместиться в Германию, но в связи с началом первой мировой войны поступило предложение перевести его в Амстердам. Однако это перемещение не состоялось и Союз прекратил свое существование. Новый Международный союз академий был организован уже после окончания первой мировой войны.
14. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 2, № 29, л. 1.
15. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 3, № 308, л. 1—1 об.
16. Швейцарское (или Гельветическое) общество естествоиспытателей (Schweizerische naturforschende Gesellschaft, Helvetische naturforschende Gesellschaft) основано в Цюрихе в 1815 г. Ежегодные ассамблеи Общества проводятся в разных городах Швейцарии. В сентябре 1909 г. заседание проводилось в Лозанне. Там было принято решение об издании полного собрания сочинений Эйлера.
17. Проект редакционного плана издания сочинений Эйлера был прислан на немецком и французском языках (см.: ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 2, № 29, л. 14—29). Кроме того, были присланы проекты распределения материала издания по томам, составленные П. Штекелем. Первый проект был опублик.: Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zürich. 1909. Bd. 54. S. 1—28 (Entwurf einer Einteilung der Sämtlichen Werke L. Euler, von P. Stäckel); второй вариант, просмотренный редакцией, опублик.: Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 1910. H. 5—6. S. 104—116 (см.: ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 2, № 29, л. 192—207, 208—215). Были присланы и другие материалы, в том числе список редакторов отдельных томов (см.: ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 2, № 29, л. 12—13).
18. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 3, № 308, л. 2—3.
19. Eneström G. Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers // Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 1910—1913. Ergänzungsб. 4, Lief. 1—2. Экземпляр корректурных листов списка Энестрёма имеется в ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 2, № 29, л. 80—191 об. Заглавие списка см. там же, л. 219—220.
20. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 2, № 29, л. 5. Экземпляр, напечатанный на машинке с некоторыми исправлениями (см. там же, л. 6). К протоколу заседания комиссии приложен доклад Б. Л. Модзалевского (л. 10—10 об.), в котором рассказывается, что Модзалевский по поручению комиссии провел исследование вопроса: была ли издана в 1765 г. «Геометрия» Эйлера в переводе с латинского. Он пересмотрел множество материалов, в том числе дела по канцелярии, гимназии, дела книжных лавок, типографии, но нигде не обнаружил никаких упоминающих об издании «Геометрии» Эйлера. В 1764—1765 гг. печаталась в академической типографии «Практическая геометрия» С. К. Котельникова, а в типографии

- Морского корпуса — «Генеральная геометрия» Н. Курганова. Видимо, по ошибке автором одной из этих книг был сочтен Эйлер. Н. Я. Сонин основывался, должно быть, на словах В. В. Бобынина из «Русской физико-математической библиографии» (М., 1889. Т. 2, вып. 1, № 22. С. 13). О рукописях Л. Эйлера по геометрии см. статью: *Белый Ю. А.* Об учебнике Л. Эйлера по элементарной геометрии // Ист.-мат. исслед. 1961. Вып. 14. С. 123—284.
21. Известная книгоиздательская фирма в Лейпциге Б. Г. Тойбнера — В. G. Teubner.
  22. *Euler L.* *Theoria motuum planetarum et cometarum...* Berolini, 1744 (E66). Opera II-28.
  23. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 3, № 308, л. 4—5 об.
  24. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 2, № 29, л. 7—8.
  25. *Hagen J. G.* *Index operum Leonhardi Euleri.* Berolini, 1896.
  26. Видимо, печатные «Протоколы заседаний Конференции имп. Академии наук». СПб., 1897—1911. Т. 1—4.
  27. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 3, № 308, л. 6—7 об.
  28. Перечень рукописей Леонарда Эйлера, хранящихся в Архиве Конференции имп. Академии наук / Сост. Б. Модзалевский. СПб., 1910. (Подписано: «За непременно секретаря А. Карпинский».)
  29. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 3, № 308, л. 8—9 об.
  30. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 3, № 308, л. 10—11.
  31. Список печатных сочинений Л. Эйлера, собранных П. Н. Фусом (и, видимо, переплетенных) для предпологавшегося издания собрания сочинений Эйлера.
  32. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 3, № 308, л. 12—13. Значок «Ms.» означает, очевидно, «Manuscript», рукопись. Таким образом, в переплетенных томах, кроме печатных работ Эйлера, находились также копии некоторых его рукописных сочинений.
  33. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 3, № 308, л. 14—15 об. Речь идет об С. Ф. Ольденбурге, постоянном секретаре Петербургской академии наук с 1904 по 1929 г.
  34. Редакционный план см.: ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 2, № 29, л. 14—21 об. (нем.), л. 22—29 (фр.).
  35. Список редакторов собрания сочинений Эйлера см.: ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 2, № 29, л. 12—13.
  36. Пробный лист из «Механики» Эйлера см.: ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 2, № 29, л. 33—34 об. Обложка и оглавление — л. 221—224.
  37. «Циркуляр», направленный редакционным комитетом редакторам отдельных томов и подписанный Ф. Рудио, см.: ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 2, № 29, л. 11—11 об.
  38. ЛО Архива АН СССР, ф. 759, оп. 1-а, № 14, л. 5—5 об. (рука не его, но подпись Ф. Рудио).
  39. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 3, № 308, л. 17—18. По-видимому, распределение материала по томам было еще раз изменено, так что предназначавшийся Баклунду том 15 второй серии оказался томом 28 той же серии. Видимо, это было связано с тем, что тома по механике были подготовлены раньше, чем по астрономии, и их оказалось значительно больше, чем предполагали заранее.
  40. ЛО Архива АН СССР, ф. 257, оп. 2, № 6, л. 3 об. — 4.
  41. Международный конгресс математиков в Кембридже состоялся 22—28 августа 1912 г. Участвовавшие в конгрессе В. А. Стеклов, А. М. Ляпунов, Б. Б. Голицын, Ф. Рудио могли здесь обсудить всевозможные вопросы, связанные с изданием трудов Эйлера.
  42. ЛО Архива АН СССР, ф. 257, оп. 1, № 52, л. 1—1 об.
  43. *Euler L.* *Opera omnia.* Sér. I. Vol. 10 / Ed. G. Kowalewski. Leipzig etc., 1913. Там опубликовано «Дифференциальное исчисление» Эйлера.
  44. Циркуляр Общества Леонарда Эйлера: *Einladung zum Beitritt zu einer L. Euler-Gesellschaft.* Подписан Ф. Рудио и др. См.: ЛО Архива АН СССР, ф. 257, оп. 2, № 6, л. 5—6.
  45. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 3, № 308, л. 20—21.
  46. ЛО Архива АН СССР, ф. 707, оп. 3, № 308, л. 22—22 об.
  47. В томе 17 первой серии «Opera omnia» были помещены статьи Эйлера с номерами по списку Энстрёма: E59, E60, E162, E168, E254, E321, E391, E421, E462 — E464.

48. В т. 18 первой серии «Opera omnia» были помещены следующие статьи Эйлера: E475, E490, E500, E521, E539, E572, E587 — E589, E594, E606, E620, E621, E629, E630, E635, E640, E651, E653.
49. В т. 19 первой серии «Opera omnia» были напечатаны статьи Эйлера: E656, E657, E662, E668 — E675, E688 — E690, E694, E695, E701, E707, E721, E752, E807, E816, E819.
50. ЛО Архива АН СССР, ф. 257, оп. 1, № 52, л. 2—3 об.
51. ЛО Архива АН СССР, ф. 173, оп. 1, № 20, л. 7 об.
52. Предисловие Ф. Рудио к т. 18 первой серии «Opera omnia». 1920. P. VII.
53. Предисловие Ф. Рудио к т. 19 первой серии «Opera omnia». 1932. P. VII—VIII.
54. *Euler L.* Opera omnia. Sér. I. Vol. 4.
55. *Euler L.* Opera omnia. Sér. I. Vol. 5.
56. ЛО Архива АН СССР, ф. 162, оп. 2, № 214, л. 18—19.
57. ЛО Архива АН СССР, ф. 759, оп. 3, № 244, л. 9 (копия, написанная рукой А. Н. Крылова). Подпись: Фриц Саразин (Fritz Sarazin).
58. А. М. Ляпунов скончался 3 ноября 1918 г.
59. ЛО Архива АН СССР, ф. 759, оп. 3, № 244, л. 7—7 об.
60. Научно-технический отдел ВСНХ был учрежден декретом Совета народных комиссаров 16 августа 1918 г. Н. М. Федоровский в августе 1920 г. был направлен в Берлин в качестве руководителя Бюро иностранной науки и техники НТО (БИНТ НТО). Целью этого Бюро было установление связей с иностранными учеными, сбор информации о новейших открытиях и достижениях мировой науки и техники, закупка и издание иностранной технической литературы, издание научной литературы. Евгений Германович Лундберг — журналист, издавал литературу для ВСНХ, сотрудник БИНТ, так же как и А. А. Третлер.
61. ЛО Архива АН СССР, ф. 162, оп. 2, № 214, л. 22—24.
62. Яков Викторович Успенский.
63. ЛО Архива АН СССР, ф. 162, оп. 2, № 214, л. 29.
64. ЛО Архива АН СССР, ф. 162, оп. 2, № 214, л. 40—40 об.
65. Академик А. Н. Крылов / Публ. Ю. Х. Копелевич // Природа. 1974. № 1. Оригинал записки А. Н. Крылова хранится в ЛО Архива АН СССР, ф. 759, оп. 1-а, № 14, л. 1—4. Оpubл. с небольшими сокращениями.
66. В настоящее время (1987) в издании участвуют ученые Швейцарии, СССР, ГДР, Франции и других стран. В редакционный комитет четвертой серии входят: от Швейцарии Э. А. Фельман, В. Габихт, Ш. Блан, Ф. Фрикер, от СССР А. Т. Григорьян, А. П. Юшкевич, Г. П. Матвиевская, Г. К. Михайлов. Вышло три тома IV серии А: т. 1, 5 и 6. См.: *Габихт В.* I—III серии Эйлеровского издания Швейцарского естественно-научного общества // Вопр. истории естествозн. и техн. 1979. Т. 51. С. 78—86; *Юшкевич А. П., Григорьян А. Т.* Новая серия сочинений Л. Эйлера и Эйлеровский симпозиум в Базеле // Вопр. истории естествозн. и техн. 1973. Т. 44. С. 98—99; *Burckhardt J. J.* Die Euler-Kommission der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft: Ein Beitrag zur Editions-geschichte // Leonhard Euler. 1707—1783. Basel, 1983. S. 501—509.

# ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР И БЕРЛИНСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

К. ГРАУ

Леонард Эйлер провел в Берлине почти 25 лет своей семидесятишестилетней жизни. В 1741 г. он приехал в Берлин в возрасте 34 лет и покинул прусскую столицу в 1766 г., т. е. 59 лет от роду. Около трети (и почти половина прижизненных) его публикаций относятся, как указывал А. П. Юшкевич, к этой четверти века. Переписка Эйлера, судя по сохранившейся корреспонденции, была особенно интенсивной в берлинский период. И все же, хотя Берлин и его Академия наук были в 1741—1766 гг. местом жизни и работы Эйлера, полем его деятельности являлись как прежде, так и после вся огромная республика ученых.

Взглянем же, что происходило в научном мире и в жизни отдельных ученых вокруг Эйлера на протяжении этой четверти века.

Спустя несколько месяцев после отъезда Эйлера из России вернулся в Петербургскую академию наук проходивший стажировку в Германии замечательный русский ученый М. В. Ломоносов, впоследствии заботливо пестовавший Академию во многих областях науки до самой своей смерти. В 1743 г. родился основатель новой количественной химии А. Л. Лавуазье, а в 1749 г. — выдающийся математик и астроном П. С. Лаплас. В 1751 г. было основано Геттингенское общество ученых, в 1754 г. — Колумбийский университет в Нью-Йорке, а в 1755 г. начал деятельность Московский университет, ныне университет им. М. В. Ломоносова.

В 1743 г. завершилась Великая Северная экспедиция Петербургской академии наук, а в 1766 г. Л. А. де Бугенвиль начал свое кругосветное путешествие, которое обогатило географию многими новыми открытиями.

Отметим, далее, некоторые важные публикации. В 1749 г. появляется первый учебник по статистике Г. Ахенваля «Очерк новейшей государственной науки величайших европейских государств и республик» (*Abriss der neuesten Staatswissenschaft der vornehmsten europäischen Reiche und Republiken*). В том же году начинается издание известной многоотомной «Естественной истории» (*Histoire naturelle, générale et particulière*) Ж. де Бюффона. В 1751 г. К. фон Линней выпускает в свет свою «Ботаническую философию» (*Philosophia botanica*); в 1755 г. выходит из печати «Общая история природы и теория неба» (*Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*) И. Канта. В 1757—1766 г. А. фон Галлер суммирует в восьми томах «Начал физиологии человеческого тела» (*Elementa physiologiae corporis humanis*) исследования в этой области. В 1764 г. И. И. Винкельман публикует свою «Историю античного искусства» (*Geschichte der Kunst des Altertums*) как раз тогда, когда заканчиваются неудачей многократные попытки привлечь его на работу в Берлинскую академию.

Вот еще несколько примеров, иллюстрирующих научный прогресс в берлинский период жизни Эйлера, хотя их выбор, конечно, мог бы быть иным. В 1742 г. вводится используемая и сегодня стоградусная шкала термометра А. Цельсия. В 1745 г. Г. Э. фон Клейст и П. ван Мушенбрук

почти одновременно изобретают первый электрический конденсатор — лейденские банки. В 1747 г. Дж. Бредли открывает нутацию земной оси, а А. С. Марграф извлекает из свеклы сахар. В 1748 г. в письме к Эйлеру Ломоносов формулирует закон сохранения массы. В 1750 г. И. Т. Майер устанавливает отсутствие атмосферы у Луны, и И. А. Зегнер строит реактивное водное колесо. В 1752 и 1754 гг. Б. Франклин и П. Дивиц изобретают громоотвод. В 1757 г. Дж. Доллонд конструирует ахроматический телескоп, на возможность которого указал Эйлер десятью годами ранее. В 1758 г. Ф. У. Т. Эпинус открывает электрическую индукцию. В 1759 г. К. Вольф в «Теории зарождения» (*Theoria generationis*) открывает эпигенез. В 1760 г. Дж. Блэк проводит различие между температурой и количеством тепла, а И. Г. Ламберт основывает фотометрию. Наконец, в 1766 г. Г. Кавендиш устанавливает, что углекислый газ и водород воздуха — это различные газы.

Как свидетельствует опубликованная и аннотированная переписка Эйлера, он был знаком почти со всеми упомянутыми здесь лицами; с некоторыми из них он переписывался, с другими встречался лично. К сожалению, я не могу здесь подробно останавливаться на этих научных контактах.

А сам Эйлер — какие значительные исследования он публиковал в эту четверть века?

Не входя в содержание его физико-математических трудов, далеких от моей специальности, я ограничусь указанием, что за это время он опубликовал главным образом в Берлине и в Петербурге около 250 сочинений — статей и книг и среди последних — классические монографии: «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума» (1744), двухтомное «Введение в анализ бесконечных» (1748), двухтомная «Морская наука, или трактат о построении и вождении кораблей» (1749), «Теория движения Луны, представляющая все ее неравенства» (1753), «Дифференциальное исчисление» (1755) и «Теория движения твердых тел» (1765). Все эти книги изданы на латыни.

Берлинские годы Эйлера не были спокойным временем, когда ученые могли оставаться равнодушными к событиям общественной жизни, всецело отдаваясь науке. Король Пруссии Фридрих II, с которым, как высказался Вольтер, взошли на трон наука и искусство, вел продолжительные войны, последствия которых в конце концов ощущались и в столице. В 1760 г. русские войска двинулись на Берлин. Франция, Англия и Испания боролись за колонии в Северной Америке, Англия укрепляла свое господство в Индии. С 1751 г. в Берлине стала выходить «*Vossische Zeitung*», газета, которая знакомила его жителей с текущими событиями в мире. Эйлер с тем большим вниманием относился к перипетиям Семилетней войны, что они непосредственно касались жизни его и его семьи, как и других жителей Пруссии и, в частности, Берлина. Его интерес к политической злобе дня проявился, например, в письмах к жившему тогда в Англии швейцарцу К. Ветштейну. В 1758 г. Эйлер написал ему прекрасные слова: «Да окажет нам господь милость и нишпочлет нам вскоре почетный и долгий мир». И хотя мы, здесь в Москве и у нас в Берлине, не ждем, как Эйлер, «почетного и длительного мира» от бога, но стремимся к завоеванию и сохранению мира не меньше, чем в свое время Эйлер.





*Старое здание Берлинской академии наук на улице Унтер ден Линден  
Со старинной гравюры. Центральный архив Академии наук ГДР*

Каким представился город Берлин Эйлеру более 200 лет назад?

Дольше всего Эйлер жил в Берлине на улице Беренштрассе; памятная плита на доме, заменяющем теперь тот, в котором он жил, сегодня напоминает о его пребывании в этом месте. Отсюда недалеко до улицы Унтер ден Линден, которая вела от королевского дворца прямо на запад в Тиргартен. На улице Унтер ден Линден помещалась Академия наук. И сегодня на этом месте находятся некоторые учреждения Академии, правда, не в здании времен Эйлера. Он познакомился с первой, построенной в начале XVIII в., обсерваторией, где до 1744 г. собирались члены Академии. Позднее они заседали в Королевском дворце до 1752 г., а в последующем же году Академия наук получила новые помещения в одном из зданий на Унтер ден Линден, недалеко от обсерватории. Новое здание Академии, в котором она находилась до 1903 г., было построено на месте старого, сгоревшего от пожара 21 августа 1742 г. Здесь можно вспомнить, что в июле 1763 г. Эйлер в письме к Г. Ф. Миллеру называл в качестве одной из причин своего отъезда из Петербурга в 1741 г. страх своей жены перед пожарами. И вот вскоре после переезда в Берлин он пережил здесь то, чего опасался в Петербурге. Но он явился и свидетелем строительства нового здания Академии, а также строительства по соседству с Академией дворца принца Генриха, брата Фридриха II, где ныне находится университет имени братьев Гумбольдтов. На площади напротив с 1741 до 1743 г. Г. фон Кнобельсдорф строил здание оперы, сегодняшней



*Прусский король Фридрих II*

Государственной немецкой оперы. Позади этого здания в 1747 г. началось строительство католической церкви святой Гедвиги, закончившееся в 1773 г., когда Эйлер уже вернулся в Петербург. Путь от обсерватории ко дворцу пролегал мимо арсенала, построенного до 1706 г., над которым работал архитектор А. Шлютер, скончавшийся в 1714 г. в Петербурге. В здании арсенала расположен сегодня Музей немецкой истории. Дворец, разрушенный во второй мировой войне, стал жертвой империалистической жажды власти, против которой сегодня выступают все больше и больше миролюбивых людей. На этом месте при рабоче-крестьянской власти ГДР был построен Дворец Республики.

Интересовался ли Эйлер архитектурой городской среды, в которой он жил и работал? Во всяком случае некоторые сохранившиеся или восстановленные архитектурные детали в центре современного Берлина напоминают о времени деятельности Эйлера, когда Берлин был столицей государства, король которого в 1741 г. призвал швейцарского бюргера из царской России в Берлинскую академию наук.

Крепостные крестьяне, угнетенные суровой службой армейцы «солдатского короля» Фридриха Вильгельма I, порабощенные в цехах ремесленники и подмастерья и трудящиеся мануфактур — все они не возлагали больших надежд на улучшение своего положения с приходом к власти в 1740 г. нового короля Фридриха II. Дворянству же нечего было бояться просвещенного абсолютизма нового короля. Положение дворянства как господствующего класса осталось неприкосновенным после того, как попытки восстановления прежних сословных прав потерпели неудачу. Свободнее вздохнула только впитывавшая идеи века Просвещения прослойка интеллигенции, надеявшаяся, что Берлин превратится из Спарты в Афины: казалось, что вместе с Фридрихом II взойшла на трон сама философия.

Был ли тридцатитрехлетний бюргер Эйлер в 1740 г. свободен от иллюзий относительно двадцативосьмилетнего короля Фридриха? Как следует из его писем к своему другу Г. Ф. Миллеру, он охотно принял приглашение в Берлин. Хотя еще до того, как покинуть Петербург, Эйлер знал, что «теперь король был занят завоеванием Силезии», что он вел войну, а музам велел молчать, но он возлагал надежду на предстоящую реорганизацию Академии, обещанную Фридрихом II. Представлял ли себе Эйлер тогда, что ожидало его в Берлине, сколь трудным окажется его положение, несмотря на большие научные успехи? Перед своим отъездом из Петербурга Эйлер писал Миллеру: «Его величество пожаловал

г. Вольфу в Марбурге звание своего тайного советника и назначил вице-канцлером университета в Галле... Но в Академию в Берлине, кроме меня, ни одного иностранца не приглашали, не считая г. Мопертюи из Парижа, руководившего французской экспедицией в Лапландию и затем установившего действительную фигуру Земли». Фридрих II, Христиан Вольф и П. Л. Моро де Мопертюи оказали, каждый по-своему, существенное влияние на пребывание Эйлера в Берлине — большее, чем другие современники. И в 1766 г. Эйлер покинул прусскую столицу совсем не столь восторженным, каким он прибыл в нее 25 лет назад, когда последовал зову короля. С этой точки зрения исторически в каком-то смысле оправдано, что на памятнике Фридриху II, установленному в Берлине на Унтер ден Линден, отсутствуют портрет и имя Эйлера, но увековечены Вольф и Мопертюи.

В 1741 г. Эйлер был приглашен в старое, основанное в 1700 г. Г. В. Лейбницем Общество наук. 25 мая 1741 г., незадолго до приезда Эйлера в Берлин, скончался президент Общества Д. Э. Яблонски, вместе с Лейбницем и другими основавший Общество и руководивший им с 1733 г.

Берлинское общество наук, или, если угодно, Академия, состояло тогда из четырех классов: физического, математического, филолого-германистского, или исторического, и филолого-востоковедческого. Математическим классом, в который вступил Эйлер, руководил до своей смерти в 1744 г. А. де Виньоль, занимавшийся вопросами хронологии. Сразу же по приезде в Берлин Эйлер стал директором обсерватории. Этот пост он сохранил до своего отъезда в 1766 г.

За ту четверть века, в течение которой Эйлер работал в Берлине, можно четко проследить три отрезка в развитии Академии: во-первых, реорганизационный период с 1741 до 1746 г., во-вторых, время президентства Мопертюи с 1746 до 1759 г. и, в-третьих, 1759—1766 гг., в которые Эйлер особенно интенсивно боролся за свое положение в Берлине.

Ситуация, в которой в 1741 г. очутился Эйлер, была очень сложной. Обещанная королем реорганизация Академии заставляла себя ждать. Фридрих II занят был, как выразился в цитированном письме к Миллеру Эйлер, «завоеванием Силезии». Захватнические войны, развязанные прусским монархом, не только оттянули более чем на пять лет организацию новой Академии, но и наложили тень на весь берлинский период жизни Эйлера. Эти обстоятельства не помешали, однако, Эйлеру приняться за работу. В частности, забота о прогрессе астрономии, данные которой использовались в энциклопедических календарях, прибыль от продажи которых составляла важнейшую часть доходов, побудила Эйлера пригласить в качестве астронома и члена Академии И. Киса. Появившийся в 1743 г. седьмой том «Miscellanea Berolinesia», первой серийной публикации Берлинского общества наук, содержал на 242 страницах пять трудов Эйлера, с самого начала подтвердившего тем самым свою творческую продуктивность.

В 1743 г. в Берлине было основано новое Литературное общество (Société Littéraire), в работе которого Эйлер участвовал наряду с другими членами Академии. Сохранился 21 протокол заседаний Общества с августа 1743 г. до января 1744 г. За эти полгода Эйлер прочитал пять докладов. Оченью 1743 г. Фридрих II объединил Литературное и Научное

общества в новую Академию наук, официально основанную в январе 1744 г. Эйлер теперь стал директором математического класса. Его большое влияние на организацию науки в Берлине доказывает тот факт, что он отказался от должности директора математического класса, пока не были объединены оба существующих научных общества.

Переговоры с Мопертюи, начатые Фридрихом II в 1740 г., были завершены лишь в 1746 г.: 1 февраля этого года Мопертюи был назначен постоянным президентом Академии. В это время появился первый том публикаций новой Академии, в котором Эйлер вновь выступил с многочисленными трудами. 10 мая 1746 г. Академия получила новый устав, разработанный Мопертюи с учетом его руководящего положения в Академии. Так началось двенадцатилетие, в котором Эйлер вместе с президентом, а нередко как его заместитель развернул свою всеобъемлющую деятельность в Берлинской академии.

Как уже было сказано, я не стану касаться творческих достижений Эйлера в области физико-математических наук. Но я бы хотел указать на некоторые философские и научно-организационные аспекты берлинского периода деятельности Эйлера, которые считаю столь же важными, как и физико-математические. К тому же именно они, по-моему, сыграли решающую роль в прекращении деятельности Эйлера в Берлине в 1766 г.

Двадцать лет назад историк науки Г. Крббер во введении к составленной им философской подборке из эйлеровских «Писем к одной немецкой принцессе о различных предметах физики и философии» (*Briefe an eine deutsche Prinzessin über verschiedene Gegenstände aus der Physik und Philosophie. Philosophische Auswahl. Leipzig, 1964*), впервые изданных в 1768—1772 гг., пришел к следующему, достойному внимания заключению: «Слишком часто упускается из виду, что Эйлер своей деятельностью в Академии, своим выступлением против монадологии Лейбница и философии Вольфа, своей защитой математических принципов физики Декарта, своей ориентацией на новый, выросший из механики Ньютона материализм и, наконец, посредством своего влияния на молодого Канта решающим образом определил направление развития философской мысли в Германии середины XVIII века». В своей статье о Ньюtone в «Словаре философов» (*Philosophen-Lexikon. Berlin, 1982*) Г. Ю. Тредер пишет о борьбе за естественно-научную картину в эпоху Просвещения: «На основании грандиозных успехов механики Ньютона в физике и астрономии и после признания, начиная с Вольтера, философии природы Ньютона как научного фундамента философии эпохи Просвещения механика Ньютона была методически и по содержанию отождествлена с естествознанием вообще. Вольтер, Мопертюи, Эйлер, Даламбер и другие внедряли в противовес картезианству и монадологии Лейбница—Вольфа как господствующую картину мира ньютоновство». Кроме Ньютона и Декарта, все названные ученые были членами Берлинской академии.

С философией Вольфа, систематически развивающей учение Лейбница, и с учением Ньютона Эйлера встретился уже в Петербурге. Вольфианец Г. Б. Бильфингер, с 1725 г. представлявший экспериментальную и теоретическую физику в Петербургской академии, выступал здесь уже с 1726 г. с публичными лекциями, в которых следовал «Основаниям ньютоновой философии» (1723) В. Я. с'Гравесанде, когда еще даже в Кембридже обучение шло по Декарту. Так как содержание лекций Бильфин-

гера неизвестно, остается открытым вопрос, относился ли он к Ньютону положительно или отрицательно, но этим было положено начало принятия Ньютона в Петербургской академии уже к прибытию Эйлера. На торжественном заседании Академии 1 августа 1726 г. математик Я. Герман выступил с речью об истории геометрии и важных математических открытиях. В этой речи, опубликованной в 1728 г., он говорил о «Математических началах натуральной философии» Ньютона и о разработке дифференциального исчисления Ньютоном и Лейбницем, причем объективно высказывался по вопросу о приоритете обоих исследователей, воздав должное заслугам каждого.

Резкий спор, вспыхнувший в Петербургской академии в 1729 г. между сторонниками и противниками Вольфа, происходил на глазах Эйлера. И, как справедливо писал Э. Винтер, Эйлер уже тогда стал убежденным противником Вольфа, каким и оставался на протяжении всей своей жизни.

В 1747 г. Эйлер в Берлине опубликовал на немецком языке книгу «Спасение божественного откровения от упреков вольнодумцев», в которой выступил против деизма. По времени это пришлось на окончание одной из дискуссий в Берлинской академии, связанной с поставленной ею конкурсной задачей: произвести анализ монадологии Лейбница. Эйлер, несмотря на обязанность как члена Академии быть в этом случае сдержанным, вмешался в спор, правда, анонимно, но его авторство было всем известным. Он выступил против Лейбница и тем самым против Вольфа, который в этой связи приписал Эйлеру, хотя и ошибочно, желание «властвовать во всех науках..., чем он очень вредит собственной славе, ибо лишь немногие имеют понятие о его научных заслугах, а также позорит Берлинскую академию наук ...» В то время противники философии Лейбница—Вольфа добились в Берлинской академии признания их позиции не без поддержки Эйлера.

Двадцатипятилетний Кант, тоже внимательно следивший за этими берлинскими стычками, рассматривал положение Эйлера совсем с другой точки зрения, чем Вольф. В 1749 г. Кант послал Эйлеру свои «Мысли об истинной оценке живых сил», появившиеся в 1746 г. В сопроводительном письме Кант дает следующее пояснение: «Та самая дерзость, которая побудила меня исследовать истинную меру сил природы и усилия защитников гг. Лейбница и Декарта, явилась причиной, позволившей мне решиться переслать это сочинение лицу, чья мудрость в состоянии вывести из этого плохого сочинения начало стремления к окончательному и полному урегулированию несогласия среди столь великих ученых». Реакция Эйлера на это письмо неизвестна.



*П. Л. де Моро де Мопертю,  
президент Берлинской академии*

Несколько позднее, с 1750 по 1753 г., Эйлер принял участие в одной, еще более важной полемике. Речь шла о принципе наименьшего действия, история которого, как показал Г. Ю. Тредер (1975), тесно связана с историей Берлинской академии от Лейбница до Эйнштейна. Открытие и разработку принципа приписал себе Мопертюи. Но это оспаривал швейцарский математик С. Кёниг, в 1749 г. избранный иностранным членом Берлинской академии. В 1751 г. Кёниг заявил и, как мы сегодня знаем, справедливо, что уже Лейбниц сформулировал этот принцип в одном своем письме. Эйлер, хотя и не вполне удовлетворенный изложением принципа у Мопертюи, встал на его сторону. Одновременно он дал первую математически корректную формулировку принципа. Под руководством Эйлера Берлинская академия наук в 1752 г. объявила упомянутое письмо Лейбница, оригинал которого Кёниг не мог представить, подделкой. В ответ Кёниг вернул Академии свой членский диплом. Только в 1913 г. была обнаружена еще одна копия письма Лейбница, достоверность которого была поставлена под вопрос в 1752 г.

В связи с этим спором в 1752 г. Вольтер опубликовал сатирическое сочинение, направленное против Мопертюи, «Диатриба доктора Акакии» (*Diatribes du Docteur Akakia*). Г. Гейнзиус писал тогда из Лейпцига Шумахеру в Петербург, что в нем весьма «жестко обходятся также и с почтенным г. проф. Эйлером». Сам Эйлер рассматривал этот спор как личную вражду, несмотря на то, что он лучше знал положение. По поводу «Диатрибы» он писал Шумахеру, что тот узнает из газет о публичном сожжении памфлета Вольтера палачом, и упоминал, что последний несколько раз нападал на Мопертюи и ранее. И хотя все это касалось весьма существенных моментов положения в научной жизни Берлина Эйлера и Мопертюи, Эйлер был, казалось, настолько уверен в правильности своего поведения, что даже содействовал распространению памфлета. Он писал Гейнзиусу в Лейпциг, что тот доставит Шумахеру особое удовольствие, переслав несколько экземпляров «Диатрибы», продажа которой в Берлине совершенно запрещена, между тем как, насколько он знает, ее можно раздобыть в Лейпциге.

Тогда как Мопертюи после этих распрей к началу 50-х годов XVIII в. был совершенно разбитым человеком, который почти полностью отошел от академических дел, научная слава Эйлера, несмотря на некоторые враждебные нападки, мало пострадала. Новейший биограф Эйлера Р. Тиле указывает две основные причины, обусловившие поведение Эйлера: «обязанность защищать своего президента и Академию» и «глубокую враждебность к философии Лейбница—Вольфа и к радикальному французскому Просвещению», причем последнее играло решающую роль. Оба названные идейные направления все более усиливались в Берлинской академии в 60-е годы и сыграли решающую роль в давно намеченном возвращении Эйлера в Петербург. К этому прибавилась, однако, еще одна причина, которая подорвала положение Эйлера в Берлинской академии.

Необычайно многосторонняя и успешная научно-организационная деятельность Эйлера в Берлине подробно документирована в трех томах серии «Берлинская и Петербургская академии наук в переписке Леонарда Эйлера» (*Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers*. Berlin. 1959—1976), изданных

А. П. Юшкевичем и Э. Винтером вместе с их сотрудниками, а также в труде Э. Винтера «Протоколы Берлинской академии наук. 1746—1766 гг.» (Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften. 1746—1766. Berlin, 1957), которые я использовал для моего доклада. Для экономии места и времени я не буду касаться опубликованного и интерпретированного там материала. Напротив, мне кажется необходимым в интересах завершения полной картины деятельности Эйлера в Берлине указать на, как мне кажется, все еще недостаточно принятый во внимание аспект деятельности Эйлера в Берлинской академии. Речь идет о его участии в управлении ее финансами.

Известно, что финансирование работы Академии с ее основания происходило в основном за счет доходов, получаемых от календарной монополии. Значительная часть календарных работ проводилась обсерваторией, руководимой Эйлером. С 1744 г. в новой Академии была введена единая календарная администрация, за работу которой отвечал Эйлер. Его важнейший сотрудник был календарный администратор Д. Кёлер. Эйлеру удалось значительно увеличить доходы с календаря. Позднее он даже предложил, чтобы Петербургская академия по примеру Берлинской начала издание календаря для России.

Как заявил Мопертюи, Эйлер показал себя за многие годы «своей честностью, своим умением и своим рвением» как самый подходящий руководитель деловых сделок Академии. Когда в 1753 г. после скандала с Кёнигом Мопертюи, уже неизлечимо больной, покинул Берлин, он писал Д. Кёлеру, что король одобрил передачу управления Академией на время его отсутствия Эйлеру. Тем самым Эйлер стал фактически руководителем Академии, в частности ее финансов.

В связи с хозяйственным восстановлением Пруссии после Семилетней войны был введен новый порядок в бюджете Академии. Это фактически означало реорганизацию календарного дела, подчиненного Эйлеру. В феврале 1765 г. Фридрих II создал комиссию для проверки финансов Академии. И хотя Эйлер вошел в состав этой комиссии, все же он, являвшийся до сих пор единственным ответственным лицом, естественно рассмотрел это решение как выражение недоверия к себе и к своему сотруднику Д. Кёлеру. Здесь следует еще вспомнить, что после смерти Мопертюи в 1759 г. Эйлер имел достаточно оснований ожидать, что отныне он станет не только фактическим руководителем Академии, но и ее президентом. При таких обстоятельствах, когда уже он обдумывал свой отъезд из Берлина, организация ревизионной комиссии была для него особенно жестоким ударом. Уже через четыре месяца с начала работы комиссии, не ожидая результатов, король 16 июня 1765 г. приказал преобразовать календарную администрацию Академии в календарную аренду.

Сделанные в одном документе от 3 октября 1765 г. предложения Эйлера создать два архива Академии, литературный и экономический, и объединить должность казначея Академии с должностью архивариуса финансового управления и тем самым усилить влияние такого администратора приняты не были. Вместо этого был создан один архив с двумя отделениями. После подачи своего заявления в ноябре 1765 г. Эйлер прекратил свою работу в экономической комиссии. Трения, связанные с финансовым управлением Академии, вместе с идеологическими спорами, в которых брали верх чуждые Эйлеру философские взгляды, повлияли на его уход

из Академии. Это убедительно показал в своем докладе «Был ли Леонард Эйлер изгнан из Берлина И. Г. Ламбертом?» К. Р. Бирман во время конференции в честь Эйлера в Берлине 16 сентября 1983 г.<sup>1</sup>

Только что названное мероприятие, организованное Эйлеровским комитетом при Академии наук ГДР в память 200-летия со дня смерти великого ученого, является предпоследним среди тех, которые я рассматриваю как предмет темы «Леонард Эйлер и Берлинская академия наук». Наша Академия, хотя и с различной интенсивностью, всегда чувствовала себя обязанной чтить наследие своего выдающегося члена Леонарда Эйлера.

После отъезда Эйлера из Берлина некоторые его труды еще издавались в серии мемуаров Академии. Дальнейшие связи были обусловлены отчасти тем, что сын Эйлера Иоганн-Альбрехт, ставший конференц-секретарем Петербургской академии, благодаря своей женитьбе оказался племянником неперменного секретаря Берлинской академии С. Формея: жена Формея и теща И. А. Эйлера были сестрами. Сохранилась до сих пор мало изученная обширная переписка между племянником и дядей. В первой половине XIX в. немецкий математик и академик К. Г. Якоби, изучивший протоколы Берлинской академии, многое сделал для освещения деятельности Эйлера в Берлине. В 1908 г. в Лейпциге была издана переписка между неперменным секретарем Петербургской академии П. Н. Фусом и Якоби «Об издании произведений Эйлера». Издание сочинений Эйлера, задуманное Берлинской и Петербургской академиями в 1907 г. в связи с 200-летием со дня его рождения, не осуществилось из-за денежных трудностей. Но эта же юбилейная дата побудила Швейцарское общество естествоиспытателей приступить с 1911 г. к публикации многотомного «Полного собрания сочинений Эйлера» (*Leonhardi Euleri Opera omnia*), издание первых трех серий которого близко теперь к завершению, а четвертая серия, включающая научную переписку и неопубликованные рукописи, начата несколько лет назад. Как известно, подготовка четвертой серии ведется совместно Швейцарской эйлеровской комиссией и Институтом истории естествознания и техники Академии наук СССР при участии ряда ученых ГДР и Франции.

Когда в 1925 г. Академия наук СССР праздновала 200-летие своего основания, Берлинская академия в своем приветственном адресе писала: «Находясь почти в том же возрасте, Берлинская академия в хорошие и плохие времена работала вместе с неизменным дружеским соревнованием, многие плодотворные идеи возникали и культивировались в них совместно, и носителями их были такие личности, как Готфрид Вильгельм Лейбниц и Леонард Эйлер, чьи имена и сегодня с неизменным блеском сверкают в мире». Добавим, что в 1924 г. Берлинская академия наук опубликовала переписку Эйлера с Ламбертом.

В наше время отношения между Академиями наук ГДР и СССР постоянно развиваются и углубляются. Это создает для нашей Академии наилучшие предпосылки для использования традиций Эйлера. В честь 250-летия со дня рождения Эйлера в 1957 г. в Берлине и в Москве были проведены совместные торжества обеих Академий, организована научная конференция в Берлине на тему «Эйлер и встреча немецкой и русской нау-

<sup>1</sup> Русский перевод этого доклада публикуется в наст. изд.— *Примеч. ред.*



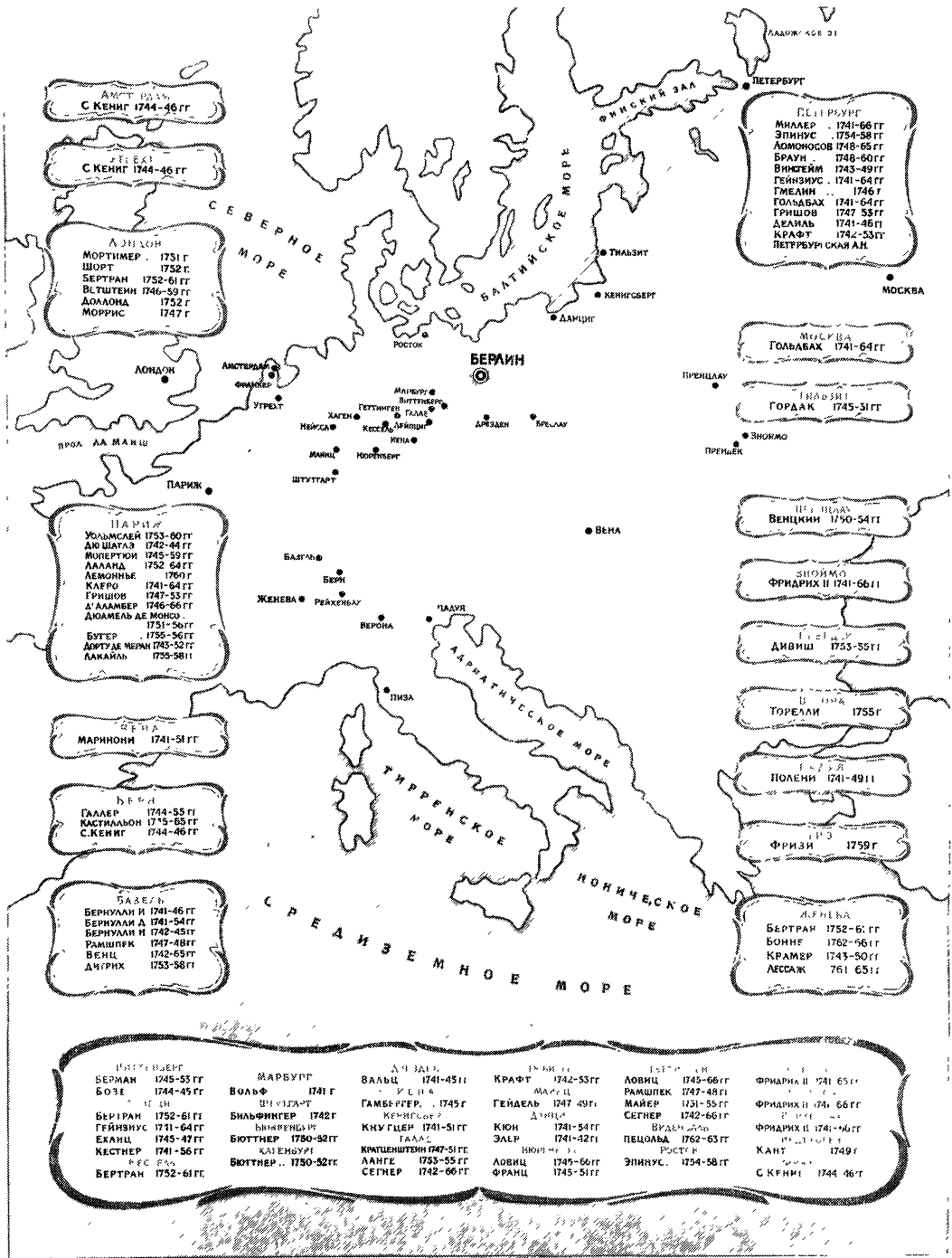


Схема переписки, которую вел Л. Эйлер из Берлина

ки и культуры в XVIII веке». Были опубликованы такие ценные издания, как два больших сборника памяти Эйлера, упомянутые выше три тома переписки Эйлера с Петербургской академией, а также протоколы Берлинской академии времен Эйлера. Эту традицию сотрудничества продолжали конференция Академии наук ГДР в сентябре 1983 г. с участием делегации Академии наук СССР и участие в настоящей конференции советской Академии нашей делегации. Все это я хотел бы рассматривать как вклад в тему «Леонард Эйлер и Берлинская академия наук». Эйлер чувствовал себя тесно связанным с Берлином. В одном из писем 1763 г. он писал своему другу Г. Ф. Миллеру о «столь многолетней связи со здешним городом Берлином».

Я говорил уже, что Берлин воздал в 1907 г. ему должную почесть, установив памятную плиту на месте, где он жил в непосредственной близости от Академии наук. В 1980 г. Академия наук ГДР учредила медаль Леонарда Эйлера «За выдающиеся заслуги в области математики, механики, кибернетики и теории автоматической обработки информации, выразившиеся в решении фундаментальных научных проблем и существенном ускорении научно-технического прогресса в ГДР». Этим Академия наук ГДР почтила одного из самых выдающихся своих членов, уроженца Швейцарии, работавшего с 20-летнего возраста до конца жизни в России и в Германии.

# БЫЛ ЛИ ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР ИЗГНАН ИЗ БЕРЛИНА И. Г. ЛАМБЕРТОМ?\*

К. Р. БИРМАН

9 ноября 1764 г. Леонард Эйлер и находившийся с января того же года в прусской столице Иоганн Генрих Ламберт обедали у пребывавшего в Берлине русского канцлера графа Михаила Илларионовича Воронцова. Ввиду намеченной реорганизации Петербургской академии темой разговора, как и состоявшейся ранее беседы с русским посланником в Берлине князем Владимиром Сергеевичем Долгоруким, были те «выгоды, которых может ожидать государство от хорошо устроенной академии, и то, каким образом ее члены могли бы объединять свои силы для общей пользы». Эйлер сообщал 10 ноября в Петербург об этом и о том, что Ламберт, который «составил план Баварской академии», «произвел наилучшее впечатление» на Долгорукого и что Воронцов «уверил в большом желании» видеть Ламберта поступившим на русскую службу. Он добавил, что «такое сообщество», члены которого объединяли бы свои силы для общей пользы, «отсутствует почти во всех академиях, ибо обыкновенно делается не более того, что может выполнить каждый сам по себе» [6, т. 1, с. 251]. Тезис, провозглашенный здесь Эйлером, как его и Ламберта общее убеждение, состоял в том, что коллективная работа эффективнее изолированных исследований. Самым естественным было бы предположить, что два таких одаренных человека, как Эйлер и Ламберт, знавших, разумеется, о чем они говорят, поспешили то воззрение, к которому они пришли, превратить в жизнь, т. е. проверить теорию практикой; короче говоря, — сотрудничать. Объединение творческих возможностей хотя бы их двоих — Эйлера, крупнейшего математика XVIII столетия, и Ламберта, столь же глубокого, сколь и разностороннего мыслителя в сфере математики, естествознания и философии, — во имя единой, служащей общей пользе цели, позволяло ожидать многого для науки и для Прусской академии. Произошло, однако, совсем иное. Сотрудничество не состоялось — напротив, возникли резкие разногласия. Почему так случилось, почему оба двигались напрямки собственными путями тогда, когда распоряжение короля предписывало им взаимодействовать, и почему в конце концов дороги их разошлись — все это мы попытаемся объяснить здесь, заодно исследовав высказанное еще современниками предположение, что причиной отъезда Эйлера из Берлина в 1766 г. был Ламберт [16, с. 344—345].

Когда Ламберта, находившегося еще в Аугсбурге, 9 апреля 1761 г. единогласно избрали членом Берлинской академии [7, с. 214; 15, с. 266—

\* Vertrieb J. H. Lambert L. Euler aus Berlin? // Abh. Akad. Wiss. DDR. Abt. Math. etc. 1985. N 1. S. 91—99. Доклад, прочитанный 16.09.1983 г. на научной конференции Академии наук ГДР, посвященной чествованию памяти Л. Эйлера. Перевод с нем. И. А. Головинского.

267] — это, без сомнения, объяснялось инициативой Эйлера. Отказ прусского короля Фридриха II одобрить это избрание не был виной Эйлера. Хотя после смерти Мопертюи в 1759 г. Эйлер, как директор математического класса, руководил практически всей Академией, титул президента, к его прискорбию, ему не давали и его полномочия были ограничены. Все решения по персональным вопросам принимал лично Фридрих II. Ламберт, впрочем, по-видимому, не представлял себе положения дел в Берлине, так как иначе непонятно было бы его высказывание в письме от 27 ноября 1764 г.: «Академия избрала меня членом три года назад, не имея возможности прислать мне диплом» [10, с. 228].

Во всяком случае несомненно, что Эйлер был весьма высокого мнения о Ламберте, что было многократно засвидетельствовано им в письмах как к Ламберту, так и к третьим лицам; с другой стороны, мы знаем, что Ламберт видел в Эйлере наравне с Даламбером первого математика своего времени [14, с. 31—32] и что это убеждение опиралось на основательное изучение трудов Эйлера [7, с. 212—214].

Поэтому, когда в январе 1764 г., следующего после окончания Семилетней войны, Ламберт прибыл в Берлин, чтобы добиться того, что не удалось ему в Баварской академии, а именно получить место, которое соответствовало бы его способностям и склонностям и кормило бы его, Эйлер был рад с ним встретиться. Можно прямо сказать, что в оригинальном и разностороннем ученом, который был моложе его на 21 год, он увидел того, кто был достоин его покровительства. Все устраивалось наилучшим образом. Через четыре месяца после приезда Ламберта Эйлер сообщал: «Теперь мы тоже имеем здесь такого человека<sup>1</sup>, выдающейся ученостью которого я уже давно восхищаюсь. Это г-н Ламберт, который прославился своей «Фотометрией»<sup>2</sup> и другими трудами и сделал больше всех для создания Баварской академии<sup>3</sup>. Но, так как он швейцарец-протестант из Мюлуза, он не смог поладить с иезуитами и поэтому лишился своей значительной баварской пенсии. Он прибыл сюда по собственному побуждению, и Его королевское величество беседовал с ним некоторое время, не подав пока, однако, виду, что его примут здесь на службу. Но, пожалуй, скоро для него появится достойное место. Он со всех точек зрения есть тот человек, кто обладает талантами для основания целой Академии» [6, т. 1, с. 245]. Более высокую похвалу, пожалуй, трудно себе представить. Совершенно очевидно, что Эйлер был чрезвычайно расположен к Ламберту. Это было вызвано не только уважением к глубине и разносторонности его работ, сюда добавлялось еще многое, что определяло такую высокую оценку.

Прежде всего уроженец Базеля, Эйлер считал Ламберта, выходца из Мюлуза в Эльзасе, как мы только что видели, своим швейцарским соотечественником, на что имелось основание: Мюлуз в то время принадлежал как «присоединенная область» к конфедерации швейцарских кантонов. Эйлер вправе был ожидать также, что принятие Ламберта еще более усилит и так уже значительную швейцарскую академическую фракцию

<sup>1</sup> Т. е. такого, как Иоганн III Бернулли, которого Эйлер перед этим назвал «очень искусным умом, который сделает честь Академии».

<sup>2</sup> См. [9].

<sup>3</sup> Ср. [8, 12].

в Берлине. Но не только это: надо полагать, что, сверх того, при посредстве продвигаемого им Ламберта он надеялся также укрепить свои собственные позиции внутри группы швейцарских академиков. Ибо та никоим образом не составляла монолитного блока, а отчасти вообще не поддерживала притязаний Эйлера, как директора математического класса, на руководство всей Академией. Особенно Иоганн Георг Зульцер из Винтертура, вольфианец, а вместе с ним и влиятельнейший академик-швейцарец Иоганн Бернхард Мериан из Листаля, близ Базеля, относились к Эйлеру не без критичности и не во всем согласны были за ним следовать. И здесь мы приходим еще к одной причине того, почему Ламберт мог стать нужным Эйлеру: верующий в откровение Эйлер, с его глубокой антипатией к философии Лейбница, Эйлер, чьим делом было «спа-



*И. Г. Ламберт*

сение откровения от возражений вольнодумцев» [2], играл видную роль во французской консистории, т. е. во францужско-реформатской церкви, и вместе с тем — в гугенотской «колонии» в Берлине [5]. Он активно сотрудничал в различных комиссиях, например в советах, занимавшихся земельными участками или вопросами катехизиса. С 1763 г. старейшина общины Фридрихштадта <sup>4</sup>, Эйлер приобрел значительное влияние на задачу церковных должностей, в делах сиротских домов и в других благотворительных вопросах, на проведение мероприятий по улучшению посещаемости церкви и по наставлениям для детей. Мы не ошибемся, предположив, что в продвигаемом им Ламберте он видел потенциального союзника в борьбе против «духа равнодушия». И действительно, Ламберт примкнул к гугенотской церкви в Берлине, оправдав тем ожидания Эйлера; как впервые было сообщено несколько лет назад, свое последнее пристанище Ламберт нашел в 1777 г. на кладбище францужско-реформатской общины в Доротеенштадте <sup>5</sup> [1, с. 123]. Произошло ли его приобщение под влиянием Эйлера, имело ли оно началом его собственные убеждения, играли ли роль другие обстоятельства (предки тогдашнего проповедника в «колонии» Жана Пьера Эрмана <sup>6</sup> Эрматингеры, или Эрмендингеры, по-

<sup>4</sup> Фридрихштадт — район Берлина на левом берегу реки Шпрее. — *Примеч. пер.*

<sup>5</sup> Доротеенштадт — район Берлина на правом берегу Шпрее. — *Примеч. пер.*

<sup>6</sup> Ж. П. Эрман, впоследствии историограф и директор французской гимназии в Берлине, был родоначальником целой династии ученых, из которой отметим здесь лишь его сына — физика Пауля Эрмана, его внука — геофизика, совершившего кругосветное путешествие Георга Адольфа Эрмана и его правнука — египтолога Адольфа Эрмана.

стоянно проживали в Мюлузе) — все это мы оставим в стороне. Нет сомнения, однако, в том, что решение Ламберта вступить в гугенотскую церковь должно было еще более укрепить хорошее мнение о нем Эйлера: как видно из цитированного вначале сообщения Эйлера от 10 ноября 1764 г., между ними царило полное взаимопонимание. И вскоре после того, 10 января 1765 г. Эйлер довел до сведения Академии указ короля о принятии Ламберта в ученое сообщество [15, с. 306]. Перемена точки зрения короля, весьма раздраженно реагировавшего на персональное представление Ламберта, объяснялась опасением потерять его из-за Петербургской академии, куда рекомендовал его Эйлер [6, т. 1, с. 248, 249]. Эйлер не мог предположить, что конец гармоничного согласия был совсем близок.

Чтобы понять наступившую напряженность в отношениях, нужно напомнить кое-что о финансировании Берлинской академии.

В XVIII в. главным источником доходов Берлинской академии была ее монополия на календари в прусском государстве; после доходов, извлекаемых из нее, доходы от других привилегий — как, например, от издания сборника текущих нормативных актов или от руководства составлением географических карт, — оставались далеко позади. Идея календарной монополии восходила еще к Лейбницу<sup>7</sup>. В патенте на календари от 10 мая 1700 г. бранденбургского курфюрста Фридриха III (ставшего в 1707 г. прусским королем Фридрихом I) говорилось, помимо прочего: «Потому как Мы теперь по собственному высочайшему побуждению, а тем более что из милости, поручаем... всему Обществу<sup>8</sup> издание тех улучшенных и, кроме того, обычных календарей во всех наших курфюршеских и прочих землях<sup>9</sup>, и его тем самым имеем единственно и особо привилегированным, и чтобы тем предотвратить изготовление до сих пор так часто употреблявшихся частью неправильных, частью досадных и наполненных неподобающими небылицами, ничтожными пророчествами и постыдными рассуждениями календарей, к тому же выпускаемых некоторыми совершенно неопытными в тяжелом и кропотливом вычислении звезд людьми, и чтобы при этом выручаемые за них средства в будущем оставались в стране, то Мы сочли нужным такое Наше милостивейшее мнение и желание [...] объявить» [4, т. 2, с. 88]. Получение доходов от календарной привилегии, на которых держалось существование Общества, а с 1744 г. — Академии, сталкивалось сначала с разного рода трудностями [4, т. 1, с. 123—125]. Прежде всего, академические календари натолкнулись на неприятие читателей, которые неохотно расставались со своими календарями, до того времени выписывавшимися из-за границы, с их

<sup>7</sup> На приоритет в отношении этой идеи претендует Э. Вейгель из Йены [4, т. 1, с. 64—66].

<sup>8</sup> Берлинская академия наук, основанная в 1700 г. по проекту Лейбница, сначала называлась «Бранденбургским курфюршеским научным сообществом» (Kurfürstlich-Brandenburgische Societät der Wissenschaften), затем то «Королевским прусским», то «Королевским берлинским» научным обществом, а с 1744 г., слившись с Литературным обществом (Société Littéraire), она стала называться «Берлинской королевской академией наук» (Academia Regia Scientiarum Berolinensis). См.: Конелевич Ю. X. Возникновение научных академий. Л.: Наука, 1974. — *Примеч. пер.*

<sup>9</sup> К владениям бранденбургского курфюрста, помимо собственно курфюршества Бранденбург, принадлежали Восточная Пруссия, часть Померании и некоторые земли на Рейне. — *Примеч. пер.*

предсказаниями погоды и тому подобным; имелись также злоупотребления, ограничивавшие прибыли Академии, несмотря на явно возросший сбыт. С 1738 г. истинным распорядителем торговли календарями был казначей Давид Кёлер, который значительно увеличил их продажу, заодно не забывая и свои интересы. Временами он арендовал четыре из девяти видов календарей, издававшихся Академией [4, т. 1, с. 275]. Насколько хорошо шла продажа, можно видеть из того, что единственный книготорговец во Франкфурте-на-Одере только в декабре 1740 — январе 1741 г. взял 6750 календарей [4, т. 1, с. 261]. Что при заведовании Кёлера Академия получала только часть денег, причитавшихся ей для оплаты персональных и вещественных расходов, был всем известный секрет, и не было недостатка в попытках избавиться от этого чересчур ловкого человека, подозревавшегося в сокрытии от Академии от 25 до 50% средств [4, т. 1, с. 265; 11, с. 176]. Но Кёлер сделался таким незаменимым, что мог держаться десятилетиями. Высокопоставленные лица, протекторы, кураторы, президенты и так уже ничего не проверяли, и поэтому Кёлеру удавалось вновь и вновь вытаскивать голову из петли. Когда Эйлер в 1741 г. приехал из Петербурга в Берлин, он уже застал там Кёлера, но, пожалуй, никогда он не осознавал размеров ущерба, причиненного казначеем Академии. Кёлер был достаточно умен, чтобы понимать, что Эйлер мог стать для него опасным. Поэтому он всегда вел себя услужливо по отношению к нему и следил за тем, чтобы жалованье Эйлера выплачивалось пунктуально. Со своей стороны, Эйлер отвечал лояльным признанием тех заслуг Кёлера, которые, несомненно, имелись.

Хотя за время Семилетней войны 1756—1763 гг. доходы Академии по понятным причинам значительно сократились, но затем она получила кое-какую экономию — или, лучше сказать, должна была получить, поскольку на время войны король запретил замещение освобождающихся ставок и любые нововведения [4, т. 1, с. 350]. Теперь же, после заключения мира, финансы Академии нужно было упорядочить, нужно было распорядиться сбережениями и вложенными суммами, следовало реформировать управление. От ряда членов опять поступили жалобы на Кёлера. Он, как говорили, хотя и заботился о том, чтобы торговля календарями не пришла в упадок, но организовал ее все же не так, как можно было бы, и притом продолжал набивать свой карман. Опять-таки именно Эйлер воспротивился основательной реформе в отношении людей и дел и продолжал считать, что от казначея отказаться невозможно [4, т. 1, с. 363]. Тогда 21 февраля 1765 г. Фридрих II назначил академическую комиссию, которая должна была проверить, преобразовать и проконтролировать управление Академией и ее финансирование. В этот экономический орган, чаще всего называемый «королевской комиссией» (чтобы уже названием обозначить то, что свои полномочия она получила от монарха, а не от Академии), были назначены, помимо Эйлера, выше уже упомянутый Зульцер, противник Эйлера и истинный инициатор создания комиссии, также уже упомянутый Мериан, затем довольно незначительные Луи Исаак Де Бособр и Жан де Кастильон, и, наконец, самый молодой по членству академик Ламберт. Уже само назначение комиссии Эйлер воспринял как обиду. Она была образована против его желания, так что создание ее явилось его поражением. Но не только это. Эйлер предчувствовал — и, как очень скоро должно было оказаться, справедливо — угрозу урезы-

вания и без того ограниченных полномочий директоров классов, и прежде всего его собственных,— его, уже много лет при отсутствии президента практически руководившего делами Академии,— разумеется, в скромных пределах, предоставленных королем.

Но как бы ни были мрачны предчувствия Эйлера, он наверняка не мог предвидеть всей меры того, что ему сейчас предстояло. Теперь-то он узнал Ламберта совсем с другой стороны. Если Эйлер, чтобы поддержать авторитет Директориума Академии и тем по возможности ограничить деятельность экономической комиссии, стремился толковать свои полномочия в ней как можно более узко, то Ламберт развил в комиссии невероятную активность. Оказалось, что он обладал большими организаторскими способностями, которые он смог, наконец, свободно развернуть в этом органе на пользу Академии. Так что вполне естественно, что в самое короткое время между ним и Эйлером в комиссии возникли противоречия: один желал тормозить, другой — убыстрять. И поэтому наверняка не случайно то, что в письмах Эйлера сразу после образования этой комиссии какие-либо похвалы Ламберту совершенно отсутствуют, а затем Эйлер совершает попытку «отделаться» от Ламберта следующим характерным комплиментом: «Когда требуется дирижировать художниками и самому делать изобретение, то, пожалуй, никто в этом не был бы искуснее нашего г-на Ламберта» [6, т. 3, с. 235]. Действительно, талант Ламберта дирижировать Эйлер вдоволь ощутил уже в «королевской комиссии». Поэтому неудивительно, что очень скоро расхождения между Эйлером и Ламбертом в их способностях и симпатиях, в характерах и стиле жизни, в социальном происхождении и в возрасте начали брать верх над общностью землячества и религии, о которой говорилось, а также над их взаимным профессиональным уважением как ученых. Сын базельского пастора, Эйлер вышел, конечно, не из богатой семьи, но все-таки из условий, которые в сравнении с нуждой в доме портного Ламберта можно назвать золотыми. Имелась, далее, разница поколений. В 1728 г., когда родился Ламберт, Эйлер был уже адъюнктом Академии в Петербурге и приобретал первый опыт общения с руководителем академической администрации. (Впрочем, уроки, которые он извлек в Петербурге из знакомства с уроженцем Эльзаса И. Д. Шумахером, столь же ловким, сколь и беспринципным бюрократом, не могли остаться без влияния на позднейшее отношение Эйлера к Кёлеру: Шумахер показал ему, сколь опасно для ученого противопоставлять себя администратору.) Далее — образ жизни. Тут — живущий в Берлине, можно сказать, на довольно широкую ногу Эйлер, там — на первых порах прозябающий на грани прожиточного минимума Ламберт. В патриархально заведенном домохозяйстве Эйлера проживало около дюжины человек — членов семьи и гостей; он владел домами, садами, полями, лугами; он разбогател и многое мог потерять. По другую же сторону мы видим неженатого и неимущего Ламберта, которому сестра готовила скудные трапезы. Ему было нечего терять — он мог только выиграть. Вычислитель Эйлер был признан всей Европой как великий мастер своего дела; Ламберт же, хотя уже и не был неизвестен благодаря своим исследованиям истоков геометрических представлений и логического искусства, все-таки стоял на значительно более низкой ступени в иерархии славы. Привыкшему приказывать директору Эйлеру противостоял не склонный повиноваться Ламберт, прежде практиковавший как домаш-



ний учитель и частный ученый. Надо ли было удивляться тому, что покровительствовавший Эйлер оправданно рассчитывал на почтительное уважение со стороны его протеже Ламберта? В этом, однако, Эйлер тоже обманулся. Его право не было признано. Кроме того, сильно развитое как у Эйлера, так и у Ламберта чувство собственного достоинства имело различный характер. Оба были с полным правом, но без заносчивости преисполнены ощущения ценности своего вклада. Но если у Эйлера к убеждению в его значимости примешивалась благотворная доля скромности, то мнение Ламберта о собственном значении выражалось с победоносной наивностью. Это подтверждают, к примеру, высказывания обоих соперников — и таковые мы должны отметить в период после учреждения экономической комиссии — на вопрос Фридриха II, где они обучались тому, что они знают. Эйлер в 1749 г. отметил, что он всем обязан пребыванию в Петербургской академии [6, т. 2, с. 182], Ламберт же 15 лет спустя сообщил, что он сам был своим учителем в математике [3, с. 15].

Как сказано, все эти противоречия всплыли на поверхность, когда мнения в комиссии столкнулись. Это началось уже с вопроса о полномочиях комиссии. Эйлер не хотел без борьбы допускать, чтобы директоров Академии лишили власти. Так, он установил, что платёжные поручения комиссии требовали одобрения Директориума. Остальные «королевские комиссары» разделяли мнение Ламберта, что они наделены монархом правом самостоятельно вести дела [1, с. 119, 120].

Напряженность в отношениях усилилась при обсуждении того, как в дальнейшем должна быть организована продажа календарей, чтобы доходы Академии увеличились. В комиссии образовались три фракции. Одна предлагала сдавать продажу календарей в аренду; Эйлер хотел оставить Кёлера на измененных условиях; Ламберт высказывался за управление комиссией независимо от Директориума. Тогда Эйлер попытался посредством двух прошений Фридриху II провести свою точку зрения, но получил, как известно, грубый отказ: «Я не умею вычислять кривые, но что я знаю — так это то, что 16 000 талеров больше 13 000» [4, т. 1, с. 364]. Было приказано сдать торговлю календарями в аренду, и доходы Академии заметно поднялись вопреки мрачным предсказаниям Эйлера. Но на том раздоры не прекратились — более того, на заседаниях комиссии появился новый воспламеняющий материал. Когда приблизительно в начале 1766 г. член Академии Кастильон ходатайствовал перед математическим и физическим классами Академии об ассигновании средств на опыты и приобретение инструментов, Эйлер холодно заметил, что Математический класс поступил бы не по праву, занимаясь этим, так как ассигнование средств относилось к компетенции только экономической комиссии, а ведь к ней принадлежал, как заметил сын Эйлера, сам проситель Кастильон. Этим он оказал бы им слишком много чести, добываясь с их стороны одобрения, которое не имело бы ровно никакого значения. Ламберт, напротив, ответил спокойно и объективно, выразив уверенность, что после представления доклада об опытах и последующего финансового отчета экономическая комиссия возместит расходы. В документах можно найти многочисленные свидетельства такого рода трений между Эйлером и Ламбертом в 1765—1766 гг. Часто неудовольствие звучит лишь между строк, но иногда оно проявлялось и открыто. Один документ, касающийся ботанического сада, содержит такой пример. Было сочтено необходимым про-

известии определенные расходы. Эйлер согласился, что, однако, не помещало ему через несколько дней воспротивиться платежу. В известном смысле, он, как директор, отказал в том, что разрешил, как член комиссии: одной рукой взял назад то, что только что дал другой. Об этих действиях Ламберт 19 октября весьма сухо сказал: «Было бы слишком долгим трудом объяснять причины всех аномалий человеческого рассудка. Начиная распутывать, он все более запутывается. Феномены, которые здесь возникают, могли бы служить развлечением для тех, кто видит их близко, если бы речь не шла о вещах, о которых затем нужно суметь дать отчет. Г-н Эйлер вредит себе, раскаиваясь назавтра в решениях, которые он принял, одобрил и подписал днем раньше, как, например, когда дело касалось архива, а в данный момент — когда речь идет о восстановлении сада. По этому последнему вопросу мы имеем его собственную подпись, так что я думаю, что он, естественно, должен быть заинтересован в том, чтобы она имела значение» [17]. Сказано было сильно и ясно и, как можно предполагать, не осталось тайной для Эйлера, ибо академическая жизнь не обходилась без сплетен. Все шло так, как и должно было: уже через месяц, 25 ноября 1765 г., Эйлер в официальной «Декларации к Академической комиссии» в резких и недвусмысленных выражениях отверг дальнейшее сотрудничество с нею на прежних условиях [18].

Затем, 2 февраля 1766 г., Эйлер подал королю прошение о своей отставке, которое весьма немилостиво было удовлетворено 2 мая, после многочисленных попыток его переубедить и лишь после настоятельного повторения заявления 1 июня Эйлер со своей семьей покинул Берлин, чтобы возвратиться в Петербург, откуда он прибыл 25 лет назад. Перед отъездом он нанес Ламберту прощальный визит, о котором тот сообщал заслуживающим упоминания образом: «Я получил ваше письмо лишь через два дня после того, как г-н Эйлер посетил меня в связи с его отставкой. Вы не поверили бы, сударь, с какой радостью он едет в Петербург, где он приобретает все, что может пожелать. Петербургская академия будет перестроена на новой основе, и силой денег туда привлекают все, что есть самого ученого в Европе ... Из этого, несомненно, следует, что г-н Эйлер принял свое решение еще тогда, когда он ни в чем не расходился с экономической комиссией академии, членом которой он равносостоял. Он видел, что здесь он никогда не станет тем, кем он хотел бы стать, и он отнюдь не остался бы спокойным наблюдателем, если бы рано или поздно кто-то его опередил. Наконец, хотя он сам был членом экономической комиссии, он не переставал воочию убеждаться, что эта комиссия была назначена если не для исправления, то по крайней мере для усовершенствования того, что он делал в качестве директора Академии» [10, с. 230].

Не все, что пишет здесь Ламберт, верно. Можно утверждать [1, с. 119—120], что свое возвращение в Петербург Эйлер начал подготавливать еще до приезда Ламберта в Берлин. А именно уже в июне 1763 г. он начал продавать свое недвижимое имущество, чтобы не быть связанным. На самом деле было много причин, побуждавших его желать возвращения на прежнее место работы. Здесь в первую очередь следует указать на господство свободомыслия и религиозной критики в Берлинской академии: к этому добавлялось предпочтение, отдаваемое королем французским кандидатам при назначении новых членов без участия

Академии. Далее, его задевало то, что Фридрих II не давал ему президентства в Академии, на которое он обоснованно претендовал и которое означало повышение жалованья почти на 50%, а также влияние консультировавшего короля Даламбера из Парижа — «тайного президента» Академии, как его называли. Наконец, его швейцарское чувство свободы уязвлялось деспотическими манерами прусского монарха. Дело о календарях и столкновения в экономической комиссии сыграли, таким образом, роль капли, переполнившей чашу [13, с. 24], — не более, но и не менее. С другой стороны, Ламберт был весьма далек от того, чтобы резко обращаться с Эйлером и изгонять его из Берлина. Внимание к чьим-то персональным интересам Ламберту было совершенно чуждо, когда речь шла о деле, и только о нем, но все же, не замышляя того, он поставил последнюю точку в берлинской главе биографии Эйлера. Также, вероятно, смотрел на это и сам Эйлер. Ибо в сопроводительном письме сына Эйлера Иоганна-Альбрехта, приложенном к подготовленному Лекселем научному ответу на письмо Ламберта Эйлеру в Петербург от 18 октября 1771 г., отсутствовали какие-либо знаки благодарности отца за проявленное Ламбертом участие к состоянию его здоровья и к операции его глаза [1, с. 124]. Но к дальнейшей судьбе Кёлера Эйлер проявлял интерес и из Петербурга [13, с. 44—45].

То, что разделяло Эйлера и Ламберта, в конце концов оказалось сильнее того, что их связывало.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Biermann K.-R.* J.-H. Lambert und die Berliner Akademie der Wissenschaften // Coll. Intern. et interdiscipl. J.-H. Lambert, Mulhouse, 26—30 sept. 1977. Paris: Ophrys, 1979. P. 115—126.
2. *Euler N.* Rettung der göttlichen Offenbarung gegen die Einwürfe der Freygeister // Opera III-12.
3. *Graf M.* Lambert's Leben // *Huber D.* Johann Heinrich Lambert. Basel, 1829.
4. *Harnack A.* Geschichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin, 1900. Bd. I-1, II.
5. *Hartweg F. G.* Leonhard Euler Tätigkeit in der französisch-reformierten Kirche von Berlin // Hugenottenkirche. 1979. Bd. 32, N 4. S. 14—15; N 5. S. 17—18.
6. Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers / Hrsg. A. P. Juškevič, E. Winter. Berlin: Akad.-Verl., 1959—1976. Bd. 1—3.
7. *Juškevič A. P.* Lambert et Léonard Euler // Coll. Intern. et interdiscipl. J.-H. Lambert. Paris: Ophrys, 1979. P. 211—223.
8. *Kraus A.* Lambert und die Bayerische Akademie der Wissenschaften // Coll. Intern. et interdiscipl. J.-H. Lambert. Paris: Ophrys, 1979. P. 105—113.
9. *Lambert J.-H.* Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbræ. Augsburg, 1760.
10. *Speziali P.* Lambert et le Sage // Coll. Intern. et interdiscipl. J.-H. Lambert. Paris: Ophrys, 1979. P. 225—234.
11. *Spiess O.* Leonhard Euler. Frauenfeld; Leipzig: Hubner, 1929.
12. *Spindler M.* Electoralis academiae scientiarum boicae primordia. München, 1959.
13. *Stieda W.* Die Übersiedlung Leonhard Eulers von Berlin nach St. Petersburg // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Phil.-hist. Kl. 1931. Bd. 83. H. 3.
14. *Thiébauld D.* Mes souvenirs de vingt ans de séjour à Berlin. Paris, 1804.
15. Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften. 1746—1766 / Hrsg. E. Winter, M. Winter. Berlin: Akad.-Verl., 1957.
16. *Wolf R.* Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz. Zürich, 1860. Bd. 3.
17. Zent. Arch. Akad. Wiss. DDR, I-XIV-37, Bl. 30—31.
18. Zent. Arch. Akad. Wiss. DDR, I-IV-16, St. 78.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАПИСНЫЕ КНИЖКИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА \*

Э. КНОВЛОХ

Настоящая статья имеет целью дать обзор основного содержания математических записных книжек Леонарда Эйлера. Из имеющихся к сему времени работ, посвященных им, прежде всего должны быть названы статьи Г. К. Михайлова об исследованиях по механике [1] и Г. П. Матвиевской об исследованиях по теории чисел [2]. В основу положена систематическая классификация, принятая для научных работ Эйлера в каталоге [3]. Записные книжки имеют шифр ф. 136, оп. 1, № 129—140. Здесь они будут цитироваться с указанием только номеров книжек (129—140) и присоединенных к ним знаком «:» номеров листов.

При систематической группировке заметок встречались, разумеется, трудности упорядочивания. Навигацию и хронологию я отнес к астрономии, метеорологию — к физике. Дополнительно возникли разделы: философия и филология, а также медицина, химия и география. В отношении математических разделов имелись трудности разграничения. В то время как цепные дроби в основном относятся к группе 1.4, они встречаются также в решениях и в задачах 1.5, 1.6 и 1.8. Дифференциальные уравнения образуют группу 1.6, но играют также важную роль в разложении в ряды и в задачах дифференциальной геометрии. Исследования  $\zeta$ -функции в основном относятся к группе 1.4, но важны и для теоретико-числовых изысканий в группе 1.1. Таким образом, следующие общие данные, как и систематический указатель заметок в конце статьи, являются результатом упорядочивания, которое в отдельных случаях могло быть выполнено и по-другому.

Записи резко переходят из одной области в другую. Часто они появляются в связи с чтением соответствующих статей в научных журналах или в связи с перепиской с учеными друзьями. Благодаря этому иногда оказываются возможными довольно точные датировки. Часто Эйлер дает ссылку, называя имя, например Клеро (дифференциальная геометрия), Фонтена, Ламберта, Лагранжа (вариационное исчисление), Гольдбаха (теория рядов, теория чисел) и т. д. Эйлер ставит специальные задачи, формулирует и доказывает теоремы. Иногда он отмечает, что работа уже представлена Академии: «Все это и то, что далее относится к данному предмету, уже сообщено Академии» (140 : 35).

Особое место занимает записная книжка 137. Значительная часть ее состоит из печатных текстов или копий текстов других авторов: из «Арифметики бесконечных» (Джон Валлис), работ по алгебре, геометрии, астро-

\* Перевод с нем. И. А. Головинского.

Наука	Количество страниц		
	in-8°	in-4°	in-2°
<b>1. Математика</b>			
1.1. Теория чисел	152	346	<b>83</b>
1.2. Общие вопросы алгебры и алгебраические уравнения	$1\frac{1}{2}$	$112\frac{1}{2}$	<b>10</b>
1.3. Теория вероятностей и математические игры	—	86	—
1.4. Ряды, произведения и цепные дроби	18	337	<b>146</b>
1.5. Дифференциальное и интегральное исчисление	$5\frac{1}{2}$	270	$95\frac{1}{2}$
1.6. Дифференциальные уравнения	13	250	$92\frac{1}{2}$
1.7. Геометрия	$18\frac{1}{3}$	$160\frac{1}{3}$	<b>23</b>
1.8. Дифференциальная геометрия и вариационное исчисление	$5\frac{1}{2}$	$219\frac{1}{2}$	$32\frac{1}{2}$
<b>2. Механика</b>	$21\frac{1}{2}$	554	<b>46</b>
<b>3. Астрономия</b>	12	103	<b>23</b>
<b>4. Физика</b>	2	$102\frac{1}{2}$	<b>9</b>
<b>5. География, медицина, химия</b>	—	3	—
<b>6. Философия, филология</b>	1	68	—

номии, оптике (Эгидиус Франциск де Готтинье), о конструкции солнечных часов (Франциск Линус). На многих страницах, где оставалось место, Эйлер вписывал свои замечания.

В моих исследованиях большую поддержку и помощь мне оказали А. П. Юшкевич, Е. П. Ожигова и Ю. Х. Копелевич. Я хотел бы сердечно поблагодарить их за это.

## 1. МАТЕМАТИКА

### 1.1. Теория чисел

Учитывая опубликованную в 1960 г. статью Матвиевской и подготовительные работы Е. П. Ожиговой к соответствующему тому серии IVB «Полного собрания сочинений» (Opera omnia) Эйлера, я могу здесь быть кратким. Многие работы по теории чисел из записных книжек 138, 139 и 140 опубликованы в виде 111 «Фрагментов, извлеченных из математических тетрадей» («Fragmenta ex Adversariis mathematicis deprompta») в двух томах «Leonhardi Euleri Opera postuma... quae ediderunt... P. H. Fuss et N. Fuss» (Pétersbourg, 1862). В настоящем обзоре они не рассматриваются.

Эйлер исследует распределение простых чисел при помощи графического представления, которое встречается в рукописях Лейбница (129 : 43; 134 : 205).

Он обсуждает вопросы, связанные с делимостью натуральных чисел, — такие, как остатки при делении (131 : 232), дружественные числа (133 : 45, 56; 134 : 32), совершенные числа по Евклиду (130 : 35, 58; 131 : 56), и выражает сомнение в существовании нечетных совершенных чисел (134 : 115). Он рассматривает любые делители (134 : 64), два данных

делителя и остатки (138 : 105), задачу нахождения  $a^2 + 1$  с данными делителями (132 : 258), теоремы Ферма (131 : 22; 132 : 77).

Эйлер изучает показательные уравнения — такие, как  $2^x = x^2$ ,  $3^x = x^3$ ,  $x^y = y^x$  (130 : 37, 39). Он занимается «диадической арифметикой» («arithmetica dyadica») (131 : 208; 133 : 52). Важная тема — «partitio numerorum» (132 : 17, 18, 105, 106, 196): ее он трактует с использованием аналитических методов и без них. Особое место занимает схоутонов «метод взвешивания» («praxis ponderandi») (132 : 94, 97). К аналитической теории чисел относится задача о том, как часто данное число встречается в определенных рядах (131 : 12). Много раз он обращается к числам Бернулли (134 : 117; 139 : 23, 106). Что-то вроде начала статьи представляет собой «Изложение науки о (целых) числах» (134 : 117).

Чрезвычайно многочисленны задачи диофантова анализа, к которым Эйлера побуждали Озанам (131 : 123; 133 : 11, 136, 143), Лейбниц (131 : 60; 132; 76), Пелль (132 : 247), Гольдбах (132 : 90, 220). Правда, возводя задачи к Лейбницу, Эйлер допускает историческую ошибку. Речь идет о многоугольных числах (131 : 21, 152; 134 : 130), о рациональном выполнении извлечения корня за счет надлежащего выбора переменных в подкоренном выражении (131 : 17, 53, 54), о рациональных или прямоугольных треугольниках (129 : 46; 132 : 167). Эйлер показывает, что  $\sqrt{a - x^2}$  не может быть квадратом, если  $a$  принадлежит последовательности 3, 6, 7, 11, 12, 15, ... (130 : 23), и что  $2n^2 + 1$  не может быть биквадратом (131 : 112). Он рассматривает разложение на квадраты (131 : 61, 62, 116, 117; 132 : 82), проблему шести квадратов (132 : 147), линейные диофантовы уравнения (131 : 207), а также уравнения

$$x + y + z = xyz = x^2 + y^2 + z^2 \quad (130 : 60),$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2 z^2 \quad (135 : 3),$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = p^2 \quad (136 : 8).$$

Он исследует, когда  $ax^2 + \beta x + \gamma$  может быть квадратом (132 : 109, 112).

Из специальных задач диофантова анализа следует упомянуть такие: определить 4 числа так, чтобы их попарные разности были квадратами (129 : 50);

найти 2 числа, сумма которых есть квадрат, сумма квадратов которых есть куб и сумма кубов которых есть биквадрат (131 : 80);

«труднейшая диофантова задача: найти три числа  $ka$ ,  $kb$ ,  $kc$ , чтобы I) их сумма, II) сумма попарных произведений и III) произведение всех трех были бы квадратными числами» (134 : 58).

## 1.2. Общие вопросы алгебры и алгебраические уравнения

Эйлер много занимается решением алгебраических уравнений второй, третьей, четвертой, пятой, шестой,  $n$ -й степени (129 : 1, 8, 67, 158; 131 : 25, 44, 70/1, 77/8, 193/4; 132 : 46, 50, 67—69, 77, 85, 193, 237; 133 : 33, 65, 103, 174 («обыкновенные критерии Ньютона» — «criteria vulgaria Neutoni»); 135 : 68—70; 138 : 56), иногда в дополнение к чужим работам (133 : 44) специально уравнениями четной степени (132 : 123; 133 : 61). Он исследует такие уравнения, как  $ay^m + bx^n = cx^p y^q$  (132 : 191) или  $1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma}$

(139 : 26). Рассматривает задачу: для данного уравнения четвертой степени найти уравнение шестой степени, корни которого были бы попарными суммами корней первого уравнения (133 : 167). Эйлер пытается исключить второй и третий члены из уравнения произвольной степени (132 : 37) и обсуждает правило ложного положения (131 : 193). Теории исключения посвящен среди прочего фрагмент (133 : 62).

Эйлер обсуждает доказанную Сегнером и восходящую к Гарриоту «теорему о следовании и перестановке знаков» (134 : 171); теорему о том, что каждое уравнение нечетной степени имеет самое меньшее один действительный корень (131 : 91); задачу «найти границы корней данного уравнения» (131 : 139) и другие задачи, связанные с оценками (131 : 138; 136 : 82). Он исследует корни четвертой и пятой степени из единицы (129 : 47; 130 : 47; 132 : 43).

Много занимается Эйлер составлением уравнений (131 : 135; 135 : 10; 135 : 63); элементарными симметрическими функциями и суммами степеней, как в заметках 131 : 77/8, 169; 132 : 45/6; вопросом «о применении правила Кардано к рациональным корням» (138 : 145).

Вслед за Николаем Бернулли он исследует разложение на множители уравнений и дробных рациональных выражений (132 : 106, 179), алгебраические множители и делители (131 : 195).

Многие заметки касаются извлечения корней (129 : 66; 131 : 256), особенно из биномов (129 : 38; 131 : 246/7; 133 : 59), или суперпозиций ради-

кальных выражений типа  $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5}}}}} \dots = 1,757829 \dots$  (133 : 12; 135 : 51).

Эйлер анализирует «Исчисление иррациональностей» («Calculus irrationalium») (132 : 246; 138 : 138); рациональность некоторого произведения — следуя Сегнеру (136 : 90); редукцию к рациональным величинам (129 : 157); несоизмеримые величины (138 : 128); иррациональные трехчлены (132 : 103).

Он упоминает алгебраические, в особенности иррациональные, тождества, как, например,

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \quad (131 : 123)$$

или тождество Гольдбаха

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{6} [(2a + b + c)^2 + 2(a - b - c)^2 + 3(b - c)^2] \quad (133 : 121),$$

а также теоремы о суммах дробей (131 : 213).

Отдельную группу составляют заметки, посвященные определенным задачам и частично примыкающие к Паппу, как, например, о трисекции угла (135 : 6, 54; 136 : 63); определенные торговые задачи (129 : 151; 134 : 228); задачи на проценты (134 : 39); шуточные задачи вроде такой: «Сколько нужно времени, чтобы написать все числа от 1 до 90 000 000 000?» (134 : 24/25).

### 1.3. Теория вероятностей, комбинаторика и теория математических игр

Заметки этого рода Эйлер оставил в семи записных книжках базельского, первого петербургского и берлинского периодов. Шесть записных книжек (130, 136—140) не содержат ничего по данной тематике. В других име-

ются заметки о лотереях со многими различными классами или определенным числом «билетов» (129 : 38, 61/2; 134 : 23, 83/4; 135 : 3—5; 137 : 351, 366) и о шансах на выигрыш в играх, особенно в кости и в карты (131 : 97/8, 141; 132 : 92/93, 104/5, 250/1 (игральная кость с  $n$  гранями); 135 : 85/6, 144—148, 227). Сюда относятся также заметки, уже опубликованные в томе I-7 «Орега omnia». Эйлер вычисляет вероятность получить или вытянуть определенные карты (132 : 16/7; 133 : 24/5, 51 (вытянуть  $n$  из  $s$  листов), 111 (2 игрока); 134 : 145). Он решает комбинаторную задачу — сколькими различными способами данный многоугольник может быть разбит на треугольники проведением диагоналей (133 : 81). К комбинаторике следует отнести также обстоятельные исследования по магическим квадратам и прямоугольникам (129 : 147—151; 134 : 1, 52—55, 229—239, 241). Эйлер занимается вопросами страхования, например, пожизненными рентами и задачами о смертности (134 : 17/18, 164—166), задачами коммерческого страхования (131 : 108/9). Встречается ряд задач, относящихся к торговле, капиталу и процентам (129 : 106, 174—176; 134 : 18/9, 24/5, 30, 35, 43/4, 54/5, 84).

#### 1.4. Ряды, произведения и цепные дроби

Эйлер рассматривал бесконечные ряды в целом, но прежде всего он применял их в определенных задачах, например в теории  $\zeta$ -функции, в теории цепных дробей, при вычислении интегралов и решении дифференциальных уравнений. Имеются такие заметки, как «О суммировании рядов» (129 : 33), «Мой общий метод суммирования рядов» (131 : 43), «Преобразование рядов, составленных сложением членов, в ряды, составленные умножением» (131 : 4), «Нахождение рядов, суммируемых в бесконечности, но не имеющих неопределенной суммы» (131 : 17), «Преобразование рядов» (132 : 31), «Найти сумму гиперболических логарифмов» (132 : 233; ср. 134 : 204).

$\zeta$ -функция рассматривается в общем виде и для частных значений показателя (131 : 92—95, 166; 132 : 194—196). Специальные случаи и варианты составляют:

$$\text{«Базельская задача» } S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (132 : 92);$$

«Предположение относительно суммы  $\Sigma (x^n/n^2)$ » (139 : 24);

Ряды

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \quad (131 : 113),$$

$$\frac{1}{1-a^2} - \frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{9-a^2} - \frac{1}{16-a^2} + \frac{1}{25-a^2} \pm \dots \quad (134 : 74),$$

$$\frac{1}{a+p} + \frac{1}{b+p} + \frac{1}{c+p} + \dots \quad (132 : 60),$$

$$\frac{1}{1+p} + \frac{1}{4^2+p} + \frac{1}{9^2+p} + \frac{1}{16^2+p} + \dots \quad (131 : 249),$$

$$s = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} \pm \dots \quad (132 : 152).$$



Эйлер ясно указывает: «Теорема, сообщенная мне Гольдбахом:»

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots = \alpha \pi^n \quad (131 : 251).$$

Сюда же относятся многочисленные результаты для  $\pi/4$ ,  $\pi/8$  (131 : 90, 113; 132 : 242);  $\pi/6$  (132 : 153);  $\pi/2$ ,  $\pi/3$ ,  $3\pi/8$ ,  $\pi/12$  (133 : 174);  $1/\pi$ ,  $\pi^2$  (132 : 139);  $\pi^2/6$  (135 : 45);  $\pi^2/6 - (\ln 2)^2$  (133 : 152); «Теорема Гольдбаха»

$$\frac{\pi^4}{72} = 1 + \frac{1}{2^3} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots \quad (132 : 190)$$

и

$$\frac{\pi^4}{32} - \frac{\pi}{16} = \frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \frac{1}{9^2 \cdot 11^2} + \dots$$

для  $\pi^2/16$  (131 : 156);  $\pi^2/32$ ,  $\pi^2/72$  (131 : 236).

Гольдбах сообщал Эйлеру новые интересные задачи и методы из теории рядов:

«Найти величину выражения

$$\frac{\pi^2}{6n(n-1)} - \frac{2(n-1)(1 + 1/2 + \dots + 1/n)}{n^2(n-1)^2} + \frac{1}{n(n-1)^2} \gg$$

при  $n = 1$  (132 : 203);

«Гольдбахово суммирование ряда, общий член которого есть  $\frac{1}{a^n - 1}$ » (131 : 5);

«Методом знаменитого Гольдбаха выразить двойные прямоугольники рядов бесконечным рядом» (132 : 245);

«Теорема, найденная Гольдбахом: если  $A$  есть корень квадратный из длины дуги окружности, радиус которой равен 1, то

$$nA = 1 - \frac{1}{2}(1 - n^2) - \frac{1}{2 \cdot 4}(1 - 2n^2 + 2n^4) - \dots \gg (131 : 87);$$

Ряд

$$1 \left| - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} \dots \right.$$

«в котором закон знаков составлен так, что простые числа имеют знак минус, образованные из двух согласно правилам умножения — плюс, образованные из трех — минус и т.д.» (131 : 244).

Эйлер занимается многочисленными интересными разложениями в ряды, например, для  $x^x$  (129 : 61);  $c^x$  (129 : 205);  $\int dx \sqrt{a^2 - x^2}$  (129 : 44);  $(1+z)^{1+z}$  (129 : 61);  $x^{1/x}$ ,  $e^{1/e}$  (131 : 263/4);  $\cos e^x z$ ,  $\sin e^x z$  (132 : 2);  $\frac{x}{x^2-1}$  (131 : 141);  $(1+x+x^2)^n$  (133 : 74);  $\Phi = \frac{1}{(1-n \cos \varphi)^\lambda}$  (139 : 76); пример Христиана Вольфа  $\int n^m$  (131 : 86); обращается к вопросу: «Некоторые невыразимые функции, достойные упоминания» (140 : 49). Исследуется также степень  $x^{x \dots x}$  (130 : 70).

Важный специальный случай составляют биномиальные разложения (131 : 38, 99, 265; 132 : 248; 138 : 21) вроде  $(1 + p)^{1/p}$ .

Эйлер упоминает, что Лагранж нашел цепную дробь для  $(1 + x)^n$ . Часто он занимается взаимосвязью между цепными дробями и бесконечными рядами (131 : 159; 132 : 77; 140 : 46), к примеру в заметке «Определить ряд, возникающий из деления дроби» (132 : 51). Эйлер много исследует цепные дроби ради них самих (131 : 27/8; 140 : 23), как, например, в заметке «Рассуждения об образовании непрерывных дробей» (138 : 14).

Изучаются разложения в цепные дроби рациональных функций (131 : 223/4), функций  $e^{1/a}$  (131 : 51),  $e - 1$ ,  $\frac{e+1}{e-1}$  (134 : 131),  $\sqrt{p}$  (131 : 137), а также

$$s = 1 + \frac{a}{1 + \frac{a}{1 + \frac{2a}{1 + \frac{2a}{1 + \frac{3a}{1 + 3a}}}}} \dots \quad (140 : 21).$$

Эйлер занимается делителями бесконечного ряда (132 : 125). Он изучает приближения, например, для  $\sqrt{(x^2 + y)}$  (131 : 443) или для  $(1 + x/n)^n$  при больших  $n$  (131 : 128) и вычисляет  $e$  с точностью до 12 (130 : 35) и 14 знаков (131 : 31).

Важный вопрос для него представляют рекуррентные ряды (129 : 79; 131 : 21), которые он исследует отчасти в связи с «Разностным методом» (1730) Джеймса Стирлинга. Другими важными типами рядов являются геометрический ряд (129 : 66), гипергеометрический (140 : 41) и ряды, которые он рассматривает в связи с квадратурой круга:  $\frac{n}{1} + \frac{n^2}{3} + \frac{n^3}{5} + \dots$  (131 : 143); ряд арктангенса (131 : 146), произведение Валлиса (140 : 30).

Бесконечные произведения составляют особый, часто исследуемый круг вопросов (133 : 19, 49, 130), равно как и ряды для решения дифференциальных уравнений: «Об использовании рекуррентных рядов при интегрировании дифференциальных уравнений любого порядка» (132 : 172).

Эйлер изучает многочисленные примеры бесконечных последовательностей вроде 1, 6, 35, 204, ... (131 : 64), 1, 1, 2, 4, 14, 28, 216, ... (131 : 122), интерполяционный метод Броункера для последовательности  $1, \frac{1}{2}, \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \dots$  (133 : 56), последовательность 1, 2, 6, 24, 120, ... (129 : 36, 169). С последней связаны ряды  $1 - 2 + 6 - 24 + 120 \dots$  (131 : 197) и

$$s = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} \pm \dots \quad (129 : 55).$$

Из многих интересных специальных рядов можно привести такие:

$$\frac{1}{x^2 + nx + (n^2 - 1)/4} \quad (130 : 19),$$

$$l \overline{1 + x} = lx + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} \pm \dots \quad (130 : 28),$$

$$z = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} \pm \dots \quad (130 : 36),$$

$$s = \frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99} + \dots, \quad s = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{2}{13 \cdot 15} + \dots \quad (130 : 47),$$

$$s = \frac{m-1}{a-1} - \frac{(m-1)(m-a)}{a^3-a} + \frac{(m-1)(m-a)(m-a^2)}{a^6-a^3} \pm \dots \quad (131 : 109),$$

$$\frac{1}{n^2 + (a+b)n + ab} \quad (131 : 194),$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \pm \dots \quad (131 : 225),$$

$$\frac{n^2}{1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n+1)^2 n (n-1)(n-2)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \mp \dots \quad (132 : 34),$$

$$\frac{1}{a} + \frac{2b}{n^2 - b^2} - \frac{2a}{4n^2 - a^2} + \frac{2b}{9n^2 - b^2} - \frac{2a}{16n^2 - a^2} \pm \dots \quad (132 : 78),$$

$$\frac{1}{x^m y^n} \text{ как сумма ряда } (137 : 293),$$

$$1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \dots \quad (138 : 30),$$

$$s = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+4a} \mp \dots \quad (138 : 81),$$

ряд Ламберта

$$1 + \frac{n}{\alpha} \gamma + \frac{n}{\alpha} \frac{n + \alpha - 2\beta}{2\alpha} \gamma^2 + \frac{n}{\alpha} \frac{n + \alpha - 3\beta}{2\alpha} \frac{n + 2\alpha - 3\beta}{3\alpha} \gamma^3 + \dots \quad (139 : 28/29),$$

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b} \frac{a + \vartheta}{b + \vartheta} + \frac{a}{b} \frac{a + \vartheta}{b + \vartheta} \frac{a + a\vartheta}{\varepsilon + \varepsilon\vartheta} + \dots \quad (139 : 60),$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p}{(q+1)(q+2) \dots (q+p)} x + \frac{1 \cdot \dots \cdot (p+1)}{(q+1)(q+2) \dots (q+p+1)} x^2 \dots \quad (139 : 75).$$

### 1.5. Дифференциальное и интегральное исчисление

В области теории действительных функций интересы Эйлера связаны прежде всего с различными функциями натуральных, десятичных и гиперболических логарифмов (129 : 35, 53; 130 : 14; 131 : 35, 99; 132 : 129; 133 : 59; 134 : 23), с однородными функциями от  $x, y, z$  (132 : 33), с функцией  $xy^m = yx^n$  (130 : 33), с уравнениями и интегрированием алгебраических кривых (129 : 105; 131 : 83), с такими вопросами, как «О гиперболических кривых» (139 : 57), «О гиперболических синусах и косинусах Ламберта» (140 : 47) или «Гольдбахово исследование двух неспрямляемых алгебраических кривых, у которых сумма дуг, соответствующих одной и той же абсциссе, может быть выражена алгебраически» (131 : 124).

Он изучает определенные построения кривых (129 : 160, 207/8), «линии» первого, второго, третьего, четвертого порядка (132 : 182), теоремы о синусах и косинусах (132 : 156—158), «универсальнейшую теорему господина Лагранжа»:

«Если количество  $t$  так определяется через  $x$ , что  $t = x - n\varphi x$ , где  $\varphi x$  обозначает какую-нибудь функцию от  $x$ , тогда не только само количество

$x$ , но также любая его функция  $\psi x$  в свою очередь может быть определена через  $t$  следующим образом. Предполагается что  $\varphi t$  и  $\psi t$  — такие функции от  $t$ , какие  $\varphi x$  и  $\psi x$  — от  $x$  (138 : 39).

Эйлер рассматривает такие вопросы, как «О ветвях кривых, уходящих в бесконечность» (132 : 180), «О спрямляемых кривых» (134 : 45), «Разные теоремы о дифференциальных выражениях, деленных на  $lx$ » (139 : 40), «Теорема Маклорена» из «Трактата о флюксиях» (132 : 212). Он обсуждает вопросы интерполирования (134 : 166) вроде задачи о проведении через данные точки кривой с квадратуемой площадью (129 : 171/2). Особую группу образуют заметки, связанные с кругом или с дугой окружности (129 : 127, 173; 130 : 27/28), например «Дуга, которая равна радиусу» (131 : 26) или «Найти дугу окружности, равную гиперболическому логарифму ее секущей, полагая радиус = 1» (131 : 241). Эйлер упоминает вычисление числа  $\pi$  со 100 десятичными знаками у Ланьи (131 : 36).

К комплексному анализу принадлежат: изучение мнимых чисел (133 : 59), «теорема Муавра» и «теорема Коутса» (131 : 36, 106), комплекснозначные функции (139 : 64, 74/75; 140 : 48). Сюда же относятся рассуждения: «Дифференциальные иррациональные выражения, которые кажутся неразрешимыми без мнимых подстановок» (139 : 66) и «Исследовать интеграл выражения

$$s = \int x^{n-1} dx (x^{\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}}) \quad (140 : 48).$$

Гораздо больше работ по дифференциальному и интегральному исчислению касается задач интегрирования. Сюда относятся: связь между разложениями в цепные дроби и вычислениями интегралов (134, 119), например «Порождение непрерывных дробей из интегрируемых выражений» (13 : 188—190); квадратура круга (131 : 105/6; 132 : 135), также в связи с Декартом (134 : 114); квадратура (135 : 50).

Встречаются маленькие заметки и предложения вроде «Тип интегрального исчисления» (134 : 59), «Новые открытия в исчислении показателей» (129 : 118), «Теоремы об интегрировании некоторых выражений» (139 : 2 — в связи с Лагранжем), «Теорема: если  $P$  — какая-либо функция от  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ , то интеграл  $\int P d\varphi$  всегда имеет вид  $\alpha \varphi + Q$ , где  $Q$  — функция от  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ » (133 : 166). Часто Эйлер дает списки формул интегрирования (140 : 52), как, например, для  $\int \frac{x^i dx}{1-x^2}$ ,  $i = 1, 3, 5, 7, 9$  (136 : 28), «Формулы для интегрирования  $\int \frac{x^n dx}{1-x}$ » (131 : 34); «Замечательная редукция интегральных выражений» (139 : 123); «Интегрируемые выражения в исчислении углов» (139 : 35); «Интегралы» (131 : 123); «Выражения, интегрируемые через  $\int du \sqrt{\frac{\alpha + \beta u^2}{\gamma + \delta u^2}}$ » (134 : 125); «Перечисление 12 случаев интегрального выражения  $\int dz \sqrt{\frac{f + gz^2}{h + kz^2}}$ » (134 : 180). Он изучает интегралы, связанные с «Арифметикой бесконечных» Джона Валлиса (131 : 13). Особая тема — приведение интегральных выражений к алгебраическим (131 : 14—16) и поиски алгебраических интеграций; «Редукция трансцендентных интегралов к алгебраическим интеграциям в случае

$x = 1$ », например  $\int \frac{dx}{1-x}$  (131 : 221); «Найти  $x$  и  $y$ , чтобы выражение  $\int \left( \frac{y dx}{x} + \frac{x dy}{y} \right)$  было алгебраическим» (133 : 52); «Интегрировать дифференциальное трансцендентное выражение» (131 : 213/4); «Найти приближенную алгебраическую величину  $\int dr \sqrt{1+r^2} = R$ » (133 : 118).

Эйлер рассматривает задачу «Ищутся такие  $x$  и  $y$ , чтобы  $dx^2/dy$  было интегрируемо» (131 : 126). Он вычисляет интегралы для частных значений, например  $\int z^{m-1} dz (1 - z^n)^{p/q} R = S$ , полагая  $z = 1$  после интегрирования» (131 : 261), «Найти величину  $\int \frac{x^m dx}{1+x^n}$ , если после интегрирования полагают  $x = 1$ » (133 : 144).

Эйлер изучает разложения в ряды для решения задач на интегрирование: «Разложить  $\int y dx$  в бесконечный ряд» (129 : 144/5) и связанные с этим интеграционные задачи, к примеру «Об особом способе дифференцировать и интегрировать суммационные члены рядов» (139 : 20).

Из многочисленных задач на интегрирование упомянем следующие:

$$\int dy (a + by^{-1/k})^{k-1-i} \quad (131 : 82);$$

$$\int x^m dx (a + bx^n)^k \quad (131 : 95);$$

$$\int (b + x)^n dx \sqrt{a^2 - x^2} \quad (132 : 88);$$

$$\text{«Интегрировать } \frac{dp}{dp + \sqrt{bp^2 + c}} \text{»} \quad (132 : 110).$$

$$\int x^{2m} dx \sqrt{a^2 - x^2} \quad (131 : 108);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{x^{m+2} dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (131 : 111, 205);$$

$$\int e^x \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (131 : 119);$$

$$\int \frac{dx}{1 + \alpha x + x^2} \quad (131 : 443);$$

$$y = \int \frac{(c^2 - a^2 - x^2) dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} \quad (132 : 185),$$

$$\int x^m dx (1 - x^n)^l \quad (131 : 186);$$

$$\int \frac{x^{2m-1} dx}{(1-x^n)^{2m/n}} \quad (131 : 221);$$

$$\int c^x dx = c^x \quad (129 : 205);$$

Интегрирование функции  $y = x^x$  (132 : 32);

$$\int \frac{d\varphi}{(c + b \cos \varphi)^{n+1}} \quad (134 : 74);$$

$$\int \frac{nP^{n-1}}{Q^{n+1/2}} dy \quad (134 : 81);$$

$$\int x^{l-1} y^{q-n} dx \quad (134 : 169);$$

$$\int \frac{dx \sqrt{x}}{(f+x)(g+x)} \quad (134 : 176);$$

$$\text{«Разложение выражения } \int \frac{Bz dz}{(f+gz^2)(h+kz^2)} = Q \text{»} \quad (134 : 177);$$

$$\text{«Найти интеграл } \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi}} = P \sqrt{\cos \varphi} \text{»} \quad (133 : 80);$$

$$\text{«Трудный случай Даламбера } \int \frac{z dz}{\sqrt{A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4}} \text{»} \quad (134 : 189);$$

$$\text{«Найти интегралы } \int \frac{3\varphi(a \cos \varphi + b)}{\sqrt{a^2 + 2ab \cos \varphi + b^2}} \text{»} \quad (134 : 220);$$

$$\text{«Редукция особенного интегрирования»} \quad (132 : 7);$$

$$\text{«Особенная редукция формы } v = e^k \int e^{-x} y dx - e^{-x} \int e^x y dx \text{»} \quad (135 : 15);$$

$$\text{«Особенная редукция интегралов } \int e^{m\varphi} d\varphi \sin \varphi^n \text{»} \quad (136 : 19);$$

$$\text{«Редукция к более простому интегральному выражению } \int \frac{(A+Bx) dx}{(a^2 - 2abx \cos x + b^2 x^2)^n} \text{»} \quad (136 : 22);$$

$$\text{«Редукция интеграла } \int \frac{(ax^{\lambda-1} + bx^{\lambda}) dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ к двум другим»} \quad (136 : 27);$$

$$\text{«Вид труднейших интеграций»} \quad (139 : 65); \quad \int \frac{dz \sqrt{1+z^2}}{1-z^4} \quad (139 : 44);$$

$$\text{«Особенное интегрирование выражения } \int \frac{d\varphi}{(1-2b \cos \varphi + b^2)^{n+1}}$$

$$\left[ \begin{array}{l} a \quad \varphi = 0 \\ \text{ad } \varphi = 180^\circ \end{array} \right] = 0 \text{»} \quad (139 : 112);$$

$$z = \int d\varphi \sin \varphi^{\lambda-1} (1 + t \cos \varphi)^{n+1} \quad (140 : 130);$$

$$\text{«} s = - \int \frac{x^{m-1} dx \ln x}{\sqrt[n]{(1-x)^m}} \quad \text{ab } x = 0 \text{ ad } x = 1 \text{»} \quad (140 : 55).$$

## 1.6. Дифференциальные уравнения

Записные книжки содержат как общие исследования по дифференциальным уравнениям, так и обсуждение многих специальных уравнений.

Так, мы встречаем предложения о «разностно-дифференциальных уравнениях» (111 : 111), заметку «Нахождение дифференциальных уравнений, допускающих интегрирование» (132 : 34—36), «Аналитические теоремы» (139 : 62), «О функциях трех переменных» (140 : 9), дифференциальные уравнения, которые не могут быть решены при помощи бесконечных рядов (134 : 134), а также те, для которых это возможно (138 : 28/9; 140 : 31).

Важное предложение: «Если

$$\int \frac{dx (A + Bx^2)}{\sqrt{\gamma + (\beta\beta + \alpha\gamma - 1)x^2 - \alpha x^4}} - \int \frac{dy (A + By^2)}{\sqrt{\gamma + (\beta\beta + \alpha\gamma - 1)y^2 - \alpha y^4}} = C - Bxy,$$

то  $x^2 + y^2 + \alpha x^2 y^2 = 2\beta x\gamma + \gamma$  (133 : 101).

Эйлер рассматривает задачу: «Пусть имеется какое-либо уравнение  $Y = 0$ , в котором  $Y$  есть функция неизвестной  $y$  и имеет несколько корней относительно  $y$ . Найти случаи, в которых один корень превосходит другой корень на какое-либо количество  $a$ » (132 : 3). Рассматривается также дифференцирование равенства  $x^x = y^y$  (130 : 39).

Особенный интерес у него вызывает уравнение Риккати  $y' = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2$  (130 : 16, 32; 131 : 100; 134 : 47, 56; 139 : 12, 52/53; 140 : 7) и уравнения, которые могут быть решены с помощью интегрирующих множителей (133 : 170; 135 : 72; 136 : 48). Он занимается однородными уравнениями (136 : 20—22), преобразованием дифференциальных уравнений (133 : 161; 135 : 91; 140 : 39) и исследует связь с комплексным анализом (136 : 56; 140 : 39).

Из специальных уравнений приведем следующие, по возрастанию их порядка.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка:

$$axdy + dx \sqrt{c^2 + y^2} = 0 \quad (129 : 80; \text{ ср. } 129 : 102/3);$$

$$x^m dx + y^2 dx = dy \quad (130 : 37/8);$$

$$dy + Pydx + Qy^2 dx = Rdx + QSSdy \quad (132 : 133);$$

$$ax = y - \frac{s dy}{ds} \quad (130 : 52);$$

$$adq = q^2 dp - dp \quad (131 : 70);$$

$$Pdx + Qdy = 0 \quad (131 : 98/9);$$

$$ccdz - z dz = xz dx + c dx \sqrt{(x^2 + z^2 - c^2)} \quad (131 : 100);$$

$$ax^m dx + bx^n y dy + cx^{n-m-1} y^2 dx + dy = 0 \quad (131 : 204);$$

$$v dv + v P dz = Q dz \quad (131 : 218);$$

$$dy + yy dx = ax^n dx + b^2 x^{2n} dx \quad (131 : 223);$$

$$x^m dx = x^{q+1} dz + (p - m) x^q z dx + z dx \quad (133 : 125);$$

$$dy + Py dx = Qyy dx + R dx \quad (134 : 7);$$

$$dy + cy^2 dx + bx^{m+1} y dx = ax^m dx \quad (134 : 119);$$

«Полагая  $dz = p dx + pz dy$ , найти соотношение между  $x, y, z$ » (136 : 34); условие интегрируемости дифференциальной формулы

$$(M + V) dx + (N + V) dy \quad (136 : 58);$$

$$\frac{dp(p-u)(1+pu)}{(1+p^2)^2} = n du \quad (139 : 58);$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} \text{ (при этом Эйлер говорит о «лагранжевом анализе») (139 : 86 - 90, 104);}$$

$$\frac{dx}{\sqrt[n]{a + bx^n + cx^{2n}}} = ds \quad (140 : 34);$$

$$\text{исключить } u \text{ из } du + u^2 dx + P u dx + Q dx = 0 \quad (134 : 134);$$

«Замечательное интегрирование уравнения

$$adp(1-p)(bc-z^2) + dz(bc+a^2p^3+apz)(1+p) = 0 \quad (140 : 73).$$

2. Дифференциальные уравнения второго порядка

$$x^m dx^2 = y^n ddy \quad (134 : 47);$$

$$ddy + P dx dy + Q y dx^2 = 0 \quad (132 : 132; \text{ ср. } 131 : 215);$$

$$ddx + mmd\varphi^2 = \alpha d\varphi^2 \sin \varphi \quad (133 : 48/49);$$

$$\frac{ddr}{r} + \frac{Adu^2}{(Cr^2 + F + 2Gu + Hu^2)^2} = 0 \quad (133 : 158);$$

$$(\alpha x^3 + \beta x^2) dds + (\gamma x^2 + \sqrt{x}) dx ds + (\epsilon x + \zeta) s dx^2 = 0 \quad (135 : 57);$$

$$ddz + Xz dx^2 = 0 \quad (134 : 202);$$

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + Xz \quad (135 : 14);$$

$$Pds^2 + 2Qsdyds + Rssdx^2 = Adx^2 \quad (135 : 56);$$

$$\text{«Новая редукция уравнения } \frac{ddv}{v} + \frac{T dv dx}{v} + \gamma dx^2 = 0 \text{» (135 : 85).}$$

3. Дифференциальные уравнения порядка выше второго:

$$ydy^4 + a^4 d^4 y = 0 \quad (131 : 227);$$

$$\text{ищется такое } y, \text{ чтобы } \alpha \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \beta \left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right) \quad (134 : 88);$$

$$x = Ay + \frac{B dy}{dx} + \frac{C ddy}{dx^2} + \frac{D d^3 y}{dx^3} + \frac{E d^4 y}{dx^4} + \frac{F d^5 y}{dx^5} + \dots \quad (133 : 57).$$

### 1.7. Геометрия

Большая часть эйлеровских заметок по элементарной геометрии относится к коническим сечениям (131 : 107; 132 : 64), особенно к эллипсу (131 : 111) и параболе (131 : 20, 99; 136 : 70). Теоремы и гипотезы о них сообщал ему Ламберт. Сопряженные диаметры — часто встречаемая тема (132 : 125/6). Много задач посвящено окружностям: концентрическим окружностям (129 : 152) или двум пересекающимся окружностям (131 : 133/4). Одна задача связана с проблемой касания Аполлония: найти окружность, касающуюся трех окружностей (132 : 7).

Эйлер рассматривает дуги окружности, в особенности их деление (131 : 154, 263/4; 132 : 88), хорды (131 : 154), полуокружности с их хордами и дугами (129 : 1а; 131 : 139; 132 : 73). Вслед за Френиклем он рассматривает полукруг, к которому приставлен прямоугольник (132 : 111).

Много заметок относится к теории треугольника (129 : 29, 32, 69, 86;



130 : 44, 78/9; 131 : 6, 76; 132 : 56, 73), четырехугольника (131 : 7, 8, 36, 51, 65/6, 71) и произвольного многоугольника (129 : 32/3). Например, «геометрическая задача» гласит: «Даны четыре стороны четырехугольника  $ABDC$  и угол между двумя противоположными сторонами  $AB$  и  $CD$ . Построить четырехугольник» (132 : 55).

Особую группу составляют многочисленные исследования по правильным многоугольникам (129 : 48, 79; 130 : 77, 80; 131 : 14, 36/7, 140/1, 143, 154, 212) с «правилом Ренальдини» для вписанного правильного многоугольника и с «доказательством знаменитого Сегнера теоремы о числе разбиений какого-либо многоугольника на треугольники» (134 : 96).

Часто Эйлер обращается к правильным многогранникам (131 : 22; 134 : 39). В 133 : 65/6 разбирается теорема о многогранниках

$$E + F = K + 2.$$

Эйлер исследует вопросы, относящиеся к параллелограмму (131 : 3), к градеции (131 : 216), к круговому цилиндру (129 : 140), к пирамиде (133 : 59). Он занимается такой «геометрической задачей»: «Между данными четырьмя прямыми провести прямую, части которой имели бы между собой данное отношение» (132 : 232).

Много исследований посвящено плоской (131 : 22, 197/8, 222, 243/44; 132 : 25) и сферической тригонометрии (129 : 210/1; 131 : 22, 24, 55 (сферический двуугольник)). Рассматриваются задачи: найти три угла в арифметической прогрессии (129 : 120) и «для данного угла  $\varphi$  найти угол  $\omega$ , чтобы  $\cos \omega = \frac{\cos \varphi + n}{1 + n \cos \varphi}$ , где  $n < 1$ » (139 : 106).

Отдельную группу образуют заметки о преобразованиях площадей (круга в квадрат (131 : 137); треугольника в круговой сектор (131 : 142); фигуры в треугольник (131 : 86)) и о разбиениях площадей. Эйлер рассматривает вслед за Григорием Сен Венсаном, разбиение кругового квадранта (131 : 206, 136 : 92), разбиение круга двумя прямыми на три равновеликие части (131 : 140), а также такую задачу: «На диаметре  $AB$  полукруга  $ADB$  построить сегмент круга  $APB$ , которым полукруг разбивался бы на две равные части» (136 : 92). Он занимается задачей Альхазена: «даны светящаяся точка  $A$  и освещаемая точка  $B$ ; найти на окружности точку отражения  $P$ » (192 : 42), представлением поверхности шара на плоскости (139 : 10), а также одним инструментом для решения геометрических задач (135 : 6).

## 1.8. Дифференциальная геометрия и вариационное исчисление

Большая группа заметок по дифференциальной геометрии посвящена нахождению кривых или семейств кривых, удовлетворяющих специальным условиям (139 : 16). Упомянем следующие примеры:

«Найти такую кривую  $AM$ , что если провести касательную  $MT$  и нормаль  $MN$ , то будет  $AT = PN$ » (129 : 87).

«Найти кривую  $AM$ , равную поднормали  $PN$ » (129 : 88—90).

«Найти кривую  $AM$ , у которой радиус кривизны  $MR = \tan g MT$  (129 : 92—99).

«Найти кривую, эволюта которой есть такая же кривая» (129 : 131).

«Найти такую кривую  $AM$ , чтобы дуга  $AM$  равнялась нормали  $TM$ » (129 : 137—140).

«Найти такую кривую  $DM$ , которая все лучи, исходящие из точки  $A$ , отражает в точку  $B$ » (133 : 25).

«Найти бесконечное семейство кривых, равных по длине и проходящих через данные две точки» (133 : 51).

Эйлер ищет алгебраические кривые, квадратура которых зависит от квадратуры данной кривой (131 : 30). В другом случае определенные условия накладываются на кривизну (140 : 50), Эйлер хочет построить радиус кривизны кривой вообще (129 : 155—157). Он рассматривает задачу, которую поставил в 1740 г. Клеро:

«Когда круг катится по кругу, птырек, закрепленный в  $M$ , при движении круга описывает кривую  $EM$ , природу которой требуется найти» (133 : 139).

Особенно интересуют его вопросы, связанные со спрямлением или спрямляемостью кривой. Так, он ищет общее уравнение для спрямляемых алгебраических кривых (131 : 112; 133 : 57; 132 : 32—34) и такие алгебраические кривые, спрямление которых зависит от их собственной квадратуры или от данных квадратур (131 : 128, 130), например такие алгебраические кривые, длина которых есть  $\alpha \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$  (133 : 161).

Эйлер занимается, следуя за Вариньоном и Лейбницем, кривыми (132 : 169—170), таутохронами в сопротивляющейся среде и в вакууме (130 : 31, 34, 40; 131 : 195; 133 : 139; 138 : 94, 99), особенно под влиянием Фонтена (132 : 137, 139); методом Даниила Бернулли (письмо от 20.10.1742) для нахождения «упругой кривой» (132 : 173, 183—185); логарифмической (139 : 60) и архимедовой спиралью (133 : 22—24, 123), архимедовой улиткой, лемнискатой (133 : 159—160), трактрисой (под влиянием Клеро (132 : 108, 164)), коническими сечениями (132 : 134), в частности эллиптическим квадрантом и периметром эллипса (138 : 38).

Эйлер исследует конхоиду (133 : 65), каустику (129 : 45; 134 : 160), циклоиду (129 : 131; 131 : 82, 131; 133 : 64; 139 : 60), траектории (132 : 200; 134 : 64; 137 : 1—2), особенно ортогональные траектории (133 : 131; 134 : 125; 137 : 271—273, 306, 358—360). Он занимается эволютами (129 : 131, 155—157; 131 : 119; 133 : 67; 134 : 64), особенно в заметке «О непрерывном развертывании кривых с ортогональными концами по Бернулли» (133 : 70). Упоминаются парадоксы кривых (139 : 53) и дается общее разъяснение «О природе кривых линий» (139 : 59).

Важную группу образуют исследования по теории поверхностей (138 : 1—2) и по пространственным кривым, например сферическим эпициклоидам (132 : 222). Заслуживают упоминания заметки: «Рассудить о кривизне какой-либо поверхности» (135 : 29), «На сферической поверхности найти все геометрические кривые» (138 : 16—18), «Определить радиус соприкосновения кривых, как-либо проведенных на сферической поверхности» (140 : 40), решенная Гюйгенсом задача о том, «чтобы сумма поверхностей эллиптического и гиперболического коноидов была равна кругу» (133 : 108). Сюда же относятся такие задачи, как: «На какой-либо поверхности, построенной над горизонтальной плоскостью, определить ее часть, которая покрывает площадь...» (131 : 314), и «флорентийская задача»: «На сферической алгебраической поверхности провести кривую  $AM$ , которая вмес-

те с горизонтом  $AP$  и меридианом  $PH$  заключала бы квадратуемую площадь  $APM$ » (131 : 127; 133 : 162/3).

В области вариационного исчисления Эйлер особенно интересуется изопериметрическими задачами (фигуры, кривые) (129 : 213/4; 131 : 49/50; 132 : 174) и обращается ко «второй задаче Якоба Бернулли об изопериметрах, впервые предложенной им брату» (133 : 109).

Он ставит задачу нахождения среди кривых такой, для которой интегралы  $\int Qdx$  (131 : 49, 82),  $\int R^m ds$  (131 : 18),  $\int zdx$  (131 : 183, 269) имеют максимум или минимум. Эйлер занимается брахистохроной (132 : 206; 133 : 139; 140 : 88), задачей «определить на сферической поверхности линию быстрейшего спуска» (134 : 141), задачей «о проведении кратчайшей линии на какой-либо поверхности» (139 : 119), минимальными поверхностями (134 : 161).

Обсуждаются «задачи на отыскание кривых, которые удовлетворяли бы свойству максимума или минимума абсолютно или при данных условиях» (132 : 15/6).

Эйлер занимается также «расширенным методом максимумов и минимумов» Лагранжа в связи с его письмом от 12.8.1755 (134 : 139/40; ср. 136 : 53/54). Он дает общие изложения вариационного исчисления, как, например, «Начала исчисления вариаций» (132 : 2—5) и «Трактат о максимумах и минимумах» (139 : 61), отмечая: «Все, что исследуется в исчислении вариаций, сводится к той части Анализа, в которой рассматриваются функции двух переменных» (138 : 2/3).

## 2. МЕХАНИКА

Встречаются много раз заголовки или наброски содержания заметок по механике (129 : 134—136; 130 : 52), список задач по механике (134 : 40—41) и парадоксы (135 : 22).

1. В частности, Эйлер рассматривает трение («Правило трения» (131 : 26)) и законы удара (131 : 73, 84, 85; 132 : 215; 138 : 360/1).

2. Большая часть заметок относится к механике материальных точек и твердого тела. Таковы многие исследования о притяжении между телами, особенно задача трех тел (129 : 127—131; 130 : 24—27; 132 : 22, 149; 133 : 2, 76; 134 : 49, 50, 78, 92, 93; 135 : 52); по баллистике (129 : 64, 87; 132 : 187); о движении многих тел в движущейся трубе (132 : 205, 207), по наклонной плоскости (132 : 60; 131 : 1), в сопротивляющейся среде (129 : 177); об изохронизме (129 : 129). Эйлер занимается маятником (129 : 70, 71, 119, 120; 132 : 127/8, 192/3; 133 : 43), многочисленными задачами о колебаниях, как, например: «О колебаниях твердых тел» (132 : 22), «Определить центр колебания какой-либо фигуры, подвешенной на данной оси» (131 : 135).

Другие специальные задачи таковы:

«О действии притягивающих сил на тела, связанные нитями» (131 : 63); «Найти четыре веса, которыми однородная трапеция  $ACBD$  может быть подвешена в углах  $A, C, B, D$ » (131 : 165); «О движении тел, влекомых какой-либо центральной силой» (129 : 1—8); «О периодах обращения тел, движущихся около какого-либо центра под действием произвольной силы» (129 : 30); «О новом методе определения движения твердых тел»

(139 : 13). К небесной механике следует отнести заметку об эллиптических орбитах (136 : 81). Кое-где речь идет о «живой силе» (132 : 202).

3. К механике гибких и упругих тел относится исследование цепной линии (133 : 44) и «совершенно гибкой нити» (131 : 182; 132 : 26; 133 : 133/4 с методом Германа; 137 : 167; 139 : 8). Эйлер ставит задачу: «Найти ускорение колеблющейся струны  $AQC$ » (129 : 68/9).

4. Больше всего заметок посвящено механике жидкостей (129 : 36, 107, 207; 136 : 66) и газов, в частности гидростатике (131 : 38) и гидродинамике Даниила Бернулли (131 : 172).

Среди множества рассматриваемых имеются задачи:

«О конденсации жидкостей, происходящей от внутренней силы» (129 : 34);

«О движении жидкостей» (129 : 38);

«О движении жидкости по каналу произвольной формы» (131 : 211);

«Исследование движения потоков» (133 : 25);

«Опыт теории пульсаций, распространяющихся в воздухе» (136 : 40);

«Найти сопротивление движению тел в совершенно упругих средах» (129 : 67);

«Найти колебания и периоды колебаний дрожащего воздуха» (129 : 67, 72);

Плавание погруженных в воду треугольников, четырехугольников и других тел (131 : 68, 72, 77);

«Замечание о трактате г-на Даламбера о равновесии и движении жидкостей» (134 : 14).

5. Теория механизмов, машин, приспособлений. Эйлер занимается, например, насосами (133 : 26/7), машинами (133 : 34/5), пилами (134 : 25), зубчатыми колесами (136 : 32), водяным колесом Сегнера (133 : 58).

6. Ряд заметок следует отнести к теории корабля (129 : 56, 61, 170). Речь идет о лодке на реке (131 : 47—49), специально о гребных лодках (132 : 68), о действии весел (138 : 136—138), о поступательном движении корабля (133 : 105). Прилагается «Отрывок из мемуара г-на Шошо» (134 : 102).

### 3. АСТРОНОМИЯ И ГЕОДЕЗИЯ

Во всех 12 записных книжках встречаются заметки по астрономии и геодезии. К небесной механике и к дискуссии о движении планет относятся отрывки (131 : 64, 233, 266; 132 : 133, 135/6, 154, 199, 251/52; 133 : 2, 7, 8; 134 : 172; 135 : 53). В частности, Эйлер обсуждает орбиту Земли (129 : 121/2, 146; 131 : 65, 269; 132 : 182; 133 : 74; 135 : 34), движение Земли под действием притяжения Солнца (133 : 39, 41), годичное возвратное движение полюсов (133 : 40), расстояние от Солнца до Земли (130 : 34). Он пробует определить температуру в каждой точке Земли в каждый момент времени (131 : 120—122).

Эйлер рассматривает движение тела, притягиваемого одним неподвижным центром (133 : 2, 3, 5) и двумя телами (133 : 35, 52), а также задачу трех тел (133 : 76, ср. раздел о механике). Обстоятельно обсуждаются расстояние между Солнцем и планетами (132 : 214, 217), угловая скорость планет (131 : 32), вычисление возмущений в случае двух планет (131 : 172/3), соединение планет (130 : 40/1). Часто планеты рассматриваются

вместе с Луной или с кометами (130 : 50/51; 131 : 266/7; 132 : 133, 244; 133 : 2, 7, 8, 18).

Ряд заметок относится к практической, наблюдательной астрономии. Эйлер приводит астрономические наблюдения разных астрономов, например Птолемея и Гиппарха (130 : 50; 132 : 128; 134 : 182—186), в том числе планет (131 : 268), в частности Марса (131 : 86). Он описывает метод наблюдения высоты полюса и склонения неподвижных звезд (132 : 212). Занимается теорией рефракции при наблюдениях звезд (131 : 201/2), обсуждает разные инструменты, вроде параболического зеркала для Солнца (133 : 79), астрономического квадранта (132 : 66), морского квадранта для определения высоты звезд (134 : 15), солнечных часов (131 : 107, 134 : 51).

Заметки по теории Луны охватывают: теорию орбиты Луны (131 : 99; 133 : 2, 7, 8, 134 : 97—99; 135 : 51, 70—72; 138 : 29—37), определение положения Луны (133 : 73), уравнения Луны (134 : 36—38), лунное затмение (134 : 50), периоды обращения Луны (130 : 38). По отношению к Луне, Земле и Солнцу Эйлер рассматривает задачу: «На данный момент соединения светил найти места центров на поверхности Земли» (133 : 13—16). Фрагменты (132 : 155, 183) посвящены исключительно кометам, специально орбите кометы 1759 г. — заметка (136 : 43).

Несколько отрывков относится к неподвижным звездам, в особенности к Солнцу, а именно: о склонении звезды (132 : 238; 139 : 6), о наклоне эклиптики (131 : 24), о высоте полюса и эклиптики (134 : 92), о движении Солнца (133 : 119), о солнечном радиусе (134 : 95), о солнечном параллаксе (139 : 54/5), об определении продолжительности сумерек по высоте полюса и склонению Солнца (131 : 45/6, 49).

Эйлер занимается некоторыми вопросами хронологии (131 : 267), в частности длительностью года (133 : 128), уравнением времени (132 : 141), лунными и солнечными циклами (131 : 134, 263), методом нахождения юлианских дат по григорианским датам (130 : 29/30).

Наконец, обсуждаются задачи геодезии (140 : 82/3) и картографии (131 : 260; 137 : 317 — проекция Делиля), в частности фигура Земли с учетом данного лунного параллакса (133 : 122/3), локсодрома (139 : 19), курс корабля и навигация (131 : 8, 257—259, 261), например задача: «Найти возрастающие широты в таблице Меркатора»; гидрографические карты (140 : 46/7).

#### 4. ФИЗИКА

Иногда Эйлер перечисляет физические задачи (134 : 22), обсуждает удельный вес различных материалов (129 : 169, 173), особенно Земли (132 : 221), вытекание воды под напором («Об извержении воды») (134 : 71), движение воздуха в трубах (137 : 130/1).

Больше всего заметок посвящено оптике (133 : 51, 53, 86—88, 106—108, 150/1; 134 : 50, 67, 70, 96—107) — иногда в связи с Ньютоном, рефракции (135 : 11, 47; 138 : 153/4), комбинациям линз (133 : 151), преломлению во флинтглассе (137 : 1) и в выпуклых линзах — в связи с опытами Доллонда (136 : 67—80), камере-обскуре (134 : 31). Рассматривается отбрасывание теней телами (138 : 12/3), теория оптических инструментов, таких, как телескоп (136 : 6, 17), сферическое зеркало (136 : 54/5), зажигательное стекло (*vitrum causticum*) (129 : 152 : 155).

Обсуждаются проблемы магнетизма (133 : 174), например определение направления магнитной стрелки на Земле (136 : 57/58), теория магнитной силы (134 : 137—139, 143, 217/8), учение об электричестве (134 : 39, 206—208).

Эйлер касается вопросов метеорологии, например об облаках (130 : 23), барометре (136 : 52), плотности воздуха (129 : 62).

На втором месте по числу заметок стоит акустика, прежде всего теория музыки (129 : 35—37, 39—40, 51—53, 80/1, 132; 130 : 45/6; 135 : 62/3; 138 : 129). Особенно внимание Эйлера привлекает теория музыкальных инструментов, например флейты (129 : 90/1; 135 : 27/8; 138 : 157/8).

### 5. ГЕОГРАФИЯ, МЕДИЦИНА, ХИМИЯ

Между тем как в заметках (130 : 56, 72) Эйлер приводит географические долготы и широты мест, в другом случае он обсуждает движение мускулов (134 : 51). К химии в широком смысле относятся его заметки: о растворении металлов, причем делается ссылка на Ломоносова (134 : 186); о прочности дерева (134 : 259); о рецептах красок (135 : 90) и о солености моря (136 : 22). Обсуждается получение пресной воды из морской (134 : 56).

### 6. ФИЛОСОФИЯ, ФИЛОЛОГИЯ

Записная книжка 134 содержит пространные рассуждения по философии. К ним относятся «Онтологические разъяснения» к вольфианской философии (134 : 4—7), натурфилософские тезисы (134 : 8—14), логические тезисы (134 : 15—17) с дефиницией «искусства открытия» (*ars inveniendi*): «Искусство открытия есть метод определения по одному или нескольким данным свойствам или отношениям какой-либо вещи других отношений или природы самой вещи»<sup>1</sup>.

Эйлер обсуждает понятия пространства и времени, а также сложение движений при столкновении тел (134 : 19—21). К этому добавляются дальнейшие заметки по логике (134 : 42/3), философии (136 : 65), нечто вроде наброска словаря (130 : 11/12), а также список арифметических, геометрических и алгебраических дисциплин, входящих в «универсальную математику» (*mathesis universalis*).

К филологии относятся замечания о латинском и немецком языках (134 : 68, 150—165), по фонетике («элементы речи» (*elementa sermonis*)), о частоте букв в немецком предложении (134 : 253), а также разнообразные изречения, вроде следующего:

Voltaire a de l'esprit, il est vray, mais, mais, mais...  
Les mais à son égard ne finissent jamais<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> *Ars inveniendi est methodus ex una vel aliquot datis alicuius rei proprietatibus seu affectionibus, alias affectiones, vel naturam ipsius rei definiendi.*

<sup>2</sup> Вольтер остроумен, правда, но, но, но... Эти «но» в его адрес никогда не кончаются.

## 7. РАЗНОЕ

Записные книжки содержат разнообразные заметки личного (130 : 0—9, 81) или не связанного с наукой содержания, которые все же отчасти полезны для биографии Эйлера. Здесь упражнения в русском языке (130 : 11, 17, 18), записи расходов, регистрация покупок и денежные расчеты (130 : 82/3; 134 : 244—251; 135 : 3—5), спецификация одной географической карты (130 : 61—72), медицинские рецепты (130 : 53), меры длины (134 : 1), денежные единицы (134 : 2/3), цены на благородные металлы (134 : 30, 47), указатели книг (134 : 1), в особенности книг, взятых во временное пользование (134 : 257/8), один перечень книг, содержащий 509 названий (134 : 192—201), а также список неопубликованных статей Эйлера «Каталог работ, которые представлены Академии и еще не напечатаны, 1773» (Catalogus dissertationum Academiae traditarum quae nondum impressae sunt 1773) (139 : 124—131). Из 312 названий многие теоретико-числовые, всего 98, зачеркнуты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов Г. К. Записные книжки Эйлера в Архиве Академии наук СССР // Ист.-мат. исслед. 1957. Вып. 10. С. 67—94.
2. Матвеевская Г. П. О неопубликованных рукописях Л. Эйлера по диофантову анализу // Ист.-мат. исслед. 1960. Вып. 13. С. 107—186.
3. Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1. С. 6—7.

# О РУКОПИСНОМ НАСЛЕДИИ И ЗАПИСНЫХ КНИЖКАХ ЭЙЛЕРА

Г. П. МАТВИЕВСКАЯ

За два столетия, прошедшие со дня смерти Леонарда Эйлера, написано множество статей и книг об отдельных сторонах его жизни и творчества. Было сделано также немало серьезных попыток, обобщив известные сведения, составить полную научную биографию великого ученого. Однако каждая такая попытка имела лишь ограниченный успех, так как предпринимавший ее неизменно сталкивался с трудностями, преодолеть которые оказывалось ему не под силу.

Хотя жизнь Эйлера была небогата внешними событиями и, казалось бы, проследить его творческий путь несложно, в действительности описание фактов его биографии само по себе не дает даже приблизительного представления о его личности. Уже современники Эйлера, воздавая ему должное, стремились осветить его многогранную научную деятельность и сохранить для потомков живой образ сотрудника и учителя, поняли всю сложность такой задачи. Это видно, например, из текста речей академиков Я. Штелина и Н. И. Фуса, произнесенных по случаю кончины Эйлера. Штелин, отмечая «выдающиеся его качества, которые в силу редкости своей вызвали удивление и выделяли его из миллионов других людей» [1, с. 37], сказал, что биография гениального ученого «могла бы составить солидную книгу» [Там же, с. 40]. Фус, которого связывала с Эйлером многолетняя совместная работа, рассказал о его жизни в «Похвальной речи», произнесенной 23 октября 1783 г. Эта речь и сейчас производит сильное впечатление искренностью и глубоким пониманием великих заслуг Эйлера перед наукой<sup>1</sup>. Но и Фус считал непосильным для себя сказать о них «настоящее похвальное слово» и выразил лишь готовность предоставить тому, кто возьмется за это, необходимый материал [2]. Как впоследствии выяснилось, и более поздние биографы Эйлера испытывали не меньшие затруднения, так что даже спустя столетие положение в этом смысле существенно не изменилось.

Полноценная научная биография, помимо фактов и анализа конкретных результатов деятельности ученого, должна открыть перед читателем его внутренний мир и позволить, как обычно говорится, заглянуть в лабораторию его творчества. В отношении Эйлера эта задача заведомо превосходит возможности отдельного исследователя. Трудности связаны в первую очередь с колоссальным объемом материала, подлежащего изучению. По широте интересов, по количеству важнейших открытий в каждом из

<sup>1</sup> «Похвальная речь» Н. И. Фуса, вышедшая в русском переводе в 1801 г., воспроизведена в наст. изд.— *Примеч. ред.*



затронутых направлений математических наук, по богатству и разнообразию оригинальных идей Эйлер не имел себе равных, и это существенным образом отразилось на судьбе его научного наследия: даже простой обзор полученных им результатов превратился в сложную проблему, решением которой занималось не одно поколение ученых. Научное наследие Эйлера столь велико, что нелегким для биографов делом оказалось составление списка его сочинений.

Список опубликованных сочинений Эйлера к 1784 г. достиг 562 наименований, но многие законченные работы еще не были напечатаны. Последним изданием, в подготовке которого он сам принимал участие, был сборник «*Opuscula analytica*». Т. 1 (1783), в 1785 г. из печати вышел второй том этого издания. В 1826 г. список трудов Эйлера насчитывал 771 название, а из подготовленных к печати оставались неопубликованными 14 трактатов. Они вошли в изданный в 1830 г. XI том «Мемуаров» Академии, дополнительный к закрывшейся в 1826 г. серии этого издания.

Когда публикация законченных работ Эйлера была закончена, обратились к его огромному архиву, который, как справедливо полагали, содержал важные материалы, касающиеся его научной биографии. Прежде всего это относилось к научной переписке Эйлера, содержавшей чрезвычайно интересные мысли, с видными учеными своего времени.

Изучая рукописные материалы академического Архива и пересматривая семейный архив, П. Н. Фус выяснил, что научное наследие Эйлера далеко не исчерпано. В 1844 г. он обнаружил много (61) рукописей трактатов Эйлера по математике и механике, готовых к печати, но неизвестных издателям его наследия. Замечательная находка послужила поводом для начала работы над проектом издания полного собрания трудов великого ученого. Идею этого издания горячо поддержали М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский, П. Л. Чебышев [3], в разработке плана принял живое участие берлинский математик К. Г. Якоби [4]. Вначале предполагалось издать все труды Эйлера в 25 томах, но затем из-за материальных трудностей решили отказаться от перепечатывания вышедших самостоятельно сочинений и ограничиться публикацией статей. Из этого проектировавшегося издания (*Leonhardi Euleri Opera minora collecta*) были выпущены лишь два первых арифметических тома (*Commentationes arithmeticae collectae*, 1849) [5].

В 1862 г. публикация научного наследия Эйлера была в основном завершена, но идея о необходимости полного собрания сочинений продолжала волновать математиков. Не уменьшался интерес также к дальнейшему исследованию и публикации переписки Эйлера и других материалов из его архива, необходимых для создания его научной биографии.

К концу XIX в. стало ясно, что она может быть написана лишь после того, как будут собраны воедино все печатные труды Эйлера, сохранившиеся рукописи, письма, а также имеющие к нему отношение официальные документы. Внимание ученого мира к этой задаче привлекли торжественное заседание, проведенное 17 ноября 1883 г. Базельским обществом естествоиспытателей в ознаменование столетия со дня смерти Эйлера, а затем подготовка к празднованию в 1907 г. его двухсотлетнего юбилея. Появились многочисленные работы о его жизни и творчестве. Одновременно велась пропаганда идеи издания полного собрания сочинений Эйлера. При его планировании предполагалось сотрудничество ученых трех стран,

с которыми была связана его жизнь, — Швейцарии, России и Германии.

В 1907 г. была создана Швейцарская эйлеровская комиссия. Она вынесла решение о начале подготовительной издательской работы и обратилась к научным обществам, ученым и любителям науки всех стран с призывом оказать изданию материальную поддержку. Эта инициатива была встречена с воодушевлением, и уже в 1911 г. из печати вышел первый том уникального издания, начатого по международной подписке и продолжающегося до настоящего времени. В предисловии редактор, и один из энтузиастов издания «Leonhardi Euleri Opera omnia», Ф. Рудио подробно изложил историю изучения и публикации научного наследия Эйлера [6].

Петербургская академия наук приняла самое активное участие в работе<sup>2</sup>. На Общем собрании Академии 2 мая 1909 г. была избрана специальная комиссия «для рассмотрения подлежащего передаче в Эйлеровскую комиссию материала, хранящегося в Архиве Академии и касающегося ученой деятельности Эйлера» [7]. В декабре 1910 г. эйлеровские материалы из Архива Академии наук вместе с их описью, составленной Б. Л. Модзалевским [8], были отосланы в Цюрих для Швейцарского общества «с обязательством возвратить их в определенное время» [9, 10]. Исследованием архивных материалов занялся известный шведский историк математики Г. Энестрём, автор фундаментального списка трудов Эйлера [11].

О результатах своей работы Энестрём сделал доклад Эйлеровской комиссии в 1913 г. [12]. Прежде всего он выделил рукописи Эйлера, относящиеся к уже опубликованным работам, не проводя, однако, по его словам, точного сравнения их с соответствующими печатными изданиями. Затем он отсеял материалы, не принадлежащие Эйлеру, и классифицировал остальные по следующим пунктам: а) общее и смешанное; б) научные работы, доклады и отзывы; в) биографические и библиографические материалы.

Особое внимание Энестрём обратил на рукописи, вызвавшие у него «большое удивление» и оказавшиеся записными книжками, «в которых Эйлер случайно отмечал такие вещи, которыми он в данное время занимался» [11, с. 193]. По мнению исследователя, «две наиболее старые записные книжки содержат в основном упражнения и имеют поэтому подчиненное значение, но с помощью других записных книжек можно довольно хорошо ознакомиться с историей эйлеровских открытий» [Там же.] Выразив пожелание, чтобы эти рукописи были основательно проработаны, Энестрём предложил для каждой математической записи дать особую заметку о ее содержании, но, по его словам, «так как записные книжки в общем имеют примерно 3000 исписанных страниц и записи часто очень коротки, такая работа потребовала бы много месяцев» [11, с. 194]. Нужно заметить, что, как показало время, Энестрём недооценил ее трудоемкость. Сам он, как он пишет, смог только бегло пролистать записные книжки в первую очередь для того, чтобы установить их хронологическую последовательность.

При издании «Opera omnia» из архивных документов были использованы только рукописи опубликованных работ, а записные книжки предполагалось издать отдельно в серии биографических материалов. Как и

<sup>2</sup> Подробнее см. статью Е. П. Ожиговой «Об участии Петербургской академии наук в издании трудов Эйлера» в наст. изд.— *Примеч. ред.*

другие рукописи Эйлера, они долго оставались в Швейцарии и были возвращены лишь в послевоенное время (1947—1948).

Отсутствие архива Эйлера болезненно ощущалось советскими историками науки, которые продолжали изучать как труды Эйлера [13], так и его современников, особенно М. В. Ломоносова. Письма последнего к Эйлеру, находившиеся в этом архиве, оказались для них недоступными [14, с. 22—23].

Возвращение рукописей в Архив АН СССР совпало с началом подготовки к 250-летию со дня рождения Эйлера. В связи с этим его научное наследие вновь оказалось в центре внимания многих ученых, включившихся на новом этапе в большой коллективный труд по созданию научной биографии великого человека.

Издание полного собрания трудов Эйлера намного облегчает работу над его научным наследием. Однако вопрос о генезисе его идей, столь важный для истории современной математики, все еще далек от решения. Чтобы ответить на него, нужно знать не только факты, но и путь, которым он пришел к открытию. Эйлер, как никто другой, стремился указать читателю этот путь, подробно разясняя ход своей мысли. Эту замечательную черту, присущую всем его трудам, отмечали уже ранние биографы. Однако результаты, полученные им в разных областях естественных наук, столь глубоки и так тесно связаны между собой, что восстановить картину его научного творчества, несмотря на предельную ясность изложения, очень трудно. Поэтому к исследованию были привлечены, помимо опубликованных сочинений Эйлера, драгоценные рукописные документы — его научная корреспонденция и записные книжки.

Рукописные материалы Эйлера сразу же после возвращения их в Архив АН СССР привлекли особое внимание советских ученых [15—17] — прежде всего ныне покойного В. И. Смирнова, А. П. Юшкевича, который уже почти 40 лет целенаправленно изучает эйлеровское наследие, а также Г. К. Михайлова. Постепенно круг исследователей, работающих в указанном ими направлении, расширялся, и к настоящему времени литература об Эйлере, основанная на анализе его рукописей, существенно пополнилась.

В сотрудничестве с зарубежными историками науки сделано много изданию научной переписки Эйлера [18]. Переписка играла в жизни ученого того времени огромную роль, позволяя обнародовать научные открытия задолго до их публикации. Эйлер написал свыше 4000 писем научного содержания, в которых сообщал корреспондентам об интересовавших его задачах, о методах их решения и т. д. Трудно переоценить значение этих писем для создания его научной биографии.

Важнейший материал для истории научных открытий Эйлера содержится, как уже отмечалось, в его записных книжках — двенадцати переплетенных томах различного объема, хранящихся в Архиве АН СССР [19]. Количество страниц в них колеблется от 152 (№ 130) до 544 (№ 131), а общий объем превышает 3000 страниц. Их изучение сопряжено с особыми трудностями. Исследователь сталкивается здесь с поистине необозримым хаосом самых разнородных научных заметок, набросков к письмам и статьям, формулировок и доказательств теорем, иногда нуждающихся в уточнении чертежей, задач и выкладок, часто не доведенных до конца. Однако каждая запись отражает определенную стадию работы Эйлера над

той или иной проблемой и между ними, несомненно, существуют внутренние связи. Можно с уверенностью сказать, что если удастся выявить эти связи, то окажутся выясненными многие важные стороны математического творчества Эйлера, которые нельзя осветить, исходя лишь из его опубликованных работ. Более того, результаты изучения записных книжек могут дать материал для интересных выводов относительно психологии научного творчества вообще.

В записных книжках Эйлера четко отражен ход его работы над многими научными проблемами, окончательное решение которых известно по опубликованным трудам. Встречается также немало заметок, где рассматриваются вопросы, не затронутые в печатных работах; такие записи, естественно, вызывают наибольший интерес.

Часто заметки из записных книжек касаются решения задач, обсуждавшихся Эйлером в его переписке с учеными. В таких случаях оказывается возможным с достаточной точностью датировать эти и соседние записи и, судя по содержанию писем, выяснить, когда и в какой связи перед Эйлером встала та или иная математическая проблема. Сопоставление записей с соответствующими письмами представляет богатые возможности для изучения его творческого метода. Иногда удается проследить, как, развивая возникшую идею, он приходит к совершенно новой постановке вопроса, далекой от первоначальной и дающей результаты, видимо неожиданные для него самого.

В записных книжках Эйлер, по-видимому, фиксировал результаты сразу после их получения. Некоторые, вероятно наиболее актуальные с его точки зрения и не вызывавшие у него сомнений, он тут же сообщал адресатам. Другие же он долго проверял: они снова и снова повторяются в записных книжках (иногда в несколько измененном виде) и значительно позднее всплывают в переписке. В этом смысле заметки оказываются черновыми набросками для писем.

В записных книжках наглядно проявляется стиль научной работы Эйлера и прежде всего — целеустремленность исследования, сохранение основной идеи в течение многих лет и настойчивый поиск решения задачи, несмотря ни на какие промахи и неудачи на этом пути. В них также ясно отражено, насколько важное значение имело для Эйлера сочетание теории и научного эксперимента: занятие прикладными вопросами давало ему очевидный стимул к развитию теории.

Первый шаг при исследовании записных книжек заключался в датировке и общем обзоре каждой из них. Впервые это, как сказано выше, сделал в 1913 г. Г. Энестрём [12]; впоследствии датировка уточнялась, а содержание каждой книжки освещалось более полно (см. [15, 20—23] и др.).

Следующий, более сложный этап работы требует классификации материала по отдельным дисциплинам и подробного ознакомления с содержанием соответствующих записей. Это является весьма сложной задачей ввиду огромного количества заметок и их разнообразия, затрудняющего полный обзор и глубокий научный анализ в одно и то же время. Поэтому возможен двойкий подход к ее решению. Можно рассматривать записные книжки в целом, не углубляясь в частности и не разбирая подробно отдельных проблем, что позволяет лучше проследить процесс творчества в целом. С другой стороны, можно выделить все записи по какому-либо од-

ному вопросу, подробно изучая каждую заметку, и полнее осветить таким образом историю творчества Эйлера в этой узкой области.

Наши исследования, начатые в 1954 г. по инициативе и под руководством В. И. Смирнова, который обратил внимание на важность изучения записных книжек Эйлера, были посвящены заметкам по теории чисел [23—29] и, в частности, по диофантову анализу. Они составляют значительную часть общего объема записных книжек (около 800 страниц текста). Был дан общий обзор материала, предложена его классификация и на основании анализа записей сделаны выводы о неопубликованных рукописях Эйлера арифметического содержания [23—25]. Однако текст заметок в основном остается до сих пор неопубликованным ни в латинском оригинале, ни в переводе (исключение составили записи о совершенных числах [26], «постулате Бертрана» [27], «partitio numerorum» [28], многоугольных числах [29], функции Эйлера [32], удобных числах [31]). В то же время не вызывает сомнения, что для истории математики была бы чрезвычайно важна публикация не только заметок из записных книжек, но и русского перевода опубликованных сочинений Эйлера по теории чисел. Эта цель имеется в виду при дальнейшем исследовании заметок по теории чисел [30—32] и подготовке их к печати (Г. П. Матвиевская и Е. П. Ожигова).

В записных книжках встречаются также записи, которые не носят, как кажется на первый взгляд, чисто научного характера, но содержат ценные биографические сведения. Примером является запись в книжке, датируемой приблизительно 1749—1755 г. [32]. Здесь содержится каталог книг библиотеки Эйлера, озаглавленный «Каталог моих книг» (*Catalogue Librorum meorum*). Он бегло упоминается в статье Г. К. Михайлова [20, с. 88]. Однако этот каталог заслуживал внимательного изучения, так как набор книг в библиотеке красноречиво говорит об интересах и склонностях ее владельца [33]. Список занимает 20 страниц записной книжки (л. 192—201 об.) и включает 539 названий сочинений на разных языках — латинском, немецком, французском, английском, русском, греческом. Книги описаны без какой-либо определенной системы и подразделены только на издания *in folio* и *in quarto*. Даже беглый обзор каталога показывает, что к 1750 г. Эйлер владел богатой библиотекой. В ней были представлены не только естественные, но и гуманитарные науки, а также религия и художественная литература, главным образом классическая.

Изучение записных книжек сейчас ведется интенсивно. В той или иной мере затрагивались заметки по механике, теории чисел, алгебре, геометрии, физике, астрономии (Ю. А. Белый, Р. И. Галчанкова, А. А. Киселев, Г. П. Матвиевская, И. Г. Мельников, Л. С. Мищенко, Г. К. Михайлов, Н. И. Невская, Е. П. Ожигова), но основную работу еще предстоит проделать. Теперь имеется значительно больше возможностей для использования записных книжек в качестве материала для научной биографии Эйлера, чем, скажем, 25 лет назад.

За это время основательно изучена история Петербургской академии наук в XVIII в., написаны научные биографии многих ученых, сотрудничавших с Эйлером, опубликована их переписка, на основании архивных документов сделаны новые выводы о ходе исследований в Академии и т. д. Сопоставление полученных данных с заметками из записных книжек Эйлера может облегчить расшифровку и датировку отдельных записей,

объяснить причину их появления и сделать более понятной связь разных заметок между собой.

Дальнейшее изучение записных книжек Эйлера, несомненно, даст новый ценный материал для его научной биографии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Копелевич Ю. Х.* Материалы к биографии Леонарда Эйлера // Ист.-мат. исслед. 1957. Вып. 10. С. 9—65.
2. *Fuss N.* Eloge de Monsieur Léonard Euler, lu à l'Académie Imp. des sciences, dans son assemblée du 23 octobre 1783 par Nicolas Fuss. Avec une liste complete des ouvrages de M. Euler. SPb., 1783.
3. *Кострюков К. И.* Об одной попытке издать труды Л. Эйлера // Ист.-мат. исслед. 1954. Вып. 7. С. 630—640.
4. *Stäckel P., Ahrens W.* Briefwechsel zwischen C. G. Jacobi und P. H. v. Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers // Bibl. math. 1907. Bd. 8. S. 233—306.
5. *Euler L.* Commentationes arithmeticae collectae. Petropoli, 1849. Vol. 1—2.
6. *Rudio F.* Vorwort // *Euler L.* Opera omnia. Ser. I. Vol. 1.
7. Изв. Акад. наук. Сер. 7. 1909. Т. 3, № 14. С. 929—930.
8. *Модзалевский Б. Л.* Перечень рукописей Эйлера, хранящихся в Архиве Конференции имп. Академии наук. 1910 (на правах рукописи).
9. Обзорение архивных материалов (Архив АН СССР). Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Вып. 1. С. 73—74.
10. *Rudio F., Schröter C.* Die Eulerausgabe // Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zürich. 1908. Bd. 53. N 24.
11. *Eneström G.* Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers // Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 1910—1913. Ergänzungsб. 4, Lief. 1—2.
12. *Eneström G.* Bericht an die Eulerkommission der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft über die Eulerschen Manuskripte der Petersburger Akademie // Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 1913. Bd. 22, H. 1—2. S. 191—205.
13. Леонард Эйлер: Сб. ст. и матер. к 150-летию со дня смерти. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935.
14. *Модзалевский Л. Б.* От составителя // Рукописи М. В. Ломоносова в Архиве Академии наук СССР: Научное описание. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1937.
15. Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1: Научное описание.
16. *Эйлер Л.* Письма к ученым. М.; Л.: Наука, 1963.
17. *Эйлер Л.* Переписка. Аннотированный указатель / Под ред. В. И. Смирнова, А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1967. (Более полн. изд.: Opera IVA-1).
18. *Юшкевич А. П.* Об архивном наследии Леонарда Эйлера // Вопр. истории естествозн. и техн. 1982. № 3. С. 137—139.
19. Архив АН СССР, ф. 136, оп. 1, № 128—140.
20. *Михайлов Г. К.* Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР: Общее описание и заметки по механике // Ист.-мат. исслед. 1957. Вып. 10. С. 67—94.
21. *Михайлов Г. К., Смирнов В. И.* Неопубликованные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 47—79.
22. *Mikhailov G. K.* Notizen über die unveröffentlichten Manuscripte von Leonhard Euler // Leonhard Euler. Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen. Berlin: Akad.-Verl., 1959. S. 256—280.
23. *Матвиевская Г. П.* О неопубликованных рукописях Леонарда Эйлера по диофантову анализу // Ист.-мат. исслед. 1960. Вып. 13. С. 107—186.
24. *Матвиевская Г. П.* Неопубликованные рукописи Леонарда Эйлера по теории чисел: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1958.
25. *Матвиевская Г. П.* Неопубликованные рукописи Л. Эйлера по диофантову анализу // Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР. 1959. Т. 22. С. 240—250.
26. *Матвиевская Г. П.* Заметки о совершенных числах в записных книжках Эйлера // Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР. 1960. Т. 34. С. 415—427.
27. *Матвиевская Г. П.* Постулат Бертрана в записях Эйлера // Ист.-мат. исслед. 1961. Вып. 14. С. 225—288.

28. *Киселев А. А., Матвиевская Г. П.* Неопубликованные записи Эйлера по *partitio numerorum* // Ист.-мат. исслед. 1965. Вып. 16. С. 145—180.
29. *Матвиевская Г. П.* Заметки о многоугольных числах в записных книжках Эйлера // Ист.-мат. исслед. 1983. Вып. 27. С. 27—50.
30. *Matvievskaja G. P., Ožigova E. P.* Leonhard Eulers handschriftlicher Nachlass zur Zahlentheorie // Leonhard Euler. 1707—1783: Beiträge zu Leben und Werk. Basel, 1983. S. 151—160.
31. *Мельников И. Г.* Удобные числа в рукописном наследии Эйлера // Ист.-мат. исслед. 1983. Вып. 27. С. 10—24; Доп.: *Ожигова Е. П.* // Там же. С. 24—27.
32. *Ожигова Е. П.* Функция Эйлера в его записных книжках // Ист.-мат. исслед. 1983. Вып. 27. С. 50—63.
33. Архив АН СССР, ф. 136, оп. 1, № 134.
34. *Матвиевская Г. П.* Библиотека Эйлера // Вопр. истории естествозн. и техн. 1982. № 3. С. 139—140.

# РУКОПИСНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

*Г. П. МАТВИЕВСКАЯ, Е. П. ОЖИГОВА*

Теория чисел занимает большое место в творчестве Эйлера. Примерно  $\frac{1}{6}$  часть его опубликованных трудов содержит результаты, методы, приложения теории чисел. Такое же соотношение характерно и для рукописей и переписки Эйлера, хранящихся в советских архивах.

## 1. ПУБЛИКАЦИЯ РУКОПИСНОГО НАСЛЕДИЯ ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Неопубликованные рукописи Эйлера привлекли внимание ученых еще в XVIII в. После смерти Эйлера осталось много таких работ. В 1783—1785 гг. Н. И. Фус опубликовал два тома его неизданных ранее статей, среди которых было 11 по теории чисел [1]. Затем он подготовил к печати 8 работ по теории чисел, увидевших свет в 1830 г., уже после его смерти [2].

Большое место занимает теория чисел в изданной в 1843 г. П. Н. Фусом переписке нескольких выдающихся геометров XVIII в., особенно в переписке Эйлера с Гольдбахом [3]. В 1849 г. П. Н. Фус, В. Я. Буяковский и П. Л. Чебышев выпустили два тома «Арифметических сочинений» Эйлера [4], где собрали наряду с напечатанными ранее также и нигде не публиковавшиеся, среди них — большой трактат по теории чисел из 16 глав. В первом томе они поместили очень ценный систематический указатель на французском языке всех работ Эйлера, включенных в это издание [4, с. LI—LXXX]. Наконец, в 1862 г. П. Н. Фус и Н. Н. Фус издали собрание «Посмертных трудов» Эйлера, также в двух томах, куда вошли и фрагменты рукописей по теории чисел [5].

Интерес к рукописному наследию Эйлера оживился в конце XIX — начале XX в. в связи с юбилейными датами. На международных конгрессах математиков в Цюрихе (1897) и Риме (1908) ставился вопрос о необходимости издания полного собрания сочинений Эйлера. При подготовке к празднованию двухсотлетия со дня рождения великого ученого в Швейцарии, Германии, России были образованы комиссии, которые изучали пути и возможности такого издания. Русские ученые (Д. К. Бобылев, А. М. Ляпунов, О. А. Баклунд, А. А. Марков, Н. Я. Сонин и др.) проявили большой интерес к трудам Эйлера и подчеркивали важность издания всего его научного наследия [6, с. 243]. В конце концов заботу об издании «Полного собрания сочинений» Эйлера (*Leonhardi Euleri Opera omnia*) приняло на себя Швейцарское общество естествоиспытателей [7]. Шведский историк математики, математик и библиограф Г. Энестрём, составивший полный список сочинений Эйлера [8], который, по словам Ф. Рудю, явился «хребтом всего издания» [7, I-1, с. XXXV — XXXVI], изучил рукописные материалы Эйлера, временно предоставленные в рас-



поражение Швейцарского общества естествоиспытателей Петербургской академией наук. В 1913 г. он информировал Общество о результатах этого изучения [9].

Полное собрание сочинений, выход которого начался в 1911, предполагалось издать в трех сериях, поместив в первую труды по математике, во вторую по механике и астрономии, в третью по физике и прочие. При подготовке издания этих серий использовались почти исключительно рукописи печатных трудов Эйлера — для сверки и уточнения текста. Изучение же рукописного наследия продолжало оставаться настоятельно необходимым для исследования в полном объеме творчества Эйлера, но было отложено на долгое время.

В 1947—1948 гг. рукописи Эйлера были возвращены из Швейцарии в Ленинград в Архив Академии наук СССР (ныне Ленинградское отделение этого Архива, ЛО ААН СССР). По инициативе В. И. Смирнова было начато планомерное изучение рукописного наследия Эйлера. Первые результаты этого изучения были сообщены В. И. Смирновым на юбилейной сессии Академии наук СССР 16 апреля 1957 г. и опубликованы в статьях В. И. Смирнова и Г. К. Михайлова [10, 11], а также в других работах [12—14]. Большую роль в дальнейшем исследовании и публикации рукописных материалов Эйлера сыграл и продолжает играть А. П. Юшкевич.

Начатое в 1911 г. издание свода сочинений Эйлера продолжается и по сей день и представляет собой пример плодотворного международного сотрудничества в области науки. В последние десятилетия самое активное участие в этой работе — как в организационном плане (В. И. Смирнов, А. Т. Григорьян, Г. К. Михайлов, А. П. Юшкевич), так и непосредственно в исследовании архивных материалов (Ю. А. Белый, Р. И. Галченкова, А. А. Киселев, Т. Н. Кладо, Г. А. Князев, Ю. Х. Копелевич, М. В. Крутикова, Т. А. Лукина, Г. П. Матвиевская, И. Г. Мельников, Л. С. Минченко, Г. К. Михайлов, Н. И. Невская, Е. П. Ожигова, Н. М. Раскин, В. И. Смирнов, А. П. Юшкевич) приняли советские ученые. В частности, в 1957—1960 гг. было начато изучение рукописей Эйлера по теории чисел (А. А. Киселев, Г. П. Матвиевская, И. Г. Мельников [15—24]).

В 1965 г. в Берлине вышло в свет под редакцией Э. Винтера и А. П. Юшкевича новое издание «Переписки Эйлера с Гольдбахом» [25], совместно предпринятое академиями наук СССР и ГДР. В этом труде подробно прокомментированы наряду с другими вопросы теории чисел (А. А. Киселев, и И. Г. Мельников), причем для комментирования использовались и некоторые рукописные материалы из записных книжек Эйлера.

В последнее время в связи с близким завершением издания первых трех серий трудов Эйлера началась публикация IV серии, в которую включается научное рукописное и эпистолярное наследие ученого. В рамках этой работы Г. П. Матвиевская, И. Г. Мельников, Е. П. Ожигова вновь обратились к рукописям Эйлера по теории чисел [26—30].

## 2. ОБЩИЙ ОБЗОР РУКОПИСНЫХ МАТЕРИАЛОВ ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Рукописные материалы Эйлера по теории чисел, как и другие его рукописи, можно разделить на три группы: черновики опубликованных работ, фрагменты, содержание которых уже печаталось полностью или час-

тично, и фрагменты, до сих пор не публиковавшиеся а потому представляющие особый интерес.

Изучение этих материалов было начато с рассмотрения всех рукописей Эйлера и отбора фрагментов теоретико-числового содержания. Эти записи постепенно расфигуровываются, переводятся с латинского языка на русский, выясняется их математическое содержание. После этого материал систематизируется по темам, проводится сравнение фрагментов с соответствующими печатными работами Эйлера, чтобы установить, публиковались ли эти фрагменты, верно ли они воспроизведены, если печатались. Затем составляются комментарии к отдельным фрагментам или к нескольким тематически объединенным заметкам.

Основные рукописные материалы Эйлера содержатся в его «Записных книжках» (*Adversaria mathematica*) [31]. Это переплетенные тома разного формата и объема, число страниц в них колеблется от 152 (№ 130) до 544 (№ 131). В общей сложности в них свыше 3000 страниц, в большинстве своем на латинском, реже — на немецком, совсем редко — на французском языке. Записные книжки отражают в хронологическом порядке ход работы Эйлера над интересовавшими его вопросами, свидетельствуют о широте его интересов, о легкости, с какой он переходил от одного предмета к другому. Вопросы механики сменяются геометрией, алгебра или теория чисел — математическим анализом, заметки по теории музыки чередуются с записями по теории дифференциальных уравнений и физике. Эти материалы чрезвычайно важны для изучения истории открытий Эйлера, они позволяют глубже заглянуть в творческую лабораторию ученого.

Свыше 1000 страниц записных книжек содержат записи по теории чисел. Обычно эти записи соседствуют с другими, ничего общего с теорией чисел не имеющими, но есть страницы, полностью посвященные теории чисел. Внимательное изучение записных книжек показало, что периодами наиболее интенсивного творчества Эйлера в области теории чисел были годы его пребывания в Петербурге (1736—1741 и 1767—1783) [20], но даже в те годы, когда Эйлер почти не публиковал теоретико-числовых работ, он продолжал усиленно заниматься этой тематикой. Некоторые известные результаты он получил задолго до их публикации.

Кроме записных книжек вопросы теории чисел рассматриваются и в других рукописях — разрозненных черновых записях и в многочисленных письмах.

Анализ этого материала может показать, каким путем шел Эйлер к своим результатам. Иногда он проводил исследование какой-либо проблемы в течение многих лет. Часто он приходил к выводам на основании наблюдений над числами после длинных вычислений и составления таблиц. Он констатировал замеченный им математический факт, а впоследствии возвращался к этому вопросу: неоднократно пытался доказать высказанное им утверждение, полученное эмпирически, до тех пор пока не приходил, наконец, к строгому доказательству и только после этого считал вопрос исчерпанным. Правда, некоторые его теоремы были доказаны только после его смерти.

Такую особенность творческого метода Эйлера можно заметить и при чтении опубликованных сочинений, но в рукописях она проявляется еще более четко. Одну и ту же задачу Эйлер решал различными способа-

ми, один и тот же метод часто применял в различных вопросах. Например, он использовал средства математического анализа при решении задач теории чисел и пользовался средствами теории чисел в своих исследованиях по дифференциальному и интегральному исчислению. В рукописях отразился не только путь исследований, но и различные сомнения, возникавшие при этом у Эйлера, и разрешение их. Большую роль при этом играют примеры.

### 3. МЕТОДИКА РАБОТЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Подобно тому как это делалось при издании 1849 г. [4], все рукописные материалы по теории чисел мы распределили по следующим отделам: 1. Делимость чисел. 2. Разложение чисел на суммы различного вида. 3. Диофантов анализ. 4. Приложения теории чисел к математическому анализу и математического анализа к теории чисел. 5. Прочие вопросы.

Каждый из пяти отделов разбивается на более мелкие. Например, в «Делимость чисел» входят: Делители; Малая теорема Ферма и теорема Эйлера; Функция Эйлера; Вычеты; Простые числа. Каждый из них в свою очередь разделен на еще более узкие. Так, раздел о вычетах содержит: квадратичные вычеты, степенные вычеты, первообразные корни, закон взаимности.

Записи по диофантову анализу (отдел 3), составляющие большинство всех теоретико-числовых заметок Эйлера, подразделены (как у Л. Е. Диксона [32]) на: 1) Многоугольные числа; 2) Уравнение  $ax^2 + bx + c = y^2$ , уравнение Пелля (Ферма); 3) Задачи о треугольниках; 4) Отдельные уравнения второй степени; 5) Системы неопределенных уравнений второй степени; 6) Неопределенные уравнения и системы уравнений третьей степени; 7) Квадраты, находящиеся в арифметической прогрессии; 8) Великая теорема Ферма; 9) Целочисленные решения уравнения  $x^y = y^x$ . Каждый из этих разделов подразделяется на более мелкие.

Приведем несколько конкретных примеров из разных разделов, упомянутых выше.

Страница 18 в записной книжке № 131 целиком посвящена теории чисел. Она начинается формулировкой задачи: установить, является ли предложенное число простым. Для этой цели Эйлер берет число  $2^{n-1} - 1$  и делит его на  $n$ . Он считает, что если остаток при делении равен нулю, то число  $n$  простое, если остаток не равен нулю, то число  $n$  составное. По-видимому, такой способ проверки простых чисел «на простоту» (является число простым или составным) возник у Эйлера после знакомства с малой теоремой Ферма («Если  $p$  простое число и  $a$  не делится на  $p$ , то разность  $a^{p-1} - 1$  делится на  $p$ ). Эйлер упоминает эту теорему в своей первой печатной работе по теории чисел «Замечания по поводу теоремы Ферма и другие, относящиеся к рассмотрению простых чисел», которая в списке Г. Энестрёма [8] значится под номером 26 (E26).

Впоследствии Эйлер дал четыре доказательства этой теоремы (E54, E134, E262, E271) и установил теорему, ныне носящую имя Эйлера, которая представляет собой обобщение малой теоремы Ферма (E271). О печатных работах Эйлера по этому вопросу писали Л. Ю. Диксон [32], издатели арифметических томов [7], комментаторы переписки Эйлера с Гольдбахом А. А. Киселев и И. Г. Мельников [25] и другие авторы.

Сформулированное на с. 18 утверждение Эйлера не доказано. Он хочет проверить его на примерах. Но сразу же возникает вопрос: как быть, когда числа, которые надо проверять на простоту, очень велики. Эйлер предлагает для таких чисел проверять, какой остаток получается при делении  $2^{n-1}$  на  $n$ . Остаток равен 1, если число простое. Тут же Эйлер формулирует еще одну теорему: Если  $2^m$  при делении на  $n$  дает в остатке  $p$ , то при делении  $2^{m+1}$  на  $n$  получается в остатке  $2p$ , а при делении  $2^{2m}$  на  $n$  получается в остатке  $p^2$ .

Эйлер проверяет высказанное утверждение на примерах (рассматривает числа 61 и 34), используя прием, сформулированный им в виде теоремы 2. Если записать свойство делимости числа  $2^m - p$  на  $n$  в виде сравнения

$$2^m \equiv p \pmod{n},$$

то теорема 2 представляет собой два свойства сравнений: если  $2^m \equiv p \pmod{n}$ , то  $2^{m+1} \equiv 2p \pmod{n}$  и  $2^{2m} \equiv p^2 \pmod{n}$ .

Как известно, теория сравнений в окончательной форме была дана К. Ф. Гауссом в 1801 г., но эти свойства сравнений (конечно, без современной символики) были известны Эйлеру еще в самом начале его занятий теорией чисел, поскольку записная книжка № 131 относится к 1736—1740 гг., а ее начало — к 1736 г. В более общей форме утверждение, составляющее теорему 2, было опубликовано Эйлером в 1761 г. в работе «Теоремы о вычетах, получающихся при делении степеней» (E262): «Если  $a^\mu$  при делении на  $p$  дает остаток  $r$ , то  $a^{2\mu}$  при делении на  $p$  дает остаток  $r^2$ ,  $a^{3\mu}$  при делении на  $p$  дает остаток  $r^3$  и т. д.» Это утверждение Эйлер использовал при установлении того, что если  $a^\mu$  при делении на  $p$  дает остаток 1, то и  $a^{2\mu}$ ,  $a^{3\mu}$ ,  $a^{4\mu}$ , ... при делении на  $p$  дают в остатке 1 (E262) [7, I-2, с. 496].

Но вернемся к с. 18 записной книжки № 131. У Эйлера остаются сомнения, верна ли сформулированная им теорема (критерий простоты чисел). На следующей странице 18 об. он записывает, что это правило выполняется не всегда. Если взять, например, число  $n = 2^{32} + 1$ , то оно делится на 641, т. е. оно составное, а в то же время разность  $2^{2^{32}} - 1$  на это число  $2^{32} + 1$  делится без остатка. Таким образом, предполагаемое правило установления простоты числа не годится. Эйлер делает вывод, что если деление без остатка невозможно, то отсюда следует только, что число  $n$  не может быть простым. Если же деление возможно, то еще неизвестно, каким числом является делитель — простым или составным.

Подобные вопросы интересовали Эйлера и до того, как он начал свою тетрадь № 131. Он касался делимости чисел  $2^n - 1$ ,  $2^n + 1$  и, в частности, деления числа  $2^{35} + 1$  на 641 в письмах к Х. Гольдбаху (4 и 25 июня 1730 г. и позднее — 28 октября 1752 г.) [25, с. 30, 34, 357]. О делимости чисел  $2^n + 1$ ,  $2^n - 1$  он писал в ряде статей (E26, E134, E271).

Записные книжки показывают, что с самого начала занятий теорией чисел Эйлер изучал ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \quad \text{где } s \text{ — натуральное число,}$$

который ныне обозначается  $\zeta(s)$  и носит название «дзета-функции Римана». В записной книжке № 131 имеется запись, относящаяся к предыстории изучения Эйлером этой функции. Об этом направлении исследований Эйлера см., например, [33, с. 52—56], где указана литература по этому вопросу.

К наиболее ранним задачам теории чисел, рассмотренным Эйлером, как свидетельствуют те же записные книжки, относятся задачи диофантова анализа. Среди начальных записей в той же записной книжке № 131 имеется следующая: «Определить, сколько раз данное число содержится среди всех многоугольных чисел». Эйлер называет эту задачу «задачей Баше» и решает ее здесь своим способом. Через 16 лет в письме к Гольдбаху от 3 апреля 1753 г. Эйлер сообщает решение этой задачи [25, с. 369].

В записной книжке № 132, л. 110 Эйлер исследует вопрос о существовании пятиугольных чисел, которые в то же время являются квадратами. Эта задача решена им в «Универсальной арифметике» (E388, ч. 2, § 89), но решение в записной книжке проведено другим способом.

Первая заметка, относящаяся к теореме о представлении натурального числа в виде суммы четырех квадратов, находится в записной книжке № 131, л. 61 об.—62 об. Эйлер высказывает утверждение: всякое число вида  $8n - 1$  может быть разложено на четыре квадрата, дает правило для такого разложения и иллюстрирует его примерами. Однако можно указать примеры, опровергающие это утверждение. Очевидно, Эйлер обнаружил такие случаи и потому не включил указанное утверждение в печатные работы. В этом же месте Эйлер рассматривает последовательно вопрос о разложении чисел вида

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2), \quad (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2), \\ (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)$$

на сумму четырех квадратов. Устанавливая каждый раз возможность такого разложения, он указывает значения «корней» этих квадратов (число  $a$  — «корень» величины  $a^2$ ) и приходит в последнем случае к своей знаменитой формуле

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = (ap + bq + cr + ds)^2 + \\ + (bp - aq + dr + cs)^2 + (cp - dq - ar + bs)^2 + \\ + (dp + cq - br - as)^2.$$

В этой заметке хорошо виден ход рассуждений Эйлера, о чем трудно было бы судить по опубликованным работам. При этом запись в книжке № 131 сделана значительно раньше, чем сообщение Гольдбаху от 4 мая 1748 г. [25, с. 288—291], поскольку тетрадь № 131 относится к 1736—1740 гг.

Эйлер неоднократно возвращался к этому вопросу. В записной книжке № 132, л. 142 об. он сформулировал и доказал теорему: если дано число  $a$ , неразложимое на четыре квадрата, которое, однако, является делителем числа  $P = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$ , то существует число  $b < a$ , также неразложимое на четыре квадрата, которое является делителем суммы четырех квадратов  $Q < P$ . После доказательства теоремы дается следствие: нет числа, неразложимого на четыре квадрата, которое является

делителем суммы четырех квадратов, т. е. всякое число, являющееся делителем суммы четырех квадратов, само есть сумма четырех квадратов. Это следствие и его доказательство совпадают с теоремой 4 из статьи о разложении чисел на квадраты (E445), на которой основано доказательство теоремы о четырех квадратах, данное в этой работе. Эта статья относится к 1772 г. В несколько измененном виде эта теорема имеется также в [5], где она доказана на основе рукописного фрагмента Эйлера. Записи же в тетради № 132 относятся к 1740—1744 гг.

Таким образом, можно сказать, что доказательство этой важной теоремы Эйлер имел уже в 1750-х гг., т. е. почти за 30 лет до публикации. Правда, доказательство не было закончено. После публикации Лагранжем (1772) своего доказательства теоремы о четырех квадратах Эйлер вернулся к доказательству, начатому им много лет тому назад, и тем же методом, что и в № 132, доказал теорему. Это доказательство было проще, чем у Лагранжа. К тому же вопросу относятся и другие заметки в записных книжках.

В записных книжках были обнаружены две заметки, свидетельствующие о том, что Эйлер почти за сто лет до Ж. Бертрана сформулировал так называемый постулат Бертрана [22]. Обе заметки находятся в записной книжке № 134 и могут быть датированы 1752—1755 гг.

На л. 120 в № 134 Эйлер формулирует теорему: от какого угодно числа  $a$  вплоть до его удвоения  $2a$  существует хотя одно простое число. (Очевидно, Эйлер предполагает число  $a$  натуральным и большим 1.) Для проверки высказанного утверждения Эйлер ищет в промежутке между целым  $a$  и  $2a$  все числа, кратные простым числам, меньшим  $a$ , остальные числа в этом промежутке будут простыми, т. е. Эйлер применяет для решения этого примера метод решета Эратосфена. Он рассматривает случай  $a = 24$ . Среди натуральных чисел между 24 и 48 на 2 делится двенадцать чисел, на 3 делится восемь чисел (среди них четыре четных числа, которые уже учтены при делении на 2), пять чисел делится на 5 (среди них три числа уже учтены при делении на 2 и 3), на 7 делится три числа (все они уже встречались при предыдущих делениях), на 11 делится два числа, тоже уже встречавшихся. Общее количество составных чисел между 24 и 48 равно 18:

$$12 + 8 - 4 + 5 - 3 = 18.$$

Следовательно, в рассматриваемом промежутке шесть простых чисел, а именно 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Вторая заметка находится на л. 205 об. — 206 № 134. Эйлер повторяет высказанное утверждение о том, что между  $n$  и  $2n$  существует хотя одно простое число, и рассматривает два примера: находит количество простых и составных чисел между 30 и 60, а затем между 50 и 100. Результат вычислений он записывает в виде таблицы.

Во втором и третьем столбцах таблицы приведено количество чисел в интервалах  $(0, n)$  и  $(n, 2n)$ , кратных простым числам из промежутка  $(0, n)$ , причем учитываются лишь те числа, которые не встречались среди предыдущих. В дальнейших рассуждениях Эйлер пытается дать более общий способ подсчета количества простых чисел в рассматриваемом интервале и указать некоторую закономерность в распределении простых чисел (на основании приведенных таблиц), но ему это не удается.

Затем он рассматривает частный случай  $n = 2p^2$ , т. е. интервал вида  $(2p^2, 4p^2)$ . Эйлер предполагает, что простых чисел между  $\sqrt{2n}$  и  $n$  столько же, сколько между  $n$  и  $2n$ , иными словами, что количество простых чисел между  $2p$  и  $2p^2$  равно количеству простых чисел между  $2p^2$  и  $4p^2$ . Но, проверяя это предположение на примерах для  $p = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15$ , он убеждается, что предположение неверно уже для  $p = 5$ .

\* \* \*

Рукописные материалы значительно расширяют наше представление о творчестве Эйлера в теории чисел.

Неопубликованные рукописи Эйлера по теории чисел, которые здесь охарактеризованы в самых общих чертах, готовятся нами для публикации в IV серии «Opera omnia» [7] в виде отдельного тома.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Euler L. Opuscula analytica. Petropoli, 1783—1785. Vol. 1—2.
2. Mém. Acad. sci. Pétersb. 1830. Т. 11. Р. 1—94.
3. Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle. SPb., 1843. Т. 1—2.
4. Euler L. Commentationes arithmeticae collectae. Petropoli, 1849. Vol. 1—2.
5. Euler L. Opera postuma mathematica et physica. Petropoli, 1862. Vol. 1—2.
6. Ожигова Е. П. Шарль Эрмит. Л.: Наука, 1982. С. 243—244.
7. Euler L. Opera omnia. Leipzig; Berlin, 1911. Vol. 1. (В 4 сериях. Издание продолжается.)
8. Eneström G. Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers // Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1910—1913.
9. Eneström G. Bericht an die Eulerkommission der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft über die Eulerschen Manuskripte der Petersburger Akademie // Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 1913. Bd. 22, H. 1—2, Abt. 2, S. 191—205.
10. Михайлов Г. К., Смирнов В. И. Неопубликованные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 47—79.
11. Михайлов Г. К. Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР // Ист.-мат. исслед. 1957. Вып. 10. С. 67—94.
12. Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962—1965. Т. 1: Научное описание; Т. 2: Труды по механике. Ч. 1.
13. Эйлер Л. Переписка. Аннотированный указатель. М.: Наука, 1967.
14. Mikhailov G. K. Notizen über die unveröffentlichten Manuskripte von Leonhard Euler // Leonhard Euler. Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen. Berlin: Akad.-Verl., 1959., S. 256—280.
15. Киселев А. А., Матвиевская Г. П. Неопубликованные записи Эйлера по partitionum numerorum // Ист.-мат. исслед. 1965. Вып. 16. С. 145—180.
16. Киселев А. А. Некоторые вопросы теории чисел из переписки Эйлера с Гольдбахом // История и методология естеств. наук. 1966. Вып. 5. С. 31—34.
17. Матвиевская Г. П. История публикаций Л. Эйлера по теории чисел: Докл. на III науч. конф. аспирантов и мл. науч. сотр. ИИЕиТ АН СССР. М., 1957.
18. Матвиевская Г. П. Неопубликованные рукописи Леонарда Эйлера по теории чисел: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1958.
19. Матвиевская Г. П. Неопубликованные рукописи Л. Эйлера по диофантову анализу // Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР. 1959. Т. 22. С. 240—250.
20. Матвиевская Г. П. О неопубликованных рукописях Леонарда Эйлера по диофантову анализу // Ист.-мат. исслед. 1960. Вып. 13. С. 107—186.
21. Матвиевская Г. П. Заметки о совершенных числах в записных книжках Эйлера // Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР. 1960. Т. 34. С. 415—427.

22. *Матвиевская Г. П.* Постулат Бертрана в записях Эйлера // Ист.-мат. исслед. 1961. Вып. 14. С. 285—288.
23. *Мельников И. Г.* О некоторых гипотезах Эйлера и Гольдбаха // Матер. VI конф. по истории науки в Прибалтике. Вильнюс, 1965. С. 34—39.
24. *Мельников И. Г.* О некоторых вопросах теории чисел в переписке Эйлера с Гольдбахом // История и методология естеств. наук. 1966. Вып. 5. С. 15—30.
25. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel. 1729—1764 / Hrsg. A. P. Juškević, E. Winter. Berlin: Akad.-Verl., 1965.
26. *Matvievskaia G. P., Ožigova E. P.* Leonhard Eulers handschriftlicher Nachlass zur Zahlentheorie // Leonhard Euler. 1707—1783. Basel, 1983. S. 151—160.
27. *Мельников И. Г.* Удобные числа в рукописном наследии Эйлера // Ист.-мат. исслед. 1983. Вып. 27. С. 10—24.
28. *Ожигова Е. П.* Дополнение к статье И. Г. Мельникова «Удобные числа в рукописном наследии Эйлера» // Ист.-мат. исслед. 1983. Вып. 27. С. 24—26.
29. *Матвиевская Г. П.* Заметки о многоугольных числах в записных книжках Эйлера // Ист.-мат. исслед. 1983. Вып. 27. С. 27—50.
30. *Ожигова Е. П.* Функция Эйлера в его записных книжках // Ист.-мат. исслед. 1983. Вып. 27. С. 50—63.
31. ЛО Архива АН СССР, ф. 136, оп. 1, № 129—140.
32. *Dickson L. E.* History of the theory of numbers: In 3 vol. Washington, 1919—1923; 2nd ed. New York, 1934.
33. *Ожигова Е. П.* Развитие теории чисел в России. Л.: Наука, 1972.



# ВКЛАД ЛЕОНАРДА ЭЙЛера В АЛГЕБРУ

И. Г. БАШМАКОВА

## ВВЕДЕНИЕ

Обычно считают, что значение исследований Л. Эйлера для развития алгебры было невелико. В юбилейных сборниках, посвященных памяти Эйлера, о его работах по алгебре, как правило, не упоминается. Такое отношение — мы постараемся это показать — весьма несправедливо. На самом деле проблемы, которые решал Эйлер в алгебре, оказали существенное влияние на развитие теории алгебраических уравнений, алгебраической теории чисел и алгебраической геометрии XIX — XX вв.

Но прежде всего следует уточнить вопрос: что понимал Эйлер под алгеброй? Какие проблемы ее он считал центральными? Математики, начиная с 30-х годов нынешнего столетия, приучили нас к взгляду на алгебру как на науку об алгебраических структурах, т. е. множествах элементов произвольной природы, для которых определены одна или несколько бинарных операций, ставящих в соответствие каждому двум элементам этого множества третий элемент из этого же множества. Хотя можно спорить, охватывает ли это определение всю современную алгебру, но во всяком случае оно характеризует ее существенную сторону.

Однако такое определение является довольно поздним. На протяжении своего развития алгебра неоднократно меняла и свое содержание, и свои методы. Так, в древнем Вавилоне мы имеем дело с числовой алгеброй, а в античной Греции — с так называемой геометрической алгеброй, пользовавшейся языком геометрии.

Начиная с Диофанта (II — III вв. н. э.) алгебра приобретает новый язык: в нее вводится буквенная символика; сначала — для обозначения неизвестных, а затем, в XVI в. и известных величин (параметров). Начиная же с Диофанта и до Эйлера алгебра становится в основном учением об алгебраических уравнениях, понимаемых в широком смысле, т. е. включающем исследование как определенных уравнений, в частности проблему решения их в радикалах, так и неопределенных уравнений.

Очень многие алгебраические трактаты, начиная от «Арифметики» Диофанта и кончая «Полным введением в алгебру» Эйлера (1770), включали части (иногда составляющие половину, иногда и больше ее), посвященные неопределенным уравнениям. Назовем, для примера, трактаты Абу-Камила, Ал-Караджи, Бомбелли и Ф. Виета. Сам Эйлер отвел «неопределенному анализу» весь второй раздел II тома своего «Полного введения в алгебру» (E388) [4].

Какие же проблемы были центральными в так широко понимаемой алгебре? Это:

I. Основная теорема алгебры, утверждающая, что каждое алгебраическое уравнение

$$f_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Vollständige  
Anleitung  
zur  
**A l g e b r a**  
von

Hrn. Leonhard Euler.

Erster Theil.

Von den verschiedenen Rechnungs- Arten,  
Verhältnissen und Proportionen.



St. Peteröburg.  
gedruckt bey der Kayf. Acad. der Wissenschaften 1770.

Титульный лист I части «Алгебры»  
Л. Эйлера 1770 г.

ных числах, прежде всего уравнений вида

$$y^2 = P_3(x), \quad y^2 = P_4(x), \quad y^3 = P_3(x),$$

где  $P_n(x)$  — многочлен степени  $n$  с рациональными коэффициентами. О предыстории этой проблемы мы расскажем ниже.

IV. Решение неопределенных уравнений в целых числах, в частности уравнений

$$x^2 - ay^2 = 1, \quad x^2 - ay^2 = b,$$

где  $a, b$  — целые и  $a$  не является квадратом, и, наконец, «великая теорема Ферма», т. е. утверждение, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

при  $n > 2$  не имеет решений в области  $Z$ .

В каждой из этих четырех проблем Эйлер получил основополагающие результаты, которые во многом определили дальнейшее развитие алгебры, диофантова анализа и алгебраической теории чисел.

любой степени  $n$ , где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — действительные числа, имеет по крайней мере один действительный или комплексный корень. В XVIII в. чаще пользовались эквивалентной формулировкой: любой многочлен  $f_n(x)$  с действительными коэффициентами может быть разложен в произведение множителей первой или второй степени с действительными коэффициентами. Эта теорема была сформулирована в XVII в. А. Жираром (1629) и в более острой форме Р. Декартом (1637), но первые попытки ее доказательства относятся к XVIII в.

II. Решение уравнений 5-й и высших степеней в радикалах. Квадратные уравнения, как известно, были решены около 4 тыс. лет назад в древнем Вавилоне, уравнения степени 3 и 4 — в Италии в XVI в. На очереди стояли уравнения степени 5, решение которых в радикалах тщетно искали и в XVII и XVIII вв.

III. Исследование и решение неопределенных уравнений от двух неизвестных в рациональ-

## 1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

Первое доказательство ее предложил в 1746 г. Ж. Р. Даламбер. Оно было чисто аналитическим и страдало большими даже для XVIII в. погрешностями в отношении строгости.

В том же году, когда было опубликовано доказательство Даламбера, Эйлер представил в Берлинскую академию наук свое доказательство основной теоремы. Оно было затем включено в мемуар «Исследования о мнимых корнях уравнений» (E170), напечатанный в «Записках» Берлинской академии за 1749 г. в 1751 г. [1].

Эйлер искал для этой теоремы алгебраическое доказательство. В настоящее время известно, что чисто алгебраически доказать ее невозможно. Необходимо использовать некоторые теоремы аналитического характера. Видимо, к такому же взгляду пришел и Эйлер. В своем доказательстве он свел число таких теорем к двум и поместил их отдельной группой:

- (1) каждое уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень,
- (2) каждое уравнение четной степени с действительными коэффициентами и отрицательным свободным членом имеет по крайней мере два действительных корня.

Идея дальнейшего доказательства Эйлера состоит в проведении редукции, сводящей решение уравнения степени  $2^k m$ , где  $m$  нечетно, к уравнению степени  $2^{k-1} m_1$ . Он утверждает, что любой многочлен  $P_n(x)$  с действительными коэффициентами, где  $n = 2l$ , можно представить в виде

$$P_{2l}(x) = f_l(x) g_l(x),$$

где  $f_l(x)$  и  $g_l(x)$  — многочлены степени  $l$  с действительными коэффициентами.

Эйлер замечает, что достаточно рассмотреть уравнения  $P_n(x) = 0$  при  $n = 2^k$  (так как именно в них сосредоточена вся трудность). Действительно, если  $N \neq 2^k$ , то находим такое  $k$ , что  $2^{k-1} < N < 2^k$ , и домножим многочлен  $f_N(x)$  на  $2^k - N$  множителей, например на  $x^{2^k - N}$ . Он доказывает теорему для  $P_n(x)$  при  $n = 4, 8, 16$ , а затем переходит к общему случаю  $n = 2^k$ . Чтобы пояснить методы Эйлера, мы рассмотрим здесь случаи  $n = 4$  и  $n = 2^k$ .

Пусть дано уравнение

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad (1)$$

(мы всегда можем предполагать, что уравнение уже приведено к виду, не содержащему  $x^3$ ). Эйлер представляет его в виде

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 - ux + \lambda)(x^2 + ux + \mu), \quad (2)$$

где  $u, \lambda, \mu$  — неопределенные коэффициенты. Сначала он определяет их значение непосредственным сравнением с коэффициентами исходного уравнения и находит для определения  $u$  уравнение

$$u^6 + 2Bu^4 + (B^2 - 4D)u^2 - C^2 = 0.$$

Поскольку оно четной степени, а свободный член его отрицателен, то оно имеет по крайней мере два вещественных корня, один из которых можно

выбрать за значение  $u$ . Коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$ , как показывает Эйлер, выражаются рационально через  $u$  и коэффициенты исходного уравнения.

После этого Эйлер получает те же результаты из общих соображений, без вычислений. При этом он применяет (не доказывая их) следующие предложения, которые стали центральными в теории Лагранжа, а затем и в теории Галуа:

(А) Любая рациональная симметрическая функция корней уравнения является рациональной функцией от коэффициентов уравнения (основная теорема о симметрических функциях).

(В) Рациональная функция корней уравнения  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , принимающая при всевозможных перестановках корней  $k$  различных значений, удовлетворяет уравнению степени  $k$ , коэффициенты которого рационально выражаются через коэффициенты исходного уравнения (эта теорема была впоследствии доказана Лагранжем).

Эйлер рассуждает следующим образом: каждому уравнению степени  $n$  с действительными коэффициентами можно «приписать»  $n$  корней  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  и записать

$$f_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = (x + \alpha_1)(x + \alpha_2)\dots(x + \alpha_n),$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — некие символы, с которыми, однако, можно оперировать, как с обычными числами, например, можно записать, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = a_1,$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = a_2,$$

$$\dots \dots \dots \bullet$$

$$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n = a_n.$$

Основная теорема алгебры тогда состоит в утверждении, что все корни  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  являются действительными или комплексными числами.

Так Эйлер поступает и при  $n = 4$ . Он предполагает, что уравнение (1) имеет корни  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Тогда  $u$  должно быть суммой некоторых двух из этих четырех корней, т. е. может принимать при всевозможных перестановках корней  $C_4^2 = 6$  различных значений. Отсюда Эйлер заключает, что  $u$  будет определяться уравнением 6-й степени. Далее, он замечает, что поскольку

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$

то значения эти для  $u$  будут

$$u_1 = \alpha + \beta = p, \quad u_2 = \alpha + \gamma = q, \quad u_3 = \alpha + \delta = z,$$

$$u_4 = \gamma + \delta = -p, \quad u_5 = \beta + \delta = -q, \quad u_6 = \beta + \gamma = -r,$$

т. е. искомое уравнение для  $u$  будет иметь вид

$$(u^2 - p^2)(u^2 - q^2)(u^2 - r^2) = 0. \quad (3)$$

Оно четной степени и свободный член его будет  $-p^2q^2r^2$ . Чтобы убедиться, что  $-p^2q^2r^2 < 0$ , нужно проверить, что произведение  $pqr$  вещественно. Для этого Эйлер показывает, что

$$pqr = (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\alpha + \delta)$$

является симметрической функцией корней, значит, рационально выражается через коэффициенты уравнения (1). Итак, из общих соображений доказано, что коэффициент  $u$  можно выбрать действительным.

Доказательство случая  $n = 2^k$  (теорема 7) у Эйлера только намечено. Многочлен

$$f_n(x) = x^{2^k} + Bx^{2^k-2} + Cx^{2^k-3} + \dots \quad (4)$$

он представляет в виде произведения двух множителей степени  $2^{k-1}$  с неопределенными коэффициентами

$$(x^{2^{k-1}} + ux^{2^{k-1}-1} + \lambda x^{2^{k-1}-2} + \dots)(x^{2^{k-1}} - ux^{2^{k-1}-1} + \lambda' x^{2^{k-1}-2} + \dots).$$

Этих коэффициентов будет  $2^k - 1$ , столько же, сколько определяющих соотношений.

Поскольку  $u$  является суммой  $2^{k-1}$  корней из всей совокупности  $2^k$  корней, то число различных значений, которое может принимать  $u$ , равно  $C_{2^k}^{2^{k-1}} = 2N$ , где  $N$  — нечетное. Показав это, Эйлер заключает, что  $u$  удовлетворяет уравнению степени  $2N$  с действительными коэффициентами. Это уравнение, как нетрудно видеть, будет иметь ту же структуру, что и уравнение (3), а именно:

$$(x^2 - p_1^2)(x^2 - p_2^2) \dots (x^2 - p_N^2) = 0.$$

Эйлер рассматривает его свободный член  $-p_1^2 p_2^2 p_3^2 \dots p_N^2$  и утверждает, что он будет отрицательным (что нетрудно показать). Отсюда он заключает, что  $u$  можно выбрать действительным. Относительно остальных коэффициентов  $\lambda, \mu, \dots, \lambda', \mu', \dots$  Эйлер утверждает, что они могут быть выражены рационально через  $u$  и коэффициенты многочлена (4)  $B, C, D, \dots$ . Трудно сказать с определенностью, каковы были соображения, приведшие Эйлера к этому заключению. Лагранж посвятил строгому проведению редукции Эйлера мемуар «О форме мнимых корней уравнений» (1772), в котором восполнил все проблемы в его доказательствах [16, 20]. В частности, для доказательства утверждения Эйлера о возможности рационально выразить  $\lambda, \mu, \dots, \lambda', \mu'$  через  $u$  и коэффициенты многочлена (4) Лагранж привлекает свою теорию подобных функций, изложенную им в 1771 г. в его знаменитых «Размышлениях об алгебраическом решении уравнений» [16].

С другой стороны, ряд математиков XVIII в. старались упростить редукцию Эйлера. Первым из них был Д. де Фонтене (1759), за ним последовал Лаплас (1795) и др. Однако все они безоговорочно принимали постановку вопроса, данную Эйлером, т. е. полагали, что, какова бы ни была степень уравнения

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + N = 0,$$

его всегда можно представить в виде

$$(x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \dots (x + \alpha_n) = 0,$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — символы, над которыми, однако, можно оперировать по тем же правилам, что и над вещественными числами.

Первый, кто отверг такую постановку вопроса, был молодой К. Ф. Гаусс. В своей докторской диссертации (1799), посвященной доказательству основной теоремы, он писал: «Так как, помимо действительных и мни-

мых количеств  $a + b\sqrt{-1}$ , нельзя представить никаких других видов количеств, то не совсем ясно, чем отличается то, что надо доказать, от того, что предполагается в качестве основного предложения; но даже если бы можно было придумать еще и другие виды количеств как  $F$ ,  $F'$ ,  $F''$ , . . . , то и тогда нельзя было бы принять без доказательства, что каждое уравнение удовлетворяется либо действительным значением  $x$ , либо значением вида  $a + b\sqrt{-1}$ , либо значением вида  $F$ , либо вида  $F'$  и т. д. Поэтому основное предложение может иметь только такой смысл: каждое уравнение может удовлетворяться либо действительным значением неизвестной, либо мнимой вида  $a + b\sqrt{-1}$ , либо, может быть, некоторым значением другого, еще неизвестного вида, либо значением, которое не содержится ни в каком виде. Как эти количества, о которых мы не можем составить никакого представления, — эти тени теней — должны складываться или умножаться, этого нельзя представить с ясностью, требующейся в математике» [11, с. 12—13].

В 1815 г. Гаусс вернулся к основной теореме и предложил для нее на этот раз в большей части алгебраическое доказательство, в котором не предполагается заранее существование корней какого-либо вида. Такое предположение, по мнению Гаусса, «по крайней мере в том месте, где речь идет об общем доказательстве этой разложимости многочлена на множители [первой и второй степени. — *И. Б.*]», есть не что иное, как *petitio principii* [12, с. 40].

Однако обвинение доказательства Эйлера в порочном круге было несправедливо. И это лучше всего видно из анализа второго доказательства самого Гаусса: чтобы избежать предположения о существовании корней-символов, он оперирует со сравнениями по модулю некоторого многочлена, т. е. по существу он строит поле разложения исходного многочлена.

Этот метод Гаусса был выделен в чистом виде Леопольдом Кронекером, который и дал свою знаменитую конструкцию поля разложения многочлена, не предполагая существования поля комплексных чисел (1870/71). Этим доказательство Эйлера было окончательно «реабилитировано». В нем содержался пробел (предположение существования поля разложения для любого многочлена), но не было порочного круга. Основная теорема алгебры для Эйлера и других математиков XVIII в. состояла в том, что поле разложения любого многочлена с действительными коэффициентами изоморфно некоторому подполю поля комплексных чисел. При этом, однако, существование «поля разложения» не доказывалось, а постулировалось.

Замечательно, что Эйлер стоял здесь на алгебраической точке зрения, которую отвергли в первой половине XIX в., чтобы вернуться к ней в 70—80-х годах XIX в.

Таким образом, в самой алгебре восторжествовала точка зрения Эйлера в противоположность точке зрения анализа, при которой заранее строится поле комплексных чисел и доказывается существование корня в этом поле.

Заметим еще, что основная теорема алгебры в постановке Эйлера по существу совпадает с теоремой Вейерштрасса—Фробениуса о том, что единственными линейными ассоциативными и коммутативными алгебрами над полем действительных чисел (без делителей нуля) являются 1) поле действительных чисел и 2) поле обычных комплексных чисел.

## 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ

Эта проблема занимала почти всех математиков XVIII в. Ей посвящали свои исследования Чирнгауз, Безу, Лагранж, Вандермонд и многие другие. Эйлер обращался к ней дважды. В первый раз в мемуаре, представленном в 1733 г. и напечатанном в 1738 г. (E30) [2], и во второй — тридцать лет спустя в статье, представленной в 1759 г. и изданной в 1764 г. (E282) [3].

В первой работе Эйлер замечает, что решение уравнений степеней  $n = 2, 3, 4$  сводится соответственно к решению уравнений степеней 1, 2, 3, которые он называет *aequatio resolvens* (резольвентой, разрешающим уравнением). Он делает предположение, что и уравнение любой степени

$$x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + \dots + g \quad (5)$$

имеет резольвенту вида

$$z^{n-1} = \alpha z^{n-2} + \beta z^{n-3} + \dots \quad (6)$$

Если  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  — ее корни, то корни исходного уравнения, согласно Эйлеру, будут иметь вид

$$x = \sqrt[n]{A_1} + \sqrt[n]{A_2} + \dots + \sqrt[n]{A_{n-1}}. \quad (7)$$

Разумеется, он не смог найти таким путем решение уравнений 5-й степени. Кроме того, форма (7) имела то существенное неудобство, что каждое ее слагаемое могло принимать  $n$  значений и это независимо от остальных слагаемых, т. е. всего можно было получить из нее  $n^{n-1}$  значений для  $x$ .

В этом же мемуаре Эйлер рассматривает возвратные уравнения и предлагает для их решения свою знаменитую подстановку

$$y = x + 1/x.$$

Во втором мемуаре Эйлер заменяет форму (7) новой

$$x = w + A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + \dots + Q\sqrt[n]{v^{n-1}}, \quad (8)$$

где  $w$  вещественно, а  $v$  удовлетворяет уравнению степени  $\leq n - 1$ .

Эта форма в отличие от предыдущей принимает ровно  $n$  различных значений. Но, поскольку и она не приводит к решению общего уравнения степени  $n = 5$ , Эйлер рассматривает отдельные классы разрешимых уравнений 5-й степени. Все эти классы, кроме одного, имеют циклическую группу, а последний — полуметациклическую группу [24].

Последняя работа имеет особое значение еще и потому, что форма (8) является наиболее общей: если уравнение (5) разрешимо в радикалах, то выражение корня будет иметь вид (8). Это показал Н. Х. Абель, который исходил из этой формы в своем знаменитом доказательстве неразрешимости общего уравнения степени 5 в радикалах.

## 3. ПРОБЛЕМА НАХОЖДЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК НА КРИВЫХ РОДА 1 И ПОРЯДКА 3

В этом разделе мы будем предполагать, что все рассмотрение ведется над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ , в частности, коэффициенты всех рассматриваемых уравнений рациональны.

Д. Гильберт и А. Гурвиц доказали [13], что любая кривая рода 0 и порядка  $m$  бирационально эквивалентна прямой, если  $m = 2k + 1$ , и коническому сечению, если  $m = 2k$ . В первом случае на кривой будет всегда лежать бесконечно много рациональных точек, координаты которых можно выразить как рациональные функции от одного параметра. Во втором случае все зависит от того, лежит ли на коническом сечении, которому эквивалентна кривая, хотя бы одна рациональная точка. Если лежит, то, как показал еще Диофант в своей «Арифметике», на ней будет лежать бесконечно много рациональных точек и координаты их будут рационально выражаться через параметр

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Таким образом, множество  $\mathfrak{M}$  рациональных точек кривой рода 0 имеет простую структуру. С другой стороны, кривые рода  $\geq 2$ , как это было недавно доказано Г. Фальтингсом, применившим методы А. Н. Паршина, могут иметь только конечное число рациональных точек (гипотеза Л. Дж. Морделла) [10].

Остаются кривые рода 1. Они-то и представляют наибольший интерес для исследователей. Арифметика таких кривых была построена А. Пуанкаре в начале нашего века [18]. Но истоки этих исследований ведут нас к Диофанту, а решительный шаг и здесь принадлежит Леонарду Эйлеру.

Остановимся на кривых 3-го порядка рода 1, т. е. таких, которые задаются неприводимым уравнением 3-й степени

$$F_3(x, y) = 0 \tag{9}$$

и не имеют особых точек. Из простого замечания о том, что всякая прямая пересекает кривую (9) ровно в трех точках (с учетом кратности, а также бесконечно удаленной и мнимых точек), получаем два способа нахождения рациональных точек кривой  $L$ :

1) «метод секущей»: если известны две рациональные точки кривой  $L$ , то проводим через них «секущую» прямую  $T$ . Она пересечет  $L$  еще в одной рациональной точке.

2) «метод касательной»: если известна только одна рациональная точка кривой  $L$ , то проводим через нее касательную  $T$ . Она пересечет  $L$  еще только в одной точке, которая также будет рациональной.

Оба метода мы встречаем еще в «Арифметике» Диофанта. Правда, не в геометрической, а в чисто алгебраической формулировке, т. е. вместо «кривых» он говорит об «уравнениях», вместо «рациональных точек» — о «решениях», которые предполагаются рациональными и положительными, вместо прямой  $T$ , проходящей через точку  $(x_0, y_0)$ , — о подстановке и т. д. Таким же алгебраическим языком пользовались вслед за Диофантом математики арабского Востока, Бомбелли, Виет, Ферма и Эйлер. Кроме того, Диофант применял «метод секущей» не в самом общем виде, а лишь в ситуации, когда одна известная точка конечна, а другая — бесконечно удаленная. Например, для кривой вида

$$y^3 = a^3x^3 + bx^2 + cx + d^3 \tag{10}$$

это означает

$$y = ax + d. \tag{11}$$



Прямая (11) пройдет через конечную точку  $P(0, d)$  кривой (10) и через ее бесконечно удаленную точку.

Согласно традиции античной математики Диофант не формулировал эти методы «в общем виде», а иллюстрировал на примерах. Европейские математики познакомились с «Арифметикой» Диофанта только во второй половине XVI в. Впервые 143 задачи из нее были включены в «Алгебру» Бомбелли (1572), а первый ее перевод на латинский язык был опубликован в 1575 г.

Бомбелли и Виет овладели методами Диофанта настолько, что смогли решить «методом касательной» задачу

$$x^3 + y^3 = a^3 - b^3, \quad a > b, \quad (12)$$

о которой Диофант утверждает, что она всегда разрешима. Правда, Бомбелли провел решение для конкретных значений  $a$  и  $b$  ( $a = 4$ ,  $b = 3$ ), а Виет при решении общего случая ввел дополнительные ограничения.

Более глубоко в эти методы проник Пьер Ферма. Аббат де Билби, изложивший его исследования по интересующему нас вопросу на основе полученных от Ферма писем, особенно превозносит его за то, что он первый итерировал «метод касательной» и мог получать бесконечное число рациональных решений исходя из одного известного. Это дало возможность Ферма решить общим образом задачу (12) Диофанта для любых  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ).

Во II томе своей «Алгебры» (E388) [4] Эйлер обобщил и систематизировал все, что было известно до него о решении неопределенных уравнений

$$f_n(x, y) = 0$$

при  $n = 2, 3, 4$  в рациональных числах.

Он впервые четко сформулировал, в чем состоит принципиальное различие между решением неопределенных уравнений второй и третьей степени. «Метод секущей» Эйлер применял в той же ситуации, что и Диофант, а «метод касательной» итерировал так же, как это делал Ферма.

В конце жизни Эйлер возвратился к проблеме нахождения рациональных точек на кривых рода 1. В 1780 г. он представил в Петербургскую академию наук работы (E773, E774, E777, E778), которые были опубликованы более чем через 40 лет после его смерти, в 1830 г. [5—8]. В них был сделан принципиально новый шаг, который состоял в следующем:

1) «метод секущей» он начал применять и в том случае, когда обе заданные точки конечные, т. е. он придал ему самую общую форму,

2) «метод секущей» и «метод касательной» были в этих работах видоизменены так, что на их основе на множестве  $\mathfrak{M}$  рациональных точек оказалось возможным определить структуру группы. Это достигалось тем, что Эйлер применил операцию отражения рациональных точек относительно оси симметрии кривых.

Для пояснения сути сделанного Эйлером будем предполагать, что кривая третьего порядка  $\Gamma$  задается уравнением

$$y^2 = x^3 + ax + b. \quad (13)$$

(Как показал К. Вейерштрасс, если кривая 3-го порядка имеет рациональную точку, то ее уравнение всегда можно привести к такому виду.)

Пусть  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  — две ее рациональные точки. Проводя через них прямую  $T$ , получим в ее пересечении с  $\Gamma$  третью рациональную точку  $C(x_3, y_3)$ . Итерировать этот процесс нельзя: если мы соединим  $C$  с любой из точек  $A$  или  $B$ , то получим ту же прямую  $T$ . Поэтому до Эйлера итерировали только метод касательной. Эйлер дополнил «метод секущей» операцией отражения рациональной точки относительно оси симметрии кривой. Так, в случае кривой  $\Gamma$  от точки  $C(x_3, y_3)$  он переходил к точке  $\bar{C}(x_3, -y_3)$ . А это позволяло, соединяя  $\bar{C}$  с  $A$  или  $B$ , получать новые рациональные точки.

На самом деле нововведение Эйлера имеет очень глубокий смысл. Если считать, что точка  $C$  является «суммой» точек  $A$  и  $B$ :  $C = A \oplus B$ , то эта операция не будет обладать ассоциативностью, т. е. с ее помощью нельзя будет определить на множестве рациональных точек кривой рода 1 структуры группы. Если же положить

$$A \oplus B = \bar{C},$$

то такая «сумма» уже будет обладать всеми хорошими свойствами обычной арифметической суммы.

Аналогичное отражение относительно оси симметрии Эйлер применил и к «методу касательной», что позволило определить «сумму»  $A \oplus A = 2A$ .

Именно идеи этих поздних работ Эйлера по диофантову анализу и позволили снабдить множество  $\mathfrak{M}$  рациональных точек кривой рода 1 структурой группы. Это было по существу сделано уже в 1834 г. К. Якоби [15], который показал даже, что это — группа с кручением, т. е. что она, вообще говоря, может иметь точки конечного порядка, и в явном виде А. Пуанкаре в упоминавшемся мемуаре 1901 г. Начало изучению этих чрезвычайно важных работ Эйлера было положено И. Э. Гофманом [14], а подробный анализ всех этих работ читатель найдет в статье Т. А. Лавриненко [22].

Нам остается добавить, что в своих исследованиях эллиптических интегралов, Эйлер по существу открыл новый путь для изучения кривых рода 1. Уже К. Якоби в упоминавшейся работе 1834 г. заметил, что методы, развитые Эйлером, в его поздних работах полностью аналогичны методам получения теорем сложения эллиптических интегралов. Так, в случае уравнения (13), если  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  — точки кривой  $\Gamma$ , теорема утверждает существование точки  $P(x_3, y_3)$  на  $\Gamma$  такой, что

$$\int_0^A \frac{dx}{y} + \int_0^B \frac{dx}{y} = \int_0^P \frac{dx}{y},$$

причем  $x_3, y_3$  рационально выражаются через  $x_1, y_1, x_2, y_2$ . Нетрудно видеть, что точка  $P(x_3, y_3)$  совпадает с точкой  $\bar{C}(x_3, -y_3)$ . Это было первое замечание о связи диофантова анализа с теорией абелевых функций. Замечал ли эту связь Эйлер? Якоби полагал, что аналогия в формулах настолько велика, что «великий муж» не мог этого не заметить (см. также [21]). Однако никаких определенных высказываний Эйлера по этому поводу мы не знаем. Как бы то ни было, именно Эйлер открыл новые пути, по которым развивались диофантов анализ и алгебраическая геометрия в прошлом веке. Отметим, что в книге А. Вейля [19], вышедшей уже после

празднования юбилея Эйлера, также рассматриваются и анализируются работы великого ученого, относящиеся к решению неопределенных уравнений в рациональных числах.

#### 4. ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА И ПЕРВОЕ ВВЕДЕНИЕ ЦЕЛЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Из многочисленных проблем, относящихся к решению Эйлером неопределенных уравнений в целых числах, остановимся здесь только на великой теореме Ферма.

Ферма сформулировал свою теорему на полях принадлежащего ему экземпляра «Арифметики» Диофанта, в примечании к задаче 8 книги II: «Заданный квадрат разложить на два квадрата». Ферма записал: «Наоборот, невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком малы».

Замечательно, что он больше ни разу нигде не формулировал своего утверждения в столь общем виде, зато в письмах часто ставил задачу доказательства его для кубов и биквадратов.

Сам Ферма доказал «великую теорему» для биквадратов, применив метод бесконечного спуска. Это — единственное теоретико-числовое доказательство, которое от него дошло. Оно также было записано на полях «Арифметики», но уже в качестве примечания к задаче 24 книги VI.

Эйлер тоже начал с доказательства великой теоремы для  $n = 4$  в мемуаре (E98), представленном в 1738 г. и изданном в 1747 г. [9]. Но только через 30 лет он предложил доказательство теоремы для  $n = 3$ . Письма его к Х. Гольдбаху показывают, что это доказательство его живо занимало. Уже 4 августа 1753 г. Эйлер писал, что может доказать великую теорему для  $n = 3$  [23, с. 374]. Вероятно, доказательство, которым он тогда владел, казалось ему недостаточно красивым. Заметим, что Эйлер и Лагранж начали применять иррациональные или даже мнимые выражения вида  $a + b\sqrt{\pm c}$ , где  $a, b, c \in \mathbf{Z}$ , к вопросам теории чисел только в самом конце 60-х годов. Эйлер писал по этому поводу Лагранжу: «Я был восхищен Вашим методом применения иррациональных и даже мнимых чисел в той части анализа, которая относится к одним только рациональным числам. Вот уже несколько лет, как у меня появились сходные идеи, . . ., опубликовав здесь полную Алгебру на русском языке, я подробно излагал в ней этот способ и показал, что для решения уравнения

$$x^2 + ny^2 = (p^2 + q^2n)^\lambda$$

достаточно решить следующее:

$$x + y\sqrt{-n} = (p + q\sqrt{-n})^\lambda$$

[17, с. 215].

По-видимому, в это же время Эйлер пришел к мысли о применении выражений  $a + b\sqrt{-c}$  к решению великой теоремы. Однако для доказательства нужно было сделать еще один решительный шаг, а именно рассмотреть эти выражения как целые числа.

Что это значит? Чем целые числа отличаются, скажем, от рациональных? Прежде всего тем, что для них существует богатая арифметика: целые числа разделяются на простые и составные и доказывается, что всякое составное число однозначно представляемо как произведение простых. Это и есть основной закон теории делимости. Для натуральных чисел он был известен (в несколько ограниченном виде) еще Евклиду. Из этого предложения, в частности, следует, что если произведение двух взаимно простых чисел равно некоторой степени целого числа, то каждый из сомножителей представляет собой такую же степень: если  $(a, b) = 1$  и  $ab = l^k$ , то  $a = l_1^k$ ,  $b = l_2^k$ . Эйлер перенес все эти свойства (без доказательства) на числа вида  $m + n\sqrt{-3}$ , где  $m, n \in \mathbb{Z}$ , и применил их для доказательства великой теоремы для  $n = 3$ . Приведем его: пусть, если это возможно, существуют такие числа  $x, y, z$ , что

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

тогда два из этих чисел нечетны, а одно — четно (иначе все три можно было бы сократить на общий множитель). Пусть  $x, y$  нечетны,  $z$  четно (иначе будем доказывать невозможность равенства  $x^3 = z^3 - y^3$ .) Полагая  $x = p + q$ ,  $y = p - q$ , где  $p, q$  разной четности и  $(p, q) = 1$ , получим

$$x^3 + y^3 = 2p(p^2 + 3q^2) = z^3.$$

Так как  $z^3$  четно, то оно делится по крайней мере на 8, кроме того,  $p$  четно,  $q$  нечетно и

$$\frac{p}{4}(p^2 + 3q^2) = \left(\frac{z}{2}\right)^3.$$

Эйлер рассматривает два случая: 1)  $p$  не делится на 3, 2)  $p$  делится на 3. Чтобы понять идею доказательства Эйлера, нам достаточно будет рассмотреть первый случай. Если  $p$  не делится на 3, то  $p/4$  и  $p^2 + 3q^2$  взаимно просты, значит,  $p/4$  и  $p^2 + 3q^2$  являются кубами. Далее — и это центральное место в доказательстве — Эйлер разлагает  $p^2 + 3q^2$  на множители

$$p^2 + 3q^2 = (p + q\sqrt{-3})(p - q\sqrt{-3}) = r^3,$$

откуда заключает, что каждый из мнимых множителей равен кубу:

$$p \pm q\sqrt{-3} = (u \pm v\sqrt{-3})^3.$$

Отсюда

$$p = u(u - 3v)(u + 3v), \quad q = 3v(u^2 - v^2).$$

Поскольку  $q$  нечетно, то и  $v$  нечетно, значит,  $u$  четно. Но  $p/4$  является кубом. Значит, и  $2p$  — куб, т. е.

$$2u(u - 3v)(u + 3v) = t^3,$$

так как  $2u, u - 3v, u + 3v$  взаимно просты, то

$$u - 3v = f^3, \quad u + 3v = g^3, \quad 2u = f^3 + g^3 = t_1^3.$$

Нетрудно видеть, что  $f, g, t_1$  меньше чем  $x, y, z$ , поэтому если бы исходное уравнение решалось в целых (положительных) числах  $x, y, z$ , то оно-

решалось бы и в меньших числах  $f, g, t_1$ . Тем же рассуждением можно было бы от  $f, g, t_1$  перейти к  $f_1, g_1, t_2$ , меньшим  $f, g, t_1$ , и т. д. Но это невозможно, так как существует только конечное число целых чисел, меньших данного. Таким образом, мы видим здесь классический метод спуска. Новое заключалось в том, что на выражение вида  $p + q\sqrt{-3}$  Эйлер перенес законы делимости, имеющие место для обычных целых чисел.

Здесь следует заметить, что рассуждение Эйлера не является строгим. Более того, оно содержит неправильное предположение, так как на самом деле в кольце целых чисел  $m + n\sqrt{-3}$ ,  $m, n \in \mathbf{Z}$ , однозначность разложения на простые множители не имеет места! Это можно видеть хотя бы из примера

$$4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3}).$$

Однозначность разложения будет иметь место в более широком кольце, а именно максимальном кольце целых чисел поля, элементы которого имеют вид  $(m + n\sqrt{-3})/2$ , где  $m \equiv n \pmod{2}$ . Эйлер избежал ошибки только потому, что в его рассуждениях фигурировали числа  $p + q\sqrt{-3}$ , для которых  $p \not\equiv q \pmod{2}$ .

Доказательство Эйлера содержало две важные идеи, которые были восприняты и развиты последующими математиками. Первая из них состояла в том, что при доказательстве великой теоремы Ферма форму  $x^\lambda + y^\lambda$  ( $\lambda$  — простое) следует разлагать на линейные множители:

$$x^\lambda + y^\lambda = (x + y)(x + \zeta y) \dots (x + \zeta^{\lambda-1}y),$$

где  $\zeta^\lambda = 1$ ,  $\zeta \neq 1$ .

Вторая, наиболее важная, состояла в том, что для исследования свойств обычных целых чисел, необходимо расширить само понятие целого числа. Развитие этой идеи привело в XIX в. к созданию теории алгебраических чисел и построению их арифметики. Уже в 1828—1830 гг. Гаусс в своем знаменитом мемуаре «О биквадратичных вычетах» ввел целые комплексные числа  $m + n\sqrt{-1}$ ,  $m, n \in \mathbf{Z}$ , и построил для них арифметику, полностью аналогичную обычной. За этим последовали исследования Э. Куммера, П. Лежен-Дирихле, Р. Дедекинда, Е. И. Золотарева, Л. Кронекера, Д. Гильберта. Эта линия развития привела к созданию теории полей алгебраических чисел, теории идеалов и дивизоров, локальных методов, короче — основ коммутативной алгебры.

Таким образом, к Эйлеру восходят истоки идей теории Галуа, диофантова анализа, относящегося к кривым рода 1, а также первые шаги в расширении области арифметики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Euler L. Recherches sur les racines imagineaire des equations // Mém. Acad. sci. Berlin (1749). 1751. Т. 5. P. 222—288; Opera I-6.
2. Euler L. De formis radicium aequationum cuiusque ordinis coniectatio // Comment. Acad. sci. Petrop. (1732—1733). 1738. Vol. 6. P. 216—231; Opera I-6.
3. Euler L. De resolutione aequationum cuiusvis gradus // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1762—1763). 1764. Vol. 9. P. 70—98; Opera I-6.
4. Euler L. Vollständige Anleitung zur Algebra. SPb., 1770. Т. 2; Opera I-1.

5. *Euler L.* Solutio problematis difficillimi, quo hae duae formulae  $a^2x^2 + b^2y^2$  et  $a^2y^2 + b^2x^2$  quadrata reddi debent // *Mém. Acad. sci. Pétersb.* 1830. T. 11. P. 12—30; Opera I-5.
6. *Euler L.* Investigatio binorum numerorum formae  $xy(x^4 - y^4)$ , quorum productum sive quotus sit quadratum // *Mém. Acad. sci. Pétersb.* 1830. T. 11. P. 31—45; Opera I-5.
7. *Euler L.* De resolutione huius aequationis  $0 = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + tx^2y^2$  per numeros rationales // *Mém. Acad. sci. Pétersb.* 1830. T. 11. P. 58—68; Opera I-5.
8. *Euler L.* Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi // *Mém. Acad. sci. Pétersb.* 1830. T. 11. P. 69—91; Opera I-5.
9. *Euler L.* Theorematum quorundam arithmeti corum demonstrationes // *Comment. Acad. sci. Petrop.* (1738). 1747. Vol. 10; *Comment. arithm. collectae.* Vol. 1. P. 24—34; Opera I-2.
10. *Faltings G.* Endlichkeitssätze für Abelsche Varietäten über Zahlkörpern // *J. Invent. Math.* 1983. Vol. 73. P. 349—366.
11. *Gauss C. F.* Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores primi vel secundi gradus resolvi potest (1799) // *Werke.* Göttingen, 1878. Bd. 3. S. 1—30.
12. *Gauss C. F.* Demonstratio nova altera theorematis omnes functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse (1815) // *Werke.* Göttingen, 1878. Bd. 3. S. 31—56.
13. *Hilbert D., Hurwitz A.* Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null // *Acta math.* 1890. Vol. 14. P. 217—224.
14. *Hofmann J. E.* Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Eulers, ihre Zusammenhänge und ihre Bedeutung // *Arch. Hist. Exact. Sci.* 1961. Vol. 1, N 2. P. 122—159.
15. *Jacobi C.* De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium abelianorum in analysi Diophantea // *J. für reine und angew. Math.* 1835. Bd. 13. S. 353—355.
16. *Lagrange J. L.* Sur la forme des racines imaginaires des équations // *Nouv. Mém. Acad. sci. Berlin* (1772). 1774. P. 479—516; *Oeuvres.* Paris, 1869. T. 3. P. 479—516.
17. *Lagrange J. L.* *Oeuvres.* Paris, 1892. T. 14.
18. *Poincaré H.* Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques // *J. math. pures et appl.* 1901. T. 7. P. 161—233.
19. *Weil A.* Number theory: An approach through history. From Hammurapi to Legendre. Boston: Basel; Stuttgart: Birkhäuser, 1983.
20. *Башмакова И. Г.* О доказательстве основной теоремы алгебры // *Ист.-мат. исслед.* 1957. Вып. 10. С. 257—304.
21. *Башмакова И. Г.* Арифметика алгебраических кривых (от Диофанта до Пуанкаре) // *Ист.-мат. исслед.* 1975. Вып. 20. С. 104—124.
22. *Лавриненко Т. А.* Решение неопределенных уравнений 3-й и 4-й степени в поздних работах Эйлера // *Ист.-мат. исслед.* 1983. Вып. 27. С. 67—78.
23. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel. 1729—1764 / Hrsg. A. P. Juškevič, E. Winter, Berlin, Akad.-Verl., 1965.
24. *Майстрова А. Л.* Решение алгебраических уравнений в работах Эйлера // *Ист.-мат. исслед.* 1985. Вып. 29. С. 189—198.

# ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ В РАБОТАХ Л. ЭЙЛЕРА

Т. А. ЛАВРИНЕНКО

Хорошо известна роль Л. Эйлера в развитии теории чисел: он заложил основы теории степенных вычетов, открыл квадратичный закон взаимности, создал аналитические методы для исследования проблем теории чисел и т. д. (см., например, [1—3]). Значительно меньше известны результаты Эйлера в области диофантова анализа и прежде всего его результаты о решении диофантовых уравнений в рациональных числах. Однако именно в работах Эйлера по диофантову анализу нашел известное завершение целый этап развития этой науки, который условно можно назвать «элементарно алгебраическим». Это был своеобразный этап, на котором исследование проблемы решения диофантовых уравнений в рациональных числах велось главным образом средствами элементарной алгебры, причем в рамках такого подхода были получены важные методы решения неопределенных уравнений 2-й, 3-й и 4-й степени, задающих кривые родов 0 и 1 (см. [4, 5]). Говоря о диофантовом анализе, мы здесь и в дальнейшем будем подразумевать только ту его часть, в которой рассматривается решение неопределенных уравнений в рациональных числах. Заранее отметим, что иногда мы будем прибегать к геометрической терминологии, общепринятой сейчас в данной области, но это не означает, будто этой терминологией пользовался Эйлер.

Наиболее важные результаты Эйлера в области диофантова анализа упоминаются в статье [6] настоящего сборника. Мы рассмотрим эти результаты более подробно, а также остановимся на некоторых малоизвестных исследованиях Эйлера.

Л. Эйлер посвятил вопросам решения неопределенных уравнений в рациональных числах около 40 статей и несколько глав своего руководства «Vollständige Anleitung zur Algebra» (для краткости мы его будем называть просто «Алгеброй»). Многочисленные записи на эту тему встречаются и в его рукописях. Подавляющее большинство его статей посвящено исследованию конкретных неопределенных уравнений и их систем. Верный продолжатель традиции Диофанта и Ферма, Эйлер трактует неопределенные уравнения чисто алгебраически, используя аппарат алгебраических преобразований, подстановок, замен для получения рациональных решений. Отыскивая в каждом случае свой путь, приводящий к получению рациональных решений, он демонстрирует удивительное искусство в применении формульного аппарата (в данном случае алгебры), что вообще было характерной чертой его математического творчества.

Но, помимо этого, Эйлер получил ряд довольно общих результатов о решении неопределенных уравнений. Прежде всего это относится к уравнениям 3-й и 4-й степени с двумя неизвестными. С современной точки зрения исследование рациональных решений неопределенных уравнений с двумя неизвестными относится к арифметике алгебраических кривых.

Основные положения о структуре множества рациональных точек алгебраических кривых сформулированы в статье [6] настоящего сборника, поэтому мы их приводить не будем. Остановимся только на результатах для плоских эллиптических кривых (т. е. кривых рода 1), поскольку изучавшиеся Эйлером уравнения 3-й и 4-й степени задают эллиптические кривые и именно методы Эйлера для этих уравнений находятся в центре внимания настоящей статьи.

Как известно, существует два основных метода нахождения новых рациональных точек эллиптической кривой 3-го порядка по известным рациональным точкам. Первый из них — метод «касательной» — основан на проведении касательной к кривой в известной рациональной точке, а второй — метод «секущей» — на проведении секущей через две известные рациональные точки кривой. В обоих случаях проведенная прямая пересекает кривую 3-го порядка еще в одной точке, которая также будет рациональной и которая находится в результате применения метода. Эти методы можно сформулировать и алгебраически. Методы касательной и секущей лежат в основе определения операции сложения рациональных точек эллиптической кривой 3-го порядка. Относительно этой операции множество рациональных точек данной кривой образует конечнопорожденную группу. Еще со времен Диофанта (III в. н. э.) был известен алгебраический эквивалент метода касательной для уравнений

$$f_3(x) \equiv a + bx + cx^2 + dx^3 = y^2 \quad (1)$$

и

$$f_3(x) \equiv a + bx + cx^2 + dx^3 = y^3. \quad (2)$$

Метод же секущей применялся Диофантом только для уравнения (2) и лишь в особой ситуации, когда секущая проводится через одну конечную и одну бесконечно удаленную точку кривой (2), причем метод формулировался чисто алгебраически (подробнее см. [4, 5]). И только Эйлер стал применять для решения уравнений (1) и (2) метод секущей с двумя конечными точками<sup>1</sup>. Мы покажем, что Эйлер, стремясь извлечь из средств элементарной алгебры все, что они могли бы дать для исследования диофантовых уравнений, пришел к методу секущей даже несколькими алгебраическими путями.

Отметим, что Эйлер зачастую не формулировал своих результатов по диофантову анализу в общем виде, наверняка осознавая их общность, но ограничиваясь только их применением в примерах. В частности, это относится к примеру из «Алгебры» [7, с. 461—462], в котором рассматривается уравнение

$$4 + x^2 = y^3. \quad (3)$$

Здесь впервые в печати была высказана идея об использовании двух известных рациональных решений уравнения 3-й степени для получения нового рационального решения, на которой и основан метод секущей. Хотя Эйлер оперировал с двумя конкретными рациональными решениями

<sup>1</sup> До Эйлера метод секущей с двумя конечными точками сформулировал, причем геометрически, Ньютон. Однако соответствующие записи Ньютона стали известны только в наше время после опубликования его математических бумаг (см. [4]).



(3)  $x_1 = 2, y_1 = 2$  и  $x_2 = 11, y_2 = 5$ , его рассуждения нетрудно перенести на общий случай уравнения вида (2), для которого известны два каких-то рациональных решения  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  (подробнее об этом см. [8]). Идея Эйлера состоит в переходе от уравнения (2) с помощью замены  $x = (x_1 + x_2 t)/(1 + t)$  (или замены  $x = (x_1 - x_2 t)/(1 - t)$ , что не имеет принципиальной разницы) к уравнению вида

$$a' + b't + c't^2 + d't^3 = y^3 (1 + t)^3, \quad (4)$$

где  $a' = a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3 = y_1^3$ ,  $d' = a + bx_2 + cx_2^2 + dx_2^3 = y_2^3$ .

Положив в (4)  $y(1 + t) = u$ , мы получим уравнение

$$a' + b't + c't^2 + d't^3 = u^3 \quad (5)$$

с  $a' = y_1^3, d' = y_2^3$ . Для нахождения рациональных решений этого уравнения можно применять известные методы Диофанта—Ферма, поскольку коэффициенты  $a'$  и  $d'$  являются кубами (о методах Диофанта—Ферма см. [4, 5]). В частности, в уравнении (5) можно сделать подстановку

$$u = y_1 + y_2 t, \quad (6)$$

что в результате приводит к получению некоторого рационального решения  $t^*, u^* = y_1 + y_2 t^*$  уравнения (5). Очевидно, рациональному решению,  $(t^*, u^*)$  уравнения (5) соответствует рациональное решение

$$x^* = \frac{x_1 + x_2 t^*}{1 + t^*}, \quad y^* = \frac{u^*}{1 + t^*} \quad (7)$$

уравнения (2). Таким образом, мы получаем метод нахождения нового рационального решения  $(x^*, y^*)$  уравнения (2) по двум известным решениям  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ .

Нетрудно установить, что геометрический смысл этого метода состоит в нахождении рациональной точки кривой (2), лежащей на одной прямой с рациональными точками  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  данной кривой (метод секущей). Действительно, выразив  $t$  и  $u$  через  $x$  и  $y$ , получим

$$t = \frac{x_1 - x}{x - x_2}, \quad u = y \frac{x_1 - x_2}{x - x_2}.$$

Подстановка этих  $t$  и  $u$  в (6) дает  $y(x_1 - x_2)/(x - x_2) = y_1 + y_2(x_1 - x)/(x - x_2)$ , откуда

$$y = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что вместо осуществления подстановки (6) в уравнении (5) для нахождения  $(t^*, u^*)$  и последующего вычисления  $(x^*, y^*)$  по формулам (7) можно находить  $(x^*, y^*)$ , сразу делая подстановку (8) в исходном уравнении (2). Но равенство (8) представляет собой уравнение прямой в декартовых координатах  $x, y$ , проходящей через точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  кривой (2). Значит, подставляя (8) в (2) и находя в результате этой подстановки  $(x^*, y^*)$ , мы находим третью точку пересечения кривой (2) и секущей (8). Итак, метод Эйлера — это алгебраический эквивалент метода секущей с двумя конечными точками.

Эйлер не изложил своего метода в общем виде, ограничившись его изложением на примере. И, по-видимому, математики не заметили, что в данном случае они имеют дело с новым методом. Во всяком случае мы не обнаружили, чтобы кто-нибудь к нему снова обращался.

Еще один интересный пример находится в рукописях Эйлера [9, с. 112], где решается уравнение  $mx^3 + k^2 = y^2$ . Остановимся на этом примере подробнее, так как он не рассматривался в историко-математической литературе. Предполагается, что известно одно рациональное решение этого уравнения  $x = a$ ,  $y = b$ , т. е.

$$ma^3 + k^2 = b^2. \quad (9)$$

Последовательность действий Эйлера такова: он полагает в исходном уравнении  $x = at$  и получает

$$ma^3t^3 + k^2 = y^2. \quad (10)$$

Выражая из (9)  $ma^3 = b^2 - k^2$  и подставляя это в (10), он получает  $(b^2 - k^2)t^3 + k^2 = y^2$ , откуда

$$(b^2 - k^2)t^3 = y^2 - k^2. \quad (11)$$

Левую и правую части уравнения (11) Эйлер разлагает на множители

$$(b + k)t^2 \cdot (b - k)t = (y + k) \cdot (y - k)$$

и затем приравнивает эти сомножители друг другу:

$$(b + k)t^2 = y + k, \quad (b - k)t = y - k. \quad (12)$$

Кроме того, он рассматривает другой вариант равенства сомножителей:

$$(b + k)t = y + k, \quad (b - k)t^2 = y - k. \quad (13)$$

Ясно, что решение каждой из этих систем (уже определенных!) будет решением уравнения (11) (обратное неверно). Рассмотрим первую систему. Вычтя из первого уравнения системы (12) второе, Эйлер получает

$$(b + k)t^2 - (b - k)t = 2k. \quad (14)$$

Очевидно,  $t = 1$ ,  $y = b$  удовлетворяет системе (12), а, следовательно,  $t = 1$  удовлетворяет (14), что легко проверяется и непосредственно. Тогда второй корень этого уравнения легко определяется по теореме Виета:

$$t = -2k/(b + k).$$

Возвращаясь к исходному уравнению, Эйлер получает, что оно имеет рациональное решение с  $x = -2ak/(b + k)$ . Аналогично решение системы (13) дает  $t = 2k/(b - k)$  и  $x = 2ak/(b - k)$ .

Повторим эти рассуждения для общего уравнения (1), в котором  $a = a_1^2$  и известно одно рациональное решение  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ , т. е.

$$a_1^2 + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 = \beta^2. \quad (15)$$

Вначале сделаем замену  $x = at$  в уравнении (1)

$$a_1^2 + b\alpha t + c\alpha^2 t^2 + d\alpha^3 t^3 = y^2. \quad (16)$$

Коэффициент  $d\alpha^3$  при  $t^3$  в полученном уравнении выразим из (15):  $d\alpha^3 = \beta^2 - a_1^2 - b\alpha - c\alpha^2$ . Подставляя это выражение в (16), получим

$$(\beta^2 - a_1^2 - b\alpha - c\alpha^2) t^3 + c\alpha^2 t^2 + bat + a_1^2 = y^2,$$

откуда

$$(\beta^2 - a_1^2 - b\alpha - c\alpha^2) t^3 + c\alpha^2 t^2 + bat = y^2 - a_1^2. \quad (17)$$

Так же как и в рассмотренном выше частном случае, перейдем от уравнения (17) к системе

$$\begin{aligned} (\beta + a_1) t &= y + a_1, \\ \left(\beta - a_1 - \frac{b\alpha + c\alpha^2}{\beta + a_1}\right) t^2 + \frac{c\alpha^2}{\beta + a_1} t + \frac{b\alpha}{\beta + a_1} &= y - a_1, \end{aligned} \quad (18)$$

одно решение которой можно указать сразу: это  $t = 1, y = \beta$ . Наряду с (18) можно рассмотреть систему

$$\begin{aligned} (\beta - a_1) t &= y - a_1, \\ \left(\beta + a_1 - \frac{b\alpha + c\alpha^2}{\beta - a_1}\right) t^2 + \frac{c\alpha^2}{\beta - a_1} t + \frac{b\alpha}{\beta - a_1} &= y + a_1, \end{aligned} \quad (19)$$

также удовлетворяющуюся при  $t = 1, y = \beta$ . Решая систему (18), мы приходим, как и в рассмотренном выше частном случае, к квадратному уравнению относительно  $t$

$$\left(\beta - a_1 - \frac{b\alpha + c\alpha^2}{\beta + a_1}\right) t^2 + \left(-\beta - a_1 + \frac{c\alpha^2}{\beta + a_1}\right) t + \frac{b\alpha}{\beta + a_1} + 2a_1 = 0,$$

один корень которого  $t_1 = 1$  известен. По теореме Виета определяем второй корень

$$t_2 = \frac{b\alpha + 2a_1(\beta + a_1)}{\beta^2 - a_1^2 - b\alpha - c\alpha^2} = \frac{2a_1^2 + 2a_1\beta + b\alpha}{-a_1^2 + \beta^2 - b\alpha - c\alpha^2}.$$

Из первого уравнения (18) находится соответствующее значение для  $y$ :  $y = y_2 = (\beta + a_1) t_2 - a_1$ . Очевидно, пара  $t = t_2, y = y_2$  доставляет рациональное решение уравнения (17), а следовательно, и уравнения (16). Пара же  $x = x_2 = \alpha t_2, y = y_2$  есть рациональное решение исходного уравнения (1). Аналогично можно получить новое рациональное решение уравнения (1), решая систему (19).

Нетрудно показать, что найденная точка  $(x_2, y_2)$  кривой (1) есть третья точка пересечения этой кривой и прямой, проведенной через две известные точки кривой (1):  $(\alpha, \beta)$  и  $(0, -a_1)$ . Действительно, метод Эйлера по существу состоит в совместном решении уравнения (16) и уравнения  $(\beta + a_1) t = y + a_1$  (первое уравнение системы (18)), или, если перейти от  $t$  к  $x$ , в совместном решении уравнения (1) и уравнения

$$(\beta + a_1) x/\alpha = y + a_1. \quad (20)$$

Равенство (20) задает в декартовых координатах  $x, y$  прямую, проходящую через точки  $(0, -a_1)$  и  $(\alpha, \beta)$ , откуда и следует наше утверждение. Таким образом, здесь Эйлер опять на основе соображений алгебраического характера пришел к методу нахождения нового рационального решения

уравнения (1), которое геометрически получается путем проведения секущей через две известные рациональные точки (1).

Рассуждения Эйлера в рассмотренном примере напоминают рассуждения из методов Диофанта—Ферма для «двойных равенств», т. е. систем вида

$$f_2(x) = y^2, \quad g_2(x) = z^2.$$

Эти методы также основывались на разложении обеих частей некоторого неопределенного уравнения на множители и приравнивании сомножителей, стоящих в правой и левой частях (см. [5]). Но для получения методов решения диофантовых уравнений 3-й степени такие соображения не применялись. Тем не менее Эйлер не опубликовал свой метод и он остался неизвестным современникам Эйлера.

В третий раз мы встречаемся с методом секущей в одной из записных книжек Эйлера, в которой приведены формулы для нового рационального решения общего уравнения (1) с квадратным свободным членом  $a = a_1^2$  в случае, когда известно одно рациональное решение этого уравнения  $x = q$ ,  $y = s$ . Как показано в [10], эти формулы определяют координаты третьей точки пересечения кривой (1) и прямой, проходящей еще через две известные рациональные точки кривой (1):  $(q, s)$  и  $(0, a_1)$ . Другими словами, новое решение находится с помощью некоторого алгебраического эквивалента метода секущей. Отметим, что если в уравнении (1) свободный член не является квадратом, но известны два произвольных рациональных решения  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  этого уравнения, то этот случай легко свести к рассматриваемому с помощью замены  $x = x_1 + t$  (такое сведение широко применялось Эйлером). В результате мы получим метод секущей для уравнения (1), когда секущая проводится через точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ .

В [10] дана реконструкция эйлеровского способа получения указанных формул. Она основана на рассуждениях, связанных с использованием линейной подстановки  $y = a_1 + \alpha x$  и являющихся непосредственным развитием идей, лежащих в основе методов Диофанта—Ферма для уравнений (1) и (2). Напомним, что эти методы состоят в применении линейных и квадратичных подстановок, коэффициенты в которых выбираются так, чтобы, сделав соответствующую подстановку в уравнении (1) (или (2)), получить линейное уравнение относительно  $x$ , дающее рациональное значение  $x = x^*$ . В рассматриваемом же случае берется подстановка, сделав которую в (1), мы приддем к квадратному уравнению относительно  $x$ , один из корней которого рационален. Тогда и второй его корень будет рационален и он-то и находится в результате применения метода. Для перехода к квадратному уравнению с известным рациональным корнем используется тот факт, что уравнение (1) имеет рациональное решение  $x = q$ ,  $y = s$ . Подробнее эту реконструкцию см. в [10].

Идея использования линейных и квадратичных подстановок, приводящих к квадратному уравнению относительно  $x$  с рациональными корнями, встречается и в опубликованных работах Эйлера по диофантовому анализу. Например, Эйлер применил подстановку  $y = a_1 + px$ , где  $p$  — произвольное число, для исследования того же уравнения (1) с  $a = a_1^2$  в «Алгебре» [7, с. 444]. Сделав эту подстановку в (1), он получал квадратное уравнение относительно  $x$  и выписывал формулу для одного

из корней этого уравнения, которая имела вид

$$x = (p^2 - c + \sqrt{p^4 - 2cp^2 + 8da_1p + c^2 - 4bd})/2d.$$

Далее он отмечал, что теперь нужно выбрать  $p$  так, чтобы выражение под радикалом стало квадратом, т. е. чтобы

$$g_4(p) \equiv p^4 - 2cp^2 + 8da_1p + c^2 - 4bd = z^2. \quad (21)$$

Таким образом, Эйлер устанавливал связь между задачей решения уравнения (1) 3-й степени и задачей решения уравнения (21) 4-й степени.

В работе [11] при решении уравнения вида

$$f_4(x) \equiv a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = y^2 \quad (22)$$

Эйлер явно высказал идею применения линейной или квадратичной подстановки, приводящей к квадратному уравнению с рациональными корнями [11, с. 140]. Основываясь на этой идее, он разработал в [11] два способа получения рационального решения уравнения вида (22) с дополнительными условиями на коэффициенты.

Итак, Эйлер владел алгебраическим эквивалентом метода секущей для уравнений (1) и (2). Однако он нигде не изложил рассмотренных нами результатов в общем виде и они остались или незамеченными, или неизвестными.

Выдающиеся результаты в области арифметики эллиптических кривых получены также в поздних работах Эйлера [12, 13], представленных в Петербургскую академию наук в 1780 г., а опубликованных в 1830 г. В отличие от большинства статей Эйлера по диофантову анализу, посвященных решению конкретных задач, в этих двух работах с самого начала идет речь о решении уравнений довольно общего вида, вне связи с какой-либо конкретной задачей. В статье [12] рассматривается уравнение

$$g_4(x, y) \equiv a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + ix^2y^2 = 0 \quad (22')$$

с рациональными коэффициентами, а в [13] — уравнения вида (1) и (22). Кратко о результатах работы [13] говорится в статье [6] настоящего сборника. Мы поясним эти результаты несколько подробнее.

Основное содержание работы [13] состоит в разработке оригинальной алгебраической процедуры, позволяющей по одному, двум или трем рациональным решениям уравнения (1) или (22) находить последовательность рациональных решений рассматриваемого уравнения (одно решение — на каждом шаге процедуры). Как показано в [14], геометрический смысл этого процесса состоит в итерировании методов касательной, секущей и парабол<sup>2</sup>. Причем один из вариантов эйлеровской процедуры представляет собой исторически первую конструкцию, позволяющую

<sup>2</sup> Под методом парабол подразумевается метод, в котором новая рациональная точка эллиптической кривой (1) или (22) находится в результате проведения параболы  $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  через три конечные рациональные точки кривой и определения четвертой конечной точки пересечения параболы и этой кривой. Диофант, Ферма, Эйлер применяли метод парабол (в алгебраической форме) наравне с методами касательной и секущей. Сейчас известно, что решение уравнения (1), найденное по методу парабол, может быть получено в результате нескольких последовательных применений методов касательной и секущей.

последовательно находить элементы циклической подгруппы группы рациональных точек кривой (1). Итак, первый алгоритм построения циклической подгруппы группы рациональных точек эллиптической кривой (1), был разработан в XVIII в. Эйлером.

С помощью каких же средств удалось Эйлеру получить эти результаты? Как и в других своих работах по диофантовым уравнениям, он использует в [13] только средства элементарной алгебры. Эйлер основывается на идее получения последовательности рациональных решений уравнения вида (23), квадратного и по  $x$ , и по  $y$ , исходя из одного известного решения. Ни у Диофанта, ни у Ферма эта идея не встречается. Эйлер пришел к ней при решении конкретной задачи [15]. Применив свое открытие еще в нескольких задачах, приводящих к решению диофантовых уравнений вида (23) [16—19], он излагает метод решения уравнения (23) в общем виде [12]. Суть метода состоит в следующем: если  $(x_1, y_1)$  — известное рациональное решение (23), то, положив в (23)  $x = x_1$ , получим квадратное уравнение относительно  $y$  с рациональными коэффициентами, причем  $y = y_1$  удовлетворяет этому уравнению. Следовательно, один корень данного уравнения есть рациональное число  $y_1$ . Тогда и второй его корень — некоторый  $y_2$  — тоже рационален. Поскольку пара  $(x_1, y_2)$  удовлетворяет (23), то мы нашли новое рациональное решение (23). Теперь можно положить в (23)  $y = y_2$  и рассмотреть получающееся квадратное уравнение относительно  $x$ , один корень которого  $x = x_1$  известен. Находя второй его корень  $x = x_2$ , мы получим и новое рациональное решение (23) —  $(x_2, y_2)$ . Продолжая этот процесс, т. е. решая уравнение (23) то при фиксированном  $x$ , то при фиксированном  $y$ , будем получать последовательность рациональных решений уравнения (23):

$$(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_2, y_3), \dots, (x_k, y_k), (x_k, y_{k+1}), (x_{k+1}, y_{k+1}), \dots \quad (24)$$

В этом и состоит метод Эйлера.

В последовавшей за этой работой статьей [13] (она представлена в Петербургскую академию наук всего лишь через неделю после представления [12]) Эйлер устанавливает связь между решением уравнения

$$f(x) \equiv Q^2(x) + P(x)R(x) = z^2, \quad (25)$$

где  $f(x)$  — многочлен 4-й или 3-й степени, а  $Q(x)$ ,  $P(x)$ ,  $R(x)$  — многочлены не выше 2-й степени с рациональными коэффициентами, и решением уравнения (23). Для этого в уравнении (25) он делает замену

$$z = Q(x) + P(x)y \quad (26)$$

и после простых алгебраических преобразований и деления обеих частей полученного уравнения на  $P(x)$  приходит к уравнению относительно  $x$  и  $y$ , квадратному по  $x$  и по  $y$ . Если известно одно рациональное решение  $(x_1, y_1)$  последнего уравнения, то с помощью описанного алгоритма можно получить последовательность (24) его рациональных решений, а по этой последовательности, учитывая соотношение (26), получить последовательность рациональных решений уравнения (25):

$$(x_1, z_1), (x_1, z'_1), (x_2, z_2), (x_2, z'_2), \dots, (x_k, z_k), (x_k, z'_k), (x_{k+1}, z_{k+1}), \dots, \quad (27)$$

где  $z_k = Q(x_k) + P(x_k)y_k$ ,  $z'_k = Q(x_k) + P(x_k)y_{k+1}$ .

Так Эйлер приходит к методу получения последовательности рациональных решений уравнения (25).

Во второй половине статьи он доказывает, что если уравнение

$$f_4(x) \equiv a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = z^2 \quad (28)$$

или уравнение

$$f_3(x) \equiv a + bx + cx^2 + dx^3 = z^2 \quad (29)$$

(это те же уравнения (1) и (22), в которых  $y$  заменен на  $z$ ) имеет хотя бы одно рациональное решение, то многочлен  $f_4(x)$  или соответственно  $f_3(x)$  можно представить в виде  $Q^2(x) + P(x)R(x)$ , т. е. в этом случае применим описанный метод. Эйлер дает различные способы такого представления в случаях, когда известны одно, два или три рациональных решения (28), и в случаях, когда известны одно или два рациональных решения уравнения (29).

В статье [14] устанавливается, что описанная алгебраическая процедура получения последовательности (27) рациональных решений уравнения (28) или (29) имеет указанный выше геометрический смысл. Эта процедура состоит из чередования двух шагов:

1) по найденному на предыдущем шаге решению  $(x_k, z_k)$  определяется решение  $(x_k, z'_k)$ , которое есть просто  $(x_k, -z_k)$ ; другими словами, рациональная точка  $(x_k, z_k)$  отражается относительно оси симметрии кривой  $OX$ ;

2) затем находится решение  $(x_{k+1}, z_{k+1})$ , с геометрической точки зрения представляющее собой результат применения или метода секущей, или метода парабол к точке  $(x_k, z'_k)$  и другим известным рациональным точкам кривой (27) или (28).

На первом шаге процедуры решение находится по методу касательной, секущей или парабол. Здесь мы сталкиваемся с еще одним алгебраическим способом получения метода секущей для двух конечных точек. Однако он возникает как один шаг итерационной процедуры и в самостоятельный метод не выделяется.

Подчеркнем, что в процедуре Эйлера впервые осуществляется итерирование метода секущей. Такое итерирование возможно осуществить, только используя еще операцию отражения найденных рациональных точек относительно оси симметрии кривой (в то время как для итерирования метода касательной этого не нужно и итерировать метод касательной умел еще Ферма). Об этом подробно сказано в [6].

В [13] Эйлер, пользуясь весьма ограниченными средствами, пришел к новым результатам в области арифметики эллиптических кривых. Но непривычная для нас форма, в которой получены эти результаты, мешает современному читателю Эйлера сразу увидеть, что суть его процедур состоит в использовании тех же методов касательной, секущей и отражения рациональных точек относительно оси симметрии кривой, которые и сейчас являются основными методами нахождения рациональных точек на эллиптических кривых.

Значение рассмотренного исследования Эйлера определяется еще тем, что оно послужило толчком для введения в диофантов анализ существования новых идей, связанных с использованием эллиптических функций. В 1835 г. К. Г. Якоби [20] дал алгебраическим идеям Эйлера, развитым

в [13], аналитическую интерпретацию с помощью теоремы сложения эллиптических интегралов. Работа Якоби показала, что для исследования диофантовых уравнений, задающих эллиптические кривые, помимо аппарата элементарной алгебры, с успехом могут быть использованы результаты теории эллиптических функций. См. об этом также в статье И. Г. Башмаковой [6].

Большое значение для развития диофантова анализа имела «Алгебра» [7] Эйлера. В ней были систематизированы известные к тому времени общие результаты о решении неопределенных уравнений первых четырех степеней в целых и рациональных числах. Методы Диофанта—Ферма нахождения рациональных решений уравнений (1), (2), (22) впервые были представлены здесь в удобной символической записи. Именно в «Алгебре» была четко выявлена их сущность в алгебраической точки зрения и методы Диофанта—Ферма стали доступными широкому кругу любителей математики. В последующем некоторые математики, а за ними и историки математики стали приписывать Эйлеру даже и сами методы.

Вскоре после своего появления «Алгебра» стала общепризнанным учебником по теории неопределенных уравнений. Но, помимо этого, в ней содержится и ряд новых результатов, принадлежащих Эйлеру. Мы уже говорили в начале статьи о методе секущей для двух конечных точек. Добавим, что в «Алгебре» Эйлер с помощью чисто алгебраических средств сделал первые шаги по изучению таких арифметических свойств кривых, как бирациональная эквивалентность кривых над полем  $\mathbb{Q}$  и их униформизируемость в рациональных функциях над тем же полем. Конечно, он еще не дает строгого определения названных понятий, а результаты формулирует только на языке элементарной алгебры.

Например, Эйлер нашел достаточное условие униформизируемости кривых вида (1) и (2) в следующей формулировке: если многочлен  $f_3(x)$  имеет кратные корни, то можно получить общую формулу для рациональных решений рассматриваемого уравнения, которая имеет вид  $x = P_m(t)/Q_n(t)$ ,  $y = R_k(t)/S_l(t)$ , где  $P_m(t)$ ,  $Q_n(t)$ ,  $R_k(t)$ ,  $S_l(t)$  — многочлены с рациональными коэффициентами. Другой пример: Эйлер установил, что от уравнения (1) с квадратным свободным членом можно перейти к уравнению (21) вида  $g_4(p) = z^2$ . Как он это делал, мы рассмотрели выше. Нетрудно проверить, что этот переход обратим. По существу здесь устанавливается бирациональная эквивалентность кривых (1) и (21).

Эйлер первым обнаружил связь между решением неопределенных уравнений 3-й и 4-й степени вида (1) и (22). До него эти задачи рассматривались как несвязанные друг с другом. Уже этот результат, полученный Эйлером, наталкивал на мысль, что неопределенные уравнения нужно классифицировать не по их степеням, а по другому признаку, учитывающему связь между решением уравнений различных степеней. Такой признак был сформулирован А. Пуанкаре в 1901 г.: это бирациональная эквивалентность соответствующих кривых над полем  $\mathbb{Q}$ .

Отметим еще, что Эйлер, не владея общим понятием бирационального преобразования, первым явно высказал идею использовать при изучении диофантовых уравнений общего вида одну из разновидностей бирациональных преобразований — дробно-линейные преобразования (см. [21, с. 43]). Математики же до Эйлера осуществляли только различные конкретные преобразования конкретных уравнений (с числовыми коэффициентами),



не ставя вопрос более обще. Таким образом, мы находим у Эйлера зародыши тех понятий и идей, которые проявили себя в диофантовом анализе в полную силу лишь в начале XX в.

Эйлер исследовал и вопрос о числе рациональных решений неопределенного уравнения. Он знал, что уравнения вида (1), (2), (22) могут иметь бесконечное число решений, поскольку известный метод Диофанта—Ферма получения нового рационального решения таких уравнений по известному решению можно было, вообще говоря, повторять неограниченно. Но Эйлер приводит и примеры таких уравнений, имеющих конечное число рациональных решений. Подробнее на этом мы останавливаться не будем.

Подводя итог нашим рассуждениям, отметим, что изыскания Эйлера по диофантову анализу относятся к тому периоду развития этой дисциплины, который можно было бы назвать «элементарным», имея в виду прежде всего применяемые средства исследования диофантовых уравнений. Продвижение вперед на этом этапе было связано главным образом с накоплением методов решения диофантовых уравнений. То же имело место и для аналогичного этапа развития теории определенных алгебраических уравнений, когда основные усилия математиков были направлены на открытие методов решения уравнений данной степени. К началу XVIII в. диофантов анализ располагал методами нахождения рациональных решений неопределенных уравнений 2-й, 3-й и 4-й степени с двумя неизвестными. Причем если метод нахождения всех рациональных решений диофантова уравнения 2-й степени с двумя неизвестными (для случая, когда известно одно его рациональное решение) применялся еще Диофантом и Эйлеру оставалось только сформулировать его в общем виде [22], то иначе обстояло дело с уравнениями 3-й и 4-й степени, решение которых представляет собой гораздо более сложную задачу.

Эйлер продолжил изучение основных рассматривавшихся до него типов неопределенных уравнений 3-й и 4-й степени (1), (2), (22), задающих эллиптические кривые. Он добавил к известным методам Диофанта—Ферма получения рациональных решений этих уравнений новые методы, которые, как показано в статье, имеют тесную связь с современными методами нахождения рациональных точек на эллиптических кривых. По существу Эйлер использовал все процедуры (метод касательной, метод секущей, отражение рациональных точек относительно оси симметрии кривой), лежащие в основе определения операции сложения рациональных точек эллиптической кривой. Он первым смог итерировать метод секущей. Еще раз подчеркнем, что все свои результаты он формулировал только алгебраически, не прибегая к геометрической интерпретации. Надеемся, что приведенные в настоящей статье образцы его рассуждений позволяют составить представление о стиле, характерном для диофантова анализа XVIII в., и о способах изучения диофантовых уравнений, которыми располагал Эйлер.

В работах Эйлера не только получены в алгебраической форме новые методы нахождения рациональных точек алгебраических кривых. В его работах содержатся зародыши понятий и идей, которые сейчас относятся к числу основных в диофантовом анализе, например понятие бирациональной эквивалентности кривых над полем  $\mathbb{Q}$ . Однако потребовалось

еще много времени, чтобы была осознана роль этих понятий, которые у Эйлера только-только начали изучаться.

В заключение отметим, что мы не стремились дать исчерпывающей характеристики творчества великого математика в области диофантовых уравнений. Наша цель состояла в том, чтобы обратить внимание на сравнительно малоизвестные достижения Эйлера в этой области, поэтому некоторые вопросы, касающиеся его творчества по диофантову анализу, были оставлены в стороне. В частности, мы не останавливались на переписке Эйлера с Гольдбахом, хотя в некоторых письмах из этой переписки затрагиваются проблемы решения диофантовых уравнений в рациональных числах (см., например, письма Эйлера от 2.09.1747 г., 25.06.1748 г., 15.04.1749 г. и др.). В них идет речь о конкретных диофантовых уравнениях, для которых Эйлер приводит рациональные решения, не излагая, как правило, метода получения этих решений. Уравнения общего вида, по-видимому, в этой переписке не рассматривались. Более детальное изучение переписки весьма полезно при рассмотрении вопросов о том, как развивался интерес Эйлера к диофантову анализу, какова была история отдельных задач диофантова анализа и т. п.

Из имеющейся историко-математической литературы, в которой обсуждается творчество Эйлера по диофантовым уравнениям, отметим, помимо уже упомянутых здесь статей [23] И. Г. Башмаковой, содержащую ряд важных замечаний на указанную тему, статьи Й. Э. Гофмана [24, 25] и недавно вышедшую книгу А. Вейля [26]. Особо отметим интересный анализ одного из важнейших мемуаров Эйлера по диофантовым уравнениям [13], содержащийся в работах [25, 26]. Так, Вейль дает интерпретацию методов Эйлера из [12] и [13] с помощью теории дивизоров. Однако ни в одной из указанных работ не выясняется детально геометрический смысл процедуры Эйлера для уравнения (29).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Венков Б. А. О работах Леонарда Эйлера по теории чисел // Леонард Эйлер. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935. С. 81—87.
2. Гельфонд А. О. Роль работ Эйлера в развитии теории чисел // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 80—95.
3. Мельников И. Г. Эйлер и его арифметические работы // Ист.-мат. исслед. 1957. Вып. 10. С. 211—228.
4. Башмакова И. Г., Слаутин Е. И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. М.: Наука, 1984. 256 с.
5. Каучикас А. П. Диофант и неопределенный анализ в трудах европейских математиков XIII—XVI веков: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ИИЕиТ АН СССР, 1979. 118 с.
6. Башмакова И. Г. Вклад Леонарда Эйлера в алгебру // Наст. изд.
7. Euler L. Vollständige Anleitung zur Algebra. Stuttgart, 1959; Opera I-5.
8. Лавриненко Т. А. Методы решения неопределенных уравнений в рациональных числах в XVIII—XIX веках // Ист.-мат. исслед. 1985. Вып. 28. С. 202—222.
9. Euler L. Opera postuma mathematica et physica. Petropoli, 1862. Vol. 1.
10. Лавриненко Т. А. Неопределенный анализ в работах Л. Эйлера. М., 1982. 37 с. Деп. в ВИНТИ 22.12.83. № 6988-83.
11. Euler L. Dilucidationes circa binas summas duorum biquadratorum inter se sequales // Opera I-5. P. 135—145.
12. Euler L. De resolutione huius aequationis  $0 = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + ix^2y^2$  per numeros rationales // Opera I-5. P. 146—156.
13. Euler L. Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi // Opera I-5. P. 157—181.

14. *Лавриненко Т. А.* Решение неопределенных уравнений 3-й и 4-й степени в поздних работах Эйлера // Ист.-мат. исслед. 1983. Вып. 27. С. 67—78.
15. *Euler L.* Solutio problematis Fermatiani de duobus numeris, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum... // Opera I-5. P. 77—81.
16. *Euler L.* Resolutio facilis quaestionis difficillimae, quae haec formula maxima generalis  $v^2z^2(ax^2 + by^2)^2 + \Delta x^2y^2(av^2 + bz^2)^2$  ad quadratum reduci postulatur // Opera I-5. P. 74—76.
17. *Euler L.* De insigni promotione analysis Diophantae // Opera I-5. P. 82—93.
18. *Euler L.* Solutio problematis difficillimi, quo hae duae formulae  $a^2x^2 + b^2y^2$  et  $a^2y^2 + b^2x^2$  quadrata reddi debent // Opera I-5. P. 94—115.
19. *Euler L.* Investigatio binorum numerorum formae  $xy(x^4 - y^4)$  quorum productum sive quotus sit quadratum // Opera I-5. P. 116—130.
20. *Jacobi C. G. J.* De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium abelianorum in analysi Diophantae // Gesammelte Werke. Berlin, 1882. Bd. 2. S. 53—55.
21. *Лавриненко Т. А.* Неопределенные уравнения в работах Л. Эйлера и математиков XIX века: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ИИЕиТ АН СССР, 1984. 165 с.
22. *Euler L.* Resolutio aequationis  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$  per numeros tam rationales quam integros // Opera I-3. P. 297—309.
23. *Башмакова И. Г.* Арифметика алгебраических кривых (от Диофанта до Пуанкаре) // Ист.-мат. исслед. 1975. Вып. 20. С. 104—124.
24. *Hofmann J. E.* Über eine zahlentheoretische Aufgabe Fermats // Centaurus. 1961. Vol. 16. P. 169—202.
25. *Hofmann J. E.* Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Eulers, ihre Zusammenhänge und ihre Bedeutung // Arch. Hist. Exact Sci. 1961. Vol. 1, N 2. P. 122—159.
26. *Weil A.* Number theory: An approach through history. From Hammurapi to Legendre. Boston; Basel; Stuttgart: Birkhäuser, 1983.

# ОСНОВЫ МЕХАНИКИ И ГИДРОДИНАМИКА В ТРУДАХ Л. ЭЙЛЕРА

Г. К. МИХАЙЛОВ, Л. И. СЕДОВ

Леонард Эйлер был одним из величайших ученых всех эпох как в области математики, так и в области механики.

Общий объем опубликованных трудов Эйлера по механике огромен. Содержащая сочинения Эйлера по механике (и небесной механике) вторая серия его «Полного собрания сочинений» (*Opera omnia*) составит свыше 11 000 страниц, образующих 31 большой том in-4°. На сегодня из них вышли в свет 27 томов.

Надо подчеркнуть, что механика была первым серьезным увлечением Эйлера. В сохранившихся «записных книжках», которые он вел в возрасте 18—19 лет, уже содержатся разработанные им подробные планы общих трактатов по динамике точки и теории движения жидкостей. О живом интересе молодого Эйлера к механике свидетельствует и сравнительный анализ опубликованных сочинений Эйлера, написанных им за первые 10 лет его научного творчества (1726—1735). Из общего их объема около 1800 страниц (в пересчете на страницы *Opera omnia*) почти 2/3 посвящены механике и лишь около 1/4 высшей математике. Половину всего этого объема составляет большой трактат Эйлера по динамике точки, принесший ему первое признание в широких международных ученых кругах.

Динамика находилась к концу 20-х годов XVIII в., можно сказать, в нестационарном состоянии. Ньютоновы «Математические начала натуральной философии» (1687) подвели итог усилиям его предшественников по уяснению исходных понятий механики и основных законов движения. «Начала» образовали значительную часть фундамента общего здания динамики и той его секции, которая занята динамикой точки, а также содержали попытки построения некоторых других его частей. Однако у Ньютона не хватало еще многих существенных элементов, требовавшихся для окончательного возведения всего здания механики (и прежде всего для построения механики системы, твердого тела и сплошной среды). Кроме того, «Начала» были изложены с помощью доживавшего последние дни геометрического метода древних, не открывавшего пути для дальнейшего продвижения непосвященным в тайны анализа. Элементы аналитического изложения задач механики только появились в самом начале XVIII в. у П. Вариньона<sup>1</sup> и в «Форономии» Я. Германа (1716).

В этих условиях Эйлер смело взялся переложить всю динамику точки того времени на язык математического анализа. Это было исполнено

---

<sup>1</sup> Серия посвященных динамике точки статей Вариньона публиковалась в «Мемуарах» Парижской академии наук, начиная с их выпуска за 1700 г. Эйлер не упоминал в своих исследованиях эти работы Вариньона, ссылки на которые вообще нечасты в последующей литературе.

им в двухтомной «Механике» (*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*), опубликованной в 1736 г. в качестве дополнения к не справлявшимся с потоком поступавших статей «Комментариям» Петербургской академии наук.

Обсуждая в предисловии к первому тому «Механики» синтетический метод изложения ньютоновых «Начал», Эйлер писал:

«Однако если анализ где-либо и необходим, так это особенно относится к механике. Хотя читатель и убеждается в истине выставленных предложений, но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что, если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно, если не прибегнет сам к анализу и те же предложения не разрешит аналитическим методом. Это как раз случилось со мной, когда я начал знакомиться с «Началами» Ньютона и «Форономией» Германа; хотя мне казалось, что я достаточно ясно понял решение многих задач, однако задач, чуть отступающих от них, я уже решить не мог. И вот тогда-то я попытался, насколько умел, выделить анализ из этого синтетического метода и те же предложения для собственной пользы проработать аналитически; благодаря этому я значительно лучше понял суть вопроса. Затем таким же образом я исследовал и другие работы, относящиеся к этой науке, разбросанные по многим местам, и лично для себя я изложил их планомерным и единообразным методом и привел их в удобный порядок. При этих занятиях я не только встретился с целым рядом вопросов, ранее совершенно незатронутых, которые я удачно разрешил, но я нашел много новых методов, благодаря которым не только механика, но и самый анализ, по-видимому, в значительной степени обогатился. Таким образом и возникло это сочинение о движении, в котором я изложил аналитическим методом и в удобном порядке как то, что я нашел у других в их работах о движении тел, так и то, что я получил в результате своих размышлений» [1, с. 33—34].

Хотелось бы подчеркнуть здесь справедливые слова Эйлера о том, что в его трактате по механике им развиваются одновременно и новые методы математического анализа. Первоначально математические методы были для Эйлера преимущественно лишь средством решения задач механики.

В своей «Механике» Эйлер впервые систематически изложил динамику свободной материальной точки и точки, находящейся на заданной кривой

MECHANICA  
SIVE  
MOTVS  
SCIENTIA  
ANALYTICE

EXPOSITA  
AVCTORE  
LEONHARDO EVLERO  
ACADEMIAE IMPER SCIENTIARVM M MBRO ET  
MATHHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE

TOMVS I.

INSTAR SUPPLEMENTI AD COMMENTAR  
ACAD SCIENT IMPER

-----

PETROPOLI

EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.

A 1736

*Титульный лист I тома «Механики»  
Л. Эйлера 1736 г.*

или поверхности. При этом им последовательно изучались движения точки в случае отсутствия сопротивления среды (в пустоте) и в сопротивляющейся среде. Все исследование велось здесь в натуральных координатах, связанных с траекторией движения точки.

Разобрав в «Механике» динамику точки, Эйлер предпринял тогда же безуспешную попытку рассмотреть и движение твердого тела. Однако, как признался Эйлер в предисловии к своему трактату, решение этой задачи «вследствие недостаточности принципов» пришлось отложить «на будущее». Это не помешало ему сформулировать тогда же план построения всей механики, как она представлялась ему в середине 30-х годов. В общем примечании к первой главе первого тома «Механики» (§ 98) он писал:

«Сначала мы будем рассматривать тела бесконечно малые, т. е. те, которые могут рассматриваться как точки. Затем мы приступим к телам, имеющим конечную величину, — тем, которые являются твердыми, не позволяя менять своей формы. В-третьих, мы будем говорить о телах гибких. В-четвертых, о тех, которые допускают растяжение и сжатие. В-пятых, мы подвергнем исследованию движение многих разъединенных тел, из которых одни препятствуют другим выполнить свои движения так, как они стремятся это сделать. В-шестых, будет рассматриваться движение жидких тел. По отношению к этим телам мы будем рассматривать не только то, как они, предоставленные сами себе, продолжают движение, но, кроме того, мы будем исследовать, как на эти тела воздействуют внешние причины, т. е. силы» [1, с. 89—90].

Какую же часть этой грандиозной программы Эйлеру удалось осуществить на протяжении его долгой и беззаветно и безраздельно отданной науке жизни? Попытаемся ответить на этот вопрос.

Наиболее значительна роль Эйлера в создании основ динамики твердого тела и гидродинамики идеальной жидкости, которым он придал близкую к знаковой нам из нынешних учебников форму. Эйлер внес также значительный вклад в развитие механики гибких и упругих тел, хотя создание общей теории упругости и было уже делом XIX в.

Прежде чем говорить об отдельных результатах Эйлера в механике, необходимо сказать хотя бы несколько слов о стиле его исследований и сопоставить его труды с трудами ученых-механиков — его современников. Среди последних ведущее место занимает Ж. Даламбер, а из более молодых ученых — Ж. Л. Лагранж. Но Лагранж и его «Аналитическая механика» олицетворяют собой уже следующий за Эйлером, более формализованный этап в развитии механики. Поэтому в трудах Эйлера и Лагранжа легче установить преемственность идей, хотя она и не всегда правильно отражалась в последующей научной литературе. Что же касается Даламбера (который был всего на 10 лет моложе Эйлера и скончался с ним в один год), то его исследования пересекались с работами Эйлера почти во всех разделах механики. Особенно тесно переплетались они в динамике твердого тела, небесной механике, теории колебаний струн и в подходах к построению гидродинамики идеальной жидкости. Даламбер был, безусловно, гениальнейшим соперником Эйлера в механике. Ему принадлежали выдающиеся идеи, иногда опережавшие исследования Эйлера, но эти идеи никогда не бывали выражены Даламбером в ясной форме и практически никогда не бывали реализованы в сколь бы то ни

было полной мере. Уже в середине XIX в. математический язык блестящего философа и литератора Даламбера казался тяжеловесным. Эйлер же открыл новую эпоху в манере изложения точных наук. Подавляющая часть того, что написано Эйлером, изложено предельно ясно, с четким выделением предположений и прозрачной формулировкой используемых методов. Языком и стилем Эйлера восхищались на протяжении всего XIX в. Эйлер остается, пожалуй, единственным ученым середины XVIII в., сочинения которого по механике легко читаются и в наши дни. Естественно, конечно, что благодаря этому его прямое влияние на последующее развитие науки сохранялось в течение свыше 100 лет. Результаты Эйлера сохранились в науке, как правило, в почти не трансформированном виде, даже если они и не связываются сейчас с его именем. Наряду с этим Эйлер был свойствен редкий талант систематизировать и обобщать научные идеи, что позволило ему сформировать в сравнительно завершенном виде отдельные крупные разделы механики.

Вернемся, однако, к существу дела. Начнем с механики системы. Обсуждая ее развитие в середине XVIII в., невозможно обойти принцип Даламбера. Каково его взаимоотношение с методами Эйлера? По этому поводу существуют разногласия в научной литературе. Они связаны в значительной степени с сохранившейся до наших дней неоднозначностью трактовки основного содержания принципа Даламбера. Еще Лагранж указывал, что под названием принципа Даламбера разные авторы подразумевают различные положения — как принцип Даламбера в той форме, которую придал ему Даламбер в своем «Трактате по динамике» (Париж, 1743), так и менее прямой, но более простой в приложениях способ сведения законов динамики к законам статики, «представляющий, — по словам Лагранжа, — возврат к методу Германа и Эйлера, последний из которых применил его при решении многих задач механики» [2, с. 313]<sup>2</sup>. К. Трусделл писал по этому поводу: «В противоположность общепринятым утверждениям Даламбер не свел динамику к статике и не предложил ни в своем трактате, ни где-либо в другом месте ни одной из двух форм законов динамики, называемых теперь обычно «принципом Даламбера», — обе они принадлежат соответственно Эйлеру и Лагранжу и относятся к более позднему времени» [3, с. 113].

Не входя в подробный анализ вопроса, отметим, что Эйлер уже в 30-х годах располагал предпосылками метода, эквивалентного принципу Даламбера, и развивал свой подход в последующем в духе идей Ньютона вполне самостоятельно. Может быть, именно поэтому Эйлер никогда не ссылался на принцип Даламбера и не излагал свой подход к решению задач механики системы в качестве отдельного метода.

Развитие динамики систем с конечным числом степеней свободы было тесно связано в первой половине XVIII в. с теорией колебаний. Не останавливаясь специально на этом важном для общей истории динамики ее разделе, отметим лишь, что Эйлер внес в 30-х и начале 40-х годов существенный вклад и в его развитие (наряду с Д. и И. Бернулли). Невозможно, конечно, не упомянуть о том большом значении, которое имело для развития теории колебаний открытие Эйлером способа интегрирова-

<sup>2</sup> Цитируемое замечание было включено во второе издание «Аналитической механики» (1811).

ния линейных дифференциальных уравнений, играющих такую большую роль в теории колебаний. В частности, уже в 1739 г. Эйлер открыл явление резонанса для синусоидально возбуждаемого гармонического осциллятора. Из позднейших работ Эйлера, внесших принципиальный вклад в теорию нелинейных колебаний, отметим его вторую теорию движения Луны (СПб., 1772). Записанные там Эйлером в прямоугольных координатах уравнения движения Луны оказались типичными для теории нелинейных колебаний. Продолженные в конце XIX в. Дж. Хиллом исследования Эйлера по методам их интегрирования оказались впоследствии весьма важны для развития общей теории нелинейных колебаний.

Отметим, что первый пример дифференциального уравнения движения системы  $n$  тел, построенный вполне в духе ньютоновых «Начал», появляется у Эйлера во второй половине 40-х годов.

Любопытно, что в понимании основ механики (как, впрочем, и во многих других вопросах) сам Ньютон не был столь строгим «ньютонианцем», как его последователи. Так, он правильно сформулировал закон сохранения количества движения (по существу и закон живых сил) еще в первом издании «Начал» (1687). Однако на самом деле Ньютон до конца своих дней верил, что количество движения изолированной системы может в процессе движения изменяться. Он предложил даже якобы противоречащий закону сохранения количества движения пример с равномерным вращением двух соединенных стержнем одинаковых шаров вокруг прямолинейно и равномерно же двигающегося их общего центра тяжести<sup>3</sup>.

К динамике систем относятся и классические задачи небесной механики, которым Эйлер посвятил много работ начиная с середины 40-х годов. Основное место среди них занимают различные аспекты задачи трех тел — теория движения Луны, теория возмущенных планетных движений и, наконец, с 60-х годов собственно задача трех тел в чистом виде. Вклад Эйлера в становление и развитие небесной механики весьма значителен. Можно считать, что теория возмущений планетных движений ведет свое начало от мемуара Эйлера о неравенствах в движении Юпитера и Сатурна (представленного на конкурс Парижской академии наук и опубликованного ею в 1749 г.). Этот мемуар Эйлера вместе с трактатом Ж. Даламбера о предварении равноденствий и нутации земной оси (опубликованным в Париже в 1749 г.) и «Теорией Луны» А. К. Клеро (представленной на конкурс Петербургской академии наук в 1750 г.) могут по справедливости считаться отправной точкой всей современной небесной механики<sup>4</sup>.

Между прочим, в одном из первых общих сочинений Эйлера по небесной механике, доложенном в 1747 г. и опубликованном в 1749 г., впервые появляются в близком к привычному нам виду «ньютоновы уравнения» движения точки под действием произвольных сил [5, § 18]:

$$\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{X}{M}, \quad \frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Y}{M}, \quad \frac{2ddz}{dt^2} = \frac{Z}{M}. \quad (1)$$

<sup>3</sup> Разбор ошибочности этого примера, помещенного Ньютоном впервые в латинском издании своей «Оптики» (1706), проведен В. А. Фабрикантом [4].

<sup>4</sup> Работы Эйлера по небесной механике затронуты подробнее в статьях В. К. Абалакина и Е. А. Гребеникова, а также Н. И. Невской и К. В. Холшевникова (см. наст. изд.).

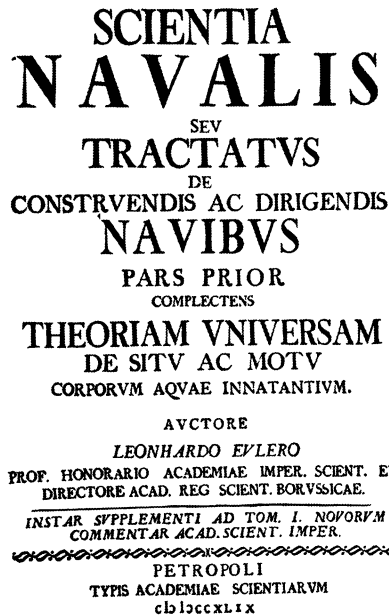


Здесь  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — составляющие внешних сил вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  декартовой системы координат, а  $M$  — масса точки. Наличие в уравнениях кажущегося лишним коэффициента 2 не должно нас смущать. Оно связано с принятой Эйлером в то время системой обозначения механических величин.

Дело в том, что в середине XVIII в. не существовало еще ясного представления о системах единиц измерения и тем более о теории размерности. За основные единицы измерения приняты у Эйлера, по существу, всего две — длина  $L$  и сила  $F$ . Масса измеряется в единицах веса (силы), т. е.  $[M] = F$ . При этом согласно основному закону динамики ускорения безразмерны, т. е. должны измеряться в сравнении с каким-либо заранее выбранным ускорением. Отсюда для нас сразу же следует, что размерность времени  $[T] = L^{1/2}$ . Однако у Эйлера это вытекало из независимого определения скорости и времени. Скорость измерялась корнем квадратным из высоты, при падении с которой из состояния покоя тело приобретает данную скорость; время же измерялось отношением проходимого телом пути к так определенной скорости. Отсюда следует, что скорости и времени можно приписать одинаковую размерность  $L^{1/2}$ . Для формального перехода в уравнениях Эйлера того времени к современному их виду надо, сохраняя величины сил и расстояний, заменять остальные величины по следующей схеме: масса  $\rightarrow mg$ , скорость  $\rightarrow v/\sqrt{2g}$ , время  $\rightarrow t\sqrt{2g}$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести. При этом коэффициент 2 в выписанных выше уравнениях исчезает.

Выдающийся вклад был внесен Эйлером в создание общей теории движения твердого тела. Первоначально, в конце 30-х годов, он занимался некоторыми частными задачами динамики твердого тела при подготовке своей «Корабельной науки» (*Scientia navalis*), или, как ее чаще называют по-русски, «Морской науки» (напечатанной из-за издательских трудностей в Петербурге лишь в 1749 г.). В этом большом сочинении мы находим разложение движения корабля на поступательное и вращательное, попытку расчета малых колебаний корабля на воде, продвинутое учение об устойчивости равновесия плавающих тел (их остойчивости, как мы теперь говорим), элементы учения о моментах инерции.

К общей теории движения твердого тела Эйлер вернулся в 1749—1750 гг. Известным побуждением к тому послужили исследования Да-



*Титульный лист I тома  
«Морской науки» Л. Эйлера  
1749 г.*

ламбера о предварении равноденствий и нутации земной оси, содержавшие определенные подходы к теории вращения твердого тела. Первый решающий шаг для построения общей динамики твердого тела был совершен Эйлером в мемуаре «Открытие нового принципа механики», доложенном им Берлинской академии 3 сентября 1750 г. В этом мемуаре Эйлер изложил открытый им принцип — «общий и фундаментальный принцип всей механики», как он его квалифицировал. Этот принцип заключался в систематическом математическом применении основного закона динамики (второго закона Ньютона, или принципа ускоряющих сил) в проекциях на неподвижные оси координат для каждой бесконечно малой частицы (в том числе и для материальной точки) [6, § 22]:

$$2M ddx = Pdt^2, \quad 2M ddy = Q dt^2, \quad 2M ddz = R dt^2. \quad (2)$$

Здесь  $M$  — масса частицы, а  $P$ ,  $Q$  и  $R$  — составляющие внешних сил. (Происхождение коэффициента 2 то же, что и в приведенной выше системе уравнений.) Указанный принцип, по словам Эйлера, можно рассматривать «как единственный фундамент всей механики и других наук, которые трактуют о движении произвольных тел». В своем мемуаре Эйлер писал (§ 19):

«Именно на этом единственном принципе должны быть основаны все другие принципы, как те, которые уже получены в механике и гидравлике и которыми пользуются сейчас для определения движения твердых и жидких тел, так также и те, которые пока еще неизвестны и которые нам нужны для развития как указанных выше случаев твердых тел, так и многих других, которые относятся к жидким телам».

Итак, новый принцип Эйлера включал выделение элементарной частицы из сплошной среды и применение к ней основного ньютонова закона динамики, записанного в проекциях на неподвижные оси координат. Сейчас трудно себе даже представить тот скачок, который придала механике эта работа Эйлера, кажущаяся нам сегодня самоочевидной. Но именно она открыла самый простой и естественный путь для последовательного построения динамики твердого тела и, главное, всей механики сплошной среды.

Справедливости ради надо заметить, что запись основного закона динамики в проекциях на неподвижную систему координат применительно к изучению движения материальной точки была предложена в качестве самостоятельного «принципа» механики еще К. Маклореном в изданном им в 1742 г. «Трактате о флюксиях». (Маклорен пользовался при этом, конечно, забытой теперь ньютоновой терминологией флюксий.) В 40-х годах XVIII в. запись уравнений движения в неподвижных координатах использовалась также и рядом ученых на континенте, в частности И. И. Бернулли, А. К. Клеро, Ж. Даламбером и самим Эйлером. Однако никому до Эйлера не пришла в голову мысль о том, что дифференциальные уравнения, будучи выписаны для произвольного элемента среды (или тела), непосредственно приводят к математической формулировке общих задач механики. (Необходимость независимого привлечения также и закона момента количества движения была, по-видимому, осознана Эйлером значительно позже.)

С помощью своего нового принципа Эйлер сразу получил в том же мемуаре и общие уравнения вращения твердого тела, однако представил

их первоначально в малодоступной для исследования несимметричной форме, отнесенной к неподвижной системе координат (§ 55):

$$\begin{aligned} \frac{Pa}{2M} &= \frac{ff \, d\lambda}{dt} - \frac{nn \, d\mu}{dt} - \frac{mm \, dv}{dt} + \lambda vnn - \lambda \mu mm - \\ &\quad - (\mu\mu - \nu\nu) ll + \mu\nu (hh - gg), \\ \frac{Qa}{2M} &= \frac{gg \, d\mu}{dt} - \frac{ll \, dv}{dt} - \frac{nn \, d\lambda}{dt} + \lambda\mu ll - \mu\nu nn - \\ &\quad - (\nu\nu - \lambda\lambda) mm + \lambda\nu (ff - hh), \\ \frac{Ra}{2M} &= \frac{hh \, dv}{dt} - \frac{mm \, d\lambda}{dt} - \frac{ll \, d\mu}{dt} + \mu\nu mm - \lambda\nu ll - \\ &\quad - (\lambda\lambda - \mu\mu) nn + \lambda\mu (gg - ff). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $Pa$ ,  $Qa$  и  $Ra$  — моменты внешних сил,  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$  — угловые скорости вращения, а  $f$ ,  $g$ , . . . ,  $n$  — радиусы инерции тела относительно неподвижных осей, которые поэтому меняются в процессе вращения тела и содержат вследствие этого заранее неизвестные параметры,  $M$  — масса тела.

Через несколько лет (в 1755 г.) И. А. Сегнер обнаружил существование трех свободных осей вращения у произвольного твердого тела. После этого Эйлер вновь вернулся к общей теории движения твердого тела и в работах, относящихся к концу 50-х годов (но опубликованных в «Мемуарах» Берлинской академии лишь в 1765 г.), использовал в качестве основной системы координат главные оси инерции, являющиеся свободными осями вращения. В результате он придал общим динамическим уравнениям вращения твердого тела вокруг центра тяжести ставшую ныне классической (с точностью до обозначений) форму [7, § 28]:

$$\begin{aligned} dx + \frac{cc - bb}{aa} \cdot yz \, dt &= \frac{2gP \, dt}{Ma a}, \\ dy + \frac{aa - cc}{bb} \cdot xz \, dt &= \frac{2gQ \, dt}{Mb b}, \\ dz + \frac{bb - aa}{cc} \cdot xy \, dt &= \frac{2gR \, dt}{Mc c}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь через  $x$ ,  $y$  и  $z$  обозначены проекции мгновенной угловой скорости на подвижные оси,  $a$ ,  $b$  и  $c$  — главные радиусы инерции тела,  $P$ ,  $Q$  и  $R$  — моменты внешних сил,  $M$  — масса тела,  $g$  — путь, проходимый свободно падающим из состояния покоя телом за первую секунду движения, численно равный половине ускорения силы тяжести. Наличие множителя  $2g$  объясняется тем, что времена и скорости понимаются теперь Эйлером уже в нынешнем смысле, а масса по-прежнему измеряется весом тела. (Принятые теперь обозначения в этой классической задаче восходят к Ж. Л. Лагранжу и С. Д. Пуассону.)

Тогда же Эйлер исследовал и первый знаменитый случай интегрируемости в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки — случай, когда отсутствует момент внешних сил относительно неподвижного центра масс.

Эйлеру принадлежит также разработка кинематики твердого тела, включая вывод обеих форм кинематических уравнений вращения (одну из которых иногда называют пуассоновой), а равно и развернутое учение о

моментах инерции (геометрия масс), за исключением, впрочем, построения эллипсоида инерции.

Завершением основного этапа исследований Эйлера по динамике твердого тела явился его трактат «Теория движения твердых тел», который он закончил написанием в 1760 г. и считал третьим томом своей «Механики» (из-за трудности нахождения издателя, с которой постоянно сталкивался Эйлер, эта книга увидела свет только в 1765 г. в Ростове). Впрочем, Эйлер продолжал заниматься динамикой твердого тела и в последующие годы. В частности, в его сочинении «Новый метод определения движения твердых тел», представленном Петербургской академии в октябре 1775 г., впервые выписаны совместно шесть уравнений движения произвольного тела, представляющие законы количества движения и момента количества движения [8, § 29]:

$$\begin{aligned} \int dM \left( \frac{d dx}{dt^2} \right) &= iP, & \int z dM \left( \frac{d dy}{dt^2} \right) - \int y dM \left( \frac{d dz}{dt^2} \right) &= iS, \\ \int dM \left( \frac{d dy}{dt^2} \right) &= iQ, & \int x dM \left( \frac{d dz}{dt^2} \right) - \int z dM \left( \frac{d dx}{dt^2} \right) &= iT, \\ \int dM \left( \frac{d dz}{dt^2} \right) &= iR, & \int y dM \left( \frac{d dx}{dt^2} \right) - \int x dM \left( \frac{d dy}{dt^2} \right) &= iU. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $P$ ,  $Q$  и  $R$  — составляющие внешних сил,  $S$ ,  $T$  и  $U$  — соответствующие их моменты,  $i$  — удвоенный путь, проходимый свободно падающим телом за первую секунду движения, численно равный ускорению силы тяжести<sup>5</sup>.

К. Трусделл считает это место у Эйлера первым в истории механики появлением обоих этих законов в качестве «*фундаментальных, общих и независимых законов механики*» для всех видов движения всех видов тел. В связи с этим Трусделл предложил называть совокупность этих законов — изменения количества движения и момента количества движения — эйлеровыми законами механики [3, с. 260].

Мы не остановились вовсе на эйлеровом принципе наименьшего действия в механике, поскольку широкий спектр вопросов, связанных с интегральными вариационными принципами механики, освещается в помещенной в этом же сборнике статье В. В. Румянцева. Однако, завершая обзор достижений Эйлера в формировании основ общей механики, его вклад в понимание основ механики, необходимо обратить особое внимание и на то, что Эйлер одновременно заложил также основы вариационного исчисления. Создание Эйлером аналитического аппарата ньютоновой механики, математическая формулировка им первого интегрального вариационного принципа механики и получение основных уравнений вариационного исчисления предопределили дальнейший ход развития общей механики на протяжении по крайней мере полутора столетий. Принципиальной для последующего развития механики была идея отбора действительных движений из множества мыслимых возможных движений, широко использованная после Эйлера Ж. Л. Лагранжем и многими великими учеными-механиками и физиками XIX и XX вв.

Перейдем теперь к работам Эйлера по механике сплошной среды.

<sup>5</sup> Ср. выше замечание об эйлеровых единицах измерения в формулах (4).

Эйлеру принадлежит разработка фундаментальных основ гидродинамики. Интерес Эйлера к задачам движения жидкостей проявился еще в юношеские годы. Под влиянием своего учителя Иоганна I Бернулли он приложил тогда при исследовании истечения жидкости из сосудов закон живых сил, используя наряду с этим применявшуюся уже ранее гипотезу плоских сечений и соответствующую ей форму закона неразрывности. Свои результаты Эйлер доложил Петербургской академии в двадцатилетнем возрасте в августе 1727 г., через две недели после аналогичного доклада Д. Бернулли. Результаты обоих авторов совпали, и в этой деликатной ситуации Эйлер уступил право публикации полученных результатов своему старшему товарищу, полностью прекратив свои собственные исследования в этой области на четверть века. Он вернулся к общим проблемам гидродинамики лишь в начале 50-х годов, когда им были окончательно выработаны необходимые для ее построения представления: четкое понятие о давлении в текущей жидкости, континуальное представление о физическом поле (скалярном и векторном) и простая формулировка основного закона динамики (закона импульса) для элементарной частицы среды. Эйлерово определение давления в потоке явилось рафинированным завершением эволюции этого понятия, возникшего в 1730 г. у Д. Бернулли и усовершенствованного отчасти в «Гидравлике» И. I Бернулли (1743). Бернулли-отцу принадлежит и первая попытка применить в гидравлике закон импульса. Некоторые предпосылки континуального подхода к изучению движения жидкости можно усмотреть уже в примечаниях Эйлера к выполненному им переводу «Начал артиллерии» Б. Робинса (1745), где при рассмотрении обтекания тел Эйлер использовал схему линий тока [9, с. 297—298]<sup>6</sup>. Однако первые реальные континуальные подходы к выводу общих уравнений движения жидкости были предприняты лишь в самом конце 40-х годов Даламбером (опубликовано в 1752 г.). Тем не менее четкое построение всей системы уравнений движения идеальной жидкости удалось лишь Эйлеру. При этом он опирался на свой упомянутый выше «новый принцип» механики. Два фундаментальные сочинения Эйлера по гидростатике и гидродинамике, относящиеся к 1753—1755 гг., были опубликованы в 1757 г. в «Мемуарах» Берлинской академии.

В первом из этих сочинений Эйлер обобщил результаты А. К. Клеро и придал изложению гидро- и аэростатики ту форму, которая сохранилась в основном и до наших дней. Любопытно, что Эйлер получил здесь, в частности, известную барометрическую формулу для изотермической атмосферы и высказал предложение о целесообразности определения температуры пропорционально давлению газа при постоянном объеме.

Второе свое сочинение «Общие принципы движения жидкостей» Эйлер доложил Берлинской академии 4 сентября 1755 г. Он начинает его с общей постановки задач теории движения идеальной жидкости. Затем из обычного для нашего времени рассмотрения элементарного жидкого параллелепипеда выводятся общие уравнения гидродинамики и уравнение неразрывности для сжимаемых жидкостей. Система уравнений гидродинамики

<sup>6</sup> Здесь же содержится, по существу, и первое объяснение так называемого парадокса Даламбера, заключающегося в отсутствии гидродинамического сопротивления при безотрывном обтекании тела потоком идеальной жидкости. Впоследствии, однако, Эйлер никогда не возвращался в своих сочинениях к разъяснению этого парадокса и даже не упоминал его.

получена Эйлером сразу в привычном нам виде [10, § 21]:

$$\begin{aligned} P - \frac{1}{q} \left( \frac{dp}{dx} \right) &= \left( \frac{du}{dt} \right) + u \left( \frac{du}{dx} \right) + v \left( \frac{du}{dy} \right) + w \left( \frac{du}{dz} \right), \\ Q - \frac{1}{q} \left( \frac{dp}{dy} \right) &= \left( \frac{dv}{dt} \right) + u \left( \frac{dv}{dx} \right) + v \left( \frac{dv}{dy} \right) + w \left( \frac{dv}{dz} \right), \\ R - \frac{1}{q} \left( \frac{dp}{dz} \right) &= \left( \frac{dw}{dt} \right) + u \left( \frac{dw}{dx} \right) + v \left( \frac{dw}{dy} \right) + w \left( \frac{dw}{dz} \right), \\ \left( \frac{dq}{dt} \right) + \left( \frac{d \cdot qu}{dx} \right) + \left( \frac{d \cdot qv}{dy} \right) + \left( \frac{d \cdot qw}{dz} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $p$  — обычное давление,  $q$  — плотность, а  $P$ ,  $Q$  и  $R$  — массовые силы. (Единственное отличие от сегодняшней записи заключается в том, что Эйлер не пользуется еще введенным позже обозначением для частных производных через «круглые»  $\partial$ , а помещает их в круглые скобки.)

Эйлер добавляет тут же, что к этим четырем уравнениям следует добавить пятое, которое дает связь между давлением, плотностью и дополнительной физической величиной, которая влияет на давление и под которой подразумевается, вообще говоря, температура. Полученные в результате пять уравнений, говорит Эйлер, «заклучают в себе всю теорию движения жидкости» (§ 21).

Вслед за выводом основных уравнений гидродинамики Эйлер вводит потенциалы сил  $S$  и скорости  $W$  и получает (§ 27 и 28) формулу

$$dp = q (dS - d\Pi - udu - vdv - wdw), \quad (7)$$

где  $\Pi = \partial w / \partial t$ , и соответствующие интегралы для случая несжимаемой жидкости, а также вообще для баротропных процессов — интегралы, носящие сегодня обычно название интегралов Лагранжа—Коши. Заканчивается сочинение исследованием отдельных частных случаев движения жидкости и замечанием, что выведенные уравнения переводят задачи движения жидкости из области механики в область математического анализа.

При чтении этого сочинения особенно поражают (свойственные и большинству других работ Эйлера) ясность и простота изложения мыслей. Трудно порой поверить, что его отделяет от нас уже свыше двух веков.

Вслед за первыми работами Эйлера по механике жидкости и газа последовали многие другие его сочинения, посвященные гидродинамике и теории распространения звука. Завершением и обобщением их явилась большая работа (516 с.), относящаяся уже к концу 60-х годов и опубликованная в четырех частях в 1769—1772 гг. в «Новых комментариях» Петербургской академии наук. Последняя глава второй ее части посвящена, в частности, определению движения жидкости по заданному начальному состоянию; здесь выведены общие уравнения гидродинамики в так называемых переменных Лагранжа — материальных переменных. (Отметим, что эти переменные были указаны Лагранжу Эйлером в его письме от 1 января 1760 г., опубликованном Лагранжем в 1762 г. вместе со своими собственными, связанными с этим исследованиями [41] <sup>7</sup>.) В третьей части работы Эйлер рас-

<sup>7</sup> Письмо Эйлера опубликовано также в «Сочинениях» Лагранжа (Oeuvres, Paris, 1892. Т. 14), где можно найти и соответствующие статьи Лагранжа (1867. Т. 1). Историческая справка о происхождении названия «переменные Лагранжа» имеется в предисловии К. Труделла к т. 11-12 (с. СХХ) «Opera omnia» Эйлера.

сматривает течение в трубах постоянного и переменного сечения, расчет подъема воды при помощи насосов и течения под действием разности температур. Последняя часть является обобщением многочисленных предыдущих исследований Эйлера по акустике и теории духовых музыкальных инструментов.

Таким образом, Эйлер заложил основы всей гидродинамики идеальной жидкости, за исключением сверхзвуковой аэродинамики, зародившейся на столетие позже и развившейся уже в XX в. Не обладая общим понятием тензора напряжений (введенным О. Л. Коши в 1823 г.), Эйлер не смог, конечно, перейти к изучению более сложных моделей сплошных сред — вязкой жидкости и упругого тела. Однако все остальное для дальнейшего развития механики сплошной среды было им полностью подготовлено. (Мы не имеем в виду, конечно, последующего внедрения термодинамики в механику жидкости и газа — переворота, совершенного также в XX в.)

Осветив одну из наиболее блестящих страниц в творчестве Эйлера — создание им гидродинамики, мы должны хотя бы кратко остановиться на его работах по механике гибких и упругих тел<sup>8</sup>. Исследования в этой области велись Эйлером на протяжении всей его жизни.

Задачами механики упругих тел (стержней) Эйлер заинтересовался еще в ранней молодости. Любопытно, что в одной маленькой заметке, написанной юным Эйлером еще в Базеле (но опубликованной лишь посмертно в 1862 г.), находится первый вывод закона изгиба стержней Я. Бернулли из закона Гука — результат, не замеченный самим Эйлером и переоткрытый им затем заново значительно позже. Не останавливаясь вовсе на работах Эйлера о поперечных колебаниях стержней, скажем лишь несколько слов о широко известных исследованиях Эйлера о равновесных формах упругих стержней и их продольном изгибе. Исследования Эйлера в этой области были инициированы открытием Д. Бернулли (1742) свойства экстремальности упругой энергии изогнутых упругих стержней. Классические результаты Эйлера были опубликованы им в 1744 г. в его знаменитом трактате по вариационному исчислению [12]. Здесь были проанализированы девять возможных типов равновесных форм (первоначально прямолинейного) стержня прямоугольного сечения, изогнутого под действием приложенной к его концам силы и момента. Здесь же содержится, по существу, и общая формула для критической силы при продольном изгибе стержня. Сам Эйлер, впрочем, применил тогда эту формулу только для случая стержня с шарнирно опертыми концами. В последующем Эйлер неоднократно возвращался к вопросу о продольном изгибе колонн, и последнее его исследование в этой области, относящееся к концу 70-х годов, посвящено окончательному разрешению некоторых трудностей, встретившихся при изучении продольного изгиба колонн под действием их собственного веса. Идеи и методы Эйлера в области продольного изгиба получили многочисленные фундаментальные приложения при объяснении различных механических эффектов и при решении важных технических задач.

Ра вновесие упругой системы обладает, согласно Эйлеру, устойчивостью, когда приложенные нагрузки являются докритическими (т. е. когда после их снятия восстанавливается первоначальное состояние равновесия сис-

<sup>8</sup> Механике упругих систем у Эйлера посвящена в этом сборнике статья Н. В. Баничука и А. Ю. Ишлинского.

темы или возникают допустимые малые колебания). Потеря же устойчивости вызывается по определению закритическими нагрузками, при которых либо возникают конечные упругие отклонения системы от первоначального состояния равновесия или от колебательных состояний с малыми амплитудами, либо появляются заметные неупругие деформации, либо, наконец, происходит разрушение. Как известно, последствия неустойчивости в сильной степени зависят от свойств и способов приложения закритических нагрузок.

В наше время происходит дальнейшее изучение проблем устойчивости стержневых и других систем при изменяющихся продольных нагрузках. Так, например, в теоретических и экспериментальных работах Н. М. Белляева и В. Н. Челомея обнаружено, что имеют место различные виды параметрической неустойчивости и оказывается возможным значительное повышение усредненных критических внешних нагрузок на упругие системы при наложении высокочастотных колебаний. Из этих результатов при совершении предельного перехода можно было бы, в частности, показать, что аналогичное повышение предельных нагрузок имеет место и при ударном нагружении, которое в реальных условиях всегда содержит в себе высокочастотные составляющие (при этом, конечно, видоизменяется соответствующим образом формы получающихся деформаций).

Активное участие принял Эйлер в дискуссии о колебаниях струны. По существу, задача о малых поперечных колебаниях струны (и о распространении звука) была первой задачей динамики системы с бесконечным числом степеней свободы. Замечательно, что эта задача начала изучаться задолго до того, как была разработана динамика системы с конечным числом степеней свободы. Классическое волновое уравнение (гиперболического типа) для задачи о колебании струны получил в 1746 г. Ж. Даламбер (опубликовано в 1749 г.). Тогда же он нашел и его решение, содержащее функции от аргументов  $(ct + x)$  и  $(ct - x)$ . Однако Даламбер произвольно ограничил класс функций, входящих в решение волнового уравнения некоторыми условиями «непрерывности» и «гладкости». Эйлер выступил с исследованием волнового уравнения сразу же вслед за Даламбером и подчеркнул, что общее решение задачи о струне должно включать функции значительно более широкого класса — произвольные кусочно-гладкие функции. Рассуждения Эйлера в этом отношении не были абсолютно строги (они и не могли быть таковыми на уровне математического анализа XVIII в.), но, как это подчеркнул А. П. Юшкевич, на самом деле его идея была плодотворной и от нее нити протягиваются к новейшим методам XX в. [13, с. 166].

Укажем еще на относящиеся к 70-м годам обобщающие исследования Эйлера по механике гибких нитей и упругих (одномерных) полос. Здесь им были получены общие уравнения равновесия и движения упругой линии (в плоскости) без специальных предположений о природе ее материала и о малости деформаций. При этом Эйлер рассматривал действующие в сечениях внутренние поперечные силы, предвосхитив представление о касательных напряжениях. Наконец, к этим же годам относится введение Эйлером физической характеристики материала, вполне эквивалентной модулю Юнга.



Возвращаясь к программе построения механики, предложенной Эйлером в 30-х годах, можно констатировать, что он самостоятельно и успешно справился на протяжении своей жизни с построением трех из намеченных им шести разделов механики: сюда относятся аналитически изложенная механика точки (п. 1), механика твердого тела (п. 2) и гидродинамика (п. 6). В учение о гибких телах (п. 3) и в механику системы (п. 5) Эйлер внес фундаментальный вклад наряду с другими, упомянутыми выше учеными. Что же касается теории упругости (п. 4), которой он посвятил, как мы видели, ряд важных исследований, то она была создана в качестве самостоятельной науки лишь в следующем веке трудами преимущественно французской школы.

Отвечая в целом на поставленный нами в начале вопрос о степени реализации Эйлером его плана построения механики, можно сказать, что Эйлер блестяще справился с той грандиозной программой, которую поставил перед собой в молодости, не сознавая еще ее невероятной трудности. Эйлеру мы в большей степени, чем кому-либо другому, обязаны пониманием механики. Непосредственно следующий за этим период в развитии механики касался больше формализации математических ее методов, чем углубления основ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Эйлер Л. Основы динамики точки. М.; Л.: Гостехиздат, 1938.
2. Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. Т. 1.
3. Truesdell C. Essays in the history of mechanics. Berlin etc.: Springer-Verl., 1968.
4. Фабрикант В. А. Исаак Ньютон, Иоганн Бернулли и закон сохранения количества движения // Успехи физ. наук. 1960. Т. 70, вып. 3. С. 575—580.
5. Euler L. Recherches sur le mouvement des corps célestes en général // Mém. Acad. sci. Berlin (1747). 1749. Т. 3. P. 93—143; Opera II-25. P. 1—44.
6. Euler L. Découverte d'un nouveau principe de mécanique // Mém. Acad. sci. Berlin (1750). 1752. Т. 6. P. 185—217; Opera II-5. P. 81—108.
7. Euler L. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe invariable // Mém. Acad. sci. Berlin (1758). 1765. Т. 14. P. 154—193; Opera II-8. P. 200—235.
8. Euler L. Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1775). 1776. Vol. 20. P. 208—238; Opera II-9. P. 99—125.
9. Эйлер Л. Исследования по баллистике. М.: Физматгиз, 1961.
10. Euler L. Principes généraux du mouvement des fluides // Mém. Acad. sci. Berlin. (1755). 1757. Т. 11. P. 274—315; Opera II-12. P. 54—91.
11. Lettre de M. Euler à M. de la Grange contenant des recherches sur la propagation des ébranlemens dans un milieu élastique // Mélanges philos. et math. Soc. roy. Turin (1760—1761). 1762. Т. 2. P. 1—10; Opera II-10. P. 255—263.
12. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. М.; Л.: Гостехиздат, 1934.
13. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года. М.: Наука, 1968.

# ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

В. В. РУМЯНЦЕВ

Исторической заслугой Леонарда Эйлера в развитии классической механики явилось приложение методов математического анализа к проблемам механики, вследствие чего Эйлер по праву считается одним из основоположников аналитической механики — науки, в основе которой лежит небольшое число постулатов, из которых выводятся все законы равновесия и движения материальных тел. Фундамент аналитической механики в настоящее время составляют ее вариационные принципы, т. е. основные, исходные положения, математически выраженные в форме вариационных соотношений, из которых как логические следствия вытекают все дифференциальные уравнения движения и законы механики. Вариационные принципы отличаются один от другого как по форме и способам варьирования, так и по общности, но каждый из них в рамках его приложимости представляет собой единую основу и как бы синтезирует всю механику соответствующих материальных систем. Иными словами, тот или иной из вариационных принципов механики потенциально заключает в себе все содержание этой области науки и объединяет все ее положения в единой формулировке.

Классическая механика основывается, как известно, на законах И. Ньютона, установленных для свободных материальных тел, и аксиомах святей. Справедливость вариационных принципов доказывается исходя из этих законов и аксиом. В свою очередь любой из вариационных принципов можно принять за аксиому и из нее логически вывести законы механики.

Вариационные принципы по форме подразделяются на дифференциальные, характеризующие свойства движения для любого данного момента времени, и интегральные, характеризующие свойства движения на любых конечных промежутках времени. Эйлер стоял у истоков одного из основных дифференциальных принципов, известного ныне как принцип Даламбера — Лагранжа, и первым дал математически строгую и плодотворную формулировку интегрального принципа наименьшего действия, разработка которого в значительно более общем виде была продолжена и завершена Ж. Л. Лагранжем и К. Г. Я. Якоби.

Вариационные принципы механики способствовали развитию связанного с ними мощного математического формализма, формализма Лагранжа и Гамильтона, они тесно связаны с проблемой преобразований в механике, группами Ли, законами сохранения и другими фундаментальными проблемами. Благодаря трудам многих ученых аналитическая механика приобрела репутацию эталона изящества, ясности и последовательности развития идей для всех естественных наук.

## 1. НЕМНОГО ПРЕДЫСТОРИИ

Смутные представления о вероятности существования некоторых общих законов природы, имеющих свойства максимумов или минимумов, возникли очень давно. Уже философы древности, размышляя о явлениях

природы, считали, что «природа ничего не делает напрасно и во всех своих проявлениях избирает кратчайший или легчайший путь, и в этом принципе они полагали главную конечную причину, к которой стремится природа... Уже Аристотель часто упоминает об этом догмате, однако, как это кажется, он скорее почерпнул его у своих предшественников, чем придумал сам. В дальнейшем же эта мысль настолько закрепились в философских школах, что из нее был создан первый канон философии, пока, наконец, Декарт не попытался его опровергнуть» [1, с. 99, 97].

Однако долгое время никем не был определен «тот истинный объект, к крайнему уменьшению которого природа постоянно стремится не только в некоторых, но решительно во всех своих проявлениях». Правда, в некоторых особых случаях проявлялась «как бы некая тень этого общего принципа. Среди них прежде всего заслуживает упоминания отражение света, относительно которого уже Птолемей, объясняя, что угол отражения постоянно равен углу падения, показал, что путь, который совершает таким образом луч, является кратчайшим, так что, если бы он отражался иначе, он описал бы более длинный путь. Одновременно, однако, было замечено, что это объяснение никоим образом не может иметь места для преломления лучей света, где ломаная линия никак не может иметь ничего общего с кратчайшим путем» [1, с. 97, 99].

Первым в истории науки вариационным принципом оказался принцип кратчайшего времени в геометрической оптике, выдвинутой французским ученым П. Ферма в 1662 г. Считая, что «природа действует наиболее легкими и доступными путями» [2, с. 6], Ферма положил этот принцип в основу исследования закона преломления света, ранее открытого В. Снеллиусом, и показал, что закон преломления удовлетворяет принципу кратчайшего времени. Но настоящее оправдание принцип Ферма получил лишь в работе Х. Гюйгенса [3], показавшего, что время прохождения света между двумя точками является минимумом.

Принцип Ферма

$$\int_P^Q \frac{ds}{v} = \int_P^Q \mu ds = \min \quad (1)$$

оказался наиболее общей математической формой выражения законов геометрической оптики. Здесь  $\mu(x, y, z)$  — показатель преломления оптически неоднородной, но изотропной среды, в которой свет распространяется от точки  $P$  до точки  $Q$  со скоростью  $v$ .

Ферма предполагал большую скорость света в менее плотных средах и меньшую — в более плотных. Р. Декарт придерживался противоположной точки зрения. Г. Лейбниц тоже пытался отвергнуть объяснение Ферма. Считая, что природа избирает наиболее легкий путь, Лейбниц выдвинул понятие трудности, которую преодолевает луч, проходя через какую-либо среду, определив ее из длины пути, умноженной на сопротивление. Он считал, что луч всегда следует по такому пути, для которого сумма всех трудностей была бы наименьшей. Лейбниц, как и Декарт, приписывал лучам в более плотной среде большую скорость. Лейбниц не прилагал, однако, свой принцип наиболее легкого пути ни к каким другим случаям.

Лейбницу принадлежит первое в механике определение действия (1669). «Формальные действия движения пропорциональны... произведе-

дению количества материи, расстояний, на которые они передвигаются, и скорости» [4, с. 354], т. е.  $mvs$  или  $mv^2\Delta t$ .

В 1687 г. И. Ньютон опубликовал свои знаменитые «Математические начала натуральной философии» [5], составившие фундамент классической механики. По мнению Ж. Л. Лагранжа, «в руках Ньютона механика превратилась в новую науку; его «Начала» составили эпоху этого превращения» [6, с. 292]. Отметим, что среди многих задач в ньютоновых «Началах» имеется также задача о форме тела вращения, движущегося в «редкой» среде вдоль оси, испытываемое сопротивление для которого было бы наименьшим. Эта задача, по-видимому, явилась первой в механике вариационной задачей. Более известна задача о брахистохроне, т. е. кривой наиболее быстрого спуска, поставленная в 1696 г. И. Бернулли [7] и решенная как самим И. Бернулли, так и Г. Лейбницем, И. Ньютоном, Я. Бернулли, Г. Лопиталем; все они нашли, что брахистохроной является циклоида. И. Бернулли показал, что эта же кривая является траекторией распространения света. «Я, таким образом, одновременно решил две замечательные задачи — одну оптическую, другую механическую... Я показал, что хотя эти две задачи взяты из совершенно различных частей науки, тем не менее они имеют одинаковую природу», — писал он. И далее: «Природа всегда действует простейшим образом, как и в данном случае она с помощью одной и той же линии оказывает две различные услуги» [8, с. 15, 16].

По существу это был первый пример оптико-механической аналогии в очень частном случае. Задача о брахистохроне считается истоком возникновения вариационного исчисления, одним из основоположников которого явился молодой Л. Эйлер, бывший учеником И. Бернулли.

## 2. О НЕКОТОРЫХ РАБОТАХ ЭЙЛЕРА ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Первые большие работы Эйлера были посвящены механике. В 1736 г. в двух больших томах была опубликована в Петербурге его «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически». В предисловии к этой работе Эйлер писал: «Если анализ где-либо и необходим, так это особенно относится к механике. Хотя читатель и убеждается в истине выставленных предложений, но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что, если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно, если не прибегнет к анализу и те же предложения не разрешит аналитическим методом. Это как раз случилось со мной, когда я начал знакомиться с «Началами» Ньютона и «Форономией» Германа; хотя мне казалось, что я достаточно ясно понял решение многих задач, однако задач, чуть отступающих от них, я уже решить не мог. И вот тогда-то я попытался, насколько умел, выделить анализ из этого синтетического метода и те же предложения для собственной пользы проработать аналитически; благодаря этому я значительно лучше понял суть вопроса. Затем таким же образом я исследовал и другие работы, относящиеся к этой науке, разбросанные по многим местам, и лично для себя я изложил их планомерным и однообразным методом и привел в удобный порядок. При этих занятиях я не только встретился с целым рядом вопросов, ранее совершенно не разрешенных,

которые я удачно разрешил, но и нашел много новых методов, благодаря которым не только механика, но и самый анализ, по-видимому, в значительной степени обогатился» [9, с. 33—34].

В этой работе Эйлер установил уравнения движения точки в естественной форме и систематически ими пользовался при решении многих задач. Позднее Ж. Л. Лагранж, характеризую эту работу, отметил, что «Механику» Эйлера 1736 г. «следует признать первой большой работой, в которой к учению о движении был применен анализ»; она вся построена на формулах, описывающих движение в разложении силы на тангенциальную и нормальную составляющие [6, с. 298].

Для решения ряда задач теории колебаний Эйлер (1740) применил метод, представляющий собой обобщение принципа Я. Бернулли — Я. Германа для задачи о колебаниях сложного маятника, а именно: «Движущие силы, под влиянием которых должны находиться грузы, образующие маятник, чтобы иметь возможность двигаться совместно, эквивалентны тем силам, которые получают под действием тяжести; таким образом, первые, если направить их в противоположную сторону, должны находиться в равновесии с последними» [6, с. 310]. Этот принцип явился предтечей общего принципа Даламбера в форме Лагранжа.

В этот же период времени Эйлер работал над изопериметрической задачей, состоящей в определении среди всех простых замкнутых линий данной длины той, которая охватывает наибольшую площадь, и опубликовал ряд статей, заложивших основы новой области математики — вариационного исчисления. В 1744 г. Эйлер опубликовал знаменитый трактат о вариационном исчислении [10], в котором, в частности, дано необходимое условие экстремума определенного интеграла

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (2)$$

Для вывода указанного условия Эйлер разделил интервал  $[a, b]$  на равные малые интервалы с абсциссами  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = b$ , заменил искомую кривую  $y = f(x)$  ломаной с ординатами  $y_s = f(x_s)$ , производную  $f'(x_s)$  отношением конечных разностей  $f'(x_s) = (y_{s+1} -$

METHODUS  
INVENIENDI  
LINEAS CURVAS  
Maximi Minimive proprietate gaudentes,  
SIVE

SOLUTIO  
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI  
LATISSIMO SENSU ACCEPTI

AUCTORE  
LEONHARDO EULERO,  
Professore Regio, & Academia Imperialis Scientiarum PETROPOLITANA Socio.



LAUSANNÆ & GENEVÆ.  
Apud MARCUM MICHAËLEM BOUSQUET & Socios.

MDCCLIV.

*Титульный лист монографии Л. Эйлера по вариационному исчислению 1744 г.*

—  $y_s)/(x_{s+1} - x_s)$  и интеграл (2) конечной суммой

$$S' = \sum_{s=0}^n F(x_s, y_{s+1}, y'_s)(x_{s+1} - x_s).$$

Для определения экстремума функции  $S'$  от нее берутся производные по  $y_{s+1}$  и приравниваются нулю, что приводит к уравнениям

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right]_{x=x_s} = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, n, n+1),$$

причем  $\Delta x = x_{s+1} - x_s$ . В пределе при  $\Delta x \rightarrow 0$  получается уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (a \leq x \leq b). \quad (3)$$

Данный Эйлером вывод уравнения (3) не является достаточно строгим, так как содержит необоснованные предельные переходы. Позднее Лагранж дал строгий вывод уравнения (3).

### 3. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Принцип наименьшего действия впервые был сформулирован П. Мопертюи в 1744 г. Рассматривая прямое и отраженное движения света, Мопертюи пришел к выводу, что они «кажутся зависящими от метафизического закона, заключающегося в том, что природа, производя свои действия, всегда пользуется наиболее простыми средствами»: «путь, которого придерживается свет, является путем, для которого количество действия будет наименьшим» [11, с. 25, 26]. Далее Мопертюи показал, что все явления преломления и отражения света согласуются с этим принципом.

Несколько позднее в том же 1744 г. Эйлер напечатал в качестве второго приложения к своему трактату о вариационном исчислении [10] работу «Об определении движения брошенных тел в несопротивляющейся среде методом максимумов и минимумов» [12].

Эту работу Эйлер начинает словами: «Так как все явления природы следуют какому-нибудь закону максимума или минимума, то нет никакого сомнения, что и для кривых линий, которые описывают брошенные тела, когда на них действуют какие-нибудь силы, имеет место какое-то свойство максимума или минимума... Представляется сообразным с истиной, что ... совокупность всех движений, присущих брошенному телу, должна быть минимумом. Хотя может показаться, что это заключение недостаточно обосновано, однако если я покажу, что оно согласуется с истиной, уже известной а priori, то оно приобретает такой вес, что все сомнения... совершенно исчезнут». Далее он пишет: «Я утверждаю, что линия, описываемая телом, будет такова, что среди всех других линий, содержащихся между теми же пределами, у нее будет минимум  $\int M ds \sqrt{\bar{v}}$  или, так как  $M$  постоянное,  $\int ds \sqrt{\bar{v}}$ ... Положив время, в течение которого пробегается элемент  $ds$ , равным  $dt$ , так как  $ds = dt \sqrt{\bar{v}}$ , будем иметь

$$\int ds \sqrt{\bar{v}} = \int v dt,$$

так что для кривой, описываемой брошенным телом, сумма всех живых сил, находящихся в теле в отдельные моменты времени, будет наименьшей» [12, с. 31]. Отметим, что Эйлер обозначает здесь скорость через  $\sqrt{v}$ .

Обоснование этого принципа Эйлер начинает с рассмотрения движения тела в случае однородной тяжести. Разыскивая минимум интеграла  $\int ds \sqrt{a + gx}$  или (так как  $dy = p dx$  и  $ds = dx \sqrt{1 + p^2}$ )  $\int dx \sqrt{(a + gx)(1 + p^2)}$ , Эйлер находит уравнение параболы

$$y = \frac{2}{g} \sqrt{c(a - c + gx)}.$$

Далее он рассматривает движение в ряде других случаев, решая задачи с помощью принципа наименьшего действия и устанавливая согласие этого принципа с истиной. В следующей своей работе [13] Эйлер рассматривает задачу о форме равновесия жидкой массы и ряд других задач.

В 1746 г. Мопертюи опубликовал мемуар, в начале которого, говоря о цитированном сочинении [12] Эйлера, писал, что «знаменитый геометр доказывает, что в траекториях, которые описывают тела под действием центральных сил, скорость, умноженная на элемент кривой, всегда образует минимум... Теперь я попытаюсь извлечь из того же источника истины высшего рода и более важные» [14, с. 41]. В этой работе Мопертюи сначала приводит критический обзор «изучения доказательств существования бога, извлеченных из чудес природы», на основании чего приходит к выводу, что «нужно искать доказательство существования бога в общих законах природы. Законы, согласно которым движение сохраняется, распределяется и уничтожается, основаны на атрибутах высшего разума». И далее: «Я... открыл универсальный принцип, на котором основаны все законы и который распространяется одинаково и на твердые тела, и на упругие тела, от которого зависят движение и покой всех телесных существ (субстанций). Это — принцип наименьшего количества действия; принцип, такой мудрый, такой достойный верховного существа. Этому принципу природа, кажется, постоянно и неотступно следует; она соблюдает его не только во всех своих изменениях, но она также стремится его сохранить и в своем постоянстве» [14, с. 51]. Далее Мопертюи формулирует этот принцип: «Когда в природе происходит некоторое изменение, количество действия, необходимое для этого изменения, является наименьшим возможным. Количество действия есть произведение массы тел на их скорость и на расстояние, которое они пробегают» [14, с. 53]. В заключение Мопертюи применяет этот принцип к удару твердых и упругих тел.

Попытка Мопертюи ввести телеологию в механику вызвала резкий отпор ряда ученых, его работы породили дискуссию, вышедшую далеко за пределы механики, в которой приняли участие математики, механики, философы, публицисты (Мопертюи, Кениг, Дарси, Куртиврон, Эйлер, Даламбер, Вольтер, Фридрих II и др.). В дискуссии переплелись вопросы приоритета, натурфилософские и физические вопросы о мере движения и фундаментальные проблемы мировоззрения. В центре дискуссии был вопрос о причинной обусловленности явлений материального мира или о телеологической их преднаправленности мудростью творца. В этой дис-

куссии Эйлер выступал в поддержку Мопертюи. Например, в «Диссертации о принципе наименьшего действия» (1753) [1] Эйлер критиковал нападки С. Кёнига и некоторых других ученых на принцип наименьшего действия, подчеркивая приоритет Мопертюи. Вместе с тем Эйлер писал, что он сам «постиг это замечательное свойство, как говорят, не априорно, а апостериорно». «Лишь после многочисленных опытов я вывел ту формулу, которая в такого рода движениях приобретает наименьшее значение. Поэтому я не решился приписывать ей большую силу, чем для тех случаев, которые я исследовал» [1, с. 105].

Говоря о принципе Мопертюи, Эйлер подчеркивал, что «вся динамика и гидродинамика могут быть с удивительной легкостью раскрыты посредством одного только метода максимумов и минимумов» [1, с. 107]. И заключал работу словами: «Природа во всех своих проявлениях стремится к некоему наименьшему, и это наименьшее... бесспорно, заключается в понятии действия» [1]. В дискуссии принял участие также и Вольтер (1753), написавший памфлет [15], в котором зло высмеял Мопертюи и его телеологию; «досталось» здесь и Эйлеру за поддержку им Мопертюи. По приказу прусского короля Фридриха II этот памфлет Вольтера был сожжен рукой палача.

Ж. Даламбер в статье о космогонии (1754), помещенной в «Энциклопедии», писал, как бы подводя итоги этой дискуссии, что труд Мопертюи «вызвал в 1752 г. оживленный спор... Мопертюи является первым, кто показал, что при преломлении количество действия есть минимум... Эйлер показал, что этот принцип имеет место в кривых, описываемых телом, притягиваемым или толкаемым к неподвижной точке. Это красивое предложение распространяет принцип Мопертюи также на малую кривую, описываемую корпускулой света при прохождении из одной среды в другую, так что с этой точки зрения принцип оказывается истинным вообще и без ограничений... Эйлер показал еще множество других случаев, где этот принцип применяется с легкостью и изяществом» [16, с. 111—112].

Кениг, оспаривая у Мопертюи приоритет в открытии этого принципа, в 1751 г. опубликовал отрывок из письма, якобы написанного Лейбницем, который частично представляет принцип наименьшего действия. Однако Прусская академия наук заявила о подложности этого отрывка.

«Вообще все теоремы о действии,— писал Даламбер,— ... суть не больше, как более или менее общие математические теоремы, а не философские принципы... Следовательно, принцип Мопертюи, как и другие, есть только математический принцип... Этот спор о действии... несколько походит на некоторые религиозные споры по горечи, которая была в него вложена, и по количеству людей, принявших в нем участие, ничего в этом не смысла» [16, с. 15—16].

Таким образом, резюмируя, следует сказать, что Эйлер первым дал строгую формулировку принципа наименьшего действия для свободных тел, притягиваемых к неподвижным центрам, т. е. он являлся основоположником математически сформулированного в частном случае принципа наименьшего действия. Полную формулировку для общего случая дал, однако, лишь Ж. Л. Лагранж, которому принадлежит решающая роль в становлении и развитии принципа наименьшего действия.

В 1760—1761 гг. Лагранж опубликовал работу [17], в которой предложил новый метод определения максимумов и минимумов интегралов,



и применил этот метод к решению различных задач динамики. По сути дела, с Лагранжа начинается новая эпоха вариационного исчисления: он не только придал простой вид решению ранее поставленных задач, разработав эффективный алгоритм, но и применил его к решению ряда сложных задач механики. В частности, Лагранж впервые ввел понятие вариации функции и строго вывел необходимое и достаточное условие стационарности интеграла, известное ныне как уравнение (3) Эйлера — Лагранжа. Вот кратко вывод этого уравнения.

Пусть  $y = f(x)$  — непрерывно дифференцируемая экстремаль функционала (2), наряду с которой рассматриваются близкие кривые, проходящие через те же конечные точки, вида

$$\overline{f}(x) = f(x) + \varepsilon \varphi(x),$$

где  $\varphi(x)$  — некоторая произвольная функция, причем  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ,  $\delta y = \overline{f}(x) - f(x) = \varepsilon \varphi(x)$  — вариация функции  $f(x)$ . Тогда

$$\delta F(x, y, y') = \varepsilon \left( \frac{\partial F}{\partial y} \varphi + \frac{\partial F}{\partial y'} \varphi' \right),$$

и после интегрирования по частям получаем

$$\delta J = \int_a^b \delta F dx = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \varphi dx = 0,$$

откуда ввиду произвольности функции  $\varphi(x)$  вытекает уравнение (3) Эйлера — Лагранжа.

В следующей своей работе, являющейся продолжением [17], Лагранж, ссылаясь на Эйлера [12], обобщил принцип наименьшего действия и сформулировал «общий принцип»: «Пусть имеется сколько угодно тел  $M, M', M'', \dots$ , которые действуют одно на другое каким-либо способом и которые, кроме того, двигаются под действием центральных сил, пропорциональных каким-либо функциям расстояний; пусть  $s, s', s'', \dots$  обозначают пространства, пройденные телами за время  $t$ , а  $u, u', u'', \dots$  пусть будут их скорости к концу этого времени; выражение

$$M \int u ds + M' \int u' ds' + M'' \int u'' ds'' + \dots$$

всегда будет максимумом или минимумом» [18, с. 117].

При доказательстве справедливости этого принципа Лагранж предполагает выполнение закона сохранения энергии

$$T - U = h = \text{const} \tag{4}$$

для всех сравниваемых движений, причем  $\delta h = 0$ . Здесь  $T$  и  $U$  — кинетическая энергия («живая сила») системы и силовая функция приложенных сил. Далее Лагранж дает решение ряда задач о движении тела, притягиваемого к неподвижным центрам, о движении связанных тел, о движении гибкой нити (а также сжимаемой и упругой), о законах движения неупругих и упругих жидкостей.

Таким образом, Лагранж, пользуясь законом сохранения энергии, распространил принцип, сформулированный Эйлером для свободной ма-

териальной точки, на случай произвольной системы точек, связанных между собой и действующих друг на друга произвольным образом. Это дало основание К. Г. Я. Якоби подчеркнуть, что лагранжев принцип наименьшего действия есть мать аналитической механики [19, с. 63].

Отметим, что, говоря о своем принципе наименьшего действия, Лагранж писал, что смотрит на него «не как на метафизический принцип, а как на простой и общий вывод из законов механики... Этот принцип, будучи соединен с принципом живых сил и развит по правилам вариационного исчисления, дает тотчас же все уравнения, необходимые для разрешения каждой проблемы; отсюда возникает столь же простой, как и общий, метод разрешения проблем, касающихся движения тел» [6, с. 320].

В 1788 г. Лагранж опубликовал свою знаменитую «Аналитическую механику», которую У. Р. Гамильтон позже назвал «своего рода математической поэмой» [20, с. 176]. В этом фундаментальном труде Лагранж «поставил себе целью свести теорию механики и методы решения связанных с нею задач к общим формулам, простое развитие которых дает все уравнения, необходимые для решения каждой задачи... Излагаемые... методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу. Все любящие анализ с удовольствием убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа» [6, с. 9—10]. Здесь Лагранж снова изложил свой принцип наименьшего действия, дав ему следующую формулировку: «При движении любой системы тел, находящихся под действием взаимных сил притяжения или сил, направленных к неподвижным центрам и пропорциональных каким-либо функциям расстояний, кривые, описываемые различными телами, а равно их скорости необходимо таковы, что сумма произведений отдельных масс на интеграл скорости, умноженной на элемент кривой, является максимумом или минимумом при условии, что первые и последние точки каждой кривой рассматриваются как заданные, так что вариации координат, соответствующих этим точкам, равны нулю» [6, с. 382], т. е.

$$\delta \sum_v m_v \int v_v ds_v = 0,$$

или

$$\delta \int_{t_0}^t 2T dt = 0, \quad \delta q_i = 0 : t = t_0, t, \quad (5)$$

причем для всех кривых сравнения выполняется закон (4) с одним и тем же значением постоянной  $h$ . Далее Лагранж показывает, что «приведенная теорема не только содержит в себе интересное свойство движения тел, но может также послужить для определения этого движения» [6, с. 383]. Он доказывает, что принцип наименьшего действия приводит к лагранжевой общей формуле динамики, выражаемой принципом Даламбера — Лагранжа

$$\sum_v (\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{w}_v) \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0, \quad (6)$$

где  $\delta \mathbf{r}_v$  — виртуальные перемещения, допускаемые связями в данный момент времени. Следует отметить, что принцип, который был изложен Да-

ламбером (1743) в его трактате по динамике [21] и который он удачно применил при разрешении многих проблем и в особенности в задаче о предварении равнодействий, формулируется Лагранжем так: «Если нескольким телам сообщить движения, которые они вынуждены изменять вследствие наличия взаимодействий между ними, то... эти движения можно рассматривать как составленные из тех движений, которые тела фактически получают, и из других движений, которые уничтожаются; отсюда следует, что эти последние должны быть такими, что если бы тела находились исключительно под их действием, то они бы взаимно друг друга уравновесили» [6, с. 312].

Этот принцип, — добавляет Лагранж, — дает «прямой и общий метод, с помощью которого можно... выразить в виде уравнений все проблемы механики... Однако трудность определения тех сил, которые должны уничтожиться, равно как и законов равновесия этих сил, делает зачастую применение этого принципа неудобным и утомительным» [Там же]. В этом смысле предпочтительнее иной подход, основанный на равновесии «между силами и вызванными ими движениями, которые, однако, следовало бы взять направленными противоположно». Такой подход означает, как отмечает Лагранж, «возврат к методу Германа и Эйлера, который применил его при разрешении многих проблем механики» [6, с. 313]; этот метод выражен в виде (6). По сути этот принцип представляет собой сочетание принципа Даламбера с принципом возможных перемещений

$$\sum_v \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0, \quad (7)$$

большую общность которого и полезность при решении задач статики первым понял И. Бернулли (1717) и который применял П. Вариньон. Этот принцип дал повод для появления «закона покоя» Мопертюи, который позднее (1751) был развит и обобщен Эйлером [22]. Лагранж увидел, что этот принцип «обладает еще и тем драгоценным и только ему присущим преимуществом перед другими принципами, что он может быть выражен в общей формуле, охватывающей все проблемы, которые могут быть поставлены по вопросу о равновесии тел» [6, с. 48], и дал общую формулу статики (7).

Исходя из своей общей формулы динамики (6) Лагранж вывел уравнения движения механических систем в двух формах, которые ныне носят соответственно название уравнений Лагранжа первого и второго рода. Выдающаяся роль уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (8)$$

обусловлена их инвариантностью (ковариантностью) относительно точечных преобразований переменных  $q_i$ . Здесь  $q_i$  — обобщенные независимые координаты системы, через которые декартовы координаты точек выражаются в виде явных функций  $x_v = x_v(t, q_1, \dots, q_n)$ . Уравнения (8) при надлежащем выборе  $q_i$  остаются справедливыми и в произвольном образе движущейся системе отсчета. Уравнения Лагранжа явились первым примером «принципа инвариантности» — одной из ведущих идей математики, играющей также первостепенную роль в современной физике.

Завершение разработки принципа наименьшего действия принадлежит К. Г. Я. Якоби. В своих «Лекциях по динамике» [23] он высказал мнение, что принцип наименьшего действия в форме Лагранжа недостаточно понятен, так как содержит в качестве независимой переменной время, тогда как время прихода системы в конечную точку зависит от траектории, по которой она перемещается, следуя закону живых сил, вследствие чего верхний предел интеграла действия оказывается непостоянным. В связи с этим Якоби (1837) [24] предложил исключить время из подынтегрального выражения (5) с помощью интеграла живых сил (4) и представил принцип наименьшего действия в геометрической форме

$$\delta \int_P^Q \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sum_v m_v ds_v^2} = 0.$$

Следует подчеркнуть, что исключение времени из подынтегрального выражения (5) с помощью интеграла (4) эквивалентно рассмотрению (4) в качестве дополнительного условия к (5), в связи с чем принцип Якоби равносильен принципу Лагранжа.

В обобщенных координатах  $q_i$  кинетическая энергия системы  $T = \frac{1}{2} \sum_v m_v \left( \frac{ds_v}{dt} \right)^2$  представляется в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \left( \dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt} \right),$$

и при определении метрики конфигурационного пространства формулой

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dq_i dq_j \quad (9)$$

принцип Якоби представляется в виде

$$\delta \int_P^Q \sqrt{2(U+h)} ds = 0, \quad (10)$$

причем  $\delta q_i = 0$  в начальном  $P$  и конечном  $Q$  положениях системы,  $\delta h = 0$ .

Принцип Якоби приводит задачу изучения движения голономной консервативной системы к геометрической задаче отыскания в римановом пространстве с метрикой (9) экстремалей вариационной задачи (10), которые представляют собой действительные траектории системы. Таким образом, принцип Якоби выявляет тесную связь, существующую между движениями голономной консервативной системы и римановой геометрией пространства. Если движение происходит в отсутствие заданных сил, когда  $U = 0$ , то система движется вдоль геодезической линии конфигурационного пространства с постоянной скоростью. Этот факт является обобщением закона инерции Галилея. Когда  $U \neq 0$ , разыскание движения системы также сводится к задаче определения геодезических в римановом пространстве с метрикой

$$d\sigma^2 = 2(U+h) ds^2,$$

так как при этом принцип Якоби (10) принимает вид

$$\delta \int_P^Q d\sigma = 0.$$

Отметим, что для случая одной материальной точки, когда линейный элемент  $ds$  — элемент евклидова 3-мерного пространства, принцип Якоби представляет собой механический аналог принципа Ферма (1) в оптике. Сравнивая (1) и (10), видим, что траектория точки совпадает с траекторией светового луча, если  $\mu = \sqrt{2(U + h)}$ . Эта аналогия относится, однако, только к самим траекториям движущейся точки в механике и луча света в оптике, протекание же процессов во времени в этих двух задачах совершенно различно [25].

Следует отметить еще вывод Якоби о том, что минимум в принципе наименьшего действия «имеет место не между двумя любыми положениями системы, но только тогда, когда конечное и начальное положения достаточно близки друг к другу» [23, с. 41]. Если на траектории системы взять некоторую точку  $A$  и рассмотреть другую траекторию, проходящую через  $A$ , образующую с первой малый угол и пересекающуюся с ней в некоторой точке  $B$ , то предельное положение  $B$  при неограниченном уменьшении угла между траекториями называется кинетическим фокусом точки  $A$ . Якоби показал, что действие есть минимум, если конечная точка  $Q$  интервала интегрирования находится на траектории перед кинетическим фокусом начальной точки  $P$ .

#### 4. ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА И ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

В 1834—1835 гг. У. Р. Гамильтон [20, 26] установил новый принцип наименьшего действия, более общий, чем принцип Эйлера — Лагранжа — Якоби. Рассматривая механические системы, стесненные стационарными геометрическими связями и находящиеся под действием сил с силовой функцией  $U$ , которая может явно зависеть и от  $t$ , Гамильтон показал, что справедлив принцип наименьшего действия вида

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0, \quad \delta q_i = 0 : t = t_0, t_1; \quad L = T + U. \quad (11)$$

Несколько позднее (1848) М. В. Остроградский [27] обосновал принцип (11) для случая нестационарных связей, а также для случая действия непотенциальных сил  $F_v$ , когда вместо (11) принцип принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \delta T + \sum_v F_v \cdot \delta r_v \right) dt = 0. \quad (12)$$

Таким образом, принцип (11) справедлив также и в случаях, когда функция Лагранжа  $L(t, q, \dot{q})$  и связи, наложенные на систему, зависят явно от времени и интеграл живых сил (4) не существует.

Уравнения экстремалей принципа Гамильтона (11) имеют вид уравнений Лагранжа (8) движения системы в обобщенных координатах  $q_i$  и скоростях  $\dot{q}_i$ , характеризующих состояние системы. Гамильтон предложил

в качестве основных переменных взять величины  $q_i$  и обобщенные импульсы

$$p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (13)$$

Так как якобиан правых частей (13) по  $\dot{q}_i$  отличен от нуля, то уравнения (13) могут быть разрешены относительно  $\dot{q}_i = \varphi_i(t, q, p)$ . Вводя в рассмотрение функцию

$$H(t, q, p) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L, \quad (14)$$

называемую ныне функцией Гамильтона, уравнения (8) можно преобразовать к виду канонических уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (15)$$

установленных Гамильтоном [20]. Отметим, что с учетом (14) принцип (11) можно представить также в виде соотношения

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0, \quad \delta q_i = 0 : t = t_0, t_1, \quad (16)$$

называемого второй формой принципа Гамильтона. Уравнениями экстремали задачи (16) являются уравнения Гамильтона (15). Хотя уравнения (15) полностью эквивалентны уравнениям (8), однако обладают большим преимуществом по сравнению с (8), так как правые части (15) выражаются через одну функцию  $H(t, p, q)$ , не содержащую производных  $q$  и  $p$  по  $t$ , которые появляются лишь в левых частях уравнений (15). Гамильтон положил эти уравнения в основу своих замечательных исследований по динамике.

Гамильтон начал (1824) свои научные исследования с оптики [28], а затем распространил на динамику основные полученные им результаты, установив тем самым оптико-механическую аналогию.

По волновой теории света математическое описание распространения света может быть проведено методом световых лучей и методом волновых фронтов, предложенным Гюйгенсом (1690) [3].

Согласно волновому принципу Гюйгенса каждый элемент фронта  $\Sigma$  оптической волны в момент  $t$  является источником возбуждения новой вторичной волны, огибающая которых в момент  $t'$  ( $t' > t$ ) представляет собой волновой фронт  $\Sigma'$ . Исходя из принципа Гюйгенса Гамильтон ввел в рассмотрение характеристическую функцию рассматриваемой оптически изотропной среды

$$V(x, y, z, x', y', z') = t' - t, \quad (17)$$

определяющей промежуток времени распространения волны из точки  $x, y, z$  в точку  $x', y', z'$ . Обозначим через  $l, m, n$  направляющие косинусы нормали к поверхности  $\Sigma$  в точке  $x, y, z$  и через  $l', m', n'$  — косинусы нормали в соответствующей точке  $x', y', z'$  фронта  $\Sigma'$ . Так как  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  — огибающие вторичных волн, то справедливы уравнения

$$\frac{1}{l} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{n} \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (18)$$

а также уравнения

$$\frac{1}{l'} \frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{1}{m'} \frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{1}{n'} \frac{\partial V}{\partial z'}. \quad (19)$$

Уравнения (17) — (19) совместно с уравнением

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1 \quad (20)$$

образуют систему из шести уравнений для определения величин  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ,  $l'$ ,  $m'$ ,  $n'$  как функций от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$ . Эти уравнения вполне определяют поведение светового луча в среде при помощи одной только функции  $V(x, y, z, x', y', z')$ . Таким образом всякая оптическая задача сводится к определению характеристической функции среды [29].

С математической точки зрения функция (17) определяет касательное, или контактное, преобразование, переводящее всякий волновой фронт  $\Sigma$  в такой волновой фронт  $\Sigma'$ , который получается из первого после распространения возмущения в среде за время  $t' - t$ . Далее Гамильтон показал, что аналитическое выражение бесконечно малого преобразования, т. е. движения волнового фронта из одного положения в другое, бесконечно близкое к первому, определяется уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi}, \dots, \frac{d\xi}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x}, \dots \quad (21)$$

Соотношения (17) — (20) являются интегралами системы (21). Но уравнения (21) имеют вид уравнений динамики (15), чем и устанавливается оптико-механическая аналогия Гамильтона.

На основе этих результатов Гамильтон [26] показал, что уравнения динамики можно представить в проинтегрированной форме, зависящей только от одной неизвестной функции действия

$$S(t, q_i, q_i^0) = \int_{t_0}^t L dt, \quad (22)$$

где  $q_i^0$  обозначают значения координат  $q_i$  для  $t = t_0$  и интегрирование производится по какой-либо траектории системы (15). Функцию (22) Гамильтон назвал главной функцией; она играет в динамике ту же роль, что и функция (17) в оптике. Действительно, при переходе от одного движения к другому при малых изменениях начальных данных изменение  $S$  согласно (22) будет равно

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i - \sum_i p_i^0 \delta q_i^0.$$

С другой стороны,

$$\delta S = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i^0} \delta q_i^0.$$

Сравнивая эти два выражения при произвольных значениях  $\delta q_i$  и  $\delta q_i^0$ , получаем

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad - p_i^0 = \frac{\partial S}{\partial q_i^0} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (23)$$

Следовательно, достаточно знать главную функцию  $S$ , чтобы найти закон движения системы  $q_i = q_i(t, q_s^0, p_s^0)$  и соответствующие значения  $p_i$ , т. е. общее решение системы (15).

Для того чтобы найти трудности определения главной функции по формуле (22), требующей предварительного знания траектории системы, Гамильтон вывел дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0, \quad (24)$$

для которого главная функция  $S$  является полным интегралом. Якоби [23] дополнил исследования Гамильтона, сказав, что если известен любой полный интеграл этого уравнения  $S(t, q_i, \alpha_i)$ ,  $\|\partial^2 S / \partial q_i \partial \alpha_i\| \neq 0$ , то соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (25)$$

где  $\alpha_i, \beta_i$  — произвольные постоянные, представляют собой полную систему первых интегралов канонических уравнений Гамильтона (15). Вторая группа соотношений (25) позволяет определить функции  $q_i = q_i(t, \alpha_j, \beta_j)$ , первая группа — функции  $p_i = p_i(t, \alpha_j, \beta_j)$ , т. е. общее решение уравнений (15). Таким образом, задача интегрирования канонических уравнений (15) оказалась эквивалентной задаче нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона (24). Хотя последняя задача, вообще говоря, не легче первоначальной, тем не менее таким способом удалось решить многие задачи динамики.

Весьма эффективным методом исследования и решения уравнений (15) оказался также метод канонических, или контактных, преобразований переменных  $q_i, p_i$ , представляющих собой координаты фазового пространства. Суть его состоит в том, что вместо непосредственного интегрирования уравнений (15) ищется некоторая новая система переменных  $Q_i, P_i$ , таких, чтобы любая система (15) преобразовывалась снова в гамильтонову систему, но с более простой функцией Гамильтона.

В самом деле, рассмотрим преобразование переменных  $q_i, p_i$  в новые переменные  $Q_i, P_i$ , удовлетворяющее соотношению

$$\sum_i p_i \delta q_i - \sum_i P_i \delta Q_i = \delta W(t, q_i, Q_i). \quad (26)$$

Вторая форма принципа Гамильтона (16) в новых переменных принимает вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_i P_i dQ_i - \left( H + \frac{\partial W}{\partial t} \right) dt \right] + \delta \int_{t_0}^{t_1} dW = 0, \quad \delta Q_i = 0 : t = t_0, t_1,$$

откуда следует, что дифференциальные уравнения для новых переменных имеют также канонический вид (15) с новой функцией Гамильтона

$$H = \tilde{H} + \partial W / \partial t. \quad (27)$$

Преобразования, удовлетворяющие соотношению (26), называются каноническими преобразованиями; функция  $W(t, q_i, Q_i)$  носит название



производящей функции канонического преобразования. Из соотношения (26) получаем уравнения

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad -P_i = \frac{\partial W}{\partial Q_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (28)$$

определяющие каноническое преобразование с данной производящей функцией  $W(t, q_i, Q_i)$ , причем производные  $\partial W/\partial q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), рассматриваемые как функции переменных  $Q_i$ , являются независимыми, откуда следует, что  $\|\partial^2 W/\partial q_i \partial Q_i\| \neq 0$ .

Сравнивая соотношение (26) с вариацией главной функции Гамильтона  $\delta S = \sum_i p_i \delta q_i - \sum_i p_i^0 \delta q_i^0$ , заключаем, что значения переменных  $q_i, p_i$  для начального момента времени  $t_0$  и для момента  $t$  связаны между собой каноническими преобразованиями, причем роль производящей функции  $W$  играет главная функция Гамильтона. Отсюда следует, что на движение системы, описываемое уравнениями (15), возможно смотреть как на цепочку канонических преобразований переменных  $q_i, p_i$ . Если рассматривать бесконечно малое каноническое преобразование  $P_i = p_i + \Delta p_i, Q_i = q_i + \Delta q_i$ , то нетрудно получить уравнения вида

$$\frac{\Delta q_i}{\Delta t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\Delta p_i}{\Delta t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n),$$

которые при  $\Delta t \rightarrow 0$  переходят в уравнения (15). Следовательно, канонические уравнения Гамильтона позволяют заключить, что движение системы представляет собой непрерывную последовательность бесконечно малых канонических преобразований переменных  $q_i, p_i$ .

Для производящей функции  $W(t, q_i, Q_i)$ , удовлетворяющей соотношению

$$\partial W/\partial t + H = 0, \quad (29)$$

функция  $\dot{H} = 0$  и канонические уравнения принимают вид

$$\frac{dQ_i}{dt} = 0, \quad \frac{dP_i}{dt} = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

т. е.  $Q_i, P_i$  — постоянные. Формулы преобразования (28) приводят в этом случае соотношение (29) к виду уравнения в частных производных Гамильтона (24) и придают производящей функции  $W(t, q_i, Q_i)$  смысл полного интеграла этого уравнения, причем сами формулы (28) приобретают содержание (25) теоремы Якоби.

Основы теории канонических преобразований были заложены Якоби (1837) [24], показавшим, что при канонических преобразованиях в любой динамической задаче сохраняется гамильтонов вид уравнений движения.

На основе этих результатов весь процесс движения механической системы можно рассматривать как непрерывное разворачивание канонических преобразований, как непрерывно изменяющиеся отображения фазового пространства самого на себя.

Таким образом, на основе оптико-механической аналогии Гамильтона в середине XIX столетия возникла новая ветвь аналитической механики, сочетающая в себе методы вариационного исчисления и теории групп преобразований. На этом пути были получены многие замечательные

результаты, обзор которых выходит, однако, за рамки данной статьи.

По мнению Н. Г. Четаева [31], оптико-механическая аналогия Гамильтона определила на столетие прогресс аналитической механики.

В заключение этого раздела изложим кратко развитие Н. Г. Четаевым [30—32] продолжение оптико-механической аналогии. Как уже говорилось выше, оптико-механическая аналогия Гамильтона есть аналогия между динамикой консервативных систем и волновой теорией света Гюйгенса. Но оптические теории не застыли на теории Гюйгенса, на смену ей в оптике были созданы теории Френеля, Коши, Максвелла.

Коши, поставивший целью дальнейшее развитие оптико-механической аналогии Гамильтона, нашел эту аналогию в области колебаний упругой среды. Своим открытием Коши увел из аналитической динамики вопросы о дальнейшем развитии аналогии с послегюйгенсовыми теориями света. Вероятно, Ф. Клейн был первым, кто обратил на это обстоятельство свое внимание и поставил задачу дальнейшего развития оптико-механической аналогии.

После О. Френеля свет понимается как некоторый колебательный процесс. Поэтому развитие оптико-механической аналогии, по мнению Н. Г. Четаева [31], следует искать в области колебательных движений, в свойствах устойчивых движений консервативных систем. Более того, он сформулировал новое понимание аналогии между двумя явлениями как совпадение группы преобразований одного явления с группой преобразований другого явления.

Н. Г. Четаев [32] показал, что для устойчивого движения консервативной системы уравнения в вариациях Пуанкаре допускают унимодулярную группу линейных преобразований, которая, как он выяснил, имеет представление в полной группе Лоренца. Так как последняя является основной для теорий света Коши и Максвелла, то этот результат представляет собой развитие оптико-механической аналогии.

Ранее (1958) Н. Г. Четаев опубликовал работу [30], в которой установил аналогию между математической теорией света Коши и устойчивыми движениями консервативных систем.

Пусть обобщенные координаты и импульсы системы суть  $q_i, p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), силовая функция  $U(q_1, \dots, q_n)$  и кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n} g_{ij} p_i p_j. \quad \text{В 1945 г. Четаев [31] доказал теорему о том, что если}$$

невозмущенное движение устойчиво, то уравнения в вариациях Пуанкаре являются приводимыми к системе уравнений с постоянными коэффициентами, причем все характеристические числа равны нулю.

Используя эту теорему, Четаев рассматривает возмущенные движения системы, определяемые изменением одних постоянных  $\beta_i$  при фиксированных значениях постоянных  $\alpha_i$  полного интеграла  $S = -ht + V(q, \alpha)$  уравнения Гамильтона (24), и находит эллиптическое уравнение в частных производных

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_i} \left( g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) = 0,$$

выражающее условие равенства нулю всех характеристических чисел. Если рассмотреть некоторую дважды дифференцируемую функцию

$\Phi(-ht + V)$ , зависящую от полного интеграла  $-ht + V$  уравнения Гамильтона, то указанное условие принимает вид волнового уравнения

$$\frac{2(U+h)}{h^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_i} \left( g_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \right). \quad (30)$$

Это волновое уравнение устанавливает аналогию между теорией света Коши и устойчивыми движениями консервативных систем.

### 5. НЕГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

Г. Герц (1894) [33] ввел термины: голономная и неголономная системы. Первые стеснены лишь конечными связями и приводящимися к конечным, а вторые — дифференциальными неинтегрируемыми связями. Изложенные выше результаты относятся к голономным системам.

Вопрос о применимости к неголономным системам интегральных принципов механики имеет длительную историю и большую библиографию, из которой отметим лишь некоторые работы. Как известно, эти принципы были установлены первоначально для голономных систем; при попытках их распространения на неголономные системы возникли серьезные трудности, на которые первым, по-видимому, обратил внимание Герц [33]. Он пришел к выводу о неприменимости принципа Гамильтона к неголономным системам и отметил, что не всякие две точки конфигурационного пространства могут быть соединены траекторией неголономной системы.

О. Гельдер (1896) [34] предложил новый интегральный принцип вида

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( 2T \frac{d\delta t}{dt} + \delta T + \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \delta \mathbf{r}_{\nu} \right) dt = 0, \quad (31)$$

где символ  $\delta$  означает варьирование, при котором каждой точке первоначальной траектории в момент  $t$  сообщается виртуальное перемещение  $\delta \mathbf{r}_{\nu}$ , в результате чего возникает новая траектория, точки которой находятся в соответствии с точками прежней траектории, но относятся не к моменту  $t$ , а к моменту  $t + \delta t$ , где  $\delta t$  — бесконечно малая функция, причем  $\delta \mathbf{r}_{\nu} = 0$  при  $t = t_0, t_1$ . При дальнейшей специализации варьирования Гельдер получил из (31) принцип Гамильтона—Остроградского (12), полагая  $\delta t = 0$ , а также принцип наименьшего действия Лагранжа в расширенной форме

$$\delta \int_{t_0}^t T dt = 0, \quad (32)$$

полагая

$$\delta T = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \delta \mathbf{r}_{\nu},$$

чем определяется, каким образом должна пробегаться непрерывная последовательность варьированных положений системы. При существовании интеграла энергии (4) принцип (32) эквивалентен принципу (5). Отметим, что варьированные движения оказались не удовлетворяющими уравнениям неинтегрируемых связей. Отсюда, в частности, следует, что при

потенциальных силах принцип Гамильтона для неголономных систем не имеет формы (11) стационарности интеграла от функции Лагранжа, как для голономных систем, а имеет вид равенства нулю интеграла по времени от вариации функции Лагранжа

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0, \quad \delta q_i = 0 : t = t_0, t_1. \quad (33)$$

В 1901 г. одновременно были опубликованы работы П. В. Воронца [35] и Г. К. Суслова [36], в которых для случая линейных связей предложены две новые формы интегрального принципа, внешне отличные от формы Гельдера, причем первый из этих авторов не дал ни обоснования, ни названия предложенному им принципу, а второй назвал видоизменением начала Даламбера и подчеркнул, что оно «отнюдь не представляет собой начала Гамильтона».

Принцип, предложенный П. В. Воронцом, имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \delta (\Theta + U) + \sum_{l=1}^r \frac{\partial T}{\partial \dot{i}_{k+l}} (\delta \dot{q}_{k+l} - \delta \varphi_l) \right] dt = 0, \quad (34)$$

причем предполагается, что выполняются соотношения

$$\frac{d}{dt} \delta q_i = \delta \dot{q}_i \quad (\bar{i} = 1, \dots, n) \quad (35)$$

для всех скоростей;  $\Theta$  обозначает кинетическую энергию  $T$ , выраженную с помощью уравнений связей через независимые скорости.

Г. К. Суслов, однако, предполагал выполнение условий вида (35) не для всех скоростей, а лишь для независимых скоростей  $\dot{q}_s$  ( $s = 1, \dots, k = n - r$ ), тогда как для зависимых скоростей принял условия вида

$$\frac{d}{dt} \delta q_{k+l} - \delta \dot{q}_{k+l} = \sum_{s=1}^k A_s^{k+l} \delta q_s \quad (l = 1, \dots, r), \quad (36)$$

где величины  $A_s^{k+l}$  определяются из уравнений связей. Принцип, полученный Г. К. Сусловым, имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \delta L + \sum_{l=1}^r \frac{\partial T}{\partial \dot{i}_{k+l}} \sum_{s=1}^k A_s^{k+l} \delta q_s \right) dt = 0. \quad (37)$$

В 1911 г. С. А. Чаплыгин [37] показал, что введением вместо  $t$  нового независимого переменного  $\tau$ , определяемого уравнением  $N dt = d\tau$ , где  $N(q, q_1)$  — так называемый приводящий множитель, уравнения движения неголономной системы, зависящей от двух свободных параметров  $q, q_1$ , могут быть записаны в виде канонической системы Гамильтона. При существовании приводящего множителя  $N$ , определяемого некоторыми двумя совместными уравнениями, справедлив видоизмененный принцип Гамильтона

$$\delta \int_0^t LN dt = 0 \quad (38)$$

при условии постоянства интеграла

$$\tau = \int_0^t N dt.$$

М. Кернер [38] сравнил уравнения движения системы, стесненной линейными дифференциальными связями, с уравнениями Эйлера вариационной задачи Лагранжа о стационарности действия по Гамильтону в классе кривых, удовлетворяющих уравнениям связей, и показал, что эти уравнения эквивалентны тогда и только тогда, когда связи вполне интегрируемы. На основании этого результата он пришел к выводу, что принцип Гамильтона, рассматриваемый как вариационный принцип стационарного действия, справедлив только для голономных систем.

Р. С. Кэпон [39] обратил внимание на то, что формализм Гёльдера отличается от формализма вариационного исчисления (кривые сравнения не удовлетворяют уравнениям связей, тогда как вариации стеснены условиями связей), в связи с чем объявил результаты Гёльдера несостоятельными. На эту статью одновременно возразили Х. Джеффрис [40] и Л. А. Парс [41], выступившие в поддержку результатов Гёльдера. Первый из них, исходя из физических предпосылок, отметил, что принцип Гамильтона для неголономных систем, подобно этому принципу для голономных систем с непотенциальными силами, не является принципом стационарного действия, но справедлив в форме Гёльдера (33). Парс подверг этот вопрос тщательному анализу и показал, что, в то время как для голономных систем принцип Гамильтона справедлив как в форме принципа стационарного действия (11), так и в форме Гёльдера (33), для неголономных систем справедлива лишь последняя форма.

В. С. Новоселов [42] показал справедливость интегральных принципов для систем с нелинейными связями Четаева [43] и доказал, что они дают минимум действия на действительной траектории для малых областей интегрирования, однако кривые сравнения не удовлетворяют связям. Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев отметили, что форма записи принципа стационарного действия «...зависит от точки зрения на перестановочные соотношения» [44, с. 180] и что для неголономных систем справедлива, в частности, форма Гёльдера.

Нетрудно видеть [45], что принципы (33), (34) и (37) эквивалентны и преобразуются один в другой. Рассмотрим неголономную систему, характеризующую функцией Лагранжа  $L = T + U$  и идеальными неинтегрируемыми независимыми связями

$$f_l(t, q, \dot{\zeta}) = 0 \quad (l = 1, \dots, r), \quad (39)$$

в общем случае нелинейными относительно скоростей  $\dot{\zeta}_i$ . Связи (39) можно представить также в виде

$$\dot{\zeta}_{k+l} = \Phi_l(t, q_i, \dot{\zeta}_1, \dots, \dot{\zeta}_k) \quad (l = 1, \dots, r), \quad (40)$$

принимая за независимые скорости  $\dot{\zeta}_s$  ( $s = 1, \dots, k = n - r$ ).

Виртуальные перемещения  $\delta q_i$  удовлетворяют условиям Четаева [43]

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = 0 \quad (l = 1, \dots, r).$$

Если считать выполненными для всех скоростей условия перестановочности (35), то

$$\delta f_l = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i, \quad (l=1, \dots, r). \quad (41)$$

В случае интегрируемости связей  $\delta f_l = 0$ , а в случае неинтегрируемости связей (39) выражения (41) не равны нулю, однако могут обращаться в нуль в силу уравнений движения системы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_l \mu_l \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, n), \quad (42)$$

если связи (39) нелинейны [42]. Неравенства  $\delta f_l \neq 0$  означают, что варьированный путь не удовлетворяет уравнениям связей.

В принципе Воронца (34) величина  $\Theta(t, q_i, \zeta_1, \dots, \zeta_k)$  обозначает кинетическую энергию  $T(t, q_i, \zeta_i)$ , из которой зависимые скорости исключены с помощью уравнений (40). Учитывая, что

$$\delta T = \delta \Theta + \sum_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}} (\delta \dot{q}_{k+l} - \delta \varphi_l), \quad (43)$$

и заменяя в выражении  $\delta L = \delta T + \delta U$  величину  $\delta T$  правой частью равенства (43), преобразуем (33) к виду равенства (34), представляющего собой, таким образом, форму Воронца принципа Гамильтона.

С другой стороны, если учесть, что при использованном Суловым способе варьирования  $\delta \dot{q}_{k+l} = \delta \varphi_l$ , уравнение (43) принимает вид  $\delta T = \delta \Theta$ , ввиду чего принцип (37) Сулова приводится к виду

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \delta(\Theta + U) + \sum_{l=1}^r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}} \sum_{s=1}^k A_s^{k+l} \delta q_s \right] dt,$$

равносильному равенству (34). Тем самым показана эквивалентность интегральных принципов в форме Гёльдера (33), Воронца (34) и Сулова (37), представляющих собой различные формы принципа Гамильтона для неголономных систем.

Сравним задачу Лагранжа

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left( L(t, q_i, \dot{q}_i) + \sum_l \kappa_l f_l(t, q_i, \dot{q}_i) \right) dt = 0 \quad (44)$$

об экстремуме интеграла действия (11) в классе кривых, удовлетворяющих уравнениям связей (39), где  $\kappa_l(t)$  — неопределенные множители Лагранжа. Уравнения Эйлера—Лагранжа (3) для задачи (44)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_l \kappa_l \left( \frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_l \dot{\kappa}_l \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (45)$$

представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка относительно  $q_i$  и первого порядка относительно  $\kappa_l$ . Общее решение сис-

темы уравнений (45), (39) зависит от  $2n$  произвольных постоянных, в то время как общее решение уравнений движения (42), (39) зависит от  $2n - r$  произвольных постоянных, вследствие чего очевидно, что уравнения (45) и (42) неэквивалентны для неголономных систем.

Нетрудно показать [45], что условие

$$\sum_{l,i} \kappa_l \left( \frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (46)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы некоторое решение  $q_i(t)$  уравнений (42), (39) находилось среди решений уравнений (45), (39). Отсюда следует, что принцип Гамильтона имеет характер вариационного принципа стационарного действия (11) тогда и только тогда, когда движения неголономных систем удовлетворяют условию (46). Это же заключение справедливо [46] и для принципа наименьшего действия в формах Лагранжа и Якоби.

При варьировании согласно формулам (36) принцип (37) имеет характер принципа стационарного действия при условиях [47]

$$\sum_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}} A_s^{k+l} = 0 \quad (s = 1, \dots, k). \quad (47)$$

Следует подчеркнуть, что условия (46), (47) для неголономных систем выполняются лишь в редких случаях.

С вопросом о стационарности действия по Гамильтону для действительного движения тесно связана задача обобщения на неголономные системы метода Гамильтона—Якоби интегрирования канонических уравнений движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_l \mu_l \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (48)$$

эквивалентных уравнениям (42). С помощью замены переменных

$$\pi_i = p_i + \sum_l \kappa_l \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

функцию Гамильтона можно представить в виде [45]

$$H(t, q_i, p_i) = H_1(t, q_i, \pi_i) - \sum_{l,i} \kappa_l \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \zeta_i.$$

Для обобщенного уравнения Гамильтона

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_1\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (49)$$

уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \pi_i}, \quad \frac{d\pi_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (50)$$

Если  $S(t, q, \alpha)$  — полный интеграл уравнения (49), то согласно теореме Якоби соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \pi_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (51)$$

представляют собой интегралы системы уравнений (50).

Можно показать [45, 48], что решение уравнений (50) является также решением уравнений движения (48), (39) только, если удовлетворяется условие (46).

Следовательно, обобщенный метод Гамильтона—Якоби в сочетании с методом множителей Лагранжа применим для интегрирования неголономных систем тогда и только тогда, когда принцип Гамильтона носит характер вариационного принципа стационарного действия.

### 5. ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ Л. И. СЕДОВА

Принцип Гамильтона, как и другие интегральные принципы, применим не только к системам с конечным числом степеней свободы, о чем шла речь выше, но и к системам с распределенными параметрами и к сплошным средам. В случае обратимых физических процессов эти принципы являются вариационными принципами стационарности некоторых функционалов, а в случае необратимых процессов — вариационными уравнениями.

Остановимся кратко на вариационном уравнении Л. И. Седова [49], лежащем в основе обобщений вариационного подхода на необратимые процессы. Уравнение Седова имеет вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V \Lambda \, dv \, dt + \delta W^* + \delta W = 0, \quad (52)$$

где  $V$  — любой объем сплошной среды,  $[t_0, t_1]$  — любой интервал времени,  $\Lambda = \rho (1/2 v_i v^i - U)$  — лагранжиан,  $\delta W^*$  и  $\delta W$  — функционалы вида

$$\delta W^* = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_V \rho T \delta S \, dv - \delta G' + \delta A_{об}^{(e)} \right] dt,$$

$$\delta W = - \left[ \int_V \rho v_i \delta x^i \, dv \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \delta A_{пов}^{(e)} \, dt,$$

причем  $\rho$  — плотность массы,  $U$  и  $S$  — плотности внутренней энергии и энтропии на единицу массы,  $x^i$  — координаты,  $v^i = dx^i/dt$  — скорости,  $T$  — температура,  $\delta G'$  — некомпенсированное тепло,  $\delta A_{об}^{(e)}$  и  $\delta A_{пов}^{(e)}$  — работа внешних объемных и поверхностных сил соответственно.

В уравнении (52) лагранжиан  $\Lambda$  и функционал  $\delta W^*$  представляют собой задаваемые величины, функционал  $\delta W$  определяется из уравнения (52), его вычисление соответствует установлению уравнений состояния.

Вариационное уравнение (52) представляет собой, по сути дела, проинтегрированное по времени общее уравнение динамики для сплошной



среды, записанное с учетом первого и второго начал термодинамики.

Вариационное уравнение (52) было выведено Л. И. Седовым (1965) в связи с проблемой построения новых моделей сплошных сред с усложненными свойствами. Это вариационное уравнение Л. И. Седов предложил взять в качестве исходного постулата механики сплошной среды. Построение новых моделей в рамках вариационного подхода заключается в фиксировании набора определяющих функций и задании лагранжиана  $\Lambda$  и функционала  $\delta W^*$  [50].

### 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

Кратко остановимся еще на дифференциальных принципах механики. Принцип Даламбера—Лагранжа (6) представляет собой вариационное уравнение, не имеющее характера экстремума. К. Гаусс (1829) [51] придал принципу Даламбера—Лагранжа вид экстремального принципа. Введя мыслимые движения, отличающиеся от действительного лишь ускорениями, Гаусс показал, что для действительного движения имеет место минимум принуждения

$$\sum_v \frac{m_v}{2} \left( \ddot{\mathbf{r}}_v - \frac{\mathbf{F}_v}{m_v} \right)^2 = \min.$$

Г. Герц (1894) [33], создавая бессилую механику, положил в ее основу принцип прямейшего пути (или наименьшей кривизны)

$$\frac{1}{2} \sum_v m_v \ddot{\mathbf{r}}_v^2 = \min,$$

представляющий собой по существу принцип Гаусса в частном случае  $\mathbf{F}_v = 0$ .

Н. Г. Четаев (1941) [52] дал видоизменение принципа Гаусса, показав, что для действительного движения работа  $A$  на элементарном цикле, состоящем из прямого мыслимого по Гауссу движения в поле действующих сил и движения попятного (обратного) в поле сил, которых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы механическая система была совершенно свободной, является максимумом:

$$A = \text{max } A_\mu, \quad A_\mu = \sum_v (\mathbf{F}_v - m_v \ddot{\mathbf{r}}_v) \left( \dot{\mathbf{r}}_v + \mathbf{w}_v^\mu \frac{dt}{2} \right) dt,$$

где  $\mathbf{w}_v^\mu$  — ускорения в мыслимом движении.

Этот принцип интересен непосредственным видоизменением мысли Германа и Эйлера, которую развил Лагранж в своем изложении принципа Даламбера. Принцип Четаева позволяет расширить характер обычно рассматриваемых механических систем путем привлечения из термодинамики принципа Карно.

Обобщение этого принципа на физические системы имеет вид

$$\delta \left\{ -\frac{dt^2}{2} \sum_v \frac{1}{2m_v} [(\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{w}_v)^2 + \Delta Q - \Delta U] \right\} = 0,$$

где  $U$  — внутренняя энергия,  $\Delta Q$  — приток тепла и использованы первый и второй законы термодинамики. Это — принцип Четаева для физических систем [53, 54].

Принципы Даламбера—Лагранжа, Гаусса и Четаева возможно обобщить также на сплошные среды [55].

## 8. ПРИНЦИП МАКСИМУМА Л. С. ПОНТЯГИНА

В заключение остановимся кратко на простейшей задаче оптимального управления [56], состоящей в разыскании необходимых условий в задаче

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r) dt = \min$$

при условиях

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad u(t) \in U.$$

Пусть класс допустимых управлений состоит из всех кусочно непрерывных ограниченных функций  $u(t)$  с разрывами первого рода, принимающих значения из некоторой замкнутой области  $U$ . Эта задача представляет собой задачу Лагранжа вариационного исчисления в постановке Понтрягина. Характерной особенностью подобных задач является фиксирование заранее определенного класса допустимых управлений, принадлежащих замкнутой области  $U$ .

Если ввести в рассмотрение функцию Понтрягина

$$\Pi(\psi(t), x(t), t, u(t)) = \sum_{\alpha=0}^n \psi_\alpha f^\alpha(t, x, u),$$

то уравнения для фазовых переменных  $x^i$  и вспомогательных переменных  $\psi_i$ , играющих роль множителей Лагранжа, можно записать в канонической форме

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_i}, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x^i} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Справедлива теорема [56]: Пусть  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , — допустимое управление, переводящее фазовую точку из положения  $x_0$  в положение  $x_1$ , а  $x(t)$  — соответствующая траектория, так что  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_1) = x_1$  (моменты времени  $t_0$ ,  $t_1$  фиксированы). Для того чтобы  $u(t)$  давало решение оптимальной задачи с закрепленным временем, необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции  $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$ , соответствующей функциям  $u(t)$  и  $x(t)$ , что:

1) для всех  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , функция  $\Pi(\psi(t), x(t), t, u)$  переменного  $u \in U$  достигает в точке  $u = u(t)$  максимума

$$\Pi(\psi(t), x(t), t, u(t)) = M_{u \in U}(\psi(t), x(t), t);$$

2) функция  $\psi_0(t) = \text{const}$  неположительна.

Очевидно, принцип максимума Понтрягина относится к категории дифференциальных вариационных принципов. В случаях, когда множество допустимых значений управления открыто, принцип максимума равносильно известному условию Вейерштрасса. Однако в случаях, когда управление попадает на границу области  $U$ , условия Вейерштрасса, вообще говоря, не выполняются, а принцип максимума справедлив и в этом случае.

Можно показать [57], что принцип оптимальности можно представить также в виде интегрального вариационного принципа

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i=0}^n \psi_i \dot{x}^i - \Pi \right) dt \geq 0, \quad \delta x_i = 0 : t = t_0, t_1,$$

аналогичного принципу Гамильтона.

Из этого интегрального принципа в общем случае вытекают уравнения движения, граничные условия и уравнения трансверсальности, а также принцип максимума Понтрягина.

\* \* \*

В заключение еще раз подчеркнем, что вариационные принципы механики выражают в простой инвариантной форме уравнения движения и уравнения полей, заключают в себе синтез континуального и дискретного аспектов движения и являются выражением обобщенного принципа причинности в механике. Они обладают огромными эвристическими возможностями, особенно в механике сплошных сред, теории относительности, квантовой физике и, можно надеяться, современной ядерной физике и теории элементарных частиц. Вариационные принципы механики получили применение, обобщение и развитие в трудах Г. Гельмгольца, Л. Больцмана, Дж. Гиббса, А. Пуанкаре, А. Эйнштейна, Н. Бора, А. Зоммерфельда, Л. де Бройля, Э. Шредингера, В. Гейзенберга, П. Дирака, М. Борна и многих других ученых. Огромная общность вариационных принципов механики, возможность их обобщения на многочисленные немеханические области науки, связь с законами сохранения и группами Ли ставят эти принципы в центральное положение при решении многих фундаментальных проблем физики. Эти интереснейшие вопросы выходят, однако, за рамки нашей статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Эйлер Л.* Диссертация о принципе наименьшего действия, с разбором возражений славнейшего проф. Кёнига, выдвинутых против этого принципа // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 96—108. Далее цитируется сокращенно: Вариационные принципы.
2. *Ферма П.* Синтез для рефракции // Вариационные принципы. С. 6—10.
3. *Гюйгенс Х.* Трактат о свете. М.; Л.: Гостехиздат, 1935. 172 с.
4. *Leibniz G. W.* Dynamica, de potentia et legibus naturae corporeae // *Mathematische Schriften* / Hrsg. C. I. Gerhardt. Halle, 1860. Abt. 2. Bd. 2(6). S. 281—314.
5. *Пьютон И.* Математические начала натуральной философии // *Крылов А. Н.* Собр. трудов. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. Т. 7.
6. *Лагранж Ж. Л.* Аналитическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. Т. 1. 594 с.
7. *Бернулли И.* Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики // Вариационные принципы. С. 11.

8. *Бернулли И.* Кривизна луча в неоднородных прозрачных телах и решение задачи, предложенной мною в «Акта» за 1696 г., с. 269, о нахождении «брахистохронной линии», т. е. такой линии, по которой тело должно проходить от одной заданной точки до другой в кратчайшее время; затем о построении «синхронной кривой», т. е. волны лучей // Вариационные принципы. С. 12—17.
9. *Эйлер Л.* Основы динамики точки. М.: Гостехиздат, 1950. 500 с.
10. *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. М.; Л.: Гостехиздат, 1934. 600 с.
11. *Мопертюи П.* Согласование различных законов природы, которые до сих пор казались несовместимыми // Вариационные принципы. С. 23—30.
12. *Эйлер Л.* Об определении движения брошенных тел в несопротивляющейся среде методом максимумов и минимумов // Вариационные принципы. С. 31—40.
13. *Эйлер Л.* Соображения по поводу некоторых общих законов природы, которые наблюдаются в действии любых сил // Вариационные принципы. С. 56—77.
14. *Мопертюи П.* Законы движения и покоя, выведенные из метафизического принципа // Вариационные принципы. С. 41—55.
15. *Вольтер Ф.* История доктора Акакия и уроженца Сан-Мало // Вариационные принципы. С. 723—741.
16. *Даламбер Ж.* Космология / Вариационные принципы. С. 109—116.
17. *Lagrange J. L.* Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules integrales indéfinies // Oeuvres. Paris, 1867. T. 1. P. 335—362.
18. *Лагранж Ж. Л.* Применение метода, изложенного в предыдущем мемуаре, для решения различных задач динамики // Вариационные принципы. С. 117—158.
19. *Полак Л. С.* Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике. М.: Физматгиз, 1960. 599 с.
20. *Гамильтон У.* Об общем методе в динамике, посредством которого изучение движения всех свободных систем притягивающихся или отталкивающихся точек сводится к отысканию и дифференцированию одного центрального соотношения или характеристической функции // Вариационные принципы. С. 175—233.
21. *Даламбер Ж.* Динамика. М.: Гостехиздат, 1950. 343 с.
22. *Эйлер Л.* Соответствие между общими принципами покоя и движения Мопертюи // Вариационные принципы. С. 78—95.
23. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.; Л.: Гостехиздат, 1936. 271 с.
24. *Якоби К.* Заметка об интегрировании дифференциальных уравнений динамики // Вариационные принципы. С. 289—293.
25. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965. 408 с.
26. *Гамильтон У.* Второй очерк об общем методе в динамике // Вариационные принципы. С. 234—283.
27. *Остроградский М. В.* Дифференциальные уравнения проблемы изопериметров // Вариационные принципы. С. 315—387.
28. *Hamilton W. R.* Theory of system of rays // Trans. Roy. Irish Acad. 1828. Vol. 15. P. 69—174; 1830. Vol. 16. P. 1—62; 1837. Vol. 17. P. 1—144.
29. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 500 с.
30. *Четаев Н. Г.* О продолжении оптико-механической аналогии // Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР. 1962. С. 404—406. Далее цитируется сокращенно: Работы по механике.
31. *Четаев Н. Г.* Об одной задаче Коши // Работы по механике. С. 343—346.
32. *Четаев Н. Г.* Об оптико-механической аналогии // Работы по механике. С. 393—403.
33. *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 387 с.
34. *Гельдер О.* О принципах Гамильтона и Мопертюи // Вариационные принципы. С. 538—563.
35. *Воронец П. В.* Об уравнениях движения для неголономных систем // Мат. сб. 1901. Т. 22, № 4, С. 659—680.
36. *Суслов Г. К.* Об одном видоизменении начала Даламбера // Мат. сб. 1901. Т. 22, № 4. С. 681—697.
37. *Чаплыгин С. А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 15—25.
38. *Kerner M.* Le principe de Hamilton et l'hologonisme // Præce mat.-fiz. (Warszawa). 1931. Т. 38. S. 1—21.

39. *Capon R. S.* Hamilton principle on relation to nonholonomic mechanical systems // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 1952. Vol. 5, pt 4. P. 472—480.
40. *Jeffreys H.* What is Hamilton principle // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 1954. Vol. 7, pt 3. P. 335—337.
41. *Pars L. A.* Variation principles in dynamics // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 1954. Vol. 7, pt 3. P. 338—351.
42. *Новоселов В. С.* Вариационные методы в механике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. 66 с.
43. *Четаев Н. Г.* О принципе Гаусса // *Работы по механике.* С. 323—326.
44. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967, 520 с.
45. *Румянцев В. В.* О принципе Гамильтона для неголономных систем // *Прикл. математика и механика.* 1978. Т. 42, № 3. С. 387—399.
46. *Румянцев В. В.* О принципах Лагранжа и Якоби для неголономных систем // *Прикл. математика и механика.* 1979. Т. 43, № 4. С. 583—590.
47. *Сумбатов А. С.* О принципе Гамильтона для неголономных систем // *Вестн. МГУ. Математика и механика.* 1970. № 1. С. 98—101.
48. *Rumjantsev V. V., Sumbatov A. S.* On the problem of a generalization of the Hamilton — Jacobi method for nonholonomic systems // *Ztschr. angew. Math. und Mech.* 1978. Bd. 58, H. 11. S. 477—481.
49. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред // *Успехи мат. наук.* 1965. Т. 20, № 5. С. 121—180.
50. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
51. *Гаусс К.* Об одном новом общем принципе механики // *Вариационные принципы.* С. 170—172.
52. *Четаев Н. Г.* Одно видоизменение принципа Гаусса // *Работы по механике.* С. 327—328.
53. *Четаев Н. Г.* Из записной книжки // *Работы по механике.* С. 499.
54. *Румянцев В. В.* О принципе Четаева // *Докл. АН СССР.* 1973. Т. 210, № 4. С. 787—790.
55. *Румянцев В. В.* О некоторых вариационных принципах в механике сплошных сред // *Прикл. математика и механика,* 1973. Т. 37, № 6. С. 963—973.
56. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.
57. *Румянцев В. В.* О некоторых вопросах аналитической механики // *Проблемы аналитической механики и управления движением.* М.: ВЦ АН СССР, 1985. С. 20—36.

# ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР И МЕХАНИКА УПРУГИХ СИСТЕМ

*Н. В. БЛИЧУК, А. Ю. ИШЛИНСКИЙ*

В истории науки о сопротивлении материалов упоминаются применения ее у древних греков и египтян. Однако проследить за развитием основных представлений в этой области удастся только начиная с работ Леонардо да Винчи.

Известно, что к началу XVIII в. учение об упругости тел располагало только законом Гука и некоторыми подходами к расчету изгиба балок. В это учение Леонард Эйлер внес фундаментальный вклад. В его работах были поставлены и решены принципиальные задачи теории упругости, сопротивления материалов и строительной механики. Работы Эйлера по механике упругих тел посвящены исследованиям их изгиба, устойчивости и колебаний. Ниже каждому из указанных направлений исследований Эйлера отведен отдельный раздел. Кроме того, показано развитие идей Эйлера в работах последующих исследователей и в особенности русских и советских ученых.

## 1. ИЗГИБ

Основополагающий вклад внесен Эйлером в теорию изгиба упругих стержней (эластик). Полученные результаты по теории изгиба и формам упругих эластик Эйлер изложил в статье об отыскании кривой линии, образуемой упругой пластинкой, нагруженной произвольными силами в нескольких точках [1], и в трактате «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума» [2].

Первая работа Эйлера по упругим эластичкам [1] относится к 1732 г. К этому времени уже был известен результат Я. Бернулли о пропорциональности кривизны упругой линии в любой точке изгибающему моменту в той же точке. В работе Эйлера рассматривается изгиб прямолинейного стержня сосредоточенными силами  $P_x$ ,  $P_y$  и распределенными нагрузками  $F_x$ ,  $F_y$ . Все существовавшие к тому времени теории объединяются посредством общего уравнения

$$-P_y x + P_x y - \int_0^x Y dx + \int_0^y X dy = -\frac{Ek^2}{R},$$
$$Y = \int_0^s F_y ds, \quad X = \int_0^s F_x ds,$$

выражающего равенство моментов сил, действующих на стержень, упругим моментом. Здесь система координат совмещена с концом стержня, к которому приложены силы  $P_x$ ,  $P_y$ ;  $Ek^2$  — изгибная жесткость (используются обозначения Эйлера),  $R$  — радиус кривизны упругой линии стержня.

В трактате по вариационному исчислению [2] Эйлер рассматривает изгиб в плоскости тонких упругих стержней при приложении к их концам нагрузок. Внимание Эйлера к указанной проблеме привлек Д. Бернулли. Он же предложил применить к исследованию эластик разработанный Эйлером аппарат вариационного исчисления и положить в основу анализа выражение

$$\int_A^B \frac{ds}{R^2},$$

пропорциональное потенциальной энергии упругих деформаций и названное Д. Бернулли «потенциальной силой». Через  $ds$  здесь и ниже обозначается длина элемента упругой линии стержня. Следуя предложению Д. Бернулли, Эйлер формулирует задачу: «Среди всех кривых одной и той же длины, которые не только проходят через  $A$  и  $B$ , но и касаются в этих точках прямых, заданных по положению, определить ту, для которой значение выражения  $\int ds/R^2$  будет наименьшим» [2, с. 451].

В современном изложении процесс решения сформулированной вариационной задачи может быть представлен следующим образом. Обозначая через  $y = y(x)$  уравнение упругой линии, а через  $L$  ее длину, запишем основные соотношения задачи в виде

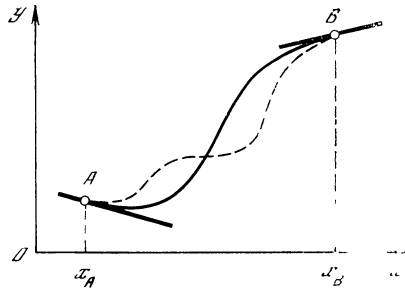


Рис. 1

$$\int_A^B \frac{ds}{R^2} = \int_{x_A}^{x_B} f_1 dx \rightarrow \min, \quad \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} f_2 dx = L,$$

$$f = f_1 + \alpha f_2, \quad f_1 = (y'')^2 [1 + (y')^2]^{-3/2}, \quad f_2 = [1 + (y')^2]^{1/2},$$

где  $\alpha$  — множитель Лагранжа. В точках  $x_A$  и  $x_B$  на функцию  $y(x)$  наложены краевые условия, отвечающие заданию в этих точках положения и наклона упругой линии (рис. 1). Независимость  $f$  от  $y$  позволяет сразу после выписывания уравнений Эйлера получить его первый интеграл

$$-\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y''} = C.$$

Здесь  $C$  — произвольная постоянная интегрирования. Далее, учитывая, что  $f$  зависит только от  $y'$  и  $y''$  и что  $df = (\partial f/\partial y')\partial y' + (\partial f/\partial y'')\partial y''$ , преобразуем первый интеграл к виду  $Cdy' = -df + d(y''\partial f/\partial y'')$ . Вторичное интегрирование дает

$$Cy' + D = f_1 - \alpha f_2,$$

где  $D$  — постоянная интегрирования.

Данное соотношение разрешается относительно второй производной искомой функции

$$y'' = (1 + (y')^2)^{3/4} [\alpha (1 + y')^2 + Cy' + D]^{1/2}.$$

Далее с использованием параметрического представления Эйлер сводит отыскание формы эластике к вычислению квадратур ( $p = y'$ )

$$dx = \frac{dp}{(1+p^2)^{3/4} [\alpha(1+p^2)^{1/2} + Cp + D]^{1/2}},$$

$$dy = \frac{p dp}{(1+p^2)^{5/4} [\alpha(1+p^2)^{1/2} + Cp + D]^{1/2}}.$$

Не удовлетворяясь достигнутым результатом, Эйлер предпринимает усилия для осуществления дальнейшей интеграции. Он убеждается, что ни одно из приведенных выражений не интегрируемо. Тем не менее Эйлеру удается установить интересный факт, что линейная комбинация  $Cdx - Ddy$  представима в виде полного дифференциала некоторого выражения. Это обстоятельство позволяет выполнить еще одно интегрирование:

$$Cx - Dy + \delta = \frac{2[\alpha(1+(y')^2)^{1/2} + Cy' + D]^{1/2}}{[1+(y')^2]^{1/4}},$$

где  $\delta$  — постоянная интегрирования. Замечая, что без ограничения общности константы  $\delta$  и  $D$  могут быть положены равными нулю, и осуществляя алгебраические преобразования, Эйлер приходит к выражению

$$y' = \frac{C^2x^2 - 4\alpha}{\sqrt{16C^2 - (C^2x^2 - 4\alpha)^2}}.$$

Посредством изменения  $x$  на заданную постоянную и смены обозначений констант выражению для  $y'$  придается вид

$$y' = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{\sqrt{\alpha^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}},$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — неизвестные константы.

В трактате Эйлера основное выражение, определяющее форму эластике, выводится и другим способом, основанным на непосредственном составлении уравнения равновесия в перемещениях.

Далее Эйлер дает полную классификацию возможных форм эластик, причем устанавливает ее «тем же самым способом, каким обыкновенно перечисляются виды алгебраических кривых данного порядка» [2, с. 467]. Оказывается, что при изгибе упругого стержня нагрузками, приложенными на его концах, возможны девять различных форм равновесия. Каждый из девяти видов эластик (рис. 2) подвергнут подробному аналитическому исследованию. Анализ форм равновесия, как мы убедимся ниже (§ 2), позволит сделать важное открытие.

Поведение эластик существенно зависит от величины изгибной жесткости, обозначаемой Эйлером через  $Ek^2$ . Для определения этой величины предлагается выполнить простейший эксперимент по изгибу консоли сосредоточенной нагрузкой  $P$ , приложенной на конце (рис. 3), и дается точная формула

$$Ek^2 = \frac{Pg(2g - 3h)}{6h}$$

для отыскания изгибной жесткости по данным эксперимента. Через  $h$  и  $g$  здесь обозначены величина прогиба консоли и расстояние от точки



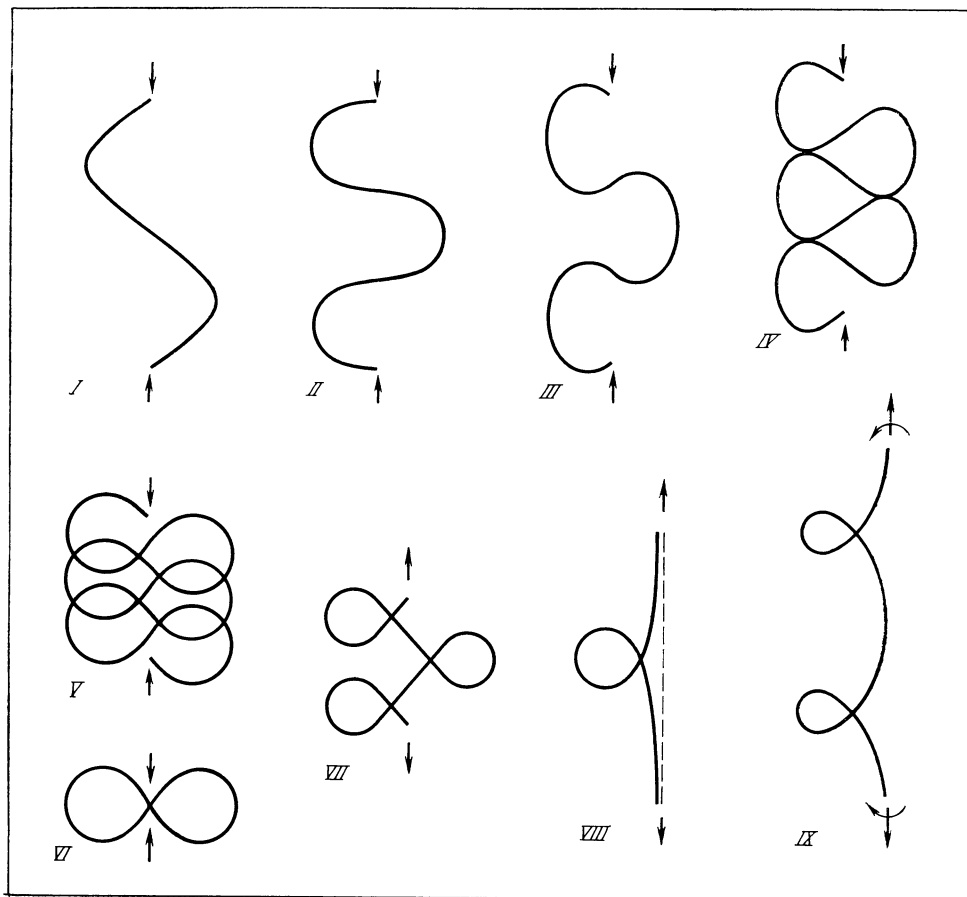


Рис. 2

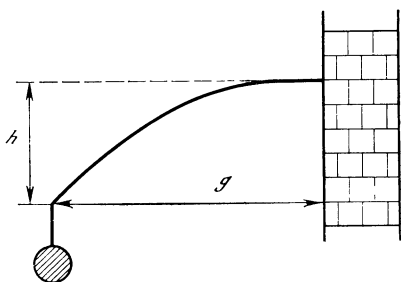


Рис. 3

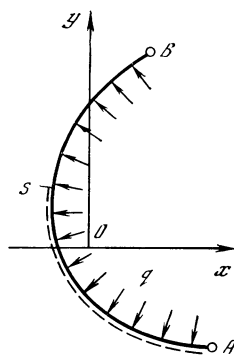


Рис. 4

приложения груза (на изогнутой консоли) до стенки, в которую консоль заделана.

Нетрудно заметить, что в случае малых прогибов данное соотношение переходит в известную формулу сопротивления материалов. Обсуждая зависимость изгибной жесткости от свойств материала и размеров поперечного сечения бруса, Эйлер допускает неточность, утверждая, что величина  $E k^2$  пропорциональна квадрату толщины. Данное обсуждение и подробный анализ указанной формулы содержатся в трактате в параграфе, озаглавленном «Определение абсолютной упругости посредством опытов». Кроме того, в трактате излагаются важные результаты, относящиеся к изгибу неоднородных стержней и упругих стержней, не являющихся прямыми в ненагруженном состоянии. Для последних Эйлер предлагает свою известную формулу

$$M = Ek^2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right),$$

где  $M$  — момент, а  $R_0$  — радиус кривизны стержня в естественном (ненагруженном) состоянии.

Заметим, что приведенное выражение, обобщающее основную формулу прямолинейных стержней, было получено Эйлером (см. [3, 4]) еще в базельский период его творчества (до 1727 г.) в связи с рассмотрением колебаний круглых колец. К сожалению, юношеская работа Эйлера [3] была опубликована только через 60 лет после его смерти.

В трактате по вариационному исчислению [2] Эйлер изучил также изгиб неискривленных в естественном состоянии стержней силами, приложенными в различных точках. Составив уравнения равновесия, он исследовал конкретные задачи и обсудил случай, когда изгибная жесткость исчезающе мала и упругий стержень обращается в совершенно гибкую нить. Рассматривая равновесие нитей под действием сил, направления которых нормальны к самой кривой (рис. 4), Эйлер устанавливает общее свойство

$$R dq/ds = \text{const}$$

всех «кривых парусообразных и платкообразных и всех, для которых имеют место такие воздействия» [2, с. 518] ( $dq$  — сила, приложенная к элементу нити). Говоря о работах Эйлера по статическому изгибу, нельзя не упомянуть также о решении задачи об изгибе упругого стержня, происходящем под действием его собственного веса. В результате искусных преобразований нелинейной задачи изгиба им найдено аналитическое решение, определяющее форму равновесия тяжелого стержня при поперечном изгибе.

Сказанное не исчерпывает всех работ Эйлера, посвященных изгибу. Можно было бы указать и другие результаты и, в частности, обратную задачу отыскания нагрузок, обеспечивающих заданное искривление стержня. Значительность вклада Эйлера в изучение изгиба упругих стержней общепризнанна, и сама теория изгиба называется часто теорией Бернулли—Эйлера.

Работы Эйлера по формам эластик получили развитие в мемуаре Г. Кирхгофа [5], опубликованном в 1859 г. Кирхгоф установил дифференциальные уравнения упругой линии стержня, нагруженного на кон-

цах. Для случая, когда ось стержня в недеформированном состоянии прямолинейна, он обнаружил и математическую аналогию рассматриваемой задачи изгиба с задачей о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. В этом случае интегрирование уравнений эластичности сводится к интегрированию уравнений вращения твердого тела вокруг неподвижной точки и отысканию формы линии при помощи вычисления квадратур.

Фундаментальное исследование задачи об упругой линии двойкой кривизны было выполнено позже Е. Л. Николаи [6]. Им, в частности, были изучены различные очертания упругой линии изотропного стержня с равными главными жесткостями при изгибе. Заметим также, что в работе [6] можно найти дополнительные ссылки на работы других ученых, занимавшихся исследованием форм пространственных эластиков и изучавших аналогию между задачей упругого деформирования стержня и задачей о движении твердого тела вокруг неподвижной точки.

Дальнейшее развитие задачи статики тонких стержней получили в работах Е. П. Попова [7]. Им были найдены точные решения задач о сильном изгибе в случае, когда силы зависят от принимаемой стержнем формы (например, следящие силы). В настоящее время полученные Е. П. Поповым результаты находят применения при расчете пластинчатых пружин и других сильно изгибающихся деталей.

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ

Наука об устойчивости упругих тел берет свое начало в работах Эйлера. Эйлер теоретически обнаружил это явление, выработал саму концепцию упругой устойчивости и решил первые задачи анализа устойчивости. При этом задачи устойчивости рассматривались им как в нелинейной, так и в линейной постановках. Сама линеаризованная постановка проблемы упругой устойчивости, как краевой задачи на собственные значения, является актуальной и в наше время. В большинстве современных работ для расчета устойчивости применяется бифуркационный подход, предложенный Эйлером. Несомненно, что в математическом отношении работы Эйлера по упругой устойчивости отличались новизной и существенным образом повлияли на создание спектральной теории краевых задач (задач на собственные значения для дифференциальных уравнений). Однако мы не будем касаться здесь развития общих математических идей, а остановимся на исследовании проблемы упругой устойчивости в работах Эйлера и его последователей.

Проблема упругой устойчивости интересовала Эйлера на протяжении длительного периода его научной деятельности. Первую работу, в которой впервые были рассмотрены вопросы упругой устойчивости, Эйлер опубликовал в 1744 г. в возрасте 37 лет. Последняя публикация по данной теме появилась в 1778 г., когда ему был 71 год.

Остановимся на первом теоретическом исследовании Эйлера упругой устойчивости. В трактате по вариационному исчислению [2] наряду с получением уравнений, описывающих формы эластик при изгибе, осуществляется полный анализ и классификация всех возможных их видов. Это исследование выполнено Эйлером исчерпывающим образом, и в результате выявлено все множество форм равновесия. Но главный резуль-

тат этой кропотливой работы, который трудно было предвидеть и который удивил самого Эйлера, заключается в другом. При выделении и исследовании упругой кривой первого вида (см. рис. 2) Эйлер рассмотрел малые изгибы «пластинки» длины  $2f$  и абсолютной жесткости  $E k^2$  и обнаружил, «что сила, требующаяся для сообщения пластинке этого бесконечно малого изгиба, будет конечной, а именно  $(E k^2 / f^2)(\pi^2 / 4)$ . Значит, если концы  $A$  и  $B$  связаны нитью  $AB$  (рис. 5), то эта нить должна будет стягиваться силой  $\pi^2 E k^2 / 4 f^2$  [2, с. 476].

Обнаруженный эффект конечности сжимающих сил, необходимых для обеспечения бесконечно малого изгиба, получает у Эйлера правильное истолкование и применяется в этом же трактате к задаче об устойчивости

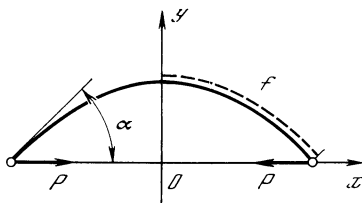


Рис. 5

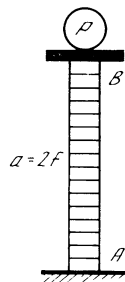


Рис. 6

колонны. Сразу же за параграфом, посвященным классификации упругих кривых, в трактате следует параграф, озаглавленный «О силе колонн». В нем рассмотрена колонна высоты  $a$ , закрепленная в точке  $A$  и несущая груз  $P$  (рис. 6). Абсолютная упругость колонны обозначена через  $E k^2$ . Основное утверждение заключается в следующем: «Если груз  $P$  не будет превышать  $E \pi^2 k^2 / a^2$ , то можно будет не опасаться никакого решительного изгиба; наоборот, если груз  $P$  будет больше, то колонна не сможет сопротивляться изгибу» [2, с. 492].

Здесь же Эйлер делает основной для практики вывод: «Если упругость колонны, а также ее толщина, остается одинаковой, то груз, который она способна безопасно нести, будет обратно пропорционален квадрату высоты колонны; так что колонна, вдвое более высокая, сможет нести лишь четвертую часть груза» [Там же].

Вызывает только удивление, с какой легкостью достигается объяснение одного из наиболее содержательных представлений механики — упругой устойчивости.

Заметим, что изложение в данном параграфе может считаться безукоризненным, если только не принимать в рассмотрение трижды повторенную неточность в количественном значении критической силы для колонны. Приведенная Эйлером величина вчетверо превышает действительное значение<sup>1</sup> критической силы  $\pi^2 E k^2 / 4 a^2$ .

<sup>1</sup> Можно предположить также, что Эйлер имеет в виду шарнирное закрепление верхнего конца колонны, но не показывает это на рисунке и не оговаривает в тексте.

В последующих работах по упругой устойчивости Эйлер сталкивается с трудностями и не всегда получает удовлетворительные решения. Так, «парадоксы» задачи об устойчивости колонны, нагруженной собственным весом, ему удается разрешить лишь в последующих работах 1778 г.

Однако, как уже отмечалось исследователями творчества Эйлера, рассмотрение того, как Эйлер преодолевает свои ошибки и приходит к правильному результату, является в высшей степени поучительным.

Проанализируем линейризованную постановку задачи упругой устойчивости, предложенную Эйлером в статье «О сопротивлении колонн» [8] (см. также [4, 9]), и некоторые решения, полученные им в рамках этой постановки. Подход Эйлера основывается на рассмотрении слабо изогнутых равновесных форм сжатого стержня. В этом случае кривизна достаточно точно аппроксимируется величиной второй производной функции прогибов  $y(x)$ . Эта аппроксимация уже использовалась ранее в трактате [2] при исследовании малых колебаний стержня. Линейризованное уравнение записывается в виде

$$Ek^2y'' + Py = 0.$$

Интегрирование этого уравнения с учетом граничных условий опирания  $y(0) = y(l) = 0$  дает следующее нетривиальное распределение прогибов:

$$y = C \sin(\pi x/l),$$

когда  $P$  принимает значения, кратные величине  $\pi^2 Ek^2/l^2$ . Минимальная величина нагрузки, вызывающей появление слабо искривленных форм равновесия, рассматривается Эйлером в качестве значения критической силы потери устойчивости. Амплитуда  $C$  распределения прогибов стержня остается неопределенной при рассмотрении вопроса устойчивости в рамках предложенного Эйлером линейризованного подхода.

Интересное исследование выполнено в рамках линейризованного подхода для неоднородных шарнирно закрепленных колонн.

В рассмотренном случае изгибная жесткость меняется вдоль колонны, т. е.  $Ek^2 = \varphi(x)$  ( $\varphi(x)$  — заданная положительная функция). К уравнению продольного изгиба применяется преобразование

$$y = e^{\int u dx},$$

после выполнения которого уравнение становится нелинейным, но уже первого порядка

$$u' + u^2 + P/\varphi = 0.$$

Эйлер рассмотрел законы изменения изгибной жесткости вида  $\varphi = K_0(\alpha + \beta x/l)^\lambda$ , и в случае  $\lambda = 4$  ему удалось найти простое точное решение

$$y = A(\alpha l + \beta x) \sin \frac{\sqrt{P_{cr}} lx}{\sqrt{K_0} \alpha (\alpha l + \beta x)}, \quad P_{cr} = \pi^2 \frac{\alpha^2 (\alpha + \beta)^2 K_0}{l^2}.$$

Далее найденное в работе решение удачно применено для исследования устойчивости конических колонн. Следует отметить, что в статье [8] Эйлером построено решение и более сложной задачи устойчивости стержней с произвольным показателем степени неоднородности  $\lambda$ .

Значительные усилия были предприняты Эйлером в связи с решением задач об устойчивости тяжелых колонн [8, 10—12]. В своих исследованиях по продольному изгибу под действием собственного веса Эйлер исходит из дифференциального уравнения равновесия третьего порядка. При этом он допускает сначала ошибку, не введя поперечную реакцию в точках опирания стержня. В результате Эйлер приходит к неверному выводу, что колонна под действием распределенных сил не теряет устойчивости. Эта простая на первый взгляд ошибка исправлена Эйлером в последующей работе [12]. Исследования, проведенные Эйлером по изучению потери устойчивости колонн под действием собственного веса, весьма поучительны. Содержательный разбор этих работ дан Е. Л. Николаи [9], популярное изложение имеется в книге [13]. Уточнение в исследованиях Эйлера по

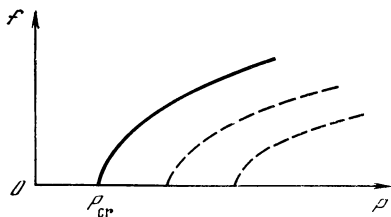


Рис. 7

тяжелым колоннам было внесено значительно позже А. Н. Динником [14], который нашел правильное значение критического параметра потери устойчивости.

Отметим здесь один удивительный результат, обнаруженный в 50-х годах нашего века [15] при решении методом Эйлера задачи об устойчивости упругой прямоугольной пластинки, сжимаемой равномерно по двум защемленным сторонам длины  $l$  (две другие про-

тивоположные стороны пластинки предполагаются незакрепленными). В этой задаче найдено точное значение критической силы потери устойчивости при сжатии  $P_{cr}$ . Можно было предположить, что при  $l \rightarrow \infty$ , т. е. для достаточно длинных пластинок, величина нагрузки станет равной известному значению предельной нагрузки  $P_{cr}^*$ , при которой происходит выпучивание панели. Однако полученный результат не согласуется с этим предположением:  $P_{cr} \rightarrow 0,9962 P_{cr}^*$ .

Исследование закритического поведения упругих элементов конструкций является сложной и важной задачей. Эти исследования, с одной стороны, обосновывают линейризованные постановки и, с другой — расширяют сложившиеся представления об устойчивости. Первые результаты в этом направлении были получены самим Эйлером [2]. Им получена формула, связывающая величину максимального прогиба  $f$  выпученного стержня со значениями абсолютной жесткости  $E k^2$ , сжимающей нагрузки  $P$  и длины стержня  $l$ :

$$l = \pi \sqrt{\frac{E k^2}{P}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{f^2 P}{4 E k^2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{f^2 P}{4 E k^2}\right)^2 + \left(\frac{1.3 \cdot 5}{2.4 \cdot 6}\right)^2 \left(\frac{f^2 P}{4 E k^2}\right)^3 + \dots \right\}.$$

Приведенная формула отвечает условиям опирания концов стержня. Характерное поведение максимального прогиба при  $P > P_{cr}$  показано на рис. 7. Для сжимающих усилий  $P$ , лишь незначительно превосходящих критическое значение, более удобно пользоваться приближенными формулами Р. Мизеса [16] (формула первого приближения) и Е. Л. Николаи [9] (формула второго приближения). Аналогичная формула, дан-

ная С. П. Тимошенко (см. [17]), как уже отмечалось в [9], не обеспечивает требуемой точности.

Изучению задачи продольного изгиба стержней в нелинейной постановке посвящены работы Ж. Л. Лагранжа, Ф. С. Ясинского, А. Е. Лява, А. Н. Крылова [18—21]. Заметим, что большая часть выполненных исследований основана на представлении решения через эллиптические интегралы.

Лагранж [18] рассматривает поведение опертой колонны длины  $a$  в случае, когда значение сжимающей нагрузки не совпадает ни с одной из величин  $i^2\pi^2Ek^2/a^2$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Основываясь на точном нелинейном

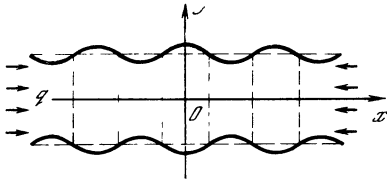


Рис. 8

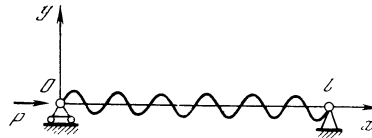


Рис. 9

уравнении изгиба, он получает выражение для длины дуги упругой линии

$$s = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{P'Ek^2 - (P^2j^2/4Ek^2) \cos^2 \varphi}},$$

где  $s = a$ , когда  $\varphi = m\pi$ ,  $m$  — число пересечений упругой линией оси, проходящей через точки крепления колонны (число полуволи). Далее Лагранж дает формулу, которая с учетом исправлений, внесенных в книге А. Тодхантера и К. Пирсона [22], записывается в виде

$$a = i\pi \sqrt{\frac{Ek^2}{P}} \left\{ 1 + \frac{Pj^2}{4(4Ek^2)} + \frac{9P^2j^4}{4 \cdot 16(16(Ek^2)^2)} + \frac{9 \cdot 25P^3j^6}{4 \cdot 16 \cdot 36(64(Ek^2)^3)} + \dots \right\}.$$

Из этого выражения можно получить  $f$ , если заданы  $a$  и  $P$ .

В своей работе Лагранж ссылается на статью Эйлера по устойчивости колонн 1757 г. [8], откуда можно было бы предположить, что ему осталось неизвестно проведенное Эйлером исследование упругой устойчивости в нелинейной постановке, опубликованное в 1744 г. [2]. К этому же выводу можно прийти после ознакомления с другой работой Лагранжа [23], в которой в точной постановке рассматривается задача изгиба упругого стержня под действием поперечных и сжимающих сил. В случае, когда на стержень действуют только сжимающие силы, Лагранж приходит к результату, что для обеспечения сколь угодно малого искривления стержня требуется приложить к нему нагрузку конечной величины.

Изучение продольного изгиба колонн в нелинейной постановке, как уже отмечалось, проводится в основном с применением эллиптических интегралов. Через эти интегралы, в частности, выражаются максимальный прогиб и осадка колонны [21]. Вместе с тем представляют интерес и более простые приближенные выражения для функции прогибов колонны и других характеристик ее поведения после потери устойчивости, найденные

А. Ю. Ишлинским:

$$y = 2 \frac{m}{q} \sin \left[ \left( 1 - \frac{3}{4} m^2 \right) qx + \frac{9}{4} m^2 \sin 2qx \right] + O(m^4),$$

$$f = 2m/q, \quad m = \sin(\alpha/2), \quad q = \sqrt{P/Ek^2}.$$

В приведенных формулах  $\alpha$  — угол между осью  $x$  и касательной к упругой линии колонны в концевой точке, а  $f$  — величина максимального прогиба.

Известную роль в работах по продольному изгибу, изучаемому в точной нелинейной постановке, сыграла установленная Г. Кирхгофом кинетическая аналогия [5]. Эта аналогия позволила, в частности, применить к задачам упругой устойчивости результаты интегрирования движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Интересной задаче об устойчивости изгиба балок узкого прямоугольного поперечного сечения посвятил свою докторскую диссертацию Л. Прандтль [24]. Им рассматривался изгиб балки в плоскости наибольшей жесткости и происходящее при достаточно больших значениях нагрузки выпучивание из этой плоскости. При исследовании устойчивости наряду с теоретическим анализом были выполнены и эксперименты. Работа Прандтля приобрела большую практическую значимость и повлекла многочисленные исследования поперечной устойчивости балок и кривых брусьев. Отметим в этом направлении работы С. П. Тимошенко [25, 26].

Со времен Эйлера задачи упругой устойчивости решались с применением моделей стержней, пластин, оболочек. Вопрос о возможности применения в задачах устойчивости моделей теории упругости долгое время оставался неисследованным и вызывал дискуссии. Неклассический подход к решению задач упругой устойчивости был предложен независимо Л. С. Лейбензоном [27] и А. Ю. Ишлинским [28]. Подход основывается на использовании линеаризованных уравнений равновесия в области, занимаемой материалом, и нелинейных условий на границе тела. Получающиеся при этом бифуркационные задачи исследовались классическими методами и в результате были найдены решения, хорошо согласующиеся с известными представлениями. Так, например, решение задачи об устойчивости прямолинейной формы упругой полосы (рис. 8) при стремлении ширины полосы к бесконечности привело к эйлеровой величине сжимающей нагрузки [28]. Обоснованию этого подхода посвящена работа [29].

Разработке вопросов устойчивости тонкостенных стержней и оболочек посвящены исследования В. З. Власова [30] и И. Ф. Образцова [31].

Если сжимающая нагрузка прикладывается к краям стержня внезапно, то формы потери устойчивости существенно отличаются от тех, которые реализуются в условиях статического нагружения. Главное отличие состоит в том, что при динамическом нагружении форма выпучивания становится «высокочастотной» (рис. 9), или, другими словами, стержень теряет устойчивость по более высоким гармоникам, чем это имеет место в статической задаче Эйлера. Задачи об устойчивости упругих стержней и оболочек при действии на них внезапных нагрузок были впервые поставлены и исследованы М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским [32]. Поводом для исследований послужили результаты опытов по воздействию взрыва на стержни и оболочки. Обнаруженные в опытах формы потери



устойчивости нельзя было объяснить, применяя статический анализ устойчивости. Поэтому вводится уравнение малых движений стержня

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ek^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x),$$

и для изучения устойчивости применяется динамический метод. Через  $S$  и  $f$  обозначены соответственно площадь поперечного сечения стержня и функция начальных искривлений. Решение краевой задачи с граничными условиями  $y = \partial^2 y / \partial x^2 = 0$  при  $x = 0$  и  $x = l$ , отвечающими случаю опирания стержня, ищется в виде ряда Фурье по синусам

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Если и функция начальных искривлений  $f$  представлена рядом по синусам  $f = \sum F_i \sin(i\pi x/l)$ , то для отыскания временных зависимостей  $Y_i(t)$  получается уравнение

$$\rho S \frac{d^2 Y_i}{dt^2} + \frac{\pi^4 Ek^2}{l^4} i(i^2 - n) Y_i = F_i,$$

$$n = \frac{P}{P_{cr}}, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 Ek^2}{l^2} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Это уравнение показывает, что при  $i^2 > n$  зависимость амплитуд  $Y_i$  от времени синусоидальна. Напротив, при  $i^2 < n$  эти зависимости будут неперiodическими:

$$Y_i(t) = A_i \operatorname{sh} \lambda_i t + \frac{F_i}{\rho S \lambda_i^2} (1 - \operatorname{ch} \lambda_i t), \quad \lambda_i^2 = \frac{\pi^4 Ek^2}{\rho S l^4} i(n - i^2).$$

Скорость возрастания амплитуд во времени существенно зависит от величины  $\lambda_i$ . Наибольшее возрастание амплитуды происходит для гармоник с максимальной  $\lambda_i$ . В свою очередь максимум  $\lambda_i$  реализуется при  $2i^2 = n$ . Поэтому наибольшая неустойчивость будет иметь место для синусоидальной формы стержня с числом полуволи, равным целому числу, ближайшему к  $\sqrt{n/2} = \sqrt{P/2P_{cr}}$ .

Работы Эйлера по устойчивости упругих систем получили дальнейшее развитие в наше время в связи с новыми инженерными задачами. Одно из направлений связано с устойчивостью упругих систем при действии неконсервативных позиционных (т. е. не зависящих явно от времени и скоростей) сил. Среди этого класса неконсервативных сил первое место принадлежит «следящим» силам, направление действия которых изменяется вместе с деформацией системы. Типичный пример — гибкий корпус ракеты под действием реакции струи.

Пионером в этой области был Е. Л. Николаи, который в 1928—1929 гг. впервые рассмотрел устойчивость упругого стержня под действием скручивающих моментов и обнаружил, что метод Эйлера приводит в этой задаче к парадоксальным результатам: прямолинейная форма стержня остается устойчивой при всех значениях скручивающего момента. Николаи уловил причину этого парадокса, впервые высказав мысль о том, что метод Эйлера имеет ограниченное применение и что в некоторых задачах его

нужно заменить динамическим методом, т. е. изучать малые колебания упругой системы в окрестности положения равновесия.

Попытки применить метод Эйлера к неконсервативным задачам упругой устойчивости повторялись затем многократно, публиковались ошибочные работы, порождавшие бурные дискуссии. Б. Л. Николаи (видимо, под влиянием работ брата), участвуя в дискуссии, дал в 1939 г. правильное решение одной из задач при помощи динамического метода, устранив таким образом кажущийся парадокс. Тем не менее дискуссии продолжались вплоть до конца 50-х годов, когда В. В. Болотин подверг этот вопрос всестороннему изучению. Он развил методы для решения этих задач с позиций теории устойчивости движения, изучил ряд новых парадоксов, включая парадоксальное влияние малого трения на устойчивость упругих систем, нагруженных неконсервативными силами. Книга В. В. Болотина 1961 г. [33] подвела итог этому этапу развития теории упругой устойчивости, объединив в рамках общего подхода различные неконсервативные задачи, в том числе задачи аэроупругости (флаттера крыльев и элементов обшивки), а также задачи неустойчивости быстро вращающихся роторов.

В задачах об устойчивости обычно предполагалось, что в точках бифуркации всегда происходит либо смена одной устойчивой формы равновесия на другую, либо возникают еще новые неустойчивые формы. Необычный с этой точки зрения пример механической системы, для которой разветвляющаяся форма и старая форма являются одновременно устойчивыми, был исследован А. Ю. Ишлинским, С. В. Малашенко и М. Е. Темченко [34].

Прежде чем перейти к следующему разделу научной деятельности Эйлера, отметим другие направления развития исследований по упругой устойчивости и укажем некоторые основные работы. Ряд исследований был выполнен по изучению устойчивости трехмерных упругих тел в нелинейной постановке (В. В. Новожилов [35], А. Н. Гузь [36]). Разрабатывалось важное направление, связанное с изучением устойчивости оболочек (А. В. Погорелов [37], В. И. Феодосьев [38]; подробная библиография по вопросам устойчивости оболочек и пластин содержится в книге А. С. Вольмира [39]). Содержательное развитие и обобщение концепции устойчивости связаны с учетом неупругого поведения элементов конструкций. Данное обобщение было вызвано, в частности, рассмотрением устойчивости коротких колонн, а также изучением устойчивости сжатых пластинок и оболочек при высоких температурах. Теория устойчивости стержней и тонкостенных элементов конструкций с учетом пластических свойств материалов построена в работах Ф. Энгессера [40], Т. Кармана [41], А. А. Ильюшина [42, 43]. Устойчивость вязкопластических тел изучалась А. Ю. Ишлинским [44, 45]. Исследованию устойчивости при ползучести посвящены работы Ю. Н. Работнова [46] и Н. Хоффа [47].

### 3. КОЛЕБАНИЯ

Цикл исследований посвящен Эйлером динамике упругих тел. В этом направлении им изучаются колебания струн, упругих стержней, мембран и пластин. На примере рассмотрения вынужденных гармонических колебаний простого осциллятора изучено явление резонанса. В основном исследования проведены в предположении о малости колебаний с исполь-

зованием линеаризованных постановок задач. Предположение о малости колебаний позволяет ограничиться рассмотрением «изохронных» движений. Полезным в этом случае оказывается сопоставление колебаний упругого тела с колебаниями маятника, осуществляющимися синхронно. Кроме того, Эйлером в работах по динамике колебательных систем широко используется принцип Даламбера, причем в современной трактовке, что, по-видимому, позволяет считать Эйлера одним из авторов указанного принципа.

При изложении работ Эйлера в области колебаний упругих тел следует отметить, что его деятельность в этом направлении тесно переплетается с деятельностью другого знаменитого ученого Д. Бернулли. На протяжении ряда лет между этими учеными велась оживленная переписка, освещающая проводимые ими исследования в вопросах теории упругих колебаний, представляющих для них обоюдный интерес. Поэтому нет ничего удивительного, что многие задачи о колебаниях упругих тел были решены ими практически одновременно, а некоторые проведенные исследования дополняют друг друга. Вместе же эти исследования являются основополагающими для науки о колебаниях упругих тел. Следует заметить, что применявшиеся Эйлером и Бернулли методы исследований были различными. Мы не будем касаться здесь вопросов приоритета, а остановимся на изложении основных результатов по материалам опубликованных работ Эйлера в области колебаний упругих тел. (О деятельности Д. Бернулли из-за краткости изложения упомянем только в связи с некоторыми работами Эйлера.)

Под влиянием работ Д. Бернулли Эйлер [48] рассматривает задачу о колебаниях гибких нитей, несущих произвольное число грузов (рис. 10). На основании опытов он замечает, что большие колебания таких систем происходят нерегулярно и получающиеся движения весьма разнообразны. По мнению Эйлера, исследование таких задач не только затруднительно, но и превышает человеческие возможности, если только не наложить дополнительные ограничения. Поэтому в дальнейшем [48—52] колебания предполагаются малыми. Наряду с изучаемой системой в рассмотрение вводится математический маятник, колебания которого синхронны колебаниям подвешенных грузов. Ставится задача отыскания формы системы, колеблющейся таким образом, что ее отдельные части приходят в вертикальное положение одновременно. Требуется также определить и саму длину этого маятника.

В первой работе Эйлера [48] и в последующих его публикациях, посвященных проблемам колебаний, оказывается существенным следующее обстоятельство. Эйлер замечает, что для математического маятника отношение ускоряющей силы к весу равняется отношению смещения к длине маятника. С использованием указанной пропорции, которая, как считается, принимает одно и то же значение для всех элементов системы, в случае ее простых колебаний устанавливаются уравнения баланса сил и находится длина маятника. В случае нити с двумя подвешенными массами Эйлером получено квадратное алгебраическое уравнение, служащее для определения отношения смещений грузов (форм колебаний), и формула

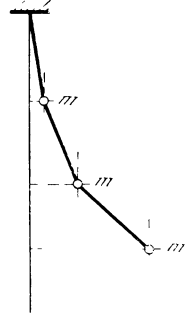


Рис. 10

для подсчета приведенной длины маятника. В этой работе найдено также решение для нити с  $n$  одинаковыми равноотстоящими грузами.

В другой работе [49], посвященной задачам динамики и названной «Новый и простой метод для малых колебаний твердых и гибких тел», Эйлер предлагает новый подход, обладающий, по его мнению, «величайшей общностью» и «хорошо обоснованный принципами статики», так что с его помощью «можно решать с замечательной простотой задачи колебаний стержней и канатов». В предположении о малости колебаний и их изохронности колебаниям математического маятника Эйлер выражает ускоряющую силу через длину маятника и составляет уравнение равенства моментов. Для этого используется указанная выше пропорция. Таким образом обходится необходимость составления собственно уравнений динамики и время, по существу, исключается из рассмотрений. Для упругих стержней, закрепленных верхним концом и совершающих плоские колебания, уравнение формы прогибов записывается в виде

$$Ek^2y'' = \frac{g}{L} \int_0^x dx \int_0^x \sigma y dx, \quad \sigma = \rho A,$$

где  $L$  — длина маятника,  $\rho$  — плотность,  $g$  — ускорение свободного падения,  $A$  — площадь поперечного сечения стержня. Из этого уравнения после двукратного дифференцирования получается уравнение четвертого порядка

$$K^4 (d^4y/dx^4) = y \quad (K^4 = Ek^2L/\sigma g),$$

ранее выведенное Д. Бернулли. Эйлеру в данной работе не удается проинтегрировать уравнение четвертого порядка, однако он устанавливает формулу для частот колебаний

$$\nu = \frac{\zeta^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{Ek^2}{\rho A}}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{5}{2}};$$

На основании этой формулы Эйлер делает заключение о том, что периоды колебаний упругих стержней пропорциональны квадратам их длин и обратно пропорциональны квадратным корням из их абсолютных жесткостей. По мнению К. Трусделла [4], важный результат этой работы Эйлера заключается в подтверждении концепции Г. В. Лейбница о связи упругих и акустических свойств.

Большое значение в теории вынужденных колебаний упругих тел играет понятие резонанса. По-видимому, одной из первых работ, где явление резонанса получает объяснение, является работа Эйлера «О новом виде колебаний» [50]. В этой работе им рассматриваются вынужденные линейные колебания простого осциллятора под воздействием гармонической нагрузки и дается решение задачи в квадратурах. Эйлер показывает, что в особом случае «обычное решение должно быть заменено другим, описывающим неограниченное возрастание колебаний». Особый случай характеризуется совпадением частоты воздействий с собственной частотой свободных колебаний осциллятора.

Обстоятельные исследования упругих колебаний проведены Эйлером в трактате по вариационному исчислению [2]. Здесь рассматриваются малые колебания однородных стержней длины  $a$  и абсолютной жесткости

$E k^2$ , причем с самого начала оговариваются принимаемые в работе допущения. Так, в рассмотрение не вводятся силы тяжести, а перемещения стержня при колебаниях предполагаются «чрезвычайно малыми». Второе предположение позволяет принять приближенное выражение для радиуса кривизны  $R = dx^2/d^2y$ . Для определенности вначале считается, что стержень закреплен консольно в точке  $x = a$ . Из сопоставления с колебаниями изохронного маятника длины  $f$  получается выражение для силы  $M y dx/af$ , побуждающей к движению элемент стержня, обладающий массой  $M dx/a$  ( $M$  — масса стержня). Выражение же для упругой силы, возникающей в изогнутом стержне, известно из исследованных ранее задач статики. Эйлер утверждает, что «если бы к отдельным элементам пластинки  $Mt$  были приложены в обратных направлениях  $M\pi$  равные силы  $M y dx/af$ , то пластинка уравнилась бы в состоянии  $BMa$ » [2, с. 526] (см. рис. 11).

В трактате делается вывод, что «пластинка во время колебаний подвергнется такому же изгибу, какой она приняла бы, будучи неподвижной, если бы в отдельных ее точках  $M$  на нее действовали силы  $M y dx/pf$  в направлениях  $M\pi$ » [Там же]. Таким образом, Эйлер сформулировал основной принцип механики, значение которого для последующих работ по динамике трудно переоценить.

Далее в трактате осуществляется суммирование сил для всех точек упругой линии и при помощи двойного дифференцирования выводится уравнение четвертого порядка <sup>2</sup>

$$E k^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{M y}{a f} .$$

Вводя обозначение  $E k^2 a f / M = c^4$  и привлекая результаты своих работ по интегрированию дифференциальных уравнений высоких порядков, Эйлер дает решение выведенного уравнения упругой линии

$$y = A e^{x/c} + B e^{-x/c} + C \sin \frac{x}{c} + D \cos \frac{x}{c} .$$

Весьма подробно излагается Эйлером процесс отыскания постоянных интегрирования  $A, B, C, D$  и константы  $c$ . Для этого применяются условия  $y = b, d^2 y/dx^2 = 0, d^3 y/dx^3 = 0$  при  $x = 0$  и  $y = 0, dy/dx = 0$  при  $x = a$ . Для нахождения параметра, при помощи которого определяется период колебаний, Эйлер получает уравнение

$$e^{a/c} = \frac{-1 \pm \sin(a/c)}{\cos(a/c)}$$

и обнаруживает, что существует бесконечное множество отношений, удовлетворяющих этому уравнению. На основании этого им делается вывод о существовании бесчисленного множества различных способов колебаний одной и той же пластинки. Заметим, что в предыдущих работах по динамике этот факт не был понят Эйлером. Другое обстоятельство, на которое

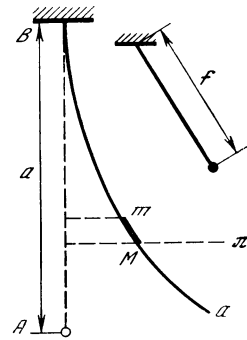


Рис. 11

<sup>2</sup> Несколько ранее это уравнение было получено Д. Бернулли. Однако найти решение этого уравнения ему не удалось.

нельзя не обратить внимание, — это точность проводимых расчетов. Все вычисления проведены с десятью, а в некоторых случаях и с двенадцатью знаками после запятой. Так, для «быстроты» колебаний находится значение

$$a/c = 1,8751040813.$$

Наряду с первым тоном находится и второй тон колебаний и рассматриваются способы определения более высоких тонов. Согласно проведенным расчетам первый тон относится ко второму как квадраты чисел 1,8751040813 и 4,6940910795, т. е. как 1 и 94/15, откуда Эйлер заключает, что второй тон будет составлять для первого двойную октаву с квинтой и почти с полутуноном. Столь же исчерпывающее исследование упругих колебаний проведено Эйлером для свободных стержней, а также в случаях опирания и жесткого закрепления обоих концов.

Позже [53, 54] при рассмотрении поперечных колебаний упругих стержней Эйлер выражает инерционную силу через частную производную второго порядка от функции прогибов  $y$  по времени  $t$ . С учетом этого после приравнивания моментов получается уравнение малых колебаний [53]

$$-\int_0^x x dx \int_0^x \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = Ek^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Решение этого интегродифференциального уравнения при соответствующих граничных условиях находится в рядах. Затем в [54] результаты обобщаются на случай колебаний упругого стержня при наличии нормальных и растягивающих сил.

Задача о колебаниях струн — одна из наиболее древних. Интерес к этой задаче был обусловлен в первую очередь совершенствованием музыкальных инструментов. Существенный вклад в разработку математической теории колебания струн был внесен Эйлером [55—59]. Рассмотренные им задачи относились к колебаниям неоднородных струн. Первый результат по учету неоднородности струн был получен в работе [55], где уравнение колебаний проинтегрировано для одного частного случая изменения толщины струны. Далее в [56] для расчета движений неоднородных струн Эйлер развивает обратный метод. В другой статье [57] Эйлер обсуждает условия, которые должны выполняться в точках соединения участков струны разной толщины. Колебаниям струн с произвольным распределением толщины и струн, составленных из произвольного числа частей неодинаковой толщины, посвящены работы [58] и [59]. Однако в этих работах допущены неточности (см. [4]), не позволившие исследовать зависимость частот от распределения толщины по струне. В завершающей данный цикл исследований работе Эйлера [60], опубликованной уже после его смерти, обсуждаются результаты Д. Бернулли по колебаниям неоднородных струн и устанавливаются границы применимости его метода.

В указанных работах Эйлера, а также в работах других ученых рассматривались задачи изгиба и колебаний только одномерных тел, таких, как струны, колонны, балки и криволинейные стержни. Переход к изучению двумерных тел представлялся весьма затруднительным. Эйлер, по видимому, первым (см. [52]) предпринял попытку математического описания деформации упругих поверхностей, т. е. таких тел, у которых одно

измерение мало по сравнению с двумя другими. С целью получения уравнений малых колебаний мембраны рассматривались два ортогональных набора упругих волокон, ориентированных соответственно вдоль осей  $x$  и  $y$ . Расстояние между волокнами равно  $\delta$ . Нетрудно заметить, что проекции на ось  $z$  сил, обусловленных натяжением нитей, соответственно равны  $T_x \delta^2 \partial^2 z / \partial x^2$  и  $T_y \delta^2 \partial^2 z / \partial y^2$ . Приравняв сумму этих величин произведению массы  $\tau \delta^2$  выделенного элемента на ускорение  $\partial^2 z / \partial t^2$ , Эйлер приходит к уравнению колебаний мембраны, которое в случае одинаковой упругости волокон обоих семейств ( $T_x = T_y$ ) записывается в виде

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad c^2 = \frac{T}{\tau}.$$

Решение этого уравнения для прямоугольной мембраны с нулевыми начальными скоростями и при условии закрепления ее краев дается простыми выражениями

$$z = A \sin \omega t \sin \frac{\beta x}{a} \sin \frac{\gamma y}{b},$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\beta^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2}, \quad v = \frac{1}{2} c \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{1/2};$$

здесь устранены несущественные опечатки, отмеченные в [4]. Эйлер получает также уравнение колебаний в полярных координатах  $r, \varphi$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}.$$

В случае круглой мембраны зависимость  $z$  от  $t, \varphi$  и  $r$  представляется в виде  $z = u(r) \sin(\omega t + C) \sin(\beta \varphi + D)$ , где функция  $u(r)$  определяется Эйлером как решение обыкновенного дифференциального уравнения, названного впоследствии уравнением Бесселя.

Теория колебаний упругих тел получила существенное развитие в трудах русских и советских ученых. Много сделал в теоретическом и прикладном отношении для этого раздела механики С. П. Тимошенко. Существенное влияние на исследования по упругим колебаниям оказали работы А. А. Андропова и его научной школы. Большое значение для изучения колебаний с большими амплитудами упругих элементов конструкций и вибраций нелинейно упругих систем имеют методы осреднений, разработанные Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым, Ю. А. Митропольским и их учениками.

Еще одно направление развития идей Эйлера — распространение анализа колебаний и устойчивости на упругие системы, нагруженные периодическими силами. Пионерская работа в этой области была выполнена в 1924 г. Н. М. Беляевым [61]. Вопросы колебаний и устойчивости упругих систем при периодических воздействиях и родственные задачи параметрических резонансов были разработаны в основном советскими учеными. Важные шаги были сделаны Н. Е. Кочиным, рассмотревшим в 1934 г. параметрические колебания коленчатых валов, Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, обобщившими в 1935 г. результаты Беляева на широкий класс задач упругой устойчивости, В. Н. Челомеем, посвятившим динамической устойчивости упругих систем свою докторскую диссертацию. В. Н. Челомей обнаружил любопытное явление стабилизации упругих систем под действием периодических сил и продемонстрировал совсем иные

интересные гидродинамические и гидроупругие свойства, связанные с параметрическим резонансом [62] (см. также [63]). Колебаниями и устойчивостью упругих систем при периодических воздействиях занимался В. В. Болотин. Он впервые рассмотрел эти задачи в нелинейной постановке [64].

\* \* \*

Леонард Эйлер не занимался выводом общих уравнений теории упругости, как это он сделал в гидродинамике. Однако тот вклад, который он внес в механику деформируемого твердого тела, позволяет считать его одним из основателей этой науки.

Для ряда поколений ученых работы Эйлера являются эталоном по ясности постановки задач, глубине исследований и законченности получаемых результатов. Многие ученые в области механики учились на работах Эйлера и продолжали их. В значительной степени это относится к русским и советским ученым, последовательно развивавшим теорию и методы Эйлера.

Следует сказать, что еще далеко не все выяснено в творческом наследии Эйлера и, в частности, в его работах по механике. Не все работы Эйлера получили правильную трактовку. Некоторые полученные им результаты были «переоткрыты» впоследствии другими учеными. Это отчасти объясняется трудностями чтения его оригинальных работ, написанных на латинском языке. Только немногие работы Эйлера (в основном по математике) переведены на русский язык. Представляется целесообразным продолжить работу по переводу на русский язык трудов Эйлера. Здесь уместно вспомнить слова другого великого ученого — П. С. Лапласа: «Читайте Эйлера, читайте — он учитель всех нас».

Большую ценность представляют и дальнейшие публикации видных ученых, посвященные разбору работ Эйлера по механике упругих тел. Несомненно, что дальнейшее изучение наследия Эйлера и пропаганда его работ будут способствовать научному прогрессу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Euler L. Solutio problematis de invenienda curva quam format lamina utcumque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata // Comment. Acad. sci. Petrop. (1728). 1732. Vol. 3. P. 70—84; Opera II-10.*
2. *Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Lausanne; Geneve, 1744; Opera I-24.* Пер. на рус. яз.: *Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. М.: Гостехиздат, 1934. 600 с.*
3. *Euler L. De oscillationibus annulorum elasticorum // Opera postuma. SPb., 1862. Vol. 2. P. 129—131; Opera II-11.*
4. *Truesdell C. The rational mechanics of flexible or elastic bodies. 1638—1788 // Euler L. Opera II-11. Pt. 2. 435 p.*
5. *Kirchhoff G. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes // J. für reine und angew. Math. 1859. Bd. 56, H. 4. S. 285—313.*
6. *Николаи Е. Л. К задаче об упругой линии двойной кривизны. Пг., 1916; Труды по механике. М.: Гостехтеориздат, 1955. С. 45—277.*
7. *Полов Е. П. Некоторые задачи статики тонких стержней. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 170 с.*
8. *Euler L. Sur la force des colonnes // Hist. Acad. sci. Berlin (1757). 1759. Vol. 13. P. 252—282; Opera II-17.*
9. *Николаи Е. Л. О работах Эйлера по теории продольного изгиба // Уч. зап. Ле-*



- нингр. ун-та. 1939. № 44. С. 5—19; Труды по механике. М.: Гостехтеориздат, 1955. С. 436—454.
10. Euler L. Determinatio onerum, quae columnae gestare valent // Acta Acad. sci. Petrop. (1778 : 1). 1780. P. 121—145; Opera II-17.
  11. Euler L. Examen insignis paradoxii in theoria columnarum occurrentis // Acta Acad. sci. Petrop. (1778 : 1). 1780. P. 146—162; Opera II-17.
  12. Euler L. De altitudine columnarum sub proprio pondere congruentium // Acta Acad. sci. Petrop. (1778 : 1). 1780. P. 163—193; Opera II-17.
  13. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1964. 336 с.
  14. Динник А. П. Устойчивость упругих систем. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950. 133 с.
  15. Ишлинский А. Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95, № 3. С. 477—479.
  16. Mises R. Ausbiegung eines auf Knickung beanspruchten Stabes // Ztschr. angew. Math. und Mech. 1924. Bd. 4. S. 435—436.
  17. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 532 с.
  18. Lagrange J. L. Sur la figure des colonnes // Miscellanea Taurinensia (1770—1773). 1774. Т. 5. P. 123—166; Oeuvres. Paris, 1868. Т. 2. P. 125—170.
  19. Ясинский Ф. С. О сопротивлении продольному изгибу. СПб., 1894; Избр. работы по устойчивости сжатых стержней. М.: Гостехиздат, 1952. С. 11—137.
  20. Love A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927. 642 p. New York: Dover, 1944. 643 p. Пер. на рус. яз.: Ляв А. Математическая теория упругости. М.: Гостехиздат, 1935. 674 с.
  21. Крылов А. Н. О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе // Изв. АН СССР. Отд. мат. и естеств. наук. 1931. № 7. С. 963—1012; Собр. тр. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1937. Т. 5. С. 181—226.
  22. Todhunter I., Pearson K. History of the theory of elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1886—1893. Vol. 1—2.
  23. Lagrange J. L. Sur la force des ressorts pliés // Mém. Acad. sci. Berlin (1769). 1771. Т. 25. P. 167—203; Oeuvres. Paris, 1869. Т. 3. P. 77—110.
  24. Prandtl L. Kipperscheinungen. Ein Fall von instabilem elastischen Gleichgewicht: Diss. München, 1899. Nürnberg, 1900; Gesammelte Abhandlungen. Berlin etc., 1961. Bd. 1. S. 10—74.
  25. Тимошенко С. П. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки под влиянием сил, действующих в плоскости ее наибольшей жесткости // Изв. СПб. политехн. ин-та. 1905. Т. 4, вып. 3—4. С. 151—219; 1906, Т. 5, вып. 1—2. С. 3—34; вып. 3—4, С. 263—292; Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Физматгиз, 1971. С. 9—105.
  26. Тимошенко С. П. Об устойчивости упругих систем. Применение новой методы к исследованию устойчивости некоторых мостовых конструкций // Изв. Киев. политехн. ин-та. 1910. Т. 10, кн. 4. С. 375—560; Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Физматгиз, 1971. С. 208—383.
  27. Лейбензон Л. С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек // Уч. зап. Юрьев. ун-та. 1917. № 1; Собр. трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1951. Т. 1. С. 50—85.
  28. Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. журн. 1954, Т. 6, № 2. С. 140—146.
  29. Балабух Л. И., Яковенко М. Г. Уравнение бифуркации равновесия упругого изотропного тела в скоростях изменения лагранжевых координат // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, № 4. С. 693—702.
  30. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
  31. Образцов И. Ф. К расчету тонкостенных стержней на устойчивость при изгибе // Тр. Моск. авиац. ин-та. 1953. № 26. С. 5—85.
  32. Лаурентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 779—782.
  33. Болотин В. В. Некоэрвативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
  34. Ишлинский А. Ю., Малащенко С. В., Темченко М. Е. О разветвлении устойчивых положений динамического равновесия одной механической системы // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1958. № 8. С. 53—61.
  35. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат. 1948. 248 с.

36. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1971. 276 с.
37. *Погорелов А. В.* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М.: Наука, 1967. 280 с.
38. *Феодосьев В. И.* Об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием внешнего равномерно распределенного давления // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, № 1. С. 35—42.
39. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
40. *Kármán Th.* Untersuchungen über Knickfestigkeit: Diss. Göttingen, 1909. Berlin, 1909; Collected works. London, 1956. Vol. 1. P. 90—140.
41. *Engesser F.* Widerstandsmomente und Kernfiguren bei beliebigem Formänderungsgesetz (Spannungsgesetz) // Ztschr. VDI. 1898. Bd. 42, H. 33. S. 903—907; H. 34. S. 927—931.
42. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
43. *Ильюшин А. А.* Упруго-пластическая устойчивость пластин // Прикл. математика и механика. 1946. Т. 10, № 5—6. С. 623—638.
44. *Ишлинский А. Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения полосы и прута // Прикл. математика и механика. 1943. Т. 7, № 2. С. 109—130.
45. *Ишлинский А. Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения круглой пластинки // Прикл. математика и механика. 1943. Т. 7, № 6. С. 405—412.
46. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
47. *Хофф Н.* Продольный изгиб и устойчивость. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 154 с.
48. *Euler L.* De oscillationibus fili flexilis quotcunque pondusculis onusti // Comment. Acad. sci. Petrop. (1736.) 1741. Vol. 8. P. 30—47; Opera II-10.
49. *Euler L.* De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium. Methodus nova et facilis // Comment. Acad. sci. Petrop. (1734—1735). 1740. Vol. 7. P. 99—122; Opera II-10.
50. *Euler L.* De novo genere oscillationum // Comment. Acad. sci. Petrop. (1739). 1750. Vol. 11. P. 128—149; Opera II-10.
51. *Euler L.* De motu corporum flexibilium // Comment. Acad. sci. Petrop. (1744—1746). 1751. Vol. 14. P. 182—196; Opera II-10.
52. *Euler L.* De motu vibratorio tympanorum // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1764). 1766. Vol. 10. P. 243—260; Opera II-10.
53. *Euler L.* De motu vibratorio laminarum elasticarum, ubi plures novae vibrationum species hactenus non pertractatae evolvuntur // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1772). 1773. Vol. 17. P. 449—487; Opera II-11.
54. *Euler L.* Investigatio motuum, quibus laminae et virgae elasticae contremiscunt // Acta Acad. sci. Petrop. (1779 : 1). 1782. P. 103—161; Opera II-11.
55. *Euler L.* De motu vibratorio chordarum inaequaliter crassarum // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1762—1763). 1764. Vol. 9. P. 246—304; Opera II-10.
56. *Euler L.* Recherches sur le mouvement des cordes inegalement grosses // Miscellanea Taurinensia (1762—1765). 1766. T. 3. P. 25—59; Opera II-10.
57. *Euler L.* Animadversiones in solutionem Bernoullianam de motu chordarum ex duabus partibus diversae crassitiei compositarum // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1772). 1773. Vol. 17. P. 410—424; Opera II-11.
58. *Euler L.* De motu vibratorio chordarum ex partibus quotcunque diversae crassitiei compositarum // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1772). 1773. Vol. 17. P. 422—431; Opera II-11.
59. *Euler L.* De motu vibratorio chordarum crassitiei utcunque variabili praeditarum // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1772). 1773. Vol. 17. P. 432—448; Opera II-11.
60. *Euler L.* Dilucidationes de motu chordarum inaequaliter crassarum // Acta Acad. sci. Petrop. (1780 : 2) 1784. P. 99—132; Opera II-11.
61. *Беляев Н. М.* Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил // Инженерные сооружения и строительная механика. М.: Изд-во «Путь», 1924. С. 149—167.
62. *Челомей В. И.* О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110, № 3. С. 345—347.
63. *Челомей В. И.* О динамической устойчивости элементов авиационных конструкций // Гражд. авиация. 1940. № 12. С. 27—28.
64. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.

# ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЙЛЕРА ПО МЕХАНИКЕ ПЕРВОГО ПЕТЕРБУРГСКОГО ПЕРИОДА

Н. И. ПОЛЯХОВ

Говоря о творчестве Л. Эйлера в первый период его пребывания в Петербурге (1727—1741), следует отметить, что из 28 статей, напечатанных в Петербургской академии наук за 1727—1734 гг., девять работ посвящены непосредственно механике, а 11 работ связаны с решением механических задач. Это говорит о том, что молодой Эйлер начал заниматься механикой с момента своего приезда в Петербург. Однако дело не только в этом факте занятий механикой, а главным образом в том, что среди этих работ был вышедший в 1736 г. двухтомный трактат «Механика, или наука о движении, аналитически изложенная» (*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*), который явился первым трактатом по ньютоновской механике, написанным в той форме и тем математическим языком, которые сохранились в своей основе по настоящее время. Это был язык дифференциальных уравнений.

Создатель классической механики Ньютон не разработал общего аналитического метода решения конкретных задач механики. При решении таких задач он пользовался геометрическими методами, применяя их к бесконечно малым фигурам с последующим переходом к пределу. Иначе говоря, Ньютон не пользовался в явной форме аппаратом и символикой дифференциального и интегрального исчисления, им же самим открытых.

Впервые это сделал именно Эйлер, причем его наравне с Ньютоном можно назвать одним из создателей классической механики. Если Ньютон основал механику как раздел физики, то Эйлер создал и развил математический аппарат, эффективно и адекватно выразивший физическое существо этой механики.

Цель, которую ставил себе Эйлер, лучше всего видна из его предисловия к названному выше трактату. Эйлер писал в этом предисловии: «Если анализ где-либо и необходим, так это относится к механике. Хотя читатель и убеждается в истине выставленных предложений, но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что, если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно, если не прибегнет к анализу и те же предложения не разрешит аналитическим методом. Это как раз случилось со мной, когда я начал знакомиться с «Началами» Ньютона и «Форономией» Германа; хотя мне казалось, что я достаточно ясно понял решение многих задач, однако задач, чуть отступающих от них, я уже решить не мог. И вот тогда-то я попытался, насколько умел, выделить анализ из этого синтетического метода и те же предложения для собственной пользы рассмотреть аналитически; благодаря этому я значительно лучше понял суть вопроса. Затем таким же образом я исследовал и другие работы, относящиеся к этой на-

уже, разбросанные по многим местам, и лично для себя я изложил их планомерным и однообразным методом и привел в удобный порядок. При этих занятиях я не только встретился с рядом вопросов, ранее совершенно не разрешенных, которые я удачно разрешил, но и нашел много новых методов, благодаря которым не только механика, но и самый анализ, по видимому, в значительной степени обогатился.

Таким образом, возникло это сочинение по механике, в котором как найденное мною о движении тел у других авторов, так и придуманное мною самим изложено аналитически в удобной последовательности».

Затем Эйлер пишет, что в изданном им трактате он будет «рассматривать тела бесконечно малые, те, которые могут рассматриваться как точки».

В первом томе рассматривается движение свободной точки, во втором — несвободной. Со стороны аксиоматики и физических предпосылок механики Эйлер в общем на позициях Ньютона, хотя в отдельных вопросах взгляды их не совпадают. Первоначально Эйлер определяет, что следует понимать под равномерным движением точки, а затем переходит к рассмотрению неравномерного движения, считая, что малые элементы пути проходят равномерным движением. Рассматривая закон инерции, он замечает, что свойству инерции не очень удачно дано название силы, так как она неоднородна с другими так называемыми силами, как, например, сила тяжести, и не может с ними сравниваться. Под силой Эйлер понимает то же самое, что и Ньютон, согласно которому «приложенная сила есть действие, производимое на тело для изменения его состояния покоя или равномерного и прямолинейного движения». Согласно Эйлеру «сила (*potentia*) есть то усилие (*vis*), которое переводит тело из состояния покоя в состояние движения или видоизменяет его движение». Направлением силы Эйлер называет прямую, по которой она стремится двигать тело. Аксиомы параллелограмма сил Эйлер непосредственно не формулирует, а указывает, что если на точку действует несколько сил, то она получает от них то же движение (*motus*), как если бы на нее действовала одна-единственная сила, эквивалентная им всем. Из этой формулировки видно, что, согласно Эйлеру, в динамике складываются не силы, а количества движения, вызываемые этими силами.

Относительно массы Эйлер держится также точки зрения Ньютона, считая, что массу тела нужно устанавливать по его весу, который пропорционален количеству вещества, заключенному в этом теле.

После изложения основных понятий механики, приведенного в первой главе, Эйлер во второй главе устанавливает формулу, выражающую второй закон Ньютона для случая прямолинейного движения в виде дифференциального уравнения

$$dv = \frac{F}{m} dt,$$

которое и предлагается интегрировать.

Третья глава содержит большое количество задач, относящихся к прямолинейному движению точки под действием сил, зависящих от расстояния. На этих задачах демонстрируется способ интегрирования дифференциального уравнения движения, выражающего основное уравнение динамики. Многие из этих задач являются своего рода примерами на интег-

рирование дифференциальных уравнений, т. е. раздела математического анализа, созданного в значительной мере трудами самого Эйлера. Чисто механическое содержание среди упомянутых задач имеют задачи о гармоническом колебании точки и о движении ее под действием силы притяжения, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

В четвертой главе рассматривается прямолинейное движение точки в сопротивляющейся среде при том, что сила сопротивления пропорциональна первой, второй и затем  $n$ -й степени скорости.

Две последние главы первого тома содержат рассмотрение вопроса о криволинейном движении точки в пустоте, а также в сопротивляющейся среде. Дифференциальные уравнения такого движения Эйлер записывает в форме, которая теперь называется естественной формой, содержащей уравнение в проекции на касательную и нормаль к траектории. Здесь особо следует отметить задачу о движении точки под действием центральной силы, подчиняющейся закону тяготения Ньютона. По сути дела эта задача явилась введением в небесную механику в аналитической форме. В дальнейшем Эйлер развил эту задачу, явившись одним из создателей аналитической небесной механики. Есть здесь также другая основополагающая задача — задача о криволинейном движении точки в сопротивляющейся среде под действием силы тяжести, т. е. задача внешней баллистики. К более подробному рассмотрению этой задачи Эйлер возвращается в 1753 г., находясь уже в Берлине, где он выпускает сочинение под названием «Исследование истинной кривой, которую описывают тела, брошенные в воздухе или в какой-нибудь другой среде». Мы не будем рассматривать здесь эту работу, так как она не относится к петербургскому периоду творчества Эйлера, но отметим несомненное влияние на нее баллистической задачи, рассмотренной Эйлером в его «Механике».

Заканчивая краткий обзор первого тома «Механики» Эйлера, интересно отметить, что в нем Эйлер нигде не пользовался уравнениями механики в проекциях на «неподвижные» декартовы оси, почему в ряде случаев, как он писал позднее в трактате «Теория движения твердых тел» (1765), «приходил к слишком запутанным вычислениям». Уравнения механики в проекциях на декартовы оси были введены последователем Ньютона Маклореном в его сочинении «Трактат о флюксиях» (1742).

Второй том «Механики» содержит учение о несвободном движении по кривой и по поверхности, причем при рассмотрении этих задач используются естественные уравнения движения, которые здесь весьма удобны. Именно в них очевидным образом появляется нормальная реакция, причем в задаче о маятнике при определении реакции Эйлер, следуя Гюйгенсу, считает, что центробежная сила приложена к нити. Рассматривая движение по поверхности, Эйлер выводит формулу для кривизны линии, лежащей на поверхности, а также устанавливает дифференциальное уравнение геодезической линии.

Из всего сказанного выше видно, что Эйлер свел решение задач механики к задачам по интегрированию дифференциальных уравнений и этим самым достиг той цели, которую сформулировал в предисловии к своему сочинению. В этом состоит его огромная заслуга перед естествознанием. Только после его трактата «Механика» механика точки стала наукой, имеющей математический аппарат, адекватно выражающий ее физическую сущность, сформулированную Ньютоном.

Основная идея, заложенная Эйлером в его «Механику», перешла в дальнейшем как в его трудах, так и в трудах его последователей в механику твердого тела, механику жидкости, небесную механику. Эта идея состоит в написании дифференциального уравнения, выражающего второй закон Ньютона, и его интегрировании.

Интересно то обстоятельство, что уже в «Механике» Эйлер намечает план своих дальнейших исследований по различным разделам механики. Согласно этому плану он предполагал написать механику точки, механику твердого тела и механику жидких тел. Он реализовал этот план в отношении двух последних разделов, находясь уже вне Петербурга. «Теория движения твердых тел» была опубликована в 1765 г., а работы по движению жидкостей были выпущены в промежутке 1755—1771 гг. в четырех статьях, напечатанных в мемуарах Берлинской и Петербургской академий наук.

Из всего сказанного можно заключить, что Эйлер наравне с Ньютоном является одним из создателей классической механики, придавшим ей такую форму, благодаря которой она сделалась мощным инструментом современного естествознания, причем основным, начальным сочинением явилась его «Механика», написанная в Петербурге.

# ЗНАЧЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА ПО БАЛЛИСТИКЕ

*А. П. МАНДРЫКА*

Из большого числа работ Л. Эйлера, число которых достигает чуть ли не 800, лишь две посвящены баллистике. Первое исследование Эйлера в этой области представляет собой обширные комментарии к переведенной им с английского языка на немецкий книге Б. Робинса «Новые принципы артиллерии» [1], второе — мемуар 1753 г. [2]. Тем не менее обе работы Эйлера являлись важнейшими из большого числа книг и статей по баллистике, которые были опубликованы в XVIII в. артиллеристами, математиками и механиками, среди которых были виднейшие ученые Европы. Исследование 1753 г. представляет особую ценность, сохранив свое значение в течение более столетия. Именно об этом исследовании и пойдет речь в настоящей статье.

Основная задача внешней баллистики заключается в определении траектории центра массы снаряда под действием силы сопротивления воздуха, направленной в сторону, противоположную вектору скорости, и силы тяжести. В этой постановке, т. е. при учете силы сопротивления воздуха, задача была впервые решена в практическом плане Эйлером.

Естественно, что у него были предшественники. Начиная с античности и позднее, в средневековье и в эпоху Возрождения, ученых занимал вопрос о том, что представляет собой траектория центра массы снаряда (метательной машины или артиллерийского), выброшенного под углом к горизонту. Первоначально рассматривали движение идеализированного объекта, т. е. материальной точки, а сопротивление воздуха в расчет не принимали, полагая его достаточно малым. Наиболее существенные результаты были изложены в трудах Тарталья 1537 и 1546 гг. [3, с. 27—34]. Он решал задачу в только что отмеченной постановке и получил траекторию в виде отрезков двух прямых: одной, совпадающей с линией бросания, направленной под углом к горизонту, и другой — вертикальной, т. е. в направлении действия силы тяжести. Эти два отрезка были соединены дугой окружности. Считалось, что на протяжении первоначального, прямолинейного участка траектории (насильственное движение) на снаряд действует «импетус» — понятие, близкое к тому, которое теперь известно под названием «количества движения». Технические характеристики снаряда — его масса, вес и диаметр — в расчет не принимались. Тарталья, основываясь на созданной им теории, составил таблицы стрельбы для решения практических задач артиллерии. Но решенная Тартальей задача была основана на допущениях, не принимавших в расчет реальные факторы. Поэтому в артиллерии длительное время пользовались таблицами, которые были получены в результате опытных стрельб.

Новое в теории движения материальной точки — абстракции сферического снаряда или ядра — было внесено Галилеем в 1632 г. [3, с. 74—86].

Он решал задачу с точки зрения складывавшихся положений динамики, стимулированной, однако, все теми же запросами артиллерии. Основная заслуга Галилея заключалась в том, что он отказался от понятия «импелтуса» как фактора, приводящего снаряд в движение. Главным же было то, что он установил представление об ускорении силы тяжести, т. е. ее кинематическое проявление. В итоге Галилей мог с полным основанием принять в расчет действие на снаряд силы тяжести, обуславливающей кривизну траектории, и показал, что, когда материальная точка выброшена горизонтально, ее траектория представляет собой нисходящую ветвь параболы, которую только и рассматривал. Это, собственно, подтверждает, что Галилей не имел непосредственно в виду решение задачи артиллерийской практики.

Торричелли пошел дальше и в 1644 г. составил, пользуясь результатами Галилея, таблицы синусов двойных углов бросания, которые были использованы в артиллерии [3, с. 86—95]. В XVII в. начали широко использоваться бомбы при стрельбе из мортир. Но вследствие низкого уровня технологии производства они изготавливались с большим эксцентриситетом, что сильно увеличивало рассеивание точек падения. Поэтому артиллеристы в надежде получить лучшие результаты отказались от эмпирических таблиц стрельбы и обратились к тем, которые были составлены на основании теории Галилея, получившей название параболической [4].

Параболическая теория так же, как и теория Тартальи, не учитывала геометрических и весовых характеристик снаряда. В случае, когда можно было абстрагироваться от действия силы сопротивления воздуха, траектория определялась лишь начальной скоростью и углом бросания. Поэтому эта теория могла быть использована лишь в отдельных граничных случаях. Один из них возник в XVII в. В то время при стрельбе бомбами из мортир, когда начальная скорость была мала, а вес снаряда сравнительно велик, было допустимо силу сопротивления воздуха в расчет не принимать. Другой случай, относящийся уже к XX в., был связан со стрельбой на большие дальности. При этом верхняя часть траектории проходит через разреженные слои атмосферы, почему при ее вычислении сопротивление воздуха можно также не учитывать и эту ветвь траектории вычислять как параболическую.

Новый шаг в развитии внешней баллистики относится к концу XVII в. Тогда многие ученые обратили внимание на силу сопротивления воздуха как на фактор, влияющий на траекторию материальной точки, брошенной под углом к горизонту. Особо следует остановиться на формуле Ньютона для силы сопротивления воздуха, предложенной в 1687 г. [5]. Здесь были введены характеристики, определяющие зависимость этой силы как от параметров снаряда и площади его поперечного сечения, физических свойств атмосферы, т. е. ее плотности, так и от скорости, с какой он перемещается. Согласно Ньютону, эта сила пропорциональна квадрату скорости. Имелся в формуле Ньютона и коэффициент, который в его время принимался постоянным. Спустя столетия в соответствии с опытами Робинса Эйлер в 1745 г. показал, что этот коэффициент зависит от скорости. Много позднее он стал называться функцией сопротивления.

Решению основной задачи с учетом силы сопротивления воздуха, выраженной квадратичной формулой, занимались многие математики и механики конца XVII и начала XVIII вв. Однако их исследования носили



или частный характер, как, например, у самого Ньютона, или общий механико-математический, как у Я. Германа (1716) и И. Бернулли (1719).

Первое исследование Эйлера было помещено в его «Механике» 1736 г. в качестве решения конкретной задачи — определения траектории материальной точки, выброшенной под углом к горизонту [6]. Результат был сведен к квадратурам, которые в то время Эйлер не вычислил. Вот почему этот результат не был использован для решения задач, выдвигаемых практикой. Вскоре стало очевидным, что параболическая теория непригодна для вычисления таблиц при стрельбе из мортир и что необходимо учитывать действие на снаряд сил сопротивления воздуха.

В 1753 г. Эйлер написал, а в 1755 г. опубликовал свой упомянутый мемуар, посвященный решению той же задачи [2], которое уже не сводилось лишь к квадратурам. Он предложил и метод их вычисления. Воспользовавшись им в конце XVIII в., Гревениц составил баллистические таблицы для сферического снаряда, а в середине XIX в. И. К. Ф. Отто и А. Ф. Сиаччи составили таблицы для продолговатого снаряда. Этими таблицами можно было пользоваться при вычислении элементов траектории, когда начальная скорость снаряда не превышала 240 м/с [3, с. 186—193].

Из опубликованных в XVIII в. мемуаров по баллистике только этот один нашел практическое приложение, правда, только для случая стрельбы сферическими снарядами и для ограниченного диапазона скоростей. Но не в одном этом состояла заслуга Эйлера.

После того как в рассмотрение была введена сила сопротивления воздуха, во внешней баллистике стали рассматривать не абстрактную материальную точку, а реальный технический объект — снаряд. Вплоть до середины XIX в. он имел еще сферическую форму, вследствие чего не отличался разнообразием конфигурации своей головной части, что определяло постоянство коэффициента формы, который фигурирует в современных дифференциальных уравнениях движения центра массы снаряда. Но в уравнениях, составленных Эйлером, имелись другие характеристики снаряда, как, например, его вес и площадь поперечного сечения. Следовательно, это была уже не материальная точка, а реальный технический объект. Таким образом, Эйлер решил основную задачу внешней баллистики для сферического снаряда. Используемая Эйлером формула Ньютона для силы сопротивления воздуха открывала дорогу при использовании найденного решения для анализа более общих случаев, т. е. стрельбы продолговатыми снарядами с учетом изменения плотности воздуха с высотой и при условии, что скорость снаряда превышает скорость звука. Таким образом, Эйлер внес во внешнюю баллистику то принципиально новое, что нашло применение во второй половине XIX в. и позднее, когда гладкостенные орудия уступили место нарезным.

В заключение следует сказать, что Эйлер, решая основную задачу внешней баллистики, впервые ввел в рассмотрение три объекта: снаряд, воздух и поле силы тяжести. Именно это обстоятельство позволяет считать Эйлера основоположником внешней баллистики как технической науки в современном понимании. Учет перечисленных факторов дает возможность утверждать это с достаточным основанием [7].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Robins B.* Neue Grundsätze der Artillerie enthaltend die Bestimmung der Gewalt des Pulvers nebst einer Untersuchung über den Unterschied des Widerstands der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen, aus dem Englischen des Hrn. Benjamin Robins übersetzt und mit den nötigen Erläuterungen und vielen Anmerkungen versehen von Leonhard Euler. Berlin, 1745; Opera II-14.
2. *Euler L.* Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jettés dans l'air ou dans un autre fluide quelconque // *Mém. Acad. sci.* Berlin. (1753). 1755. T. 9. P. 321—352; Opera II-14.
3. *Мандрыка А. П.* История баллистики (до середины XIX в.). М.; Л.: Наука, 1964.
4. *Мандрыка А.* Teoria paraboliczna a strzelanie bombami z moździerzy // *Kwart. hist. nauki i techn.* 1960. T. 5. N 3/4. S. 361—368.
5. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии // *Крылов А. И.* Собр. трудов. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. Т. 7.
6. *Euler L.* *Mechanica sive motus scientia analytice exposita.* Petropoli, 1736. Vol. 1—2; Opera II-1,2.
7. *Мандрыка А. П.* Очерки развития технических наук. Механический цикл. М.; Л.: Наука, 1984.

# ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР И РАЗВИТИЕ АСТРОНОМИИ В РОССИИ

*В. К. АБАЛАКИН, Е. А. ГРЕБЕНИКОВ*

## ВВЕДЕНИЕ

Во все исторические эпохи познание окружающего мира служило первопричиной творческой работы великих ученых. Среди гениев, полностью отдавших все свои духовные силы и знания на благо развития науки, весьма почетное место занимает Леонард Эйлер.

Л. Эйлер сыграл выдающуюся роль в развитии всего естествознания своей эпохи, а многие его идеи и результаты стали отправной точкой для большого числа самостоятельных областей знания и не потеряли своей значимости и в последующих веках. Это относится и к классической астрономии, которая благодаря трудам Эйлера и его коллег из Петербургской и Берлинской академий достигла в XVIII столетии невиданного ранее расцвета.

Первый петербургский период жизни Эйлера охватывает с 1727 по 1741 г., второй — 1766—1783 гг. С 1741 по 1766 г. Эйлер прожил в Берлине, куда он был приглашен прусским королем Фридрихом II для работы в Берлинской академии. Но и в берлинский период жизни Эйлер никогда не прекращал научные связи с Петербургской академией.

Невозможно в кратком докладе подробно проанализировать выдающийся вклад Эйлера в классическую астрономию хотя бы потому, что количество написанных им астрономических работ значительно превышает сотню. Перечень этих работ можно найти в обширном обзоре, подготовленном М. Ф. Субботиным в 1957 г. к юбилейной сессии Академии наук СССР, посвященной 250-летию со дня рождения Эйлера [1].

Постараемся в первую очередь выделить те открытые Эйлером пути в астрономии, которые и в наше время являются магистральными направлениями этой науки. Это тем более актуально, что до сих пор еще не написана детальная история развития астрономических теорий в XVIII столетии и поэтому дать полное исчерпывающее представление о всей деятельности Эйлера в астрономии пока невозможно. С другой стороны, известно, что его астрономические интересы были настолько многообразны, что «охватить» их несколькими направлениями весьма затруднительно.

Мы сочли также целесообразным описать содержание некоторых из его работ, стоящих как бы особняком от основных его методов и результатов, но все же имеющих самостоятельное научное или методическое значение (или и то и другое). Есть еще одно немаловажное обстоятельство, побудившее нас к этому. Дело в том, что многие астрономические работы Эйлера были опубликованы в малодоступных ныне изданиях Петербургской и Берлинской академий, до последнего времени не переиздавались и не переводились, а потому не очень читались последующими поколениями

астрономов, многие были и вовсе забыты. Большинство астрономов, живших в XIX и XX вв., познакомились с его идеями в основном по работам П. С. Лапласа и К. Ф. Гаусса в преобразованном виде, так что идеи и открытия Эйлера не всегда связывались с его именем, его приоритет во многих случаях был забыт и в силу этого его влияние на прогресс астрономической науки в историко-научной литературе зачастую преуменьшалось.

Изучение работ Эйлера в области астрономии полезно во многих отношениях для современного астронома-теоретика. Многие из его идей не исчерпаны переоткрытиями ученых последующих поколений. Работы Эйлера по астрономии отличаются непревзойденным мастерством педагога и мыслителя, при этом читатель ощущает всегда интерес Эйлера к решению рассматриваемой задачи, душевный подъем, возбужденный в нем этой задачей. Глубокое эмоциональное подсознательное «сопровождение» работ Эйлера помогает постичь его мысли, выраженные в ясной, чеканной форме.

Из запланированных 72 томов «Полного собрания сочинений» Эйлера, охватывающего все ранее опубликованные работы, 10 томов намечено посвятить астрономическим исследованиям (три из них еще не вышли в свет). С Эйлером в отношении громадного объема астрономических работ можно поставить в один ряд только П. С. Лапласа, труды которого составляют 14 томов, из которых только три не посвящены астрономическим исследованиям.

Большинство работ Эйлера посвящено решению задач теоретической астрономии — раздела астрономии, в котором изучается движение космических тел и систем под влиянием сил, подчиняющихся закону всемирного тяготения, или, более строго, задач небесной механики о движении материальных точек (а не протяженных тел), притягивающихся друг к другу по закону всемирного тяготения.

Заметим, что некоторые идеи Эйлера настолько опережали его время, что наука вернулась к их реализации лишь в наши дни на основе современной вычислительной техники. Многие исследования выполнены им на таком высоком уровне и содержат такие теоретические обобщения, что их влияние далеко перешагнуло рамки астрономии. Они стали неотъемлемой частью всего теоретического естествознания.

## 1. ОБЩИЙ ОБЗОР АСТРОНОМИЧЕСКИХ РАБОТ ЭЙЛЕРА

Л. Эйлер начал заниматься астрономическими проблемами в годы первого своего пребывания в Петербурге. За это время он опубликовал серию первоклассных работ, посвященных теории как невозмущенного, так и возмущенного движения небесных тел, вычислению притяжения от «эллиптического» сфероида, различным вопросам сферической астрономии, а также астрономическим вопросам, соприкасающимся с оптикой и физикой.

Круг его научных интересов был настолько широк, что практически ни одна проблема астрономии, физики и оптики того времени не была оставлена им без внимания.

В теории невозмущенного движения Эйлер перешел от изучения гелиоцентрического движения планет и комет к гораздо более трудной задаче определения орбиты небесного тела по наблюдениям с поверхности

Земли, движущейся около Солнца. Его метод вычисления кометных орбит был применен к изучению движения многих комет (прежде всего А. И. Лекселем). Главный прогресс в этой области был обусловлен открытием Эйлером специального уравнения, характеризующего параболическое движение. Еще большее число работ Эйлер посвятил разработке теории возмущенного движения небесных тел. К фундаментальным достижениям по теории возмущений следует в первую очередь отнести созданный им метод вариации произвольных постоянных (в качестве которых рассматриваются элементы орбиты), положенный в основу теории движения больших планет, основы метода разложения возмущающей функции, проиллюстрированные примерами практического разложения, введение в науку весьма эффективных промежуточных орбит, отличных от кеплерова эллипса.

В сущности, Эйлер впервые указал на связь между эффективностью применения итерационных методов к нелинейным уравнениям небесной механики и выбором начального приближения (промежуточной орбиты). Более подробно эти работы будут рассмотрены дальше.

Среди смежных с астрономическими проблем следует указать на его монографию «Исследование физических причин морских приливов и отливов» [2], которая посвящена теории приливов с учетом динамических аспектов, инерции и колебаний водных масс. За эту работу Эйлер, совместно с Д. Бернулли и К. Маклореном, представившими свои трактаты на эту же тему, был удостоен премии Парижской академии в 1740 г.

В 1747 г. Эйлер вместе с Д. Бернулли получил премию Парижской академии за работу «Размышления о вопросе, как при помощи наблюдений, выполненных на море либо днем, либо ночью, либо в сумерках, наиболее удобно и надежно находить время» [3].

Чтобы обеспечить измерение высот светил ночью и вообще когда горизонт невидим, Эйлер предлагает свободно подвешенный квадрант дополнить маятником, дающим на квадранте отсчет зенита, причем предусмотрен особый уровень для учета измерений, вносимых качкой корабля. Здесь же рассмотрены задачи сферической астрономии, связанные с вычислением часовых углов по высотам небесных светил.

Несколько позже (в 1748—1751 гг.) Эйлер опубликовал два мемуара [4, 5], в которых изложено завершенное учение об аберрации света и о параллаксе. Эти результаты сыграли огромную роль в астрономии в последующие десятилетия. В 1754 г. Эйлер вывел, а в 1756 г. опубликовал [6] дифференциальное уравнение теории астрономической рефракции

$$d\varphi = \frac{\alpha x^{(q-k)/c} \sin \xi \, dx}{x (x^2 - a^2 \alpha^{(2q-2k)/c} \sin^2 \xi)^{1/2}},$$

где  $a$  — радиус Земли,  $x$  — расстояние текущей точки светового луча от центра Земли,  $\xi$  и  $\varphi$  — зенитные расстояния точек, находящихся на касательных к световому лучу,  $q$  и  $k$  — плотности воздуха в этих точках на расстояниях  $a$  и  $x$  от центра Земли,  $\alpha$  — показатель преломления воздуха при переходе света из пустоты в некоторую среду стандартной плотности  $c$ ,  $\alpha = 3324/3325$ . Эйлер отмечает, что отсюда нельзя получить общее универсальное выражение рефракции, и рассматривает геометрические свойства светового луча в атмосфере Земли, находя, в частности, его первый и второй радиусы кривизны. Эйлер находит различные выражения рефракции при соответствующих предположениях о строении атмосферы, т. е.

дает зависимость рефракции от давления и температуры воздуха в месте наблюдения.

Большое практическое значение для мореплавания той эпохи имела работа Эйлера «О нахождении долготы мест из наблюдаемого углового расстояния Луны от некоторой известной звезды», опубликованная в Петербурге в 1784 г. [7]. Здесь Эйлер решает задачу о нахождении истинного геоцентрического углового расстояния Луны от известной звезды по известным высотам Луны и звезды и по наблюдаемому угловому расстоянию, показывая, как сравнением найденного геоцентрического расстояния с расстояниями, вычисленными для двух моментов по времени основного (Гринвичского, Ферроского) меридиана, можно найти момент наблюдения по времени основного меридиана, а, следовательно, и долготу меридиана места наблюдения.

Эйлер интересовался вопросами, связанными и с физической природой небесных тел, и этим проблемам посвятил большое число статей и мемуаров. Анализируя существовавшие гипотезы, Эйлер приходит к удивительному для того времени выводу, что хвосты комет, полярные сияния и зодиакальный свет порождены одной и той же причиной — давлением света на частицы атмосферы небесных тел. Тем самым он гениально предсказал существование светового давления, открытого и измеренного позже замечательным физиком П. Н. Лебедевым.

Интенсивная работа Эйлера в области астрономии характеризует и второй петербургский период его жизни, хотя в самом начале этого периода он почти полностью потерял зрение.

В теории невозмущенного движения Эйлер продолжает совершенствовать методы определения кометных орбит. При содействии адъюнкта Петербургской академии А. Лекселя он выполнил большую работу по определению эллиптической орбиты кометы 1769 г. В это же время он завершил обширные многолетние работы по теории движения Луны и начал исследования по возможности применения основных идей, положенных им в основу теории лунного движения, к представлению движения планет. Эта возможность была заново открыта и успешно использована в 50-х и в 60-х гг. XX столетия.

Эйлер активно участвует в обработке наблюдений прохождения Венеры по диску Солнца, имевшего место 3 июня 1769 г. Эти наблюдения были организованы Петербургской академией с целью уточнения величины параллакса Солнца — одной из фундаментальных астрономических постоянных. Так как для вывода солнечного параллакса необходимо располагать наблюдениями, выполненными в достаточно удаленных друг от друга точках земной поверхности, Академия направила экспедиции на Кольский полуостров, в Якутск, Оренбург, Орск и Гурьев. Наблюдения прохождения Венеры, а также происходившего в тот же день затмения Солнца были удачны. Затмение Солнца обеспечивало решение исключительно трудной для того времени задачи определения точных долгот мест наблюдения прохождения Венеры.

К этому же периоду относятся публикации Эйлера, посвященные фигуре кольца Сатурна. Предполагая, что движение Сатурна происходит в плоскости эклиптики, Эйлер находит положение и размеры эллипса — видимой фигуры кольца Сатурна. По поводу простоты окончательных формул Эйлер делает весьма полезное для исследователей любой эпохи заме-

чание, цитировавшееся уже М. Ф. Субботиным в его докладе на эйлеровских торжествах в 1957 г.: «Решение этой задачи весьма значительно тем, — пишет Эйлер, — что путем очень сложных выкладок мы пришли в конце концов к весьма простым формулам; нет поэтому никакого сомнения, что существует другой, гораздо более простой путь для получения решения, как это легко можно было предвидеть; не стыдно, однако, изложить и только что данное решение, поскольку в нем применяются достойные внимания приемы, могущие принести пользу и в других изысканиях». После этого Эйлер тут же излагает на четырех страницах гораздо более простое решение [8].

## 2. НЕВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ОРБИТ

Остановимся теперь на работах Л. Эйлера в области теоретической астрономии.

Законы невозмущенного движения были установлены Кеплером (1609) и Ньютоном (1687). Ко времени начала научной деятельности Эйлера свойства невозмущенного движения, следующие из этих законов, были изучены с достаточной для практических приложений полнотой, однако все исследование проводилось методами, корни которых были в античной науке. Для построения решения неизмеримо более сложных проблем представления возмущенного движения необходимо было дать описание свойств невозмущенного движения аналитическими методами на основе анализа бесконечно малых. Полное решение этой задачи было дано Эйлером в работах, посвященных теории возмущенных движений Луны и планет. В первых же работах по теоретической астрономии, представленных Петербургской академии в 1734—1735 гг., методы анализа бесконечно малых применены к решению нескольких частных задач (например, знаменитое уравнение Кеплера Эйлер выводил из закона площадей). Иллюстрацией аналитического подхода, блестяще развитого Эйлером в теории уравнений, может служить решение им трансцендентного уравнения Кеплера

$$x = E + \kappa \sin E,$$

в котором неизвестной является эксцентрисическая аномалия  $E$ . Эйлер считает наиболее удобным применить формулу

$$E = x - \kappa \sin (x - \kappa \sin (x - \kappa \sin (x - \dots))),$$

т. е. способ итерации, а для вычисления истинной аномалии  $z$  наряду с обычными формулами

$$\cos z = \frac{\cos E + \kappa}{1 + \kappa \cos E}, \quad \sin z = \frac{(1 - \kappa^2)^{1/2} \sin E}{1 + \kappa \cos E}$$

широко применяет ряд

$$z = E - \frac{\kappa}{1.1} \sin E + \frac{\kappa^2}{2.2} \sin 2E - \frac{\kappa^3}{3.4} (\sin 3E + 3 \sin E) + \\ + \frac{\kappa^4}{4.8} (\sin 4E + 4 \sin 2E) - \dots$$

К числу работ Эйлера по теоретической астрономии относится еще ряд статей, содержащих рассуждения о «наибольшем уравнении центра планет», вопросы параболического движения комет, а также планетных движений.

Известно, что приближенное решение задачи движения кометы по параболической орбите было дано еще Ньютоном, однако его графическое решение не совсем удовлетворяло астрономов, хотя на его основе Э. Галлей определил элементы орбит 26 комет. Открытие комет, движущихся по эллиптическим орбитам, поставило задачу об определении орбиты без предварительного предположения о ее параболической форме. Идеи Эйлера составляют основы метода определения кометных орбит, применяемого в настоящее время. Эти идеи, развитые И. Г. Ламбертом и Ж. Л. Лагранжем, стали фундаментом метода, разработанного К. Ф. Гауссом и более столетия служившего астрономам.

В связи с решением проблемы об определении орбит по наблюдениям особого внимания заслуживает работа Эйлера [9], в которой он подробно рассматривает вычисление коэффициентов условных уравнений, т. е. частных производных геоцентрических координат по исправляемым элементам орбиты, показав пути преодоления трудностей технического характера, связанных со сложностью дифференцируемых функций. Для того чтобы осознать значение этой работы Эйлера, необходимо вспомнить методику, применявшуюся до него. Раньше не использовали всю совокупность имеющихся наблюдений, а подбирали наблюдения, точно соответствующие моменту оппозиции, а потому дающие гелиоцентрическую долготу планеты, или наблюдения, дающие долготу планеты в моменты обращения ее широты в нуль — тогда эта долгота совпадает с долготой узла орбиты планеты. Общий метод Эйлера дал возможность использовать материалы наблюдений в полном объеме.

В этой связи особо ценна «Теория движений планет и комет» Эйлера (1744) [10]. Именно в этой книге появляется решение фундаментальной задачи теоретической астрономии: по двум данным радиусам-векторам, углу между ними и промежутку времени, в течение которого планета или комета этот угол описывает, определить параметр орбиты и тем самым всю орбиту. Эйлер вывел приближенную формулу вида (в современных обозначениях)

$$\sqrt{p} = \left( \frac{r_1 r_2}{\tau} + \frac{\tau}{6 \sqrt{r_1 r_2}} \right) \sin 2f,$$

где  $\tau = k(t_2 - t_1)$ . Точное решение этой задачи было дано К. Ф. Гауссом в 1809 г.

В 1742 г. Эйлер впервые опубликовал знаменитое уравнение

$$6k(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} - (r_1 + r_2 - s)^{3/2},$$

составляющее основу определения параболических орбит, которое в дальнейшем получило название уравнения Эйлера [11].

К этому же времени относится публикация нескольких работ об определении кометных орбит, в том числе и научно-популярной книги «Ответ на различные вопросы относительно строения, движения и действия комет» [12].



В этом и предыдущем разделах мы рассмотрели конкретные, относительно простые задачи небесной механики, изученные Эйлером. В следующем разделе мы обратим большее внимание на общие научные идеи, генерально предугаданные Эйлером и сыгравшие ключевую роль в развитии астрономической науки.

### 3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Некоторые основополагающие идеи, из которых родилось наиболее универсальное и эффективное математическое средство решения нелинейных уравнений, которое принято называть «теорией возмущений», мы находим в великом произведении Ньютона «Математические начала натуральной философии». И все же именно Эйлера по праву следует считать основателем теории возмущений, которая благодаря трудам выдающихся математиков и механиков последующих эпох, и в первую очередь Ж. Л. Лагранжа, П. С. Лапласа, К. Ф. Гаусса, А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре, стала основным методом решения задач теоретической механики, нелинейных колебаний, теоретической астрономии и новейшей ее ветви — астродинамики. В мемуарах Эйлера, посвященных небесной механике, мы находим как общие идеи методов теории возмущений, в равной степени применимых в различных областях теоретического естествознания, где используются динамические математические модели, так и решения конкретных астрономических задач, замечательные тем, что они «доведены до числа» и эти численные результаты по возможности сравниваются с результатами астрономического эксперимента.

К концу первой половины XVIII столетия была завершена математическая теория невозмущенного движения небесных тел, входящих в Солнечную систему. Но практические нужды государств, в первую очередь нужды мореплавания, необходимость в более точном отсчете времени, в различного рода календарях, требовали более точной информации об окружающем мире, более точного знания движений небесных тел. Эти причины, а также внутренние законы развития самой науки составили решающую объективную предпосылку для развития наиболее содержательного раздела теоретической астрономии — теории возмущенного движения. Нисколько не умаляя значения пионерских работ Ж. Даламбера и А. К. Клеро в этой области, все же следует сказать, что лишь в фундаментальных трудах Эйлера по небесной механике мы находим непревзойденную по широте и глубине разработку математических методов теории возмущенного движения.

Сначала кратко остановимся на разработанных им теориях движения Луны. После открытия Ньютоном закона всемирного тяготения ученые создали около 20 динамических лунных теорий, из которых две принадлежат Эйлеру. Такое изобилие лунных теорий объясняется тем, что Луна оказалась чрезвычайно сложным объектом для науки — динамики и ни одна из этих теорий (кроме теорий Эйлера) не могла удовлетворить в то время по точности нужды практики. С другой стороны, каждый выдающийся математик благодаря математическим возможностям, возникающим в задаче о движении Луны, получал отличную возможность продемонстрировать силу и меру своего математического дарования. Наконец, хорошим моральным и материальным стимулом для занятия лунной проблемой слу-

жили систематически объявляемые академиями наук различных государств Европы тематические премии и высокий профессиональный уровень ученых-академиков, оценивающих представленные на соискание премий трактаты. Можно сказать, что задача о движении Луны вследствие значительного притяжения Луны Солнцем принадлежит к классу уникальных в небесной механике. В этой задаче нет настоящего «малого параметра», как и нет настоящего «большого параметра», которые позволили бы построить теорию возмущенного движения Луны с использованием классических степенных разложений или по положительным степеням малого параметра, или по отрицательным степеням большого параметра. Пользуясь современной математической терминологией, можно сказать, что задача о движении Луны не может быть отнесена ни к регулярно возмущенным, ни к сингулярно возмущенным задачам и для своего решения требует создания специальных математических методов, отличных от классических. Эти обстоятельства и делают задачу о движении Луны одной из наиболее сложных в небесной механике. Многие выдающиеся математики — современники Леонарда Эйлера, обессмертившие себя выдающимися открытиями, с задачей о движении Луны, по существу, не справились именно потому, что они искали ее решение, трактуя ее как задачу с малыми возмущениями (регулярно возмущенную задачу). На этом пути удовлетворительного решения не могло быть найдено, так как построенные при такой трактовке ряды расходятся и, следовательно, высшие приближения не могут дать ничего хорошего.

Что же предложил Эйлер в этой задаче? По существу, он предложил то, что единственно разумно в задачах такого типа. Когда классические разложения теории возмущений неэффективны, следует строить такой вариант теории возмущений, в котором исходное начальное приближение уже включает в себя часть возмущений, желательнее наиболее влиятельных, чтобы в дальнейшем высшие приближения, построенные на основе такого начального приближения, были бы действительно малыми величинами.

Выражаясь математическим языком, следует, не изменяя по существу модель, «перестроить» ее таким образом, чтобы задачу можно было бы отнести либо к регулярно возмущенным, либо к сингулярно возмущенным задачам, т. е. свести ее к уже решенным задачам или к задачам, к которым применимы известные методы. Эта идея впервые встречается в лунных теориях Эйлера. Она и в настоящее время столь же плодотворна, как и в XVIII столетии.

Через сто лет после выхода в свет работ Эйлера по лунной теории Дж. Хилл делал такой подход до окончательной формы. Он предложил взять в качестве начального приближения вместо кеплеровского эллипса так называемую вариационную кривую, т. е. такое начальное приближение, которое уже учитывает часть возмущающего воздействия на Луну со стороны Солнца. Благодаря этому подходу Э. У. Брауну удалось построить достаточно точную и относительно долго живущую (почти 100 лет) теорию движения Луны, которую принято сегодня называть теорией Хилла—Брауна.

Первая теория движения Луны Эйлера (1750-е) — это и первая аналитическая теория, максимальным образом использующая обширный наблюдательный материал. Именно с помощью наблюдений полуэмпирически, отчасти пренебрегая изяществом аналитического математического

аппарата, Эйлер добился выдающегося с точки зрения запросов практики результата. Его начальное приближение к точному решению дифференциальных уравнений движения Луны позволило прусскому астроному Тобиасу Майеру вычислить весьма точные для того времени лунные таблицы. Никакая другая, известная в то время лунная теория не могла дать подобные результаты.

В первой лунной теории Эйлер существенно развил метод вариации орбитальных элементов, впоследствии успешно применявшийся не только в теории движения Луны (мы имеем в виду замечательные работы Ш. Делоне середины XIX столетия), но и в планетных теориях. Достаточно лишь упомянуть фундаментальные труды Ж. Л. Лагранжа, П. С. Лапласа, У. Леверье, С. Ньюкома, которые, опираясь на идеи Эйлера, создали в совокупности весьма точную теорию движения больших планет, положенную в основу всех

современных астрономических ежегодников. Основное изложение первой лунной теории Эйлера мы находим в его фундаментальной монографии «Теория движения Луны» [13], написанной на латинском языке и опубликованной на средства Петербургской академии в Берлине в 1753 г.

Интересно, что после публикации своей первой лунной теории Эйлер на протяжении почти трех десятилетий продолжал ее совершенствовать и опубликовал в этом направлении около десяти оригинальных работ, имеющих большое научное значение.

Когда говорят о второй лунной теории Эйлера, то имеют в виду прежде всего две его работы [14, 15], получившие премии Парижской академии наук в 1770 и 1772 гг. и опубликованные в Париже в 1777 г. В этих исследованиях еще более отчетливо выступает идея учета уже в начальном приближении главного возмущающего фактора — части возмущающего воздействия со стороны Солнца. Эйлер добился этого путем остроумного выбора специальной системы координат и аналитической формы, в которой были представлены искомые функции. После нахождения начального приближения он нашел решение оставшейся части «главной задачи» в теории движения Луны (эта модель — частный случай задачи трех тел) в виде тригонометрических рядов, разделив все члены этих рядов на пять классов, охвативших все возмущения, порожденные силами взаимного притяжения в системе материальных точек Солнце—Земля—Луна. Вторая лунная теория Эйлера с точки зрения требований, предъявляемых к ма-

# THEORIA MOTUS LUNAE

EXHIBENS  
OMNES EIUS INAEQUALITATES

IN  
ADDITAMENTO  
HOC IDEM ARGUMENTUM ALITER TRACTATUR  
SIMULQUE OSTENDITUR  
QUEMADMODUM MOTUS LUNAE CUM OMNIBUS  
INAEQUALITATIBUS

INNUMERIS ALIIS MODIS

REPRESENTARI  
ATQUE AD CALCULUM REUOCARI POSSIT

AUCTORE  
L. EULERO



IMPERIALIS  
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM  
PETROPOLITANAE  
ANNO 1753.

*Титульный лист первой «Теории движения Луны» Л. Эйлера 1753 г.*



*А. И. Лексель*

*Силуэт работы Ф. Антинга,  
1780-е годы*

тематическим сочинениям, может служить образцом. Эйлер первый показал, что в принципе возможно создавать законченные математические теории для сложнейших задач механики. В 1772 г. Петербургская академия наук опубликовала обширный трактат с весьма длинным, но исчерпывающим названием «Теория движения Луны, трактованная новым методом, вместе с астрономическими таблицами, из которых положения Луны легко могут быть вычислены для любого времени. Сочинение, созданное под руководством Леонарда Эйлера неимоверным усердием и неутомимым трудом трех академиков — И. А. Эйлера, В. Л. Крафта, А. И. Лекселя» [16]. С этим сочинением астрономы и математики получили в свои руки четкий и ясный алгоритм разработки и оформления теорий движения небесных тел. Лунные таблицы, построенные на основе второй эйлеровской теории,

были не так точны, как упомянутые выше полуэмпирические таблицы Майера, и это указывает на непреложную закономерность, всегда проявляющуюся в процессе решения сложных нелинейных задач: эффективное, удовлетворяющее потребностям практики решение может быть получено только на пути разумного сочетания абстрактной теории (выбор математической модели) и правильной интерпретации результатов эксперимента (в данном случае — это наблюдения Луны). Эйлер, как никто другой, понимал, что самая изящная математическая модель, самая остроумная математическая конструкция не имеют право на длительное существование, если они оторваны от практической деятельности. Это творческое кредо Эйлера проявляется не только в его астрономических работах, но и во всех его трудах, даже таких далеких, казалось бы, от практики, как теория чисел, теория конформных отображений, теория аналитических функций комплексного переменного.

Анализируя заслуги Эйлера в астрономии, можно уверенно сказать, что если бы Эйлер, помимо теорий движения Луны, не решил более ни одной астрономической задачи, этого все равно оказалось бы достаточно, чтобы считать его одним из основателей посленьютоновой классической астрономии. Но великая сила эйлеровского гения не ограничилась только этой единственной, хотя и сложнейшей задачей астрономии. Хронологически свои работы по теории возмущенного движения Эйлер начал с решения отдельных, особо актуальных задач по теории движения планет.

Среди этих работ две были написаны на тему, предложенную Парижской академией на соискание премии. Исследования Эйлера о неравенст-

вах в движении Сатурна и Юпитера [17, 18] были премированы Академией в 1748 и 1752 гг. При выводе основных дифференциальных уравнений Эйлер предполагает, что обе планеты движутся в плоскости эклиптики, так что положение каждой из них определяется радиусом-вектором и долготой. Проекция силы притяжения на радиус-вектор и перпендикуляр к нему дает четыре дифференциальных уравнения второго порядка, правые части которых просто выражаются через координаты планет и взаимное их расстояние. После анализа условий использования в качестве независимой переменной средней, эксцентрической или истинной аномалий одной из планет, Эйлер принимает за независимую переменную угол  $\omega$  между радиусами-векторами планет, назвав его «новым видом аномалии», и с большим мастерством преобразует основные дифференциальные уравнения. Переходя к решению полученных уравнений «новым методом», упомянутым вначале и сводящимся к последовательным приближениям, Эйлер вводит весьма плодотворную и вместе с тем простую идею разделения возмущений на классы и разрабатывает методику нахождения возмущений каждого класса. Разработанный при этом метод нахождения возмущенных значений эксцентриситетов и долгот перигелиев орбит был началом теории представления вековых возмущений в тригонометрической форме, блестяще разработанной позже, в 1788 г. Ж. Л. Лагранжем. Тем не менее объяснение наблюдаемых больших неравенств в движениях Юпитера и Сатурна тогда не было еще дано, так как Эйлер ограничился точностью второго порядка относительно эксцентриситетов орбит этих планет. Это стало ясно, когда П. С. Лаплас в 1784 г. нашел среди возмущений третьего порядка в долготях члены вида

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \left\{ \frac{1}{(5n_{\frac{1}{2}} - 2n_2)} \right\} \sin(5n_{\frac{1}{2}} - 2n_2)t, \\ A_2 \left\{ \frac{1}{(5n_{\frac{1}{2}} - 2n_2)} \right\} \cos(5n_{\frac{1}{2}} - 2n_2)t, \end{array} \right\}$$

содержащие так называемые малые знаменатели. Здесь  $n_2 = 299,1283''$  и  $n_{\frac{1}{2}} = 120,4547''$  — средние движения Юпитера и Сатурна.

Третий большой мемуар Эйлера о планетных возмущениях [19] был отмечен двойной премией Парижской академии в 1756 г. Эта работа состоит из предисловия, в котором дано обоснование необходимости создания гравитационной теории движения Земли, первой части, где подробно развит общий метод вычисления планетных возмущений, и второй части, «содержащей приложение теории к движению Земли и ее возмущениям, происходящим от действия прочих планет».

Следует отметить, что Эйлер впервые обратил внимание на смещение под влиянием возмущений плоскости эклиптики, т. е. основной координатной плоскости, продолжив эти исследования в работе «Об изменении широты неподвижных звезд и наклона эклиптики» (1756) [20] и в работе «Об установлении наибольшего неподвижного круга небесной сферы для ... планетных и кометных орбит» (1776) [21], написанной через 20 лет!

Эйлер указывает на большие расхождения между различными астрономическими таблицами: например, для векового движения узла орбиты Сатурна таблицы Кассини дают  $1^{\circ}35'11''$ , тогда как по таблицам Галлея это движение равно  $0^{\circ}30'00''$ . Эйлер впервые предложил принять за основную плоскость плоскость эклиптики для определенной эпохи (например, для начала 1700 г.) и к этой плоскости относить все наблюдения и все таблицы. Это предложение Эйлера остается в силе до сих пор.

Теории возмущений в движении Земли под действием Венеры посвящено несколько работ Эйлера 70-х годов [22—24]. К ним примыкает ранняя работа «Более точное исследование возмущений движения Земли, производимых Луною» [25].

В последние годы своей жизни Эйлер опубликовал еще несколько работ по теории планетных движений, среди которых обобщающими являются «Новый метод сведения движения больших планет в астрономические таблицы» [26] и «Новый метод определения движения планет» [27]. Во второй из этих работ Эйлер применяет к изучению невозмущенного движения планеты свой же «лунный» метод, определив положение планеты в плоскости ее орбиты гелиоцентрическими координатами  $X, Y$  в синодической системе отсчета, ось абсцисс которой проходит через среднее положение планеты. Тогда, полагая  $X = a(1 + x)$ ,  $Y = ay$ , где  $a$  — большая полуось орбиты, он получает

$$x = eP + e^2Q + e^3R + \dots, \quad y = ep + e^2q + e^3r + \dots,$$

где  $e$  — эксцентриситет орбиты, а коэффициенты  $P, Q, \dots, p, q, \dots$  суть периодические функции средней аномалии, определяемые решением систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Эйлер посвятил ряд выдающихся мемуаров также общим математическим вопросам теории поступательного и вращательного движения небесных тел, решение которых увенчалось созданием основ двух больших разделов науки-механики: механики твердого тела и теории ньютонова потенциала. Используя выведенные им уравнения механики твердого тела, Эйлер с блеском использовал их для анализа вращательного движения Земли вокруг своей оси.

#### 4. ПРОБЛЕМА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Около десятка работ Эйлер посвятил очень важной и интересной математической проблеме — проблеме интегрируемости уравнений задачи трех тел, рассматриваемой как абстрактная математическая модель, без детального обсуждения ее возможных астрономических приложений. Отметим, что проблема интегрируемости дифференциальных уравнений вообще и дифференциальных уравнений, применяемых в естественных науках, в частности, является и в наши дни столь же актуальной, как и во времена Эйлера. Изыскания такого рода, если они могут увенчаться успехом, во-первых, существенно повышают точность вычислений и, во-вторых, экономят труд исследователей и работу вычислительной техники.

В одном из мемуаров Эйлер говорит, что «знаменитая задача трех тел, к которой приводится изучение движения Луны, еще слишком превосходит силы анализа, чтобы можно было надеяться найти полное решение». И далее, в другом мемуаре [28]: «Отсюда я делаю неоспоримое заключение, что нельзя надеяться разрешить общий случай задачи трех тел, пока не найдено средство решить ее в том случае, когда три тела движутся по одной прямой. Таким образом, прежде чем браться за решение задачи трех тел в ее обычной формулировке, совершенно необходимо обратиться к случаю, когда движение трех тел происходит по одной и той же прямой». Следуя этой идее, Эйлер нашел частные решения одномерной задачи трех тел, называемые в настоящее время коллинеарными точками

либрации. В упомянутом уже докладе на сессии, посвященной 250-летию со дня рождения Леонарда Эйлера, М. Ф. Субботин указывал на приоритет Эйлера в нахождении этих частных решений. Ж. Л. Лагранж нашел в 1772 г. «треугольные точки либрации», и не совсем точным является распространенный в небесной механике термин «лагранжевый», объединяющий все известные частные решения задачи трех тел. Более точными были бы термины «эйлеровы коллинеарные решения» и «лагранжевы треугольные решения» задачи трех тел.

Частные решения ньютоновой задачи трех тел сыграли ключевую роль в развитии теории устойчивости, в гамильтоновой механике, в теории динамических систем. Достаточно сказать, что полное решение задачи об устойчивости лагранжевых треугольных решений в одной частной модели задачи трех тел, которую принято называть ограниченной круговой задачей трех тел, было дано спустя ровно 200 лет после их нахождения Лагранжем. На этом длительном пути активно работали над решением этой задачи такие великие ученые, как Ж. Л. Лагранж, П. С. Лаплас, К. Ф. Гаусс, К. Г. Якоби, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов. Ляпунову принадлежат наиболее общие результаты по устойчивости в первом приближении лагранжевых треугольных точек либрации. Переход от «устойчивости в первом приближении» к «устойчивости в смысле Ляпунова» в этой замечательной астрономической задаче потребовал применения нового математического аппарата, созданного немецким математиком К. Л. Зигелем и нашим выдающимся соотечественником А. Н. Колмогоровым и известного под названием «метрической теории дифференциальных уравнений». «Метрическая теория» стала одним из наиболее мощных средств в современной качественной и аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений и весьма успешно применяется в задачах современной небесной механики и механики твердого тела.

Последующее развитие небесной механики показало, какую существенную услугу оказала новейшему разделу астрономии — астродинамике одна из работ Эйлера, вышедшая в 1766 г. под названием «О движении тела, притягиваемого двумя неподвижными силовыми центрами» [29]. В этом мемуаре Эйлер впервые нашел общий интеграл плоской задачи двух неподвижных центров, выраженный через эллиптические интегралы и эллиптические функции Якоби. Несколько лет спустя Ж. Л. Лагранж дал общее решение пространственной задачи двух неподвижных центров, также выражаемое в эллиптических интегралах и эллиптических функциях Якоби. Задача двух неподвижных центров — это частный случай ньютоновой задачи трех тел, в котором изучается движение пассивно гравитирующей точки в поле, создаваемом притяжением двух неподвижных центров. Аналогом этой задачи в физике является задача о движении заряженной частицы в поле диполя.

Несмотря на изящное решение, полученное Эйлером и Лагранжем, задача о двух неподвижных центрах не находила в течение двух столетий эффективного приложения. Дело в том, что два неподвижных центра с вещественными массами и расположенные в вещественном евклидовом пространстве создают потенциальное поле, близкое к потенциальному полю, создаваемому вытянутым телом во внешнем для него пространстве (тело типа «огурца», получающееся вращением эллипса вокруг его большой оси). Все большие планеты и спутники Солнечной системы имеют

форму, близкую к сжатым, а не вытянутым телам вращения (планеты в первом приближении схожи с телами вращений, получаемыми в результате вращения эллипса вокруг своей малой оси). Поэтому воспользоваться для аппроксимации потенциальных полей планет и спутников классической задачей двух неподвижных центров не представляется возможным. Однако если рассмотреть так называемую обобщенную задачу двух неподвижных центров, т. е. такую математическую модель, в которой две точки с комплексными массами создают в комплексном евклидовом пространстве потенциальное поле, а третья пассивно гравитирующая точка движется в этом пространстве, то оказывается, что такая модель достаточно хорошо аппроксимирует вещественное потенциальное поле сжатых у полюсов тел вращения, каковыми являются (с некоторой погрешностью) все большие планеты и почти все естественные спутники Солнечной системы.

Благодаря обобщенной задаче двух неподвижных центров появилась достаточно хорошая аппроксимация для описания полей тяготения планет и, в частности, Земли. С другой стороны, имея эллиптические квадратуры, выведенные Эйлером и Лагранжем в классической задаче двух неподвижных центров, исследователи получили в свои руки замечательный математический инструмент — интегрируемую модель, весьма подходящую для исследования динамики спутников близких планет.

Речь идет в первую очередь об искусственных спутниках Земли (ИСЗ), испытывающих в своем движении большие возмущения со стороны Земли, рассматриваемой как сплюснутое у полюсов тело, а не как материальная точка. Земная атмосфера — это второй сильно действующий на орбиты ИСЗ возмущающий фактор.

В силу того что упомянутые возмущающие силы являются существенными, динамика ИСЗ представляет собой сильно возмущенную задачу и ее эффективное решение можно найти лишь на пути применения той математической методики, которая была вкратце описана при изложении эйлеровых лунных теорий. Классические разложения в задаче о движении ИСЗ неэффективны, поэтому требуется примерно такая же «перестройка» задачи, что и в случае расчетов движения Луны. Различие между ними состоит в том, что существенные возмущения порождаются различными силами: в случае ИСЗ — это сжатие Земли, а в случае Луны — это притяжение со стороны Солнца. Реализация изложенных идей в астеродинамике, а конкретнее — в новых высокоточных теориях движения искусственных спутников Земли, осуществленная прежде всего в работах советских ученых, служит памятником научному подвигу Эйлера и в определенной мере указывает на неразрывную органическую связь между наукой середины XVIII столетия и наукой современной эпохи.

## 5. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. РАБОТЫ ПО ПРИКЛАДНОЙ АСТРОНОМИИ

В 1763 г. в «Мемуарах» Берлинской академии Эйлер опубликовал статью с чисто астрономическим названием «Замечания о задаче трех тел» [30], сыгравшей, однако, выдающуюся роль в создании новых методов — методов численного интегрирования дифференциальных уравнений. В этой работе Эйлер разработал один из наиболее эффективных



разностных методов численного интегрирования уравнений небесной механики, записанных в прямоугольных декартовых координатах, переоткрытый вторично спустя полтора столетия, в начале XX в. Коуэллом. Сейчас принято называть его методом Коуэлла, но было бы справедливее называть его методом Эйлера—Коуэлла. Значение указанной работы Эйлера выходит за рамки небесной механики. В ней на самом деле изложены и основные предпосылки, которые позже породили хорошо известный метод представления решения в виде степенных временных рядов, т. е. метод рядов Ли. Стоит обратить внимание на эти два момента, потому что аналитическая форма как метода Эйлера—Коуэлла, так и метода временных рядов как нельзя лучше приспособлена для их использования на ЭВМ. В сущности этим и объясняется их популярность среди специалистов в области небесной механики.

Выше мы кратко осветили некоторые наиболее интересные или наиболее капитальные достижения Леонарда Эйлера в области теоретической астрономии и небесной механики. Эти достижения оказались бесценными для астрономии, математики и механики и определили многие пути развития этих фундаментальных наук на столетия. Но помимо этого, Эйлером написано несколько десятков научных работ, посвященных самым различным вопросам прикладной астрономии, геодезии, географии. Широта научных интересов и высочайший профессионализм Эйлера в области знаний, весьма далеких друг от друга, поражает воображение. Приведем несколько примеров, иллюстрирующих это заключение.

Возвращаясь к работе Эйлера [2], отметим, что в ней заложены основы динамической теории приливов, благодаря чему наука сделала большой шаг вперед по сравнению с ньютоновой статической теорией, опубликованной на полвека раньше. Эта работа получила, как сказано выше, премию Парижской академии за 1740 г. Это была вторая по счету и одна из двенадцати работ Эйлера, удостоенных премий Парижской академии наук. Одновременно в 1739 г. Эйлер опубликовал исследование под интересным названием «Определение степени тепла и холода в различных местах Земли в различное время» [31], которое было, по-видимому, первой работой по астроклимату.

По поручению Петербургской академии наук Эйлер возглавлял в течение ряда лет Географический департамент Академии, и его деятельность на этом посту, так же как и всюду, оказалась в высшей степени полезной для России. Помимо того что он опубликовал ряд выдающихся трактатов по математической картографии и геодезии, Эйлер совместно с Г. Гейнзиусом разработал общий проект карты России и участвовал непосредственно в составлении Географического атласа Российской империи, изданного в 1745 г. Уникальный, разносторонний ученый, Эйлер придавал огромное значение не только абстрактным теоретическим исследованиям, но в такой же мере ценил результаты опыта, результаты измерений и прекрасно понимал фундаментальное значение методов их анализа и интерпретации. Он первым среди выдающихся ученых своего века сформулировал основные задачи, возникающие при обработке результатов эксперимента, основные задачи теории ошибок, которые впоследствии были блестяще решены в трудах П. С. Лапласа и особенно К. Ф. Гаусса. Не последнюю роль здесь сыграли астрономические наблюдения, полученные во время затмений, имевших место в период его жизни, и результа-

ты географических экспедиций, организованных Петербургской академией в середине XVIII столетия на обширных пространствах Российской империи.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Бесценным творческим наследием, оставшимся после Эйлера, следует считать и его переписку со своими современниками. Как много в этих письмах постановок новых научных проблем, решений новых задач, умозаключений по самым различным поводам, начиная с философских и кончая бытовыми, наконец, умных мыслей общего характера. Читая письма Эйлера, поражаешься его человеколюбию, искреннему уважению ко всем корреспондентам независимо от титулов, авторитета и признания в обществе. С другой стороны, в высшей мере поучительной и полезной является его манера отстаивания своих научных взглядов и результатов перед лицом критики, не всегда справедливой и обоснованной. Эйлер уважал точку зрения возможного оппонента, но и свою точку зрения не давал в обиду, поэтому он не шел на беспринципные компромиссы. Научная истина и ее отстаивание были единственным и определяющим мотивом в его богатейшей переписке с учеными. Среди многочисленных писем имеется достаточно большое количество, в которых обсуждается астрономическая тематика. Письма математику и механику П. Л. Мопертюи, астроному Н. Л. Лакайлю, Т. Майеру, Г. Гейнзиусу, Ж. Н. Делилю и другим ученым представляют собой по существу замечательные научные работы по астрономии, хорошо и красиво аргументированные и касающиеся наиболее актуальных задач науки того времени. Это — важная проблема фигуры Земли, обсуждавшаяся тогда во всех академиях, это — связанная с ней интерпретация результатов дуговых измерений, выполненных на различных континентах, это — обсуждение проблем на стыке астрономии и механики и многие, многие другие интереснейшие проблемы естествознания.

В заключение доклада нам хочется сказать, что труды Леонарда Эйлера и в наши дни служат неисчерпаемым источником новых творческих идей, поэтому их изучение сегодня так же актуально и полезно, как и во время жизни великого ученого.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Субботин М. Ф.* Астрономические работы Леонарда Эйлера // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 268—376.
2. *Euler L.* Inquisitio physica in causam fluxus et refluxus maris // Rec. pièces remp. prix Acad. sci. Paris (1738—1740). 1741. Т. 4. P. 235—350; Opera II-31.
3. *Euler L.* Meditationes in quaestionem, quibusnam observationibus mari, tam interdiu quam nocti, itemque durante crepusculo verum temporis momentum commodissimo et certissimo determinari queat? // Rec. pièces remp. prix Acad. sci. Paris (1745—1748). 1750. Т. 6. P. 111—167; Opera II-20.
4. *Euler L.* Mémoire sur l'effet de la propagation successive de la lumière dans l'apparition tant de planètes que des comètes // Mém. Acad. sci. Berlin. (1746) 1748. Т. 2. P. 141—181; Opera III-5.
5. *Euler L.* De la parallaxe de la Lune, tant par rapport à sa hauteur qu'à son azimut, dans l'hypothèse de la Terre sphéroïdique // Mém. Acad. sci. Berlin (1750). 1751. Т. 5. P. 326—328; Opera II-30.
6. *Euler L.* De la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère selon les divers degrés tant de la chaleur que de l'élasticité de l'air // Mém. Acad. sci. Berlin (1754). 1756. Т. 10. P. 131—172; Opera III-5.

7. *Euler L.* De inventione longitudinis locorum ex observata Lunae distantia a quadam stella cognita // Acta Acad. sci. Petrop. (1780 : 2). 1784. P. 301—307; Opera II-30.
8. *Euler L.* De apparitione et disparitione annuli Saturni // Acta Acad. sci. Petrop. (1777 : 1). 1778. P. 288—316; Opera II-30.
9. *Euler L.* Emendatio tabularum astronomicarum per loca planetarum geocentrica // Comment. Acad. sci. Petrop. (1740). 1750. Vol. 12. P. 109—221; Opera II-29.
10. *Euler L.* Theoria motuum planetarum et cometarum, continens methodum facilem ex aliquot observacionibus orbitas cum planetarum tum cometarum determinandi. Berolini, 1744; Opera II-28.
11. *Euler L.* Determinatio orbitae cometae qui mense Martio hujus anni 1742 potissimum fuit observatus // Miscellanea Berolinensia. 1743. Vol. 7. P. 1—90; Opera II-28.
12. *Euler L.* Beantwortung verschiedener Fragen über die Beschaffenheit, Bewegung und Wirkung der Cometen, Fortsetzung dieser Beantwortung. Berlin, 1744; Opera II-31.
13. *Euler L.* Theoria motus Lunae exhibens omnes eius inaequalitates etc. Berolini, 1753; Opera II-23.
14. *Euler L.* Théorie de la Lune // Rec. pièces remp. prix Acad. sci. Paris (1764—1772). 1777. T. 9; Opera II-24.
15. *Euler L.* Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la Lune, où l'on détermine toutes les inégalités auxquelles il est assujetti // Rec. pièces remp. prix Acad. sci. Paris (1764—1772). 1777. T. 9; Opera II-24.
16. *Euler L.* Theoria motuum Lunae, nova methodo pertractata, una cum tabulis astronomicis, unde ad quodvis tempus loca Lunae expedite computari possunt, incredibili studio atque indefesso labore trium academicorum: J. A. Euler, W. L. Krafft, J. A. Lexell, opus dirigente Leonhardo Eulero. Petropoli, 1772; Opera II-22. (Имеется рус. пер. наиболее интересных частей этого соч.: *Эйлер Л.* Новая теория движения Луны. Л.: Изд-во АН СССР, 1934.)
17. *Euler L.* Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter. Paris, 1749. (Мемуар включен только в некоторые экземпляры сб.: Rec. pièces remp. prix Acad. sci. Paris (1748). 1749. T. 6.); Opera II-25.
18. *Euler L.* Recherches sur les irrégularités du mouvement de Jupiter et de Saturne // Rec. pièces remp. prix Acad. sci. Paris (1751—1761). 1769. T. 7; Opera II-26.
19. *Euler L.* Investigatio perturbationum, quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur // Rec. pièces remp. prix Acad. sci. Paris (1753—1760). 1771. T. 8; Opera II-26.
20. *Euler L.* De la variation de la latitude des étoiles fixes et de l'obliquité de l'écliptique // Mém. Acad. sci. Berlin (1754). 1756. T. 10. P. 296—336; Opera II-29.
21. *Euler L.* De circulo maximo fixo in coelo constituendo, ad quem orbitae planetarum et cometarum referantur // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1775). 1776. Vol. 20. P. 503—508; Opera II-30.
22. *Euler L.* De perturbatione motus Terrae ab actione Veneris oriunda. // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1771). 1772. Vol. 16. P. 426—467; Opera II-26.
23. *Euler L.* Réflexions sur les inégalités dans le mouvement de la Terre, causées par l'action de Vénus // Acta Acad. sci. Petrop. (1778: 1). 1780. P. 297—307; Opera II-27.
24. *Euler L.* Investigatio perturbationum, quae in motu Terrae ab actione Veneris producuntur // Acta Acad. sci. Petrop. (1778 : 2). 1781. P. 308—316; Opera II-27.
25. *Euler L.* Quantum motus Terrae a Luna perturbatur accuratius inquiritur // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1747—1748). 1750. Vol. 1. P. 428—443; Opera II-23.
26. *Euler L.* Nova methodus motus planetarum principalium ad tabulas astronomicas reducendi // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1773). 1774. Vol. 18. P. 354—376; Opera II-29.
27. *Euler L.* Nova methodus motum planetarum determinandi // Acta Acad. sci. Petrop. (1778 : 2). 1781. P. 227—301; Opera II-29.
28. *Euler L.* Tria capita ex opera quodam majori inedito de theoria Lunae // Opera postuma. Petropoli, 1862. Vol. 2. P. 365—390; Opera II-24.
29. *Euler L.* De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1764). 1766. Vol. 10. P. 207—242; (1765). 1767. Vol. 11. P. 152—184; Opera II-6.
30. *Euler L.* Considérations sur le problème des trois corps // Mém. Acad. sci. Berlin (1763). 1770. T. 19. P. 194—200; Opera II-26.
31. *Euler L.* Determinatio caloris et frigoris graduum pro singulis Terrae locis ac temporibus // Comment. Acad. sci. Petrop. (1739). 1750. Vol. 11. P. 82—99; Opera III-10.

# ЭЙЛЕР

## И РАЗВИТИЕ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

*И. П. НЕВСКАЯ, К. В. ХОЛШЕВНИКОВ*

### ВВЕДЕНИЕ

Труды Леонарда Эйлера по астрономии, особенно те, которые относятся к небесной механике, в настоящее время изучены уже достаточно подробно — см., например, превосходный очерк М. Ф. Субботина [1], содержащий почти исчерпывающую библиографию. Здесь мы коснемся лишь важнейших работ петербургского академика, ставших фундаментом современной небесной механики. По утверждению С. И. Вавилова [2, с. 144], математическому гению Эйлера явно «не хватало физической интуиции», поэтому математик подавлял в нем физика. Про Эйлера-астронома так сказать нельзя. В его трудах ощущаются глубокая астрономическая интуиция и профессионализм. Одно лишь количество — свыше 10 томов астрономических сочинений — вряд ли доступно астрономам нашего века. Но главное, конечно, астрономическая интуиция, которой так часто не хватает пришедшим в нашу науку математикам. Приведем несколько примеров.

Прибегая к рядам для вычисления эфемерид небесных тел, Эйлер никогда не выписывал лишних членов. Всегда тщательно следил за точностью. Отыскивал переменные, в которых сходимость разложений ускоряется. Эйлер-математик непринужденно использовал расходящиеся ряды. Эйлер-астроном требовал быстрой сходимости.

Теория движения Луны содержит шесть произвольных постоянных. Эйлер оставил их восемь, не успев найти две связи между ними (позднее это удалось Дж. У. Хиллу). Но, понимая огромную важность быстрого создания лунной теории для нужд морского флота, Эйлер-практик решился взять значения двух величин «прямо с неба» (по его же выражению), на что чистый математик никогда бы не отважился. «С неба» означало здесь, что средние движения перигея и узла были взяты непосредственно из астрономических наблюдений.

После долгих безуспешных попыток найти интегралы задачи трех тел, не сводящиеся к классическим, Эйлер выступил с утверждением о практической бесполезности подобных интегралов, даже если они существуют. Во-первых, они должны быть столь сложными, что для их разрешения понадобятся не меньшие усилия, чем для прямого интегрирования. Прошло почти четверть тысячелетия после этого высказывания, и сейчас в его справедливости уже сомнений нет. Во-вторых, подчеркиваемое часто преимущество аналитических методов над численными, заключающееся в возможности вычислить состояние  $x$  системы для любой эпохи  $t$ , на практике оказывается, за редкими исключениями, иллюзорным. Действительно, малейшая ошибка в начальных данных  $\Delta x|_{t=0}$  приводит к большим

$\Delta x$  при достаточно большом  $t$ . Эта мысль намного опередила эпоху, лозунгом которой был лапласов детерминизм, и стала общепринятой лишь в конце XIX в. и даже позже, когда между классической и квантовой механикой перестали усматривать непроходимую пропасть.

Перейдем к конкретным задачам и убедимся, что фундамент почти под все постройки современной небесной механики заложен Эйлером.

### 1. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

Эйлеру принадлежит простое аналитическое интегрирование задачи, доступное каждому студенту, в отличие от геометрического метода Ньютона.

Эйлер же нашел большинство известных точных разложений основных функций задачи двух тел, например ряд Фурье по кратным истинной аномалии для уравнения центра

$$\Theta - M = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1} e^k (1 + k\sqrt{1-e^2})}{k(1 + \sqrt{1-e^2})^k} \sin k\Theta. \quad (1)$$

(Кстати, Ж. Фурье к этому времени еще не родился, а его публикация «ряда Фурье» относится к 1822 г.).

Неоценим вклад Эйлера в исследование проблемы определения эллиптических и особенно параболических орбит. Им поставлено и решено множество модельных задач, таких, как определение орбиты по двум положениям и параметру, по трем гелиоцентрическим направлениям. Открыто в параболическом случае соотношение, получившее позднее название формулы Эйлера—Ламберта. Решено достаточно и реальных задач, таких, как определение параболических орбит по пяти наблюдениям, по четырем наблюдениям; определение орбиты кометы, дважды пересекающей плоскость эклиптики, и т. д.

Эйлером дана математическая формулировка задачи улучшения орбит как в рамках задачи двух тел, так и с учетом возмущений.

Пожалуй, можно назвать лишь одну проблему, касающуюся кеплерова движения, исследование которой началось уже после Эйлера: определение области сходимости основных разложений небесной механики.

### 2. ЗАДАЧА ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

Честь сведения задачи к квадратурам принадлежит Эйлеру. Подробного исследования интегралов он проводить не стал после выяснения досадного обстоятельства, что движение в поле двух неподвижных центров не может служить адекватной моделью в задачах типа Солнце—Земля—Луна или Солнце—Юпитер—Сатурн. Вероятно, астроном здесь взял верх над математиком, которому безразличен прикладной смысл решаемой проблемы.

В работах Е. П. Аксенова, Е. А. Гребеникова и В. Г. Демина была найдена неожиданная область применения задачи, обобщенной на комплексные значения параметров: движение спутника несферической планеты. Кафедра небесной механики Ленинградского университета движение в поле двух неподвижных центров предложила именовать эйлеровым. Ныне это название общепринято.

### 3. АБСТРАКТНАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

Убедившись в неинтегрируемости задачи трех тел, Эйлер решает исследовать ее частные случаи: прямолинейную и ограниченную задачи трех тел.

В прямолинейном случае впервые были найдены точные частные решения задачи трех тел. Если прямую заставить вращаться с подходящей угловой скоростью, то таким путем можно получить положения относительного равновесия — коллинеарные центры либрации. Точные частные решения в ограниченной задаче, включающие треугольные точки либрации, также впервые получены Эйлером.

Внимательное изучение найденных частных решений позволило Эйлеру высказать плодотворную идею о разграничении движений спутникового и планетного типа некоторой поверхностью, проходящей через точки либрации  $L_1$  и  $L_2$ . Развитие этой идеи позднее привело к понятиям гравитационных сфер (тяготения, действия, Хилла и др.), играющих значительную роль в небесной механике и астродинамике.

### 4. ОСКУЛИРУЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Это центральное понятие небесной механики впервые строго определено Эйлером. Ему же принадлежит аналитический вывод соотношений, определяющих изменение оскулирующих элементов со временем, — так называемые дифференциальные уравнения Эйлера. С именем последнего связано становление аналитической теории возмущенного движения в оскулирующих элементах. Сам Эйлер успешно применял ее к исследованию орбит Юпитера, Сатурна, Земли, Венеры и других небесных тел.

### 5. ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ

Неоценим вклад Эйлера в разработку теории движения Луны, а также применения теории в практических вопросах определения долготы корабля методом лунных расстояний и покрытий звезд Луной.

Лунная теория Эйлера опередила эпоху на 100 лет. В ней можно найти истоки современной теории нелинейных колебаний и метода осреднения. Мы ограничимся этими краткими замечаниями, поскольку исчерпывающий комментарий А. Н. Крылова по этому поводу можно найти в [3].

### 6. ЗАДАЧА ДВУХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Заинтересовавшись движением пары Земля—Луна и галилеевых спутников Юпитера, Эйлер начал одновременно разрабатывать теорию гравитационного потенциала тел, близких к сферическим, и теорию движения свободного твердого тела. В современной терминологии Эйлер нашел разложение гравитационного потенциала по шаровым функциям до второго порядка включительно в общем случае и специально в случае эллипсоида. С соответствующей точностью были вычислены сила и момент силы притяжения. Применяя полученные им динамические и кинематические уравнения динамики твердого тела, Эйлер построил теорию прецессии и нутации земной оси. Предсказал свободное (т. е. возникающее

и без воздействия Луны) колебание оси вращения Земли, открытое значительно позднее Чандлером.

Сжатие планеты приводит к ничтожным поправкам в движении Луны, чего нельзя сказать об Ио. Во-первых, Ио гораздо ближе к Юпитеру, чем Луна к Земле (в радиусах центральной планеты). Во-вторых, сам Юпитер сжат значительно сильнее Земли. Занимаясь галилеевыми спутниками, Эйлер заложил основы теории движения спутников сжатых планет. Им были найдены вековые движения линии апсид и линии узлов.

Можно перечислить не один десяток статей, появившихся перед и вскоре после запуска первых ИСЗ, в которых были переоткрыты эти результаты Эйлера, причем вначале с меньшей точностью. Так что с полным правом можно назвать петербургского академика создателем первых аналитических теорий движения ИСЗ.

### 7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ И РЯДАМИ ПО СТЕПЕНЯМ ВРЕМЕНИ

Общеизвестно, что своим методом ломаных Эйлер заложил основы численных методов интегрирования дифференциальных уравнений небесной механики. В последнее время для этой цели все больше используют так называемый метод Тейлора—Стефенсена, представляющий решение уравнения

$$dx/dt = f(x, t) \quad (2)$$

в виде ряда по степеням времени

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - T)^k. \quad (3)$$

Коэффициенты  $c_k$  считаются непосредственно по правой части  $f$  и начальным данным  $X = x|_{t=T}$ . Здесь  $t, T$  — скаляры;  $x, X, f$  — векторы конечной размерности. Если ввести дифференциальный оператор

$$D = f(X, T) \partial/\partial x + \partial/\partial T, \quad (4)$$

то коэффициент  $c_k$  найдется по формуле

$$c_k = (1/k!) D^k X. \quad (5)$$

Ряд (3) с коэффициентами (5) называется рядом Ли по имени норвежского математика, тщательно изучившего его свойства. Но формулу (5) можно практически найти у Эйлера в [4], и ряд Ли оказывается рядом Эйлера—Ли.

### 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССЫ КОМЕТЫ ГАЛЛЕЯ

Актуальной задачей кометной астрономии XVIII в. стала задача определения кометных масс. Еще Бюффон, основываясь на гигантских объемах комет, полагал их массы сравнимыми с солнечной. Для определения массы кометы Галлея Эйлер вычислил возмущения орбиты Земли под действием близкого прохождения кометы в апреле — мае 1759 г. Аналитические методы здесь бессильны. Поэтому Эйлер взял свои уравнения изменения оскулирующих элементов орбиты Земли и проинтегрировал развитым им методом ломаных. Масса кометы  $m_{\text{ном}}$  была положена

равной массе Земли  $m_{\oplus}$ , орбита считалась эллипсом, наилучшим образом удовлетворяющим наблюдениям. Последнее допущение означает, что в движении Земли находятся возмущения первого порядка. В силу линейности последних по  $m_{\text{КОМ}}$  это позволяет определить массу кометы, сопоставляя вычисленные и наблюдаемые изменения элементов земной орбиты. Эйлер нашел изменения всех элементов. Мы процитируем наиболее впечатляющий отрывок из [5, с. 315], поскольку его перевод с латинского в [1, с. 333—334] неточен: «...Если комета равна Земле [по массе], год увеличится на 27 минут... Но тем более если комета превысит Землю в 100 раз, год увеличится на 45 часов...» Наблюдения не показали никаких изменений в движении Земли, и таким образом Эйлером было установлено, что массы комет на несколько порядков меньше планетарных.

### 9. АНТРОПНЫЙ ПРИНЦИП

Собственно, он не относится к небесной механике, но мы не могли не коснуться его здесь. Заключается он в том, что факт существования наблюдаемых объектов и самого наблюдателя накладывает серьезные ограничения на возможный спектр законов природы и их реализацию. Этот принцип приписывают нашему времени. Однако, пусть в менее четкой форме, антропный принцип, окрашенный в духе времени в религиозные тона, можно найти и у Эйлера. Так, он ставит вопрос, что произошло бы, если бы Луна «была создана» на орбите, значительно более близкой или значительно более далекой. В первом случае она вызвала бы сильнейшие приливы, смертельно опасные для человечества. Во втором случае под действием солнечных возмущений Луна в конце концов покинула бы Землю. Если бы Эйлер варьировал и наклон орбиты до значения, близкого к  $90^\circ$ , он неминуемо пришел бы к выводу о падении такой Луны на Землю, сделанному М. Л. Лидовым в 1961 г. [6]. Итак, наблюдатели не могут видеть Луну на орбите, сильно отличной от существующей ныне, — чем не антропный принцип?

Закончить этот краткий очерк мы хотели бы таким резюме. Корни аналитической, численной, качественной и прикладной небесной механики — в трудах Леонарда Эйлера.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Субботин М. Ф.* Астрономические работы Леонарда Эйлера // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 268—376.
2. *Вавилов С. И.* Физическая оптика Леонарда Эйлера // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 3. С. 138—147.
3. *Эйлер Л.* Новая теория движения Луны/Пер. с лат. с примеч. и поясн. акад. А. Н. Крылова. Л.: Изд-во АН СССР, 1934. 208 с.
4. *Euler L.* Methodus universalis serierum convergentium summas quas proxime inveniendi // Comment. Acad. sci. Petrop. (1736). 1741. Vol. 8. P. 3—9; Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali // Ibid. P. 9—22; Methodus universalis series summamdi ulterius promotam // Ibid. P. 147—158; Opera I-14.
5. *Euler L.* Astronomia mechanica: Digressio, qua effectus cometarum A.1759 expectati in motu Terrae perturbando investigatur // Opera postuma. Petropoli, 1862. Vol. 2. P. 294—316; Opera II-27.
6. *Лидов М. Л.* О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников // Проблемы движения искусственных небесных тел: Докл. на конф. по общим и прикладным вопросам теоретической астрономии, Москва, 1961. М.: Изд-во АН СССР 1963. С. 119—134.



# НОВЫЕ ДАННЫЕ О СТАНОВЛЕНИИ Л. ЭЙЛЕРА КАК АСТРОНОМА И ИСТОРИКА НАУКИ

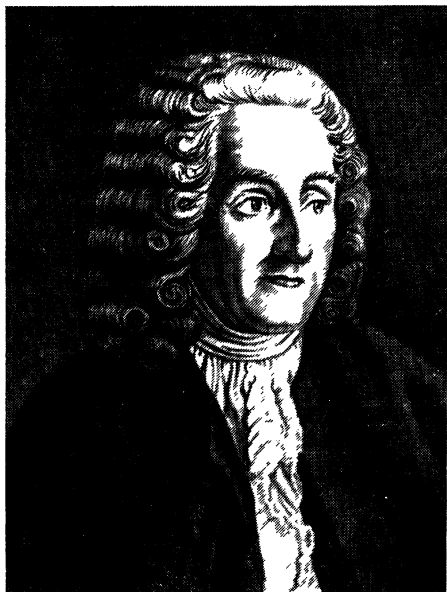
*Н. И. НЕВСКАЯ*

Леонард Эйлер вошел в науку главным образом как выдающийся математик и механик. Занимался он также физикой и астрономией, особенно небесной механикой, для которой даже предлагал свое название — «астрономическая механика» [1, с. 84]. Здесь его вклад в науку особенно велик: наряду с А. К. Клеро, Ж. Л. Даламбером и П. С. Лапласом Эйлер стал одним из основателей современной небесной механики. Эти труды ученого наиболее детально проанализированы в работе М. Ф. Субботина [2], тем более ценной, что сам автор ее был крупнейшим специалистом в данной области. Изучались и работы Эйлера по геодезии и картографии [3, 4], физической и астрономической оптике [5—10], астрофизике [11, 12]. Но деятельность Эйлера в области астрономии оставалась изученной далеко не полностью. Целью данной статьи является восполнить этот пробел в научной биографии великого ученого.

Дело в том, что с первых же лет существования Академии в ней сформировалась своеобразная астрономическая школа, с которой тесно связан был Эйлер, а между тем эти связи до сих пор изучены недостаточно. Анализ особенностей этой научной школы и история ее возникновения освещены в монографии [13]. Не входя в детали, отметим только, что для представителей Петербургской астрономической школы XVIII в. был характерен глубокий интерес, помимо небесной механики, к большому кругу проблем астрометрии, астрофизики, геодезии и картографии; занимались они также историей календаря.

Новые данные о занятиях Эйлера астрономией были обнаружены в случайно найденных журналах астрономических наблюдений Петербургской обсерватории, которые до 1977 г. считались утраченными. Просмотр этих журналов, содержащих около 1000 листов, выявил записи с наблюдениями Л. Эйлера, выполненными с 11 марта 1733 г. н. ст. до конца его первого пребывания в Петербурге в 1741 г. [14]. Наблюдения Эйлера и его коллег по Петербургской астрономической обсерватории XVIII в. в наше время оказались совершенно забытыми, так как все журналы с записями наблюдений с 11 марта 1726 г. по 21 мая 1747 г. н. ст. до последнего времени детально не рассматривались.

Изучение этих материалов показало, что с 12 июня 1727 г. по 21 мая 1747 г. н. ст. в работах Петербургской обсерватории, помимо 1—2 штатных сотрудников, участвовали многие добровольные помощники из числа преподавателей и студентов Академической гимназии и университета, профессоров и адъюнктов Академии наук и Морской академии, а также геодезистов и штурманов, проходивших там стажировку. Эйлер был одним из таких добровольных помощников и выполнил ряд интересных и важ-



*Ж. Н. Делиль*

*Гравюра К. Вестермаера*

ных наблюдений. Однако лишь ничтожная их часть опубликована в «Записках» Петербургской академии наук (так называемых «Комментариях»), издававшихся на латинском языке. Этот факт замечен уже давно. Опираясь на него, П. П. Пекарский, а за ним и другие исследователи пришли к заключению, что наблюдения петербургских астрономов первой половины XVIII в. остались неизвестными их современникам и не оказали влияния на развитие науки [15, с. 129].

Тщательный просмотр давно забытых публикаций в газете «Санкт-петербургские ведомости» [16] и приложении к ней — журнале «Примечания на Ведомости» [17] за 1727—1742 гг., когда их издавала Петербургская академия наук, показал, что в обсерватории бывал и работал гораздо более широкий круг лиц, чем следует из записей в журналах наблюдений. Сравнение этих записей с газетными публикациями помогло установить, что активному

наблюдениях естественно предшествовало приобщение к ним.

В том что молодой швейцарский математик, приехавший в Россию весной 1727 г., заинтересовался работами академических астрономов, не было ничего удивительного. Ведь на их наблюдениях, как правило, присутствовали все «члены математического класса» Академии [16, 1728, № 64, с. 260]. Эту традицию ввел основатель и первый директор Петербургской обсерватории академик Ж. Н. Делиль, приехавший в Петербург зимой 1726 г. Делиль понимал, что развитие астрономии невозможно без широкого внедрения математических методов и что с наибольшим успехом этим делом могли заниматься лица, имеющие хорошую математическую подготовку. Необходимо было лишь познакомить их с методикой проведения астрономических наблюдений. Поэтому Делиль стремился заинтересовать таких людей работами обсерватории и привлечь к участию в них. Так, приехав в Россию, математики Ф. Х. Майер и Г. В. Крафт сразу включились в работы обсерватории, а затем даже стали ее штатными сотрудниками [13, с. 36, 68 и др.]. В астрономических исследованиях участвовали также земляки Эйлера математики Я. Герман и Д. Бернулли. Последний, как выяснилось, вел и наблюдения — со 2 марта 1728 г. он определял здесь полуденные высоты Солнца [13, с. 68]. Вскоре после приезда Эйлера Делиль привлек и его к работам обсерватории.

Она размещалась тогда в трех этажах башни над зданием Кунсткамеры, куда Академия наук переехала в сентябре 1726 г. С 9 сентября

того же года на еще недостроенной обсерватории уже велись регулярные наблюдения. С февраля 1727 г. к ним подключился и Л. Эйлер. Сперва он лишь присутствовал на наблюдениях астрономов, которые, судя по записям в журналах, определяли полуденные высоты Солнца, изучали затмения спутников Юпитера, покрытия звезд и Сатурна Луной, а 15 сентября 1727 г. — солнечное затмение [18]. Кроме того, при обсерватории регулярно велись метеорологические наблюдения и наблюдения полярных сияний, начатые в Петербурге с 26 февраля/ 9 марта 1726 г. и с тех пор не прерывавшиеся. В них участвовали многие сотрудники Академии.

Первая весьма краткая печатная информация о наблюдениях на еще недостроенной обсерватории, где присутствовал и Эйлер, появилась в субботнем номере «Санктпетербургских ведомостей» за 10 августа 1728 г. (даты в газете и приложении к ней давались тогда по старому стилю). Газета сообщала: «Третиаго дня [т. е. 8/19 августа 1728 г. — *Н. Н.*] были астрономы и протчие члены математического класса здешней императорской Академии наук в некоторой большой палате (понеже академическое обсерваториум еще не состроено), из которой смотрели и примечали являющееся великое [т. е. полное. — *Н. Н.*] затмение луны, от которого все градусы [т. е. фазы. — *Н. Н.*] онаго затмения по их желанию совершенно примечены, хотя им некогда облака нечто помешательством были» [16, 1728, № 64 с. 260].

Наблюдениям солнечных и лунных затмений придавалось тогда особое значение, так как на их основе определялась и уточнялась географическая долгота Академической обсерватории, а значит, и новой столицы России. В Петербурге лунное затмение 8/19 августа 1728 г. наблюдали Делиль и штатные сотрудники обсерватории — Крафт, Майер и П. Виньон в присутствии всех «членов математического класса», а в Москве — воспитанник Академического университета А. Д. Кантемир. Составленное московским и петербургскими наблюдателями детальное описание явления и его зарисовки сохранились [13, с. 35—37].

Значительно более подробными оказались публикации о наблюдениях двух других лунных затмений. Первое из них произошло вечером 2/13 февраля 1729 г. (газета за 8.02.1729 г. [16, № 11, с. 44]), второе — в ночь с 28 июля / 8 августа на 29 июля/9 августа 1729 г. (газета за 2.08.1729 г. [16, № 61, с. 244]). Оба затмения, как утверждали «Санктпетербургские ведомости», «...смотрели на здешнем императорском обсерватории астрономы и математики Академии наук zelo подлинно» [Там же].

8/19 сентября 1729 г. Эйлер присутствовал на наблюдениях давно ожидавшегося покрытия Венеры Луной. «Санктпетербургские ведомости» — этот орган своеобразной «экспресс-информации» о работах местной обсерватории — посвятили редким наблюдениям подробную заметку в номере от 9 сентября 1729 г. Она начиналась следующими словами: «Вчерашняго дня были математики здешней Академии наук на императорском обсерватории в собрании, которые при той обсервации присутствовали... для учиненного от месяца в светлой день омрачения планеты Венеры... Сие учинилось по полудни в 3 часу, причем небо zelo светло было, так что оную планету и единными глазами смотреть возможно было так долго, пока она от месяца помрачена». О цели петербургских наблюдателей сообщалось: «... Чрез зрительные трубы открыть надеялись, невозможно ли будет такие цветы на оной планете при приближении

оной к месяцу паки увидеть, какие некоторые астрономы в Париже пред 14 годами при такой же обсервации на оной приметили, которые атмосферу месяца доказать казались» [16, № 72, с. 288].

Посвященная тем же наблюдениям анонимная статья в «Примечаниях на Ведомости», озаглавленная «О совокуплении Венеры с Луною» [17, 1729, ч. 78, с. 313—316], содержала подробное объяснение физической природы явления, а также методов и цели его наблюдения. Отметив, что обычно такие явления используют для изучения движения планет и их орбит, автор статьи (по утверждению П. П. Пекарского, это был Г. В. Крафт [15, с. 465]) особо подчеркнул, что петербургские астрономы имели в 1729 г. «весма другое намерение», а именно — поиски лунной атмосферы. Коснувшись истории вопроса, Крафт рассказал о Кеплере, считавшем, что Луна имеет атмосферу, о Гевелии, который «... не токмо Луне, но и всем протчим планетам парный круг [т. е. атмосферу. — *Н. Н.*] приписует» [17, 1729, ч. 78, с. 315], а также о противниках этой точки зрения. Особое внимание было уделено весьма важным для решения вопроса парижским наблюдениям 1715 г., во время которых «... приметили некоторые астрономы ... пред самым захождением Венеры за месяц красные и синие цветы в корпусе Венеры...» [17, 1729, ч. 78, с. 315].

Подробно рассказав о рефракции света «по преизрядному изобретению господина Невтона», объяснившего, как белый свет разлагается на составные цвета, Крафт писал: «Из тех, которые сей цвет приметили, надеялись некоторые, что оной от парного круга Луны, некоторые же, что оной от другой какой причины происходит. Но сие дело осталось с обеих сторон зело сумнительно...» Отметив, что в 1729 г. «... никаких цветов применить невозможно было...», Крафт закончил статью следующими словами: «... Не можно ли за неимением цветов и о небытии парного круга около Луны весма подлинно рассуждать. Время о том лутче всего объявит...» [17, 1729, ч. 78, с. 316].

Хотя ни в газетной, ни в журнальной заметках не назывались имена парижских наблюдателей, петербургские ученые отлично знали, что речь идет о Ж. Н. Делиле и его парижском друге Ж. Е. Лувиле. Именно они с помощью 7-футовой зрительной трубы заметили в момент второго контакта при покрытии Венеры Луной 28 июня 1715 г. любопытные цветовые эффекты. Вот как Делиль описал их в своей статье, опубликованной в «Мемуарах» Парижской академии наук за 1715 г.: «... Самое странное из того, что я наблюдал, это то, что Венера вблизи освещенного края Луны, за некоторое время до захождения [за край Луны. — *Н. Н.*] показалась мне красной с той стороны, которой она находилась на Луне, и синей — с противоположной стороны... Г. кавалер де Лувиль, который также видел эти цвета, приписывает их атмосфере, которую он допускает на Луне, но мне кажется, что без этой атмосферы можно очень хорошо их объяснить...» [19, с. 136].

Цветовые эффекты, замеченные в момент соприкосновения Венеры с Луной, могли указывать на ди- или рефракцию света в атмосфере одной из двух планет. Лувиль, веривший в существование лунной атмосферы, истолковал их как доказательство своего мнения. Делиль, убежденный в том, что на Луне нет атмосферы, потому что она не проявляет себя при наблюдениях покрытий звезд, предлагал объяснить эти эффекты либо за счет дифракции света на краю лунного диска, либо за счет атмосферы

Венеры. Однако для этого необходимо было детально изучить явление дифракции света, само существование которого оспаривали тогда многие ученые. В ходе возникшей дискуссии директор Парижской обсерватории Ж. Кассини высказал предположение, что замеченные Делилем и Лувилем цветовые эффекты были вызваны дефектами оптики телескопа. Ведь в то время ахроматических инструментов еще не существовало, и чтобы устранить окрашивание изображения, его приходилось постоянно держать в центре поля зрения. Кассини полагал, что Делиль и его друг нарушили это правило [20, с. 139—140].

Итак, петербургским ученым предстояло в 1729 г. решить старый спор, разгоревшийся в Париже 14 лет назад. Дело осложнялось и тем, что мнение Лувилля разделяли тогда многие ученые, в том числе и ближайший друг недавно умершего Ньютона Э. Галлей. Важность петербургских наблюдений была особенно велика потому, что на всей территории Европы в 1729 г. покрытие Венеры Луной оставалось невидимым. Не удивительно, что к этим наблюдениям 1729 г. в Петербурге готовились заранее.

В порядке такой подготовки петербургские ученые изучали литературу по оптике и дифракции света, а также проводили лабораторные эксперименты по дифракции в специально оборудованной при обсерватории камере-обсуре. Там изображение Солнца, полученное с помощью телескопа, проектировалось на экран, а дифракционная картина изучалась затем с помощью микроскопа с несколькими стеклами. Для этих тонких экспериментов необходимы были телескопы и микроскопы, не дающие окрашенного изображения предметов. Надежду на возможное уменьшение хроматизма своих инструментов при использовании в них многолинзовых систем нашли, изучая препараты глаз животных и человека в знаменитой анатомической коллекции Ф. Рюйша. Тогда-то Эйлер и начал впервые размышлять о теории ахроматических микроскопов и телескопов, которую он создал впоследствии [13, с. 137—143].

Подготовкой к наблюдениям 1729 г. были также и опытные стрельбы, в ходе которых летом 1727 г. Эйлер, Д. Бернулли и другие сотрудники Академии изучали скорость распространения в воздухе света вспышки и звука выстрела. Повторив в несколько видоизмененной форме парижские опыты Делиля 1712 г. и подтвердив волновую природу света, о которой свидетельствовало и явление дифракции, петербургские стрельбы стали в дальнейшем основой для разработки математической модели атмосферы Земли, а затем и других небесных тел. Эйлер предложил свою модель «атмосферы—облака» в сентябре 1727 г. Он считал, что частицы воздуха заключены в тончайшие водяные «скорлупки» и плотно прилегают друг к другу. С помощью такой модели, изложенной в 1729 г. в статье «Попытка объяснения воздушных явлений» [21], Эйлеру удалось объяснить упругость воздуха и некоторые другие свойства атмосферы. Однако издалека такая атмосфера должна была казаться совершенно непрозрачной и никаких цветовых эффектов в ней нельзя было заметить.

Покрывание Венеры Луной 8/19 сентября 1729 г. наблюдалось, судя по записям в журнале обсерватории, поочередно с помощью труб в 13, 15 и 23 фута, чтобы исключить влияние дефектов оптики. Наиболее тщательно изучались моменты второго и третьего контактов, изображение постоянно держалось в центре поля зрения телескопа. При этом участ-

никам наблюдений не удалось заметить никаких цветовых эффектов, как отмечалось и в упомянутых выше публикациях. Однако в журнале обсерватории сохранилась интересная запись о том, что в самую большую трубу было зафиксировано Делилем небольшое дрожание изображения в момент третьего контакта, т. е. за несколько секунд до того, как Венера полностью скрылась за лунным диском [18, л. 104].

Все это ставило под сомнение существование атмосферы на Луне, но делало весьма вероятным наличие ее на Венере. Важность такого вывода возрастала из-за особо благоприятных условий наблюдения в 1729 г., когда Луна и Венера были видны днем, при ясной погоде и достаточно высоко над горизонтом ( $h = 46^{\circ}7'30''$ ). К тому же, как отмечалось, явление оставалось недоступным для астрономов других стран. Петербургские наблюдения 8/19 сентября 1729 г. впервые четко поставили перед учеными задачу поисков планетных атмосфер. Был разработан метод наблюдений, подобраны необходимые инструменты и условия их использования, которые подробно освещались в упомянутой выше публикации в «Примечаниях на Ведомости». С тех пор и Эйлер не раз обращался к этой проблеме.

С особым увлечением, как можно судить по пометкам в записных книжках тех лет [22], занимался Эйлер наблюдениями Солнца и солнечных пятен. Подробная запись о наблюдениях первых солнечных пятен была занесена в журнал Петербургской обсерватории 15 июля 1730 г. [18, л. 143—144 об.]. В ожидании предстоящего солнечного затмения рано утром в обсерватории, как обычно, собрались «все члены математического класса». Заранее проведя сравнение часов и устремив на Солнце трубы в 13 и 15 футов, а также рассматривая его изображение, полученное на экране с помощью 14-футовой трубы с нитяным микрометром, Делиль, Крафт и другие поименно не названные в журнале наблюдатели с удивлением обнаружили там много пятен. Аккуратно зарисовав столь редкое для того времени явление, они тщательно измерили диаметр Солнца и моменты захождения и выхода из-за диска Луны каждого отдельного пятна.

Редкое и величественное зрелище произвело сильное впечатление на Эйлера и его друзей, которые впервые в жизни видели солнечные пятна. С этого дня движение и расстояние пятен от края солнечного диска тщательно измерялось, по их движению оценивалась скорость вращения Солнца и проверялись основные положения предложенной Делилем еще в 1713 г. в Париже теории движения солнечных пятен. Она была опубликована в Петербурге лишь в 1738 г. [23], хотя, по свидетельству Г. Ф. Миллера [24, с. 497], уже в 1735 г. была подготовлена к печати. Эйлер активно участвовал во всех этих работах. В его записных книжках тех лет встречаются наброски формул для вычисления расстояний солнечных пятен от края солнечного диска и другие материалы, связанные с разработкой деталей названной теории [22]. Они легли в основу статьи И. А. Эйлера (старшего сына Л. Эйлера) «О вращении Солнца вокруг оси, определенном по видимому движению пятен», опубликованной лишь в 1768 г. [25]. Начаты в 1730 г. наблюдения солнечных пятен, судя по записям в журнале обсерватории, продолжались почти до конца 1735 г., максимум пришелся на 1734 г. Этот период совпал и с началом самостоятельных наблюдений Эйлера в Петербургской обсерватории.

Как отмечалось в журнале, он пришел сюда 11 марта 1733 г. н. ст. вместе с группой геодезистов, поименно не перечисленных. Они выверили четверо часов, пронаблюдали захождение первого спутника Юпитера, а затем утром (между 8 и 9 часами) и после полудня (с 2 до 3 часов) определяли соответственные высоты верхнего края Солнца. На основе проведенных наблюдений Эйлер вычислил момент прохождения Солнца через меридиан места и оценил ошибку этого наблюдения. Момент истинного полудня, определенный с помощью малого квадранта, оказался равным  $11^{\text{h}}30^{\text{m}}4,5^{\text{s}} \pm 2,5^{\text{s}}$  [18, л. 272 об.—273]. С этого дня и вплоть до своего отъезда из России в 1741 г. Эйлер регулярно вел такие наблюдения, став «своим человеком» в обсерватории.

Определение полуденных высот Солнца было важно для Службы времени, введенной в Петербургской обсерватории XVIII в. Значение этих работ еще более возросло после начала Второй Камчатской экспедиции 1731—1744 гг. Поскольку астрономы не имели тогда соответствующих таблиц и ежегодников, использовать наблюдения, выполненные в Сибири, можно было лишь в том случае, когда удавалось сравнить их с какими-либо аналогичными наблюдениями, одновременно выполненными в другом месте. Вот почему сотрудники Петербургской обсерватории особенно аккуратно проводили все доступные им наблюдения в период с 1731 по 1744 г. Л. Эйлер деятельно участвовал в этих наблюдениях. Его помощь была тем более ценной, что в тот период основная масса астрономов и геодезистов находилась в экспедиции, Ф. Х. Майер умер, Д. Бернулли уехал из России, а Г. В. Крафт, став профессором физики с 1731 г., не мог уделять астрономическим наблюдениям слишком много времени.

Л. Эйлер имел непосредственное отношение к организации при Петербургской обсерватории первой в нашей стране Службы времени. Побывав в обсерватории вскоре после приезда в Россию, Эйлер убедился в том, как много огорчений доставлял астрономам неравномерный ход часов [18]. Это побудило его заняться регулировкой их хода, а затем и созданием новых астрономических часов. За основу конструкции были взяты маятниковые часы Х. Гюйгенса. Л. Эйлер вместе с Д. Бернулли и Я. Германом разрабатывал теоретические основы конструкции новых часов Петербургской обсерватории, которые были изложены в ряде статей, опубликованных в «Комментариях» Петербургской академии наук за 1727—1736 гг. В 1735 г. профессор механики И. Г. Лейтман построил эти часы, использовавшиеся в дальнейшем при наблюдениях [13, с. 57].

Важное значение имел и предложенный Эйлером метод вычисления таблиц полуденного уравнения Солнца. С его помощью были составлены таблицы высот Солнца в Петербурге на каждый час, а затем и таблица для вычисления полуденного уравнения Солнца по двум его разным высотам, наблюдавшимся до и после полудня. С 1733 г. этими таблицами стали пользоваться все сотрудники Академической обсерватории. В 1735 г. работы Эйлера были представлены Академической конференции. В протоколе заседания за 27 января/6 февраля 1735 г. говорилось: «Г. проф. Эйлер представил сделанное им вычисление времени, с помощью которого для данного горизонта всегда можно узнать, в котором часу дня человек живет, если только он располагает неким постоянным набором высот Солнца. Так как эта пьеса должна быть напечатана в «Примечании [на

Ведомости». — *Н. Н.*], то г. автор опять взял ее с собой домой, чтобы иметь возможность самому скопировать точно числа» [26, т. 1, с. 142].

Работа Эйлера живо заинтересовала Делиля. В протоколе заседания Академической конференции за 31 января/11 февраля 1735 г. говорится: «Г. проф. Делиль взял с собой, чтобы его просмотреть, разработанный и представленный г. проф. Эйлером «Метод быстро и простого вычисления таблиц полуденного уравнения»... Тот же г. проф. Делиль взял с собой домой еще ... тем же г. проф. Эйлером составленную таблицу полуденного уравнения Солнца, вычисленную с точностью до минут времени на основе наблюдения двух каких-либо высот Солнца до и после полудня для одного градуса склонения Солнца в интервале наблюдений за любой час из 18 для высоты полюса Петербургской обсерватории» [26, т. 1, с. 146]. Работа Эйлера была опубликована впоследствии на латинском языке [27]. Можно полагать, однако, что часть ее печаталась в 1731 г. по-русски и по-немецки в серии статей «О времени и его разделении» в «Примечаниях на Ведомости» [17, 1731, ч. 2—10]. Автором этих анонимных публикаций обычно считали Г. В. Крафта [15, с. 465]. Тем не менее Эйлер, по-видимому, был его соавтором или даже сам написал две из девяти статей — те, что вошли в части 7 и 8 [17, 1731, ч. 7—8, с. 25—32]. В них обсуждаются вопросы о вычислении поправки маятниковых часов по наблюдению звезд и Солнца, т. е. те же проблемы, что в работе [27]. К тому же и Эйлер уже успешно сотрудничал с Крафтом как в обсерватории, так и в написании статей для «Примечаний на Ведомости».

Итак, к 1735 г. завершились основные исследования, связанные с изготовлением новых часов для Петербургской обсерватории, а также работы, связанные с регулировкой хода всех часов обсерватории и способами введения поправок времени. Это позволило Делилю обратиться к Сенату с предложением об организации в России первой Службы времени. Как отмечалось в протоколе Академической конференции за 20/31 января 1735 г., отныне выстрел сигнальной пушки должен был ежедневно оповещать жителей Петербурга о наступлении полудня [26, т. 1, с. 139]. Традиционные полуденные выстрелы звучат в Ленинграде и сегодня, напоминая о создателях нашей первой Службы времени.

Эйлер деятельно участвовал и в организации в нашей стране Службы Солнца. Первые же наблюдатели солнечных пятен еще в XVII в. заметили, что с появлением пятен учащаются и наблюдения полярных сияний. В справедливости этого наглядно убедился и Делиль, когда в 1713 г. в Париже изучал появившиеся тогда солнечные пятна. Отправляясь в 1725 г. в Россию, он договорился со своим другом Ж. Ж. Дорту де Мерапом вести систематические наблюдения изменений погоды, полярных сияний и солнечных пятен как в России, так и во Франции с тем, чтобы решить вопрос о взаимозависимости этих явлений. К их работам присоединился и А. Цельсий, который собирал аналогичные наблюдения по Швеции и Скандинавским странам.

В Петербурге такие наблюдения начались на следующий же день после приезда Делиля — с 26 февраля/8 марта 1726 г. В них участвовали все штатные и множество добровольных сотрудников Петербургской обсерватории. Наибольшие ряды наблюдений выполнили Ф. Х. Майер и Г. В. Крафт. Их данные и легли в основу первой теории полярных



сияний, предложенной Майером в октябре 1726 г. и опубликованной в 1729 г. [28]. Солнечные же пятна, как отмечалось выше, в Петербурге наблюдали лишь с 1730 г. Какие-либо самостоятельные наблюдения Эйлером полярных сияний нам пока неизвестны, но недавно были обнаружены опубликованные им теоретические исследования по данному вопросу. До сих пор их автором считался Г. В. Крафт, который, по утверждению П. П. Пекарского, напечатал в «Примечаниях на Ведомости» пять анонимных статей о северном сиянии [15, с. 465]. В «Примечаниях» за 1730 г. действительно опубликовано десять статей, озаглавленных: «О бывшем великом тому недавно северном сиянии» [17, 1730, ч. 14—17, 21, 25, 32, 35, 77, 78]. Если верно, что пять из десяти статей написал Г. В. Крафт, то какие именно? Кто же — авторы остальных? Недавно их удалось установить. Ю. Х. Копелевич<sup>1</sup>, изучая письма Г. Ф. Миллера к И. Д. Шумахеру, нашла в них указания на то, что Миллер написал статьи, освещающие историю вопроса [17, 1730, ч. 14—17, 21]. Автором же статей по теории происхождения полярных сияний оказался Л. Эйлер [17, 1730, ч. 25, 32, 35], и лишь две последние из десяти статей были написаны Г. В. Крафтом [17, 1730, ч. 77, 78]. Они содержали анализ петербургских наблюдений полярных сияний.

В статьях Эйлера дан критический анализ объяснений физической природы полярных сияний, предложенных различными учеными от Аристотеля до Ф. Х. Майера. Теория последнего вместе с петербургскими наблюдениями, на которых она базировалась, освещена в заключительных статьях Крафта. И хотя Эйлер не предложил ничего принципиально нового, он, опираясь на наблюдения петербургских ученых, показал необоснованность различных домыслов о природе полярных сияний, в том числе объяснение Аристотеля, которое «...человеческую память более пустыми словами, нежели разум и действительными делами наполняет» [17, 1730, ч. 25, с. 97]. Более позднее объяснение Декарта, который, как особо подчеркивалось, сам никогда полярных сияний не видел, «...от древнего Аристотелского мнения... взято, которое однако ж ныне более за важно не почитается» [17, 1730, ч. 35, с. 138].

Особое внимание в статье уделено наиболее популярному тогда объяснению возникновения полярных сияний за счет отражения света извергающихся вулканов от взламывающегося льда. Однако «...сие мнение здесь в Санктпетербурге невесма подтверждается...» [17, 1730, ч. 25, с. 98], поскольку лед Ладожского озера взламывается каждую весну, тогда как северные сияния в то время там никогда не наблюдались. К тому же неясно, как Гекла и другие вулканы могли столь сильно освещать ладожский лед, чтобы свечение это было видно по всей Европе [17, 1730, с. 25, с. 98—99].

Перебрав все известные объяснения полярных сияний, Эйлер пришел к заключению, что каждый судит о Вселенной «по своей науке, в которой он искусен». Вот почему полководец видит поле брани там, где купец — ярмарку, поэт — Парнас, лекарь — госпиталь, а астроном — планету! «...Однако ж те наилучше рассуждают, — закончил свой раздел Эйлер, — которые свет [т. е. Вселенную. — Н. Н.] за то почитают, что оной подлин-

<sup>1</sup> См. статью Ю. Х. Копелевич «Эйлер — член Петербургской академии наук, действительный и почетный» в наст. изд.

но есть ... — за истинный химический лабораториум...» [17, 1730, ч. 35, с. 140].

Следует отметить, что петербургские ученые весьма удачно выбрали момент для привлечения внимания своих читателей к «химической лаборатории Вселенной». Формальным поводом для публикации статей послужило наблюдение аномального полярного сияния 5 февраля 1730 г. Статьи Г. Ф. Миллера, Л. Эйлера и Г. В. Крафта в «Примечаниях на Ведомости» печатались с 16 февраля по 28 сентября 1730 г. Однако истинной причиной их публикации стала замеченная петербургскими астрономами активизация различных процессов в околоземном пространстве. Она проявилась в резком увеличении числа полярных сияний и разнообразных погодных изменений [29], что заставляло ожидать и активизации процессов в более отдаленных частях «химической лаборатории Вселенной». Прогнозы блестяще оправдались. С 15 июля 1730 г. в Петербурге удалось наблюдать и солнечные пятна. Таким образом взаимосвязь между активностью Солнца и процессами в околоземном пространстве была убедительно доказана.

Первой публикацией о единстве физической природы полярных сияний и хвостов комет стала статья «О кометах», напечатанная анонимно в «Примечаниях на Ведомости» за 1733 г. [17, 1733, ч. 86] и основанная на наблюдении аномального полярного сияния 1733 г., солнечных пятен и других явлений. В дальнейшем авторы любой статьи в «Примечаниях на Ведомости», касаясь вопроса о полярных сияниях [17, 1738, ч. 70—75], хвостах комет [17, 1742, ч. 33—40], солнечных пятнах [17, 1735, ч. 23—27], зодиакальном свете [17, 1739, ч. 45—48] и других подобных явлениях, никогда не забывали подчеркнуть единство их физической природы. Наиболее подробный анализ всех этих явлений дан в статье Л. Эйлера «Физические исследования о причине хвоста комет, северного сияния и зодиакального света» [30], опубликованной в 1748 г. уже в Берлине.

Итак, начав заниматься теорией полярных сияний с 1730 г., Эйлер внимательно изучал солнечные пятна, а затем и другие проявления солнечной активности, размышлял о взаимосвязи этих явлений в течение многих лет. Вот почему есть основания полагать, что именно Эйлер был автором статьи, в которой впервые четко говорилось о сходстве процессов, происходящих в хвостах комет и полярных сияниях [17, 1733, с. 86]. До сих пор все три статьи под общим заглавием «О необыкновенном северном сиянии 1733 года» [17, 1733, ч. 85—87] приписывались Г. В. Крафту [15, с. 465]. Однако сравнение всех статей показывает, что описанию самого аномального полярного сияния 1733 г. посвящены лишь первая и последняя части, тогда как средняя имеет самостоятельный заголовок «О кометах» и посвящена другой теме. Основное внимание уделяется здесь физической природе кометных хвостов. При изложении различных взглядов на возникновение хвостов комет явное предпочтение отдается теории истечения Ньютона. Образование полос в хвосте кометы рассматривается как явление, происходящее в атмосфере кометы, по аналогии с образованием «столбов» полярных сияний в атмосфере Земли. Отмечается важность изучения комет для разработки в будущем методов определения орбит комет и планет, а также для выяснения вопроса о плотности межпланетной среды [17, 1733, ч. 86, с. 343—346]. Всеми этими вопросами в начале 30-х годов в Петербурге занимался именно Эйлер. Можно полагать, что ему как автору

статей по теории полярных сияний доверили написать и статью о теории происхождения хвостов комет.

Вероятность такого предположения подтверждает и Г. Ф. Миллер. Рассказывая в своей «Истории Академии наук» о событиях 1729 г., он писал об издании журнала «Примечания на Ведомости»: «...Теперь [т. е. с 1729 г. — Н. Н.] также господа Эйлер, Гмелин, Крафт, Вейтбрехт решились работать для этих листков, так что они становились по разнообразию собранных в них материалов чем дальше, тем популярнее. Сформировалось общество, которое собиралось по вечерам каждую субботу у господина Шумахера, где оно обсуждало предметы, на темы которых должно было печатать статьи» [24, с. 181].

Что же именно в «Примечаниях на Ведомости» за 1729 г. опубликовал Эйлер? Судя по тому, что в те годы он много занимался вопросами мореходной астрономии, теорией движения Луны, приливов и отливов, методами определения долгот [1, с. 76—78, 85—96], можно полагать, что он был автором следующих статей: «О сыскании долготы мест на море» [17, 1729, ч. 16, с. 61—64], «О кораблеплавании» [17, 1729, ч. 2, 29], а также раздела «О приливе и отливе моря» [17, 1729, с. 90, 91] из серии статей «О прибывании и убывании воды в реке Неве» [17, 1729, ч. 86, 88—91], написанных, по-видимому, Г. В. Крафтом, который вел наблюдения за колебаниями уровня воды в Неве.

Заслуживает внимания, что общее расположение материала и основная аргументация статей «О приливе и отливе моря» совпадают с содержанием соответствующих разделов «Писем к одной немецкой принцессе» [31, т. 1, письма 62—67], причем имеет место текстуальное совпадение в изложении мнения Декарта о возникновении морских приливов под действием «лунного вихря». Характерно, что эта статья «Примечаний» [17, 1729, ч. 90], опубликованная 11 ноября 1729 г., содержала первое критическое выступление против взглядов Декарта.

Сравнив картезианское «давление лунного вихря» на воздушный и водный океаны Земли с ньютоновским притяжением их к Луне, петербургские ученые, опираясь на свои астрономические и метеорологические наблюдения, смогли сделать выбор между двумя теориями. Вот как говорилось об этом в статье: «...Сия от Картезия объявленная причина в действо произведена быть не может. Ибо ежели б воздух под Луною так жестоко угнетал, то надлежал бы оного действие и на ртуте в барометрах приметить, от котораго оная знатно выше подымалась, но сие непримечено. Потом надлежало бы морю в то время, как Луна чрез полуденную линию идет, убывать, чему противное толь паче примечается... Чего ради Кеплер причину того более притязающей силе Луны, нежели угнетению приписал, а господин Невтон доказал потом помощью вышния математики зело изрядно...» [17, 1729, ч. 90, с. 363].

Кроме того, Эйлер, вероятно, принимал участие в подготовке еще двух статей, опубликованных в «Примечаниях на Ведомости» за 1729 г. Первая из них называлась «О Иоанне Лев» [17, 1729, ч. 32, 33] и была посвящена похождениям известного шотландского авантюриста Джона Лоу, удачливо игравшего в азартные игры, что и дало повод вставить в статью текст о теории вероятностей. Лоу получил хорошее образование, в том числе по математике. В 1695 г. он был выслан из Англии после очередной дуэли. Путешествуя по странам континентальной Европы, Лоу изучил финансо-

вое и банковское дело и в 1705 г. опубликовал книгу, где изложил свою теорию о связи денежного обращения с торговлей. Система Лоу заинтересовала регента Людовика XV — Филиппа II Орлеанского, который пригласил Лоу во Францию. За пять лет (1716—1721) он сделал там головокружительную карьеру — от директора частного банка до генерал-прокурора финансов, директора компании по торговле с американскими колониями Франции (Луизианой, Канадой и др.), государственного министра, графа и почетного члена Парижской академии наук. После банкротства государственного банка и компании Лоу бежал в Венецию, куда одновременно перевел свои деньги.

Вторая статья «О генеральном съезде Швейцарских кантонов» [17, 1729, ч. 66] вовсе не имела отношения к математике. В ней описывалось государственное устройство Швейцарской республики, сопровождавшееся кратким, но весьма выразительным панегириком этому типу государственного правления. Хотя в штате Петербургской академии было несколько швейцарцев, думается, что автором (или соавтором) данного отрывка можно считать Л. Эйлера, который и в своей переписке нередко высказывался в том же духе.

Из остальных публикаций в «Примечаниях на Ведомости» Эйлеру можно приписать еще четыре серии статей: «О Земле» [17, 1732, ч. 6—12, 49, 50]; «О ссыскании долготы всякого места на Земле» [17, 1734, ч. 53—55, 57—59]; «О внешнем виде Земли» [17, 1738, ч. 27—32, 103, 104] и «О том, как должно примечать морские приливы и отливы» [17, 1740, ч. 9, 10]. Предпоследняя из них подписана Эйлером, последняя хотя и не подписана, но, как заметила Ю. Х. Копелевич<sup>2</sup>, текстуально совпадает с рукописью работы Эйлера о приливах (E57) [32; 1, с. 72].

Наибольший интерес, однако, представляют три первые из перечисленных серий статей. В них на основе учения Коперника—Кеплера—Ньютона давалось представление о Земле как о рядовой планете Солнечной системы, рассматривались способы определения широт и долгот на ее поверхности, а также методы определения фигуры Земли. Обращает на себя внимание особое сходство циклов «О Земле» и «О внешнем виде Земли» как по заглавию, так и по содержанию. И там, и тут в принципе одинаковая проблематика, только разделенная шестилетним перерывом. По-видимому, автор хотел познакомить своих читателей с новыми достижениями науки, сделанными за шесть прошедших лет.

Вместе с тем оба цикла статей резко отличаются по методу изложения материала. Так, цикл 1732 г. написан в задиристом тоне; горячо защищая учение Коперника и Ньютона, в пылу борьбы автор нередко позволяет себе антиклерикальные выпады. Одним из таких выпадов стал иронический рассказ о блаженном Августине, отрицавшем существование антиподов. Кстати, тот же рассказ был включен и в статью 1729 г. «О кораблеплавании» [17, 1729, ч. 2]. Интересно отметить, что в тексте статей «О Земле» оказались и наиболее яркие цитаты из речей Делиля и Бернулли в защиту учения Коперника, с которыми они выступали на публичном собрании Академии в марте 1728 г. [33]. Это тем более любопытно, что до сих пор считалось, будто русский перевод речей не был опубликован из-за запрета синода [34, с. 202].

<sup>2</sup> См. статью Ю. Х. Копелевич в наст. изд.

Однако синод не запретил издать в 1732 г. резко полемические высказывания, направленные против церкви. Так, например, описав строение Вселенной и ее гигантские размеры, автор язвительно заметил: «Теперь хотел бы я знать, ежели кто все сие здраво разсудит, будет ли он еще такое мнение иметь, в котором многие состоят, что будто только наша Земля одна благодать Творца изображает, и что все прочее, что ни есть, для нашей Земли и ея жителей от бога сотворено?» [17, 1732, ч. 10, с. 39]. Подобное мнение, как утверждал автор, равносильно убеждению известного афинского сумасшедшего, полагавшего, что любое входящее в гавань судно, прибыло туда специально для него. С тем же основанием и паук, раскинувший свою паутину в уголке огромного здания оперного театра, вправе считать, что здание построено лишь для того, чтобы ему было удобно ловить там мух!

Цикл статей «О внешнем виде Земли», опубликованных в 1738 г., уже после смерти постоянного защитника петербургских ученых в синоде — Феофана Прокоповича, написан в совершенно ином тоне. Автор по-прежнему стоит на позициях учения Коперника и Ньютона. Однако теперь он не позволяет себе ни малейших выпадов в чей-либо адрес, никаких антиклерикальных замечаний. Коперниканские доктрины рассматриваются как сами собой разумеющиеся, в которых никто не сомневается, а значит, и защищать их нет необходимости. Материал излагается строго научно, порой суховато, но зато очень четко и ясно.

Деятельность Эйлера, как и всех других петербургских астрономов, была тесно связана не только с обсерваторией, но и с Географическим департаментом, где с 25 августа 1735 г. ст. ст. он был штатным сотрудником. Основным источником сведений об этих работах служат различные документы Академии наук, изданные М. И. Сухомлиновым [35], опубликованные протоколы заседаний Академической конференции [26], а также труды Л. Эйлера [4] и др. и его переписка [36—39]. Весьма ценно также описание рукописей ученого с аннотациями касающихся его документов и протоколов из Архива Академии наук СССР [1].

Однако наиболее важным источником остаются протоколы Географического департамента. Они сохранились почти полностью и содержат ценную и богатейшую информацию о работах Эйлера по картографии России и по геодезии как в первый, так и во второй его петербургский период. На основе написанных по-французски протоколов за 1735—1737 гг. краткий обзор деятельности Эйлера в Географическом департаменте дала В. Ф. Гнучева [3, с. 37—38, 52]. Более подробные сведения по тем же протоколам за 1735—1747 гг. приведены в книге автора настоящей статьи [13, гл. 3]. Это далеко не исчерпывает всех имеющихся там материалов.

Протокольные записи полезны, далее, для комментирования переписки Л. Эйлера и уточнения дат ряда недатированных писем. В одном из них говорится о предполагаемом посещении Эйлером и Делилем «в четверг» бюро гг. инженеров с целью посмотреть там карты. Издатели правильно отнесли письмо № 7 к концу 1735 г. [39, с. 131]. Протоколы Географического департамента позволяют уточнить дату и обстоятельства посещения. Так, 3 ноября 1735 г. ст. ст. Делиль, Эйлер и их сотрудники получили приглашение посетить Канцелярию Главного управления артиллерии и фортификации [40, л. 27]. 4 декабря 1735 г., действительно в четверг, они там были [40, л. 34 об.]. В протоколе приведено подробное описание

этого посещения. Таким образом, письмо № 7 могло быть написано между 27 ноября и 3 декабря 1735 г. ст. ст.

Другое письмо № 4 из переписки Эйлера с Делилем, предположительно отнесенное к октябрю 1735 г. [39, с. 129], удалось точно датировать по протокольным записям с еще большей точностью. В нем сообщалось о посылке Эйлеру начатой им карты с просьбой закончить ее поскорее, так как этого требует президент И. А. Корф [41, с. 129]. В протоколах Географического департамента от 14 января 1736 г. сделана следующая запись: «Поскольку именно г. профессор Эйлер после того, как он договорился об этом с г. профессором Делилем, взял на себя составление карты границ России, которую требует Высокий Сенат, то г. Делиль послал ему вчера [т. е. 13.01.1736 г.! — *Н. Н.*] карту (которую он, г. Эйлер, перед тем составил) с запиской, чтобы просить его ... закончить названную карту...» [41, л. 4—4 об.] Таким образом, письмо № 4 Делиля к Эйлеру было отправлено 13 января 1736 г. Кстати, и приказ Корфа, о котором идет речь в письме, был получен в Географическом департаменте 10 января 1736 г. [41, л. 3 об.]. Число подобных примеров можно увеличить.

Популярны в Петербурге были и исследования по истории астрономии, которые, как считал Делиль, могут «значительно способствовать вдохновению гения, что необходимо для усовершенствования астрономии с помощью новых открытий» [13, с. 161]. Наблюдая Солнце и работая над составлением таблиц полуденного уравнения, Эйлер заинтересовался проблемой длины тропического года. Полагая, что межпланетная среда заполнена веществом, оказывающим сопротивление движущимся в ней небесным телам, он надеялся обнаружить его с помощью изучения календарей. Ведь если движение Земли действительно замедляется, то средняя длина тропического года должна постепенно уменьшаться, чего не могли не заметить составители календарей.

Вместе с Делилем, Крафтом, Миллером, В. К. Трелиаковским, Т. З. Байером и другими в начале 30-х гг. Эйлер провел сравнительный анализ календарных систем древнего и современного ему Китая, Японии и других народов Дальнего Востока, Средней и Передней Азии, Северной и Южной Индии. Результаты этих коллективных исследований вошли в книги, опубликованные Байером без точного указания автора каждого раздела [13, с. 184—190]. Лишь в последней своей книге, опубликованной в 1738 г., Байер отступил от излюбленного правила, включив в «Историю Бактрийского царства греков, в которой одновременно излагается старая хроника греческих колоний в Индии...» [42] в качестве приложения подписанную Л. Эйлером статью «Об астрономическом солнечном годе индийцев» (E18) [43].

Это исследование базировалось на тщательном изучении присланной в Петербург рукописи датского миссионера Х. Т. Вальтера, 20 лет прожившего на Малабарском побережье. Впоследствии рукопись Вальтера также была опубликована в приложении к книге Байера [42]. О начале работы Эйлера над статьей о календаре южной Индии можно судить по сохранившемуся письму Байера, датированному 17/28.01.1736 г. Посылая Эйлеру две рукописные книги Вальтера, он писал:

«В двух приложенных книгах — новые сведения об искусстве счета у малабарцев. Господин Ла Кроз<sup>3</sup> при рассмотрении их способа обраче-

<sup>3</sup> Матурен Вейссьер де Ла Кроз (1661—1739) — французский востоковед, гугенот, работавший в Берлине.

ния с дробями заметил, что у древних римлян и греков был тот же самый способ, и доказывает это ссылками на Петрония <sup>4</sup> и Горация <sup>5</sup>.

Но я полагаю, что также и в остальном, как например, в своем сложении и делении, индийцы могли иметь то же самое, что имели греки и римляне. Прошу Вас оказать мне любезность и обдумать это дальше... Я буду Вам очень благодарен за эти труды...» [44].

Эйлер и его коллеги изучали также и народные календари России, Украины, Грузии. Они всегда стремились получить материал для своих исследований из первоисточника. Так, сведения о китайских календарях были присланы им из Пекина, о календаре тамиллов — из Малабара. Японском и грузинском календарях они узнали от живших в Петербурге японцев и грузин. Сведения о календарях Северной Индии сообщил приезжавший в Петербург из Астрахани индийский купец. Байер называл его «Зонгбарой», Третьяковский — «Сунгирем Притомовичем». Он обучал желающих санскриту и начаткам индийской науки [15, с. 183], а сам учился у них русскому языку. Уезжая из Петербурга, он получил в подарок составленную Третьяковским грамматику русского языка.

Переехав в 1741 г. в Берлин, Л. Эйлер продолжал там все начатые им в России исследования. В 1746 г. был опубликован сборник его статей разного содержания (E80) [45]. Сообщая о подготовке издания, Эйлер писал Делилю 15.02.1746 г.: «Я надеюсь ... что этот сборник доставит Вам удовольствие, ибо, кроме нескольких статей по анализу и механике, там есть несколько статей по астрономии и физике, по большей части довольно интересных, например новая теория света и цветов, весьма отличная от теории Ньютона и которая в совершенстве объясняет все явления. Относительно движения Земли... я применяю там новое лунное неравенство, но, мне кажется, я открыл гораздо более важное обстоятельство, именно, что время вращения Земли не постоянно, а понемногу уменьшается... Это сокращение года есть следствие сопротивления эфира... если эфир оказывает сопротивление, то периоды обращения планет должны уменьшаться, как и их эксцентриситеты... для комет этот эффект будет весьма значителен...» [39, с. 240—241].

Важным итогом начатых в Петербурге астрономических исследований стали статьи Эйлера, вошедшие во второй и третий тома «Записок» Берлинской академии наук, опубликованных в 1748 и 1749 гг. Здесь прежде всего следует назвать работу о физической природе хвостов комет, полярных сияний и зодиакального света (E103) [30]. Большой интерес представляли статьи по небесной механике (E112—E115): «Исследования о движении небесных тел в общем», «Метод определения истинных моментов новолуний и полнолуний», «Метод определения истинного геоцентрического места Луны по наблюдению покрытий неподвижной звезды Луной», а также «Метод определения долготы мест по наблюдению покрытий неподвижных звезд Луной» [46]. И, наконец, появилась статья с изложением основ эйлеровой теории ахроматов: «Об усовершенствовании объективных стекол телескопов» [47].

Не забывал Эйлер и об астрономических наблюдениях, которые вел в Петербурге. Ведь именно опыт таких наблюдений выработал в нем столь

<sup>4</sup> Гай Петроний (?—66 н. э.) — римский писатель, аристократ-эпикурец, приближенный Нерона.

<sup>5</sup> Квинт Гораций Флакк (65 до н. э.—8 до н. э.) — римский поэт.

редкую и удивительную для математика интуицию астронома-наблюдателя. Ее Эйлер неоднократно демонстрировал в своих исследованиях по небесной механике<sup>6</sup>. Однако Берлинская обсерватория 40-х годов XVIII в. не шла ни в какое сравнение с Петербургской астрономической обсерваторией, которая после опубликования в 1741 г. описания ее инструментов и оборудования [48], а также обзора ее работ, включенного в книгу И. Вайдлера «История астрономии» [49], стала считаться одной из лучших в мире. Распространению этого мнения во многом способствовали и рассказы ученых, работавших в Петербургской обсерватории, а затем вернувшихся на родину. Здесь прежде всего следует упомянуть Д. Бернулли (Базель), Г. В. Крафта (Тюбинген), Г. Гейнзиуса (Виттенберг) и И. Х. Либерта (Берлин).

Для астрономов Пруссии и других небольших государств Европы Петербургская обсерватория долго еще оставалась недостижимым образцом по богатству оборудования и разнообразию научных исследований. Это мнение разделял и Эйлер, который писал И. Д. Шумахеру 18/29.03.1746 г.: «Обсерватория в Петербурге по праву может гордиться тем, что в течение столь многих лет не жалели никаких средств на приобретение всех необходимых инструментов. Кроме того, и здание ее также настолько хорошо приспособлено для астрономических целей, что мы в этом отношении не можем предложить лучшего образца» [37, т. 2, с. 86].

Широко используя свой петербургский опыт, Эйлер приложил немало усилий для того, чтобы восстановить Берлинскую обсерваторию, заброшенную после смерти в 1740 г. ее последнего директора Х. Кирха. 23.04.1743 г. он писал Делилю: «Обсерватория Общества после смерти г-на Кирха была до сих пор в плохом состоянии, так что почти ничего нельзя было наблюдать. Предполагалось, что король предназначил это место для другого строения, и поэтому не было желания делать какие-либо расходы на нужды астрономии. Но сейчас начинают приводить Обсерваторию в лучшее состояние и снабжать ее необходимыми инструментами. Вновь нашли также линию меридиана, которую Вы наметили здесь проездом<sup>7</sup>, а если бы не это, такой линии не определили бы вовсе» [39, с. 163].

На восстановленной Берлинской обсерватории, как сообщал Делилю Эйлер 15.04.1748 г., была оборудована камера-обскура, подобная петербургской. В ней Эйлер вместе с берлинским астрономом И. Кисом проводил эксперименты с «искусственными затмениями» по делилевской методике [39, с. 260]. Там же вместе с сестрами Кирх Эйлер наблюдал 25 июля 1748 г. кольцеобразное солнечное затмение, во время которого был окончательно решен и вопрос о лунной атмосфере, так волновавший юного Эйлера и его петербургских коллег еще в 1729 г. [50, 51]. Продолжая многочисленные исследования, начатые им в России, Эйлер и в Берлине постоянно чувствовал себя представителем Петербургской академии наук. Вот почему на заданный ему в 1749 г. вопрос Фридриха II о том, где он изучил то, что знает, Эйлер ответил: «... Я за все должен быть благодарен своему пребыванию в Петербургской академии» [37, т. 2, с. 182].

<sup>6</sup> См. статью Н. И. Невской и К. В. Холшевникова в наст. изд.

<sup>7</sup> Делиль был там в 1725 г. по дороге из Парижа в Петербург.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1. 427 с.
2. *Субботин М. Ф.* Астрономические работы Леонарда Эйлера // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 368—375.
3. *Глуцева В. Ф.* Географический департамент Академии наук XVIII века. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1946. 446 с.
4. *Эйлер Л.* Избранные картографические статьи: Три статьи по математической картографии. М.: Изд-во геодез. лит., 1959. 80 с.
5. *Вавилов С. И.* Физическая оптика Леонарда Эйлера // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 3. С. 138—147.
6. *Дорфман Я. Г.* Физические воззрения Леонарда Эйлера // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 377—411.
7. *Минченко Л. С.* Физика Эйлера // Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР. 1957. Т. 19. С. 221—270.
8. *Слюсарев Г. Г.* «Диоптрика» Эйлера // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 414—420.
9. *Погорельская Е. И.* Дисперсия света: Исторический очерк. М.: Наука, 1980. С. 51—66.
10. *Невская Н. И.* К истории ахроматических инструментов: Работы Л. Эйлера // Тр. X и XI конф. аспирантов и мл. науч. сотр. ИИЕНТ АН СССР. М., 1968. С. 3—9.
11. *Невская Н. И.* Первые работы по астрофизике в Петербургской академии наук (XVIII в.) // Ист.-астрон. исслед. 1969. Вып. 10. С. 121—157.
12. *Невская Н. И.* Дифракция света в работах астрофизиков XVIII века // Ист.-астрон. исслед. 1977. Вып. 13. С. 339—376 (об Эйлере — с. 363—376).
13. *Невская Н. И.* Петербургская астрономическая школа XVIII века. Л.: Наука, 1984. 238 с.
14. ЛО Архива АН СССР, р. 1, оп. 50, № 1, л. 1—44; р. 1, оп. 44, № 1, л. 1—662; р. 1, оп. 44, № 2, л. 1—368.
15. *Цейкарский П. П.* История имп. Академии наук в Петербурге. СПб., 1870. Т. 1. 774 с.
16. Санкт-Петербургские ведомости. СПб., 1727—1742.
17. Месячные исторические, генеалогические и географические примечания на Санкт-Петербургские ведомости. СПб., 1728—1742.
18. ЛО Архива АН СССР, р. 1, оп. 44, № 1, л. 9 об., 22 об., 35 об.—36, 40—43 об., 12—13 об., 21 об., 43 об. и др.
19. *Delisle J. N., le cadet.* Observation de l'éclipse de Venus par la Lune, faite en plein jour au Luxembourg le 28 Juin 1715 // Mém. Acad. sci. Paris (1715). 1718. P. 135—137.
20. *Cassini J.* Extrait de l'observation de l'éclipse de Venus du 28 Juin 1715, faite à Montpellier par Mrs. De Plantade et De Clapie's. Avec quelques reflexions sur les apparences qui ont pû donner lieu de juger qu'il y avoit une atmosphere autour de la Lune // Mém. Acad. sci. Paris (1715). 1718. P. 139—140.
21. *Euler L.* Tentamen explicationis phaenomenorum aeris // Comment. Acad. sci. Petrop. (1727). 1729. Vol. 2. P. 347—368; Opera II-31.
22. ЛО Архива АН СССР, ф. 136, оп. 1, № 130, 131.
23. *Delisle J. N.* Théorie du mouvement des taches du Soleil // Mémoires pour servir à l'histoire et au progrès de l'astronomie, de la géographie, et de la physique. SPb., 1738. P. 143—179.
24. *Миллер Г. Ф.* История Академии наук с продолжениями И. Г. Штриттера 1725—1743 // Матер. для истории имп. Акад. наук. СПб., 1890. Т. 6.
25. *Euler J.-A.* De rotatione Solis circa axem ex motu macularum apparente determinanda // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1766—1767). 1768. Vol. 12. P. 273—286; Opera II-30.
26. Протоколы заседаний Конференции имп. Академии наук с 1725 по 1803 год. СПб. 1897—1899. Т. 1, 2.
27. *Euler L.* Methodus computandi aequationem meridiei // Comment. Acad. sci. Petrop. (1736). 1741. Vol. 8. P. 48—65; Opera II-30.
28. *Meyer F.-Ch.* De luce Boreali // Comment. Acad. sci. Petrop. (1726). 1729. Vol. 1. P. 351—367.
29. *Крафт Г. В.* Краткое описание наидостоинейших примечания погод и разных воздушных перемен, бывших здесь в Санкт-Петербурге с начала 1726 г. до кон-

- ца 1736 г. // Месячные исторические, генеалогические и географические примечания на Санкт-Петербургские ведомости. СПб. 1738. С. 70—75.
30. *Euler E.* Recherches physiques sur la cause de la queue des comètes, de la lumière boréale, et de la lumière zodiacale // Mém. Acad. sci. Berlin (1746). 1748. T. 2. P. 117—140; Opera II-31.
  31. *Euler L.* Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie. SPb., 1768—1772. T. 1—3; Opera III-11, 12.
  32. *Euler L.* Inquisitio physica in causam fluxus et refluxus maris // Rec. pièces remp. prix Acad. sci. Paris (1740). 1741. T. 4. P. 235—350; Opera II-31.
  33. Discours lû dans l'Assemblée publique de l'Académie imp. des sciences, le 2. Mars 1728, par Mr. De L'Isle, avec la Réponse de Mr. Bernoulli. SPb., 1728.
  34. *Райков Б. Е.* Очерки по истории гелиоцентрического мировоззрения в России: Из прошлого русского естествознания. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. 391 с.
  35. Материалы для истории имп. Академии наук: В 10 т. СПб., 1885—1900.
  36. *Эйлер Л.* Переписка. Аннотированный указатель. Л.: Наука, 1967. 391 с.
  37. Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers / Hrsg. A. P. Juškevič, E. Winter. Berlin, 1959—1976. Bd. 1—3.
  38. *Эйлер Л.* Письма к ученым. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 397 с.
  39. *Юшкевич А. П., Кладов Т. Н., Копелевич Ю. Х.* Л. Эйлер и Ж. Н. Делиль в их переписке 1735—1765 гг. // Русско-французские научные связи. Л.: Наука, 1968. С. 119—279.
  40. ЛО Архива АН СССР, ф. 3, оп. 10, № 2/1.
  41. ЛО Архива АН СССР, ф. 3, оп. 10, № 2/2.
  42. *Bayer Th. S.* Historia regni graecorum Bactriani... Petropoli, 1738. 214 p.
  43. *Euler L.* De indorum anno solari astronomico // *Bayer Th. S.* Historia regni graecorum Bactriani... Petropoli, 1738. P. 201—213; Opera II-30.
  44. ЛО Архива АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 5, л. 32—33.
  45. *Euler L.* Opuscula varii argumenti. Berolini, 1746. (De motu corporum in superficiebus mobilibus. P. 1—136; Opera II-6. Tabulae astronomicae Solis et Lunae. P. 137—168; Opera II-23. Nova theoria lucis et colorum. P. 169—254; Opera III-5. De relaxatione motus planetarum. P. 245—276; Opera II-31. Enodatio questionis. Utrum materiae facultas cogitandi tribui possit nec ne? ex principiis mechanicis petita. P. 277—286; Opera III-2. Recherches physiques sur la nature des moindres parties de la mathièere. P. 287—300; Opera III-1.)
  46. Mém. Acad. sci. Berlin (1747). 1749. T. 3. (Recherches sur le mouvement des corps célestes en général. P. 93—143; Opera II-25. Méthode pour trouver les vrais momens tant des nouvelles que des pleines lunes. P. 154—173; Opera II-30. Méthode de trouver le vrai lieu géocentrique de la Lune par l'observation de l'occultation d'une étoile fixe. P. 174—177; Opera II-30. Méthode de déterminer la longitude des lieux par l'observation d'occultations des étoiles fixes par la Lune. P. 178—179; Opera II-30).
  47. *Euler L.* Sur la perfection des verres objectifs des lunettes // Mém. Acad. sci. Berlin (1747). 1749. T. 3. P. 274—296; Opera III-6.
  48. Musei Imperialis Petropolitanae. Petropoli, 1741. Vol. 2. 796 p.
  49. *Weidler I. F.* Historia astronomiae. Vitembergae, 1741. 664 p.
  50. *Euler L.* Réflexions sur la dernière éclipse du Soleil du 25 Juillet a. 1748 // Mém. Acad. sci. Berlin (1747). 1749. T. 3. P. 250—273; Opera II-30.
  51. *Euler L.* Sur l'atmosphère de la Lune prouvée par la dernière éclipse annulaire du Soleil // Mém. Acad. sci. Berlin (1748). 1750. T. 4. P. 103—121; Opera II-31.

# ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

## В ПЕРЕПИСКЕ С А. К. КЛЕРО, Ж. ДАЛАМБЕРОМ И Ж. Л. ЛАГРАНЖЕМ\*

А. П. ЮШКЕВИЧ, Р. ТАТОН

### ВВЕДЕНИЕ

С 20-летнего возраста деятельность Л. Эйлера протекала, как известно, в Петербургской академии наук (1727—1741), затем в Берлинской, где и сохранял теснейший контакт с Петербургом (1741—1766), и на последнем этапе его жизни снова в Петербургской академии (1766—1783). Вместе с тем уже в молодые годы началось сотрудничество Эйлера с Парижской академией, ставшее регулярным с конца 30-х годов. В 1727 г. Эйлер представил на конкурс Парижской академии работу (Е4), которая хотя и не получила премии, но была одобрена и напечатана год спустя в Париже<sup>1</sup>. С 1738 по 1772 г. Эйлер был 12 раз премирован на конкурсах Парижской академии, более чем кто-либо другой, частью за труды по навигации, технике и физике, частью за фундаментальные исследования по небесной механике<sup>2</sup>. Активная переписка Эйлера с французскими учеными также сыграла большую роль в научном творчестве Эйлера, равно как и его корреспондентов. Лично он был хорошо знаком только с двумя парижскими академиками, прежде всего с известным астрономом и географом Ж. Н. Делилем, который с 1725 по 1747 г. работал в Петербургской академии, и позднее с П. Л. Моро де Мопертюи, президентом Берлинской академии в 1746—1759 гг. Кроме того, Эйлер встречался с Ж. Даламбером, когда тот в 1763 г. гостил в Потсдаме у прусского короля Фридриха II. Контакты с другими французскими учеными осуществлялись с помощью переписки. Общее число французских корреспондентов Эйлера было невелико, всего 20 из общего числа, близкого к 300, но по своей значимости его переписка с ними была очень весома. Сказанное относится в первую очередь к таким, как говорили в XVIII в., первоклассным «геометрам», т. е. деятелям в области физико-математических наук, как Клеро, Даламбер и Лагранж, но также и к уступавшим им Делилю и Мопертюи. Мы не относим к фран-

\* Настоящая статья представляет собой значительно сокращенный текст введения ее авторов к переписке Л. Эйлера с тремя названными французскими учеными, опубликованной на французском языке в 5-м томе IV серии «Полного собрания сочинений» Эйлера [1]. Перевод с фр. *Н. С. Ермолаевой*.

Все сочинения, в том числе Л. Эйлера, приведены только в русском переводе. Сочинения Эйлера и его сына Иоганна-Альбрехта помечены буквой Е и номером по известному списку Г. Энестрёма, который содержит указания на год и место первоначальной публикации, а также на соответствующий том собрания сочинений Эйлера [1]. Список Энестрёма воспроизведен без указания переизданий и переводов на иностранные языки в книге [4, с. 353—386]; русские переводы в [4] не названы. Сочинения Лагранжа указаны с пометкой L и номера по списку Р. Татона [22].

<sup>2</sup> Список премий, полученных Эйлером на конкурсах Парижской академии, опубликован Ю. Х. Копелевич в [6, с. 60—61].

цузской группе корреспондентов Эйлера И. Г. Ламберта, так как этот уроженец Эльзаса, много разъезжавший по Европе, в меньшей мере был связан с Францией, чем с Германией и немецкой Швейцарией, а все последние годы жизни работал в Германии, причем с 1765 г. как член Берлинской академии (см. в настоящем сборнике статью К. Р. Бирмана).

Переписка Эйлера с Клеро, Даламбером и Лагранжем исключительно интересна для истории науки и, разумеется, для биографии всех четырех ученых. По своему идейному богатству она не уступает трем другим важнейшим перепискам Эйлера: с его учителем И. Бернулли, с Д. Бернулли, бывшим в 1727—1733 гг. коллегой и ближайшим другом Эйлера в Петербурге, и с Х. Гольдбахом, также петербургским академиком, который, уступая по силе дарования всем названным, был весьма проницательным математиком и умел, как никто, стимулировать изыскания Эйлера. Замечу, что переписка Эйлера с И. Бернулли опубликована полностью, с Д. Бернулли частично; обе они составят 2—3-й тома IV серии сочинений Эйлера [1]; переписка с Гольдбахом уже издавалась дважды, в 1843 и 1965 гг., а позднее появится в печати в третий раз, как 4-й том IV серии. Издана также обширная переписка с Делилем по-французски с русским переводом [8]. Переписка с Мопертюи составляет 1-ю часть 6-го тома IV серии (1986); она в значительной мере посвящена, однако, административным вопросам, поскольку Мопертюи был президентом Берлинской академии, а Эйлер — его ближайшим помощником по руководству ею. В этой части она тесно примыкает к трем томам переписки, которую Эйлер вел в 1741—1766 гг. из Берлина с Петербургом [3]. Переписка с Клеро, Даламбером и Лагранжем ранее была напечатана лишь частично; полное комментированное ее издание на языке оригинала, чаще всего французском (все имеющиеся в ней латинские письма приведены также во французском переводе), вышло из печати в 1980 г. [2]; к сожалению, некоторые письма — их немного — утрачены. На русском языке помещенные в [2] 138 писем не публиковались. Далее приведены их характеристика в целом и наиболее важные детали. Как и в публикации [2], каждая из трех переписок рассмотрена отдельно, они во многом отличаются по содержанию и по взаимоотношениям Эйлера с названными тремя учеными, бывшими в то время членами Парижской академии; добавим тут же, что Клеро, кроме того, состоял иностранным членом Петербургской академии с 1754 г., Даламбер — с 1764 г., Лагранж — с 1776 г.; все трое — по инициативе или с полного одобрения Эйлера. Эйлер, со своей стороны, был выбран иностранным членом Парижской академии в 1755 г. при поддержке Клеро и Даламбера (Лагранж тогда жил еще в Турине).

## 1. ПЕРЕПИСКА С А. К. КЛЕРО

Переписка с А. Клеро, который был выбран в Академию благодаря ранним замечательным публикациям и особенно его фундаментальным «Исследованиям о кривых двойкой кривизны», законченным в 1729 г. и напечатанным два года спустя (Париж, 1731), в Парижскую академию в том же 1731 г., т. е. в возрасте 18 лет, содержит 61 письмо. В первом письме от 17.09.1741 г. Клеро приступает к обсуждению вопроса об интег-

рировании дифференциального выражения вида  $A dx + B dy$ , где  $A$  и  $B$  — функции  $x$ ,  $y$ , сообщает о посылке рукописи своей работы по этому вопросу и просит сообщить, что напечатал об этом Эйлер, как он слышал от Д. Бернулли. Кроме того, рассмотрена проблема дифференцирования интеграла по параметру, которой занимались коллеги Клеро А. Фонтен и П. Буге, и теорема о дифференцировании однородной функции. Мемуар «Об интегральном исчислении» Клеро, напечатанный под несколько другим названием в «Записках» Парижской академии за 1740 г. (1742), содержал прием интегрирования указанного выражения и уравнение с частными производными для его интегрирующего множителя (ср. [9, с. 246]). Все это не было ново по большей части для Эйлера, но данный круг вопросов его весьма интересовал. В своем ответе от 30.10. 1741 г. (все даты приводятся по новому стилю) Эйлер выражает удовлетворение по поводу начала переписки с Клеро, рассказывает о своих работах по затронутым Клеро вопросам, а заодно о некоторых более ранних результатах Я. Германа и Н. Бернулли, и с похвалой отзывается об известных ему печатных трудах Клеро, в частности о двух его статьях 1739 г. по теории фигуры Земли [9, с. 245] — проблеме, живо интересовавшей тогда ученый мир, поскольку с тем или иным ее практическим и теоретическим решением связан был вопрос о правильности или неправильности ньютоновой теории тяготения. Тут же Эйлер дает высокую оценку приема интегрирования дифференциального выражения  $A dx + B dy$ , который Клеро незамедлительно обобщает на аналогичные дифференциальные выражения со многими переменными (ср. его письмо от 26.12.1740 и письмо Эйлера от 6.03.1741) и публикует по этому вопросу статью в парижских «Записках» за 1740 г. (1742), в которой воздает должное ставшим ему тем временем известным работам Эйлера, а заодно и Фонтена [9, с. 247].

Таким образом, с первых же писем оба корреспондента приступают к обсуждению актуальных проблем математического анализа, в данном случае некоторых разделов теории функций многих переменных, которую широко разрабатывает впоследствии Эйлер в своем «Дифференциальном исчислении» (1755, E212) [10], и теоретической механики. Впоследствии Эйлер далеко разовьет метод интегрирующего множителя, особенно в томах 1—2 «Интегрального исчисления» (1768, 1769) [11], а Клеро в 1743 г. издаст свою классическую «Теорию фигуры Земли» [12]. К этому труду восходит серия исследований по гидродинамике, именно о фигурах равновесия (и устойчивости равновесия) вращающейся жидкой массы,



А. К. Клеро

получившей завершение отчасти в трудах А. Пуанкаре, а более всего в трудах А. М. Ляпунова.

Следует подчеркнуть дружескую и взаимно уважительную манеру эпистолярного общения Эйлера с Клеро, которая сохранится и в дальнейшем: никаких споров, никаких претензий друг к другу; все идеи высказываются открыто и притом часто задолго до их публикации. Обоих связывают многие математические общие интересы, например теория обыкновенных дифференциальных уравнений. И когда Эйлер в письмах от 31.10.1741 г. и некоторых других кратко намечает некоторые моменты своего приема решения линейных однородных дифференциальных уравнений, напечатанного два года спустя (Е62), Клеро восполняет сам все недосказанное, а затем излагает метод Эйлера в Собраниях Парижской академии в августе 1743 г. и феврале 1744 г., тем самым содействуя его распространению, так как публикация Эйлера еще не получила широкой известности.

Впрочем, есть пункт, в котором Эйлер и Клеро расходятся: это их отношение к теории чисел. Для Эйлера это полноправная и весьма важная, а не просто любопытная часть математики, которую он неизменно рассматривает как единое целое. В глазах же Клеро это скорее забава, он весь устремлен на приложения математического анализа и на те его разделы, которые при этом могут быть полезными, и считает лишним тратить время и силы на остальное. Эйлер, как и в других своих переписках, пытается заинтересовать Клеро многими своими опубликованными и еще больше неопубликованными результатами, но нередко тщетно. Так, Клеро не подхватывает идеи метода Эйлера решать задачи исчисления, впоследствии названного вариационным (см. далее в разделе, посвященном Лагранжу), которые кратко изложены в упомянутом письме от 6.03.1741 г. (Эйлер говорит здесь о вещах, которые детально рассмотрит в знаменитой монографии по вариационному исчислению 1744 г. (Е65) [13]). Суммирование рядов чисел, обратных степеням натуральных чисел, оставляет Клеро равнодушным (интереснейшие письма Эйлера от января—февраля и от 23.03.1742 г.). Эйлер чувствует различие их подходов к математике и, рассказывая в письме от апреля 1742 г. о своих занятиях задачами Ферма и косвенно спрашивая, не сохранились ли какие-либо соответствующие бумаги последнего, извиняется, что занимает Клеро «столь сухой материей», для его партнера быть может скучной, но с его собственной точки зрения заслуживающей некоторого внимания. Известно, сколько времени и усилий Эйлер уделял арифметическим изысканиям. Клеро 29.05.1742 г. на это отвечает, что такая проблематика «не в моде», снисходительно добавляя, что, Впрочем, она может служить для «упражнения ума»; что же касается задач Ферма, он о них никогда не слышал, что с бумагами Ферма стало, не знает, и тут же выражает изумление по поводу того, что Эйлер глубоко исследует такое множество вопросов. Замечу, что таков же, как у Клеро, был склад ума Д. Бернулли и многих других математиков того времени.

Эти расхождения во взглядах на сравнительную ценность различных математических задач и теорий ничуть не отзвывались на дружеских связях Эйлера с Клеро. Клеро информировал Эйлера о различных событиях в Парижской академии и содействовал премированию некоторых его работ в 1746—1752 гг. (в том числе важных исследований о неравенствах в движении Юпитера и Сатурна; см. Е120 и Е384); можно полагать, что

он сыграл немалую роль и в избрании Эйлера иностранным членом Парижской академии. Эйлер со своей стороны выдвинул кандидатуру Клеро в иностранные члены Берлинской академии. Избрание состоялось 13.02.1744 г., за что Клеро выразил ему лично и Академии в целом благодарность 14.03 того же года.

Оставляя в стороне ряд частных задач механики, заметим, что начиная с письма Клеро от 23.08.1744 г. переписка меняет свое направление и в центре внимания становится почти исключительно небесная механика. Об этой части переписки прямо или косвенно говорится в других статьях настоящего сборника, и мы будем предельно краткими. Расхождения между наблюдаемым движением Луны и вычисленным в соответствии с теорией Ньютона сперва победили Клеро, Эйлера и Даламбера усомниться в правильности закона всемирного тяготения, и они пришли к мысли, что в него приходится внести поправку, заменив квадрат расстояния между притягивающимися массами на квадрат плюс некоторое дополнительное слагаемое, являющееся функцией расстояния. В декабре 1748 г. Клеро обнаружил источник расхождения, а именно пренебрежение некоторыми членами при интегрировании соответствующих дифференциальных уравнений второго порядка, о чем вскоре известил Парижскую академию и письмом от 19.06.1749 г. Эйлера. Однако Эйлер не был вполне убежден в правоте Клеро, и, поскольку Петербургская академия как раз в это время просила его назвать несколько тем для ее первого международного конкурса, он предложил на премию 1751 г. поставить вопрос о согласии наблюдаемого движения Луны с ньютоновой теорией, и тут же посоветовал Клеро послать на конкурс его работу, что Клеро и сделал. Как член жюри, назначенного Петербургской академией, Эйлер рекомендовал присудить премию Клеро. Разумеется, мнение Эйлера было решающим, и представленная Клеро «Теория Луны, выведенная из одного принципа тяготения» была [9, с. 249] премирована и напечатана по-французски в Петербурге в 1752 г. Но Эйлер этим не удовлетворился. Он с поразительной быстротой разработал свою собственную теорию Луны (E187), вскоре (1753) изданную в Берлине. Много лет спустя уже в Петербурге Эйлер вернулся к той же проблеме и опубликовал с помощью своих сотрудников, ему необходимых, так как он еще ранее почти полностью ослеп, новую более совершенную теорию Луны (1772, E418), ставшую отправным пунктом дальнейших исследований в этой области. Основные разделы этого труда перевел на русский язык и прокомментировал академик А. Н. Крылов [14].

После письма от 24.06.1752 г., связанного с завершением петербургского конкурса и публикацией уже названного сочинения Клеро, его переписка с Эйлером прерывается на многие годы. Она возобновляется лишь десять с лишним лет спустя в связи с тем, что Клеро, вслед за Эйлером, занялся проблемами конструкции оптических инструментов. Сохранились два письма Клеро по этому вопросу 1763 и 1764 гг., ответы на них Эйлера неизвестны. Год спустя Клеро скончался.

## 2. ПЕРЕПИСКА С Ж. ДАЛАМБЕРОМ

Отношения Эйлера с Жаном Даламбером, парижским академиком с 1741 г., были гораздо более сложными и неровными, чем с Клеро. Сохранилось 40 писем из их корреспонденции, из которых первое от



*Ж. Даламбер  
С пастели Де ла Тура*

3.08.1746 г. было связано с пересылкой через Мопертюи двух трудов Даламбера. Один из них «Размышления об общей причине ветров», изданный год спустя по отдельности и в Берлине, и в Париже, был только что премирован на конкурсе Берлинской академии наук по решению жюри, возглавляемого Эйлером. Решение о премии было принято 2.06.1746 г. и в тот же день Даламбер был избран иностранным членом Академии. Между прочим, на тот же конкурс было представлено и сочинение давнишнего друга Эйлера Д. Бернулли, премии не удостоенное, и это послужило причиной длительного охлаждения отношений между ними, хотя при несомненной поддержке Эйлера Д. Бернулли был избран 30.06.1746 г. иностранным членом Берлинской академии. В ответном письме Эйлера от 29.12.1746 г. речь идет о разногласиях между Д. Бер-

нулли и Даламбером в одном специальном вопросе, расхождении, которое Эйлер постарался сгладить путем подходящей интерпретации их трактовок этого вопроса, в существо которого здесь входить нет надобности<sup>3</sup>. В том же письме Эйлер с похвалой отзывается об «Исследованиях по интегральному исчислению» Даламбера, только что полученных в Берлине и напечатанных в томе «Записок» Берлинской академии, издававшихся по желанию поклонника французской культуры Фридриха II на французском языке, за 1746 г. (1748). Далее Эйлер с похвалой отзывается о предложенном в этом мемуаре доказательстве основной теоремы алгебры, существенной в связи с рассматриваемым здесь интегрированием рациональных дробей, и добавляет, что только что дал другое доказательство той же теоремы в мемуаре (E170), напечатанном вскоре в тех же «Записках» за 1750 г. (1751). Эти два доказательства принципиально различны, оба неполны и оба могут быть уточнены (см. [15, с. 70—76]). Тут же Эйлер расточает похвалы некоторым проведенным Даламбером преобразованиям эллиптических интегралов, но выдвигает возражения против трактовки Даламбером логарифмов отрицательных чисел и тем самым кладет начало первой полемике с ним, продолжавшейся долгие годы. Коротко говоря, у Даламбера, как до него у Лейбница и И. Бернулли, не было четкого и однозначного понятия о логарифмической функции

<sup>3</sup> Как видно из его писем к Эйлеру, Д. Бернулли вообще очень невысоко ставил исследования Даламбера по механике и считал их совершенно неудовлетворительными, во всяком случае в физическом плане. Ср. описание его переписки в 1-м томе IV серии [1] и в [4].



и ее связи с показательной. В результате он вслед за Бернулли считал логарифм любого отрицательного числа равным логарифму абсолютной величины этого числа. Лейбниц в свое время объявил, что логарифмы отрицательных чисел мнимы, но не располагал средствами раскрыть природу этой «мнимости». Эйлер, напротив, не позднее чем в начале 40-х годов построил почти современную теорию логарифмической функции в комплексной плоскости, как это ясно из некоторых рассуждений во втором томе его «Введения в анализ бесконечных» (E102), сданном в печать в 1744 г. и опубликованном в 1748 г. [16]. Письменная полемика тянулась в переписке до 1748 г., потом была продолжена Даламбером на страницах печати, и некоторые математики почти до конца XVIII в. оставались в сомнении относительно правоты того или иного участника спора [15, с. 324—328]. На самом деле аргументация Эйлера, изложенная в мемуаре (E168), напечатанном в берлинских «Записках» за 1749 г. (1751), не вызывает возражений, концепция же Даламбера несостоятельна.

Постепенно дискуссии и разногласия между Эйлером и Даламбером, а также различные взаимные обиды и подозрения нарастали. Так, в 1750 г. по решению возглавляемого Эйлером жюри Академия отклонила сочинение, выдвинутое Даламбером на конкурс, темой которого была теория сопротивления, испытываемого телами при движении в жидкости. Такое решение было несомненно несправедливым — этот труд стал одним из основополагающих в развитии математической физики, в частности, потому, что в нем была успешно применена теория функций комплексного переменного и впервые появились в печати так называемые теперь уравнения Коши — Римана (вскоре примененные и Эйлером). Глубоко разочарованный Даламбер опубликовал свой «Опыт новой теории сопротивления жидкостей» в Париже (1752). Конкурс же был перенесен на следующий год и в этот раз Академия премировала совершенно бессодержательную работу одного математика-любителя Я. Адами, нанеся тем самым серьезное оскорбление Даламберу. Об этих событиях говорится в письмах Даламбера от 4.01 и 10.09.1751 г.

В эти же годы дебатировались и многие другие вопросы, причем нередко со взаимной критикой и последующими разъяснениями, например по поводу точек возврата второго рода (письмо Даламбера от 7.09.1748 г. и ответ Эйлера от 28.09) или о теории предварения равноденствий (письма Даламбера от 22.02 и 30.03.1750; два соответствующих письма Эйлера не обнаружены). Немало внимания уделяется и небесной механике. А затем наступает долгий перерыв в переписке — перерыв, заполненный уже не письменной, а печатной полемикой по первостепенной важности проблемам математической физики и ее аналитического аппарата; впрочем, эта полемика будет продолжена при возобновлении переписки. Выразив 10.09.1751 г. свою глубокую обиду на решение Берлинской академии присудить премию 1751 г. Адами, Даламбер на долгие годы прерывает свою переписку с Эйлером (вплоть до 1763 г.).

Обратимся теперь к знаменитому спору между Эйлером и Даламбером, а затем и другими учеными о решении одной из проблем теории упругости, именно о струне, малые поперечные колебания которой выражаются уравнением с частными производными второго порядка гиперболического типа, позднее названным волновым уравнением. Эта проблема издавна интересовала математиков, и первый подход к ней, заслуживаю-

щий внимания, предложили в 1713—1715 гг. Б. Тейлор и в 1729—1732 гг. И. Бернулли. Решающий шаг вперед сделал Даламбер в статьях, опубликованных одна за другой в берлинских «Записках» за 1747 г. (1749) и содержащих дифференциальное уравнение колебаний, его общее решение в виде суммы двух «произвольных функций» по методу, придуманному Даламбером, и способ определения этих функций по каким-либо данным начальным и граничным условиям. Эти две статьи без названия упомянуты в первом же письме Даламбера и вторично в письме от 6.01.1747 г. под названием, почти не отличавшимся от того, под каким они появились в печати: «Исследования о кривой, форму которой образует приведенная в колебание натянутая струна». Метод Даламбера, получивший впоследствии название метода характеристик, был несомненно высоко оценен Эйлером. Однако в сохранившихся письмах Эйлера 1747—1751 гг. об этом вовсе не говорится, а идет речь о вопросах, уже упомянутых выше: логарифмах, точках возврата, задачах небесной механики, включая теорию движения Луны, академических конкурсах, об изобретенном И. А. Зегнером простейшем виде гидротурбины и т. д. Все эти письма интересны в обоих, научном и личном, планах. Заслуживает отдельного упоминания высокая оценка Даламбером 17.06.1748 г. разложения  $(1 - g \cos \omega)^{-1}$  в тригонометрический ряд, примененного Эйлером в премированной конкурсной работе о неравенствах в движении Сатурна и Юпитера (E120): это был первый пример такого рода; столь же высокую оценку еще ранее дал Клеро в письме к Эйлеру от 11.09.1747 г. Но ни в одном письме Эйлера за указанные годы не говорится о методе характеристик Даламбера; возможно, правда, что какое-либо такое письмо (или письма) потерялось: в переписке за 1747 г. сохранилось пять писем Даламбера и лишь три Эйлера.

Так или иначе Эйлер одобрил в главном метод характеристик с одной существенной оговоркой и применил его в небольшой заметке, представленной Берлинской академией 16.05.1748 г. и напечатанной сперва на латыни в одном Лейпцигском журнале за 1749 г. (E119), а затем во французском варианте (E140) в берлинских «Записках» за 1748 г. (1750). Наиболее существенное различие между Эйлером и Даламбером проявилось в вопросе об объеме класса функций, допустимых в качестве решений волнового уравнения да и вообще краевых задач математической физики. Дело в том, что Даламбер считал необходимым наложить на начальные условия жесткие ограничения: функции, характеризующие исходную форму и скорость струны, должны на всем рассматриваемом участке быть представлены одним и тем же аналитическим выражением (или, по терминологии Эйлера, быть «непрерывными»), а, кроме того, быть дважды непрерывно дифференцируемыми (в нашей терминологии). В противном случае Даламбер считал свой метод неприменимым.

Эйлер был на этот счет другого мнения. В статье, напечатанной в берлинских «Записках» за 1748 г. (E140), он отверг ограничения на начальные условия, предложенные Даламбером. С его точки зрения для физики эти условия необходимо расширить: класс допустимых функций или, что то же самое, кривых, должен содержать любые линии, которые можно мыслить проведенными «свободным движением руки», например ломаные, составленные из отрезков прямых (по его выражению, «разрывные», «механические» или еще «смешанные» функции). Хотя в этом случае анали-

тический метод отказывал, но Эйлер предложил геометрическую конструкцию, позволяющую изобразить положение струны в любой момент времени. Возникшие разногласия нашли отражение в печати, но о них говорится и в рассматриваемой переписке после ее возобновления, например в письме Эйлера Даламберу от 20.12.1763 г. Уже названная дата свидетельствует о продолжительности дискуссии по рассматриваемому вопросу, осложнившейся еще тем, что в ней принял вскоре участие Д. Бернулли, предложивший в берлинских «Записках» за 1753 г. (1755) искать решение по методу суперпозиции в виде тригонометрического ряда, как мы говорим теперь в виде ряда Фурье. Идея Д. Бернулли оказалась чрезвычайно удачной, но развить ее он не сумел. Как Эйлер, так и Даламбер тотчас оспорили общность такого решения, главной практической трудностью которого являлось, впрочем, неумение в то время определять для какой-либо функции коэффициенты ее разложения в тригонометрический ряд по синусам или косинусам или по тем и другим вместе. Общие интегральные формулы «коэффициентов Фурье» вывел много позднее Эйлер в статьях 1777 г. (E707 и E704), посмертно опубликованных в петербургских «Записках» за 1793 г. (1798). Ж. Б. Фурье, вновь нашедший те же формулы четверть века спустя (и по-другому), эти результаты Эйлера, по-видимому, не знал. Вскоре вслед за Бернулли в «спор о струне» включились Лагранж (см. далее), а также другие ученые (ср. [15, с. 312—318]).

Возвращаясь к переписке Эйлера с Даламбером, заметим, что письменная полемика их по данному вопросу возобновилась на некоторое время в 1763—1764 гг., затронув и работы Лагранжа. Мы ограничимся в связи со всей этой дискуссией лишь еще несколькими замечаниями итогового характера. Не входя в детали спора о струне, растянувшегося на полстолетия (см. подробнее [17] и краткое изложение [15, с. 412—419]) и в некоторой мере, хотя и не полностью, удовлетворительно решенного только в XIX в. (работы Ж. Б. Фурье и др.), отметим только, что Даламбер в конце концов отступил от своей исходной позиции, ограничив класс допустимых «произвольных» функций для уравнений  $n$ -го порядка лишь требованием  $n$ -кратной непрерывной их дифференцируемости [18]. Эйлер же, продолжая развивать свои идеи, предвосхитил в известной мере введение решений уравнений с частными производными в виде обобщенных функций С. Л. Соболева (в зарубежной литературе называемых по инициативе Л. Шварца «распределениями»), — это обстоятельство отмечал ранее А. П. Юшкевич [19], в деталях данный вопрос рассмотрен С. С. Демидовым [20]. В плане исторических аналогий ситуация здесь была такова же, как в случае расходящихся рядов, которые Эйлер применял иногда вполне успешно, но не корректно, но которые вошли в состав современной теории суммирования, удовлетворяющей всем принятым теперь критериям строгости. И, наконец, спор о струне имел огромное стимулирующее значение для последующего развития многих областей и понятий математики: методов теории уравнений с частными производными, теории тригонометрических рядов и других ортогональных разложений, понятия функции и т. д. вплоть до современной теории множеств и функций.

Помимо кратко охарактеризованных здесь споров, иногда приоритетного характера, на отношения Эйлера с Даламбером наложили печать и другие обстоятельства. Эйлер вообще отрицательно относился к идео-

логии века Просвещения, чуждой его стандартной религиозности и философским воззрениям, и франкомания короля Фридриха II была ему весьма не по душе. Но, кроме того, он видел в Даламбере возможного преемника Мопертюи на пост президента Берлинской академии наук. Король действительно добивался этого после смерти Мопертюи в 1759 г. Однако в данном случае Эйлер не знал подлинных намерений Даламбера. Предложение короля Даламбера вовсе не соблазняло; напротив, узнав о предполагаемом намерении Эйлера покинуть Берлин и вернуться в Петербург, Даламбер в письмах от 29.07.1763 г. и ряде последующих вплоть до 28.04.1766 г. отговаривал Эйлера от этого и не раз предлагал свои услуги как посредника между ним и королем. Впрочем, одновременно допуская, что Эйлер все же покинет Берлин, Даламбер вел переговоры с Лагранжем как желательным преемником Эйлера в Берлине. 28.04.1766 г. переписка Эйлера с Даламбером прервалась, а 9.06.1766 г. Эйлер распростился со столицей Пруссии и навсегда возвратился в Петербург. Известно лишь еще одно письмо Даламбера от 27.02.1773 г., связанное с посылкой Эйлеру в Петербург одной книги Даламбера.

### 3. ПЕРЕПИСКА С Ж. Л. ЛАГРАНЖЕМ

В лице Клеро и Даламбера Эйлер имел корреспондентов выдающегося дарования, но все же ему не равных и не конгениальных. Только в Жозефе-Луи Лагранже Эйлер нашел партнера такого же ранга и со столь же широким диапазоном интересов, хотя в количественном отношении, т. е. по числу, но не по качеству трудов, ему уступающего (сочинения Эйлера, не считая переписки, занимают 75 томов, а сочинения Лагранжа — 14).

Уроженец столицы королевства Сардинии Турина, хотя и француз по отцовской линии (в Италии его фамилия долгое время писалась Lagrangia и произносилась Лагранджа), Лагранж уже в юношеском возрасте овладел основной математической литературой и далеко продвинулся в некоторых исследованиях, во многом отправляясь от трудов Эйлера. Переписка обоих ученых невелика, всего 37 писем с 1754 по 1775 г. (здесь сыграла роль и Семилетняя война, на два с половиной года нарушившая почтовую связь Турина с Берлином), но идейно чрезвычайно богата. Мы ограничимся несколькими рассмотренными в этой переписке вопросами.

Заметим прежде всего, что в переписке явно ощущается различие поколений, изменение самого стиля мышления и, как следствие, манеры изложения, которое не столь ощутимо в двух выше рассмотренных переписках. Здесь сыграли роль и различие поколений, и прогресс математики, и изменения в общественной идеологии: Лагранж был моложе Эйлера почти на 30 лет, а Клеро лишь на 6 и Даламбер на 10. Подробная и многословная манера разъяснения своих идей, иллюстрируемых множеством частных примеров, характерная для Эйлера, сменяется у Лагранжа тенденцией к широким и по возможности лаконично сформулированным обобщениям, сведенным в некоторые системы. Последнее не было чуждо и Эйлеру, как крупнейшему систематизатору математики вплоть до конца своей жизни, однако Лагранж выступает как первый создатель больших монолитных математических систем, построенных на минимуме принципов, иногда только на одном. Мы имеем в виду в первую очередь «Анали-

тическую механику» 1788 г. и «Теорию аналитических функций» 1797 г. (L102). А. Н. Колмогоров сравнивал в этом отношении Лагранжа с создателями широких обобщающих идеологических концепций во Франции времен расцвета века Просвещения, добавляя, что Лагранж, быть может (лучше сказать: несомненно), уступал Эйлеру в количестве и разнообразии решенных задач [21, с. 473—474]. Иными были у Лагранжа и критерии строгости, подводившие к установкам начала XIX в., хотя во многом еще от них далекие. Признавая огромные заслуги Эйлера, Лагранж сам считал его стиль изложения совершенно устарелым и в письме к Даламберу от 1.01.1766 г., говоря о «Теории движения твердых тел» (1765, E289), характеризовал ее как «велеречивую». Для будущего автора «Аналитической механики» (1788; 2-е изд. 1811; L97) [23] это совершенно естественно; впрочем, современники нередко легче понимали Эйлера, чем Лагранжа, и это также понятно; к новой математической речи нужно было привыкнуть. Эйлер и Лагранж были представителями разных эпох, разных стилей. Более подробно мы остановимся только на трех вопросах, лишь мимоходом затронув другие <sup>4</sup>.

Первое письмо Лагранжа Эйлеру от 28.06.1754 г. касается аналогии в структуре биномиальной формулы  $(x + y)^n$  и выражения для  $d^n(xy)$  при любом рациональном  $n$  (о результате Лейбница в этом направлении, содержавшемся в его переписке, Лагранж узнал позднее из ответа Эйлера). Впоследствии размышления в этом направлении привели Лагранжа к результатам, важным для операционного исчисления и для его будущей теории аналитических функций, изложенным в мемуаре «О новом виде исчисления, относящемся к дифференцированию и интегрированию переменных количеств», опубликованном в берлинских «Записках» за 1772 г. (1774, L33). В конце письма, перечисляя отдельные изученные им замечательные труды Эйлера и среди них E65, Лагранж мимоходом говорит, что вскоре пошлет некоторые соображения о наибольших и наименьших значениях и о поверхностях. Это означает, что 18-летний Лагранж уже приступил, при этом, вероятно существенно продвинулся, к перестройке вариационного исчисления Эйлера [13] и некоторых его приложений.

Не дождавшись ответа, Лагранж 12.08.1755 г. посылает Эйлеру крайне сжатый и только Эйлеру понятный набросок нового созданного им алгоритма решения изопериметрических задач, т. е. вариационного исчисления (такое выражение вскоре введет Эйлер), в котором наряду со знаком дифференциала и в отличие от него вводится символ вариации  $\delta$ . Несколько сформулированных правил алгоритма позволяют в немногих строках наметить чисто аналитический вывод необходимого условия экстремума функционала, рассматривавшегося Эйлером, т. е. интеграла

$$\int_a^b Z(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx,$$

значения которого зависят от выбора искомой функции  $y(x)$ . Задача такого вывода была поставлена в E65 самим Эйлером, вывод которого, сводящий дело к решению так называемого теперь уравнения Эйлера, опирался в значительной мере на геометрические соображения.

<sup>4</sup> Существует список трудов Лагранжа, подобный списку Энестрёма, о котором говорилось ранее. Мы ссылаемся на этот список, составленный Р. Татоном [22], с присоединением к его номерам буквы L.

Эйлер посылает восторженный ответ (письмо от 6.09.1755 г.), говоря, что его юный корреспондент довел теорию вопроса до высшей степени совершенства. В самом деле алгоритм Лагранжа позволяет решать задачи, не поддававшиеся методу Эйлера, такие, как отыскание экстремумов интегралов, значения которых зависят от выбора двух функций  $y(x)$ ,  $z(x)$ , двойных интегралов и др. Благодаря 20.11.1755 г. за ободряющий ответ, Лагранж для примера решает задачу о брахистохроне с одним незакрепленным концом — в такой постановке задача была ранее решена только в одном весьма частном случае. Попутно он сообщает, что получил место адъюнкт-профессора математики Туринской артиллерийской школы, где он проработает более 10 лет. В другом письме, к сожалению утерянном, Лагранж извещает, что приложил свой метод к обобщению принципа наименьшего действия, сформулированного и примененного Эйлером в приложении к E65. Как известно, Мопертюи считал себя творцом этого принципа, которому придавал величайшее значение.

Об утерянном письме Лагранжа мы знаем по письму Эйлера от 24.04.1756 г. Эйлер извещает, что показал письмо Лагранжа Мопертюи, который весьма доволен «оправданием» названного принципа, намерен содействовать избранию Лагранжа иностранным членом Берлинской академии (это произошло вскоре, именно 2.09.1756 г.) и, более того, его приглашению на работу в эту Академию, чего желал бы, по словам Эйлера, и он сам. Из того же письма Эйлера и протокола собрания Берлинской академии от 6.05.1756 г. явствует, что вместе с утерянным письмом Лагранж прислал работу из двух частей, математической и механической, содержащую изложение его открытий. Эта работа также утеряна; возможно, что Мопертюи, уезжая во Францию, захватил ее и письмо Лагранжа с собой, а в Берлин он уже не приезжал из-за плохого состояния здоровья вплоть до своей смерти. Известно также, что Мопертюи направил Лагранжу письмо от себя лично, обещая напечатать его заметки в Берлине: об этом Лагранж известил одного своего миланского друга, математика Фризи 4.05.1756 г., т. е. еще до получения письма Эйлера от 24.04. Впрочем, как писал Лагранж Фризи, два подготовленных им для печати мемуара еще не вполне закончены, так как он занят подготовкой лекций по механике. 19.05 того же года Лагранж в письме к Эйлеру назвал обобщенный им принцип наименьшего действия «универсальным ключом» ко всем задачам механики. Однако, как это видно из текста его «Аналитической механики» (1788, L97), он не усматривал в нем общего метафизического мирового закона, как это делал Мопертюи.

Среди других писем особого внимания заслуживает письмо Лагранжа от 5.10.1756 г. В нем впервые встречаются формулы двойного интеграла, именно интеграла  $\iint dydx \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ , выражающего площадь поверхности, и интеграла  $\iiint zdydx$  для объема прямого цилиндра, ограниченного сверху поверхностью  $z = f(x, y)$ . Обычно введение двойных интегралов приписывается Эйлеру. Данное письмо показывает, что это неверно. С другой стороны, применение обеих указанных формул без каких-либо объяснений свидетельствует, по-видимому, о том, что ведущие математики того времени их уже знали. Так или иначе, здесь мы имеем дело с первым появлением формул двойных интегралов в известной нам печатной и рукописной литературе (хотя вычисления, равносильные вычисле-

нию кратных интегралов, проводил еще Ньютон в своем классическом труде по небесной механике 1687 г., а само понятие и обозначение двойного интеграла встречается в переписке между Лейбницем и И. Бернулли 1697 г., где они, правда, упоминаются только мимоходом). Тут же Лагранж впервые формулирует задачу отыскания минимальных поверхностей и выводит их уравнение с частными производными, метод решения которого не нашли ни он, ни Эйлер; единственным известным примером такой поверхности тогда была сферическая. Более широкое распространение двойные интегралы получили действительно благодаря специально посвященной им статье Эйлера (E394), представленной Петербургской академии в 1768 г. и напечатанной в ее «Записках» за 1769 г. (1770); здесь приведена и соответствующая формула замены переменных.

После этого из-за Семилетней войны наступает перерыв в переписке между Туринном и Берлином, перерыв, последствием которого явились крайне огорчительные для Лагранжа события. Вопрос о переезде в Берлин, весьма желательном для Лагранжа, естественно, откладывался. Тем временем он вместе с несколькими другими учеными организует в 1757 г. частное научное общество, впоследствии преобразованное в Туринскую академию наук, и приступает к изданию его «Записок», первый том вышел из печати в 1759 г. Он не поместил здесь, впрочем, своей работы по вариационному исчислению и механике, уверенный, что посланные им в Берлин ранее они уже напечатаны в «Записках» Берлинской академии. Кроме того, рассчитывая на поддержку Берлинской академии, в которую он надеется перейти, ибо материальные условия работы в Турине его не удовлетворяли, он приступает к подготовке книги в двух частях по вариационному исчислению и его приложениям к механике, которую почти заканчивает к лету 1759 г., как это следует из его писем от 28.07 и 4.08.1759 г., во втором из которых он сообщает о посылке Эйлеру первого тома «Записок» Туринского научного общества, а заодно просит переслать приложенное письмо, адресованное Мопертью.

Однако между осенью 1756 и летом 1759 г. произошли весьма неблагоприятные для Лагранжа события, о которых он узнает из письма Эйлера от 2.10.1759 г. Во-первых, выясняется, что 27.07 того же года Мопертю скончался в Базеле по пути в Берлин, так и не вернув в Берлин взятую им ранее с собой работу Лагранжа. Во-вторых, Эйлер рекомендовал Лагранжу найти где-либо, например в Женеве или Лозанне, издателя подготавливаемого им труда, так как в Берлине из-за финансовых трудностей, связанных с Семилетней войной, это сделать не удастся. Трудности Академии были в самом деле значительные, о чем говорит тот факт, что после 1759 г. берлинские «Записки» не выходили в течение пяти лет. Надежда на переезд в Берлин очевидным образом становится несбыточной. И в-третьих, а это было уже просто обидно, Лагранж узнает, что Эйлер, учитывая важность сообщенных ему Лагранжем открытий в области вариационного исчисления и снедаемый нетерпением, заново доказал их аналитически «в духе идей» Лагранжа. Впрочем, Эйлер обещает ничего не публиковать по этому вопросу, пока этого не сделает Лагранж. Эйлер умолчал, однако, о том, что он написал по этому вопросу два мемуара «Аналитическое объяснение метода максимумов и минимумов» (E297) и «Начала исчисления вариаций» (E296, тут-то и появляется термин вариация) и позволил себе представить их в Берлинской академии еще 9.09 и

соответственно 16.09.1756 г. (правда, опубликовав их лишь в 1766 г. в петербургских «Записках»). Более того, Эйлер познакомил с вариационным исчислением своего сына Иоганна-Альбрехта, который использовал его при решении одной задачи в сочинении, представленном опять-таки Берлинской академии 17.02.1757 г. и напечатанном в «Трудах» баварской Академии (1764, EA10); здесь также применяется термин «вариация» и в ходе решения используются двойные интегралы. Таким образом, Эйлер публично разгласил неопубликованные открытия Лагранжа, всякий раз, правда, указывая на его приоритет.

Можно представить себе горькое разочарование Лагранжа, о котором он долго молчал, но позднее деликатно выразил в письме от 28 (?) .10.1762 г., посылая Эйлеру второй том туринских «Записок», где напечатал мемуары «Опыт нового метода определения максимумов и минимумов неопределенных интегральных формул» и «Приложение предшествующего метода к различным задачам динамики» (L7,8). При этом он не преминул сказать, что печатает эти мемуары только потому, что Эйлер решил не публиковать свои собственные работы по этому вопросу раньше его и что сам он довольствуется кратким изложением, а почти законченный ранее большой трактат, о котором говорилось выше, полностью уничтожил.

Следует сказать, что изложение Лагранжа было столь трудным, а у Эйлера, как обычно, столь доступным, что более широкую известность получило второе, а затем и совершенно новое изложение вопроса в «Приложении о вариационном исчислении» к третьему тому «Интегрального исчисления» (СПб., 1770; E385), и хотя в обеих первых работах Эйлер указывал на приоритет Лагранжа, все же многие читатели полагали, что автором вариационного исчисления является Эйлер.

Несомненно, что с 1759 г. наступает естественное охлаждение отношений между Лагранжем и Эйлером, хотя переписка их продолжается. Кроме того, все чаще бывший ученик выступает теперь как равный своему прежнему учителю. И тем не менее Лагранж продолжает разработку тематики Эйлера, как и почти все математики и механики второй половины XVIII в. Эйлер действительно являлся «общим учителем всех нас», как выразился П. С. Лаплас, один из немногих математиков того времени, не вступивших в контакт с Эйлером<sup>5</sup>. Это охлаждение столь теплых отношений Лагранжа с Эйлером компенсируется установлением тесной связи с Даламбером, с которым Лагранж познакомился во время полугодовой поездки зимой и весной 1763 г. в Париж. Это знакомство быстро перешло в тесную дружбу, которая сыграла вскоре большую роль в дальнейшей карьере Лагранжа.

Возобновившаяся в 1759 г. переписка Эйлера с Лагранжем часто прерывается из-за военных событий в течение нескольких последующих лет. Так, вовсе нет писем с лета 1760 по лето 1762 г. и между осенью 1762 и зимой 1765 г. Вместе с тем основная тема переписки существенно изменяется: она посвящена другому большому циклу работ Лагранжа (и Эйле-

<sup>5</sup> Известно только одно письмо Лапласа к Эйлеру от 30.05.1772 г. с просьбой помочь ему опубликовать в петербургских «Записках» его первые работы, так как в Париже до них очередь дойдет не скоро (ответ Эйлера неизвестен, возможно, что его и не было; в письме Лапласа расточаются обильные похвалы Даламберу, бывшему главным покровителем Лапласа).



ра), непосредственно примыкающих к проблематике о колеблющейся струне. В двух первых томах туринских «Записок» Лагранж публикует «Исследования о природе и распространении звука» и «Приложение...» к ним (L4,6,9) и 28.07.1759 г., посылая первый том туринских «Записок», Лагранж просит Эйлера высказаться о книге в целом, а особенно о его решении задачи о колебании струны, входящей в состав первой из названных работ.

Не останавливаясь на подробностях нового примененного Лагранжем метода, укажем только, что, как он пишет 4.08.1759 г., Лагранж приходит к выводу о существенных недостатках трактовки вопроса Д. Бернулли и о правомерности конструкции Эйлера, оспаривавшейся Даламбером. Познакомившись с этим мемуаром Лагранжа, Эйлер 23.10 того же года, удовлетворенный тем, что Лагранж присоединяется к нему в вопросе о природе допустимых в решении уравнений математической физики функций, выражает восхищение решением Лагранжем труднейших уравнений задачи о распространении звука, добавляя, что работа Лагранжа вдохновляет его на дальнейшие исследования всего рассматриваемого круга вопросов. Проблемой распространения звука Эйлер имел случай заняться уже ранее в статье, напечатанной в 1750 г. (E151). Тут же Эйлер делится некоторыми новыми результатами по механике твердых тел, которым он посвятит сочинение, изданное в 1765 г. (E289).

В ряде последующих писем обсуждаются на высоком математическом уровне различные стороны вопроса, в частности относящиеся к распространению сферических и цилиндрических звуковых волн, и в ноябре—декабре 1759 г. Эйлер prepares подряд три мемуара (E305 — E307), которые все публикует в берлинских «Записках» за этот же год, вышедших с большим опозданием в 1766 г. Между тем во втором томе туринских «Записок» за 1762 г. Эйлер печатает по просьбе Лагранжа мемуар о распространении колебаний в упругих средах (ср. ответ Лагранжа от 1.03.1760 г.), а затем в III томе за 1766 г. — работы о струне (E317, E318) и распространении звука (E319), причем снова говорится о значении негладких решений, а еще две статьи — по оптической технике (E319) и интегральному исчислению (E320). Вся эта проблематика оживленно, уважительно и вновь дружески дебатировалась во всех письмах этого времени. Впрочем, одно обстоятельство вторично охлаждает их взаимоотношения<sup>6</sup>: на конкурсе Парижской академии о теории либрации Луны 1764 г. они участвуют оба без ведома друг друга и премия (не без влияния Даламбера) присуждается Лагранжу за работу, увидевшую свет только в 1777 г. (L51). Несомненно, что Эйлер был задет этим решением; эта тема, впрочем, в рассматриваемой переписке не затрагивается.

Однако берлинские годы жизни Эйлера подходят к концу. Даламбер, хорошо осведомленный о трениях между Эйлером и Фридрихом II, предлагает Эйлеру выступить посредником между ними, но одновременно подготавливает приглашение в Берлин Лагранжа. 19.05.1766 г. Даламбер писал прусскому королю: «Смею заверить, Ваше Величество, что г. Де Ля

<sup>6</sup> Об этом свидетельствует письмо Лагранжа к Даламберу от 17.11.1764 г., где среди прочего Лагранж заявляет, что Берлин ему не подходит, «поскольку там есть г. Эйлер». Но несколько спустя, когда Эйлер предлагал Лагранжу вместе поехать в Петербург, Лагранж написал Даламберу: «Вы хорошо понимаете, что я его за это благодарю».

Гранж хорошо заменит г. Эйлера своими талантами и работой и к тому же по своему характеру и поведению он никогда не вызовет в Академии никаких разногласий и ни малейшего беспокойства». Речь идет, очевидно, о ссоре Эйлера с королем, о которой говорится в статьях К. Грау и К. Р. Бирмана в данном сборнике. Рекомендация Даламбера вполне убедила короля. На предложения Даламбера Эйлер не реагирует; он уже договорился с русским правительством о возвращении в Петербургскую академию на весьма выгодных условиях. 3.05.1766 г. Эйлер извещает Лагранжа о предстоящем вскорости возвращении в Петербург. Лагранж придет к Эйлеру на смену в Берлин 27.10.1766 г. и займет здесь пост Эйлера — директора математического класса, а Эйлер прибудет в Петербург 28.06 того же года.

На этой третьей части переписки Эйлера с Лагранжем мы остановимся совсем кратко. Оба собеседника загружены многочисленными обязанностями, к тому же Эйлер вскоре после возвращения в Петербург почти полностью утрачивает зрение и нуждается в помощи секретарей, которые читают ему вслух и пишут под его диктовку или следуя его указаниям. На 17 последних лет жизни Эйлера, точнее на 10 из них, так как письмом от 3.04.1775 г. Эйлер заканчивает переписку, ибо ему становится трудно воспринимать на слух многие письма Лагранжа, содержащие сложные вычисления, приходится всего 15 писем, к которым можно добавить еще одно, написанное Лагранжу по поручению Эйлера 16.03.1772 г. академиком А. И. Лекселем<sup>7</sup>. Тематика переписки разнообразна, корреспонденты извещают друг друга о своих основных занятиях и важнейших публикациях. Видное место занимает столь любимая обоими проблематика теории чисел, именно решение в целых числах неопределенных уравнений второй степени, — область, в которой Лагранж продолжил и в нескольких случаях завершил работы Эйлера, например об уравнении, известном под именем Пелля. Нужно отметить, что Лагранж написал важные дополнения к французскому переводу двухтомного труда по алгебре Эйлера (E387 — E388), изданного по-немецки в 1770 г. (русский перевод вышел несколько ранее в 1768—1769 гг., а французский в 1773 г.). Этот круг вопросов рассмотрен в четырех письмах с 27.01.1770 г. по 30.12.1770 г., от изложения весьма специального содержания которых мы воздержимся, отослав интересующихся читателей к [15, с. 105—106, 114—117]; ср. также только что названное последнее письмо Эйлера. Назовем еще письма Эйлера от января 1775 г. и Лагранжа от 10.02 того же года о парадоксальных свойствах некоторых несобственных интегралов, которые в ту пору обратили на себя внимание и других математиков и в первой четверти XIX в. привели к построению О. Коши его классической теории интеграла непрерывной функции — теории, охватывающей и некоторые случаи классов несобственных интегралов.

Даже этот краткий обзор свидетельствует, как мы полагаем, об идейном богатстве рассмотренных нами трех переписок Леонарда Эйлера и об их интересе для истории физико-математических наук в XVIII в., для биографий всех участвовавших или упомянутых в ней ученых, а также для истории трех академий, Петербургской, Парижской и Берлинской.

<sup>7</sup> В нем речь идет о так называемой формуле обращения Лагранжа, именно о степенном ряде, служащем для локального обращения гомеоморфных функций, которую Лагранж дополнил в 1770 г. (L18).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Euler L.* Opera omnia. Ser. I: Opera mathematica; Ser. II: Opera mechanica et astronomica; Ser. III: Opera physica. Miscellanea; Ser. IVA: Commercium epistolicum; Ser. IVB: Manuscripta. Var. 1., 1911 ff.
2. Correspondance de Leonhard Euler avec A.-C. Clairaut, J. d'Alembert et J.-L. Lagrange/Eds A. P. Juskevič, R. Taton. Basel: Birkhäuser. 1980; Opera IVA-5.
3. Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers. Berlin, 1959—1976. Bd. 1—3.
4. *Эйлер Л.* Переписка. Аннотированный указатель. Л.: Наука, 1967.
5. *Lagrange J.-L.* Oeuvres. Paris, 1867—1892. Vol. 1—14.
6. *Копелевич Ю. Х.* Материалы к биографии Леонарда Эйлера // Ист.-мат. исслед. 1957. Вып. 10. С. 9—65.
7. Рукописные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1: Научное описание.
8. Русско-французские научные связи. Л.: Наука, 1968.
9. *Taton R.* Хронологическое описание работ А. Клеро // Ист.-мат. исслед. 1976. Вып. 21. С. 240—260.
10. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949.
11. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление. М.: Гостехтеориздат, 1956—1958. Т. 1—3.
12. *Клеро А.* Теория фигуры Земли, основанная на принципах гидростатики. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947.
13. *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1934.
14. *Эйлер Л.* Новая теория движения Луны. Л.: Изд-во АН СССР, 1934.
15. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. М.: Наука, 1972. Т. 3.
16. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных. М.: Физматгиз, 1951. Т. 2.
17. *Truesdell C.* The rational mechanics of flexible or elastic bodies. 1638—1788 // *Euler L.* Opera II-11.
18. *Юшкевич А. П.* К истории спора о колеблющейся струне // Ист.-мат. исслед. 1975. Вып. 20. С. 221—231.
19. *Юшкевич А. П.* История математики в России до 1917 года. М.: Наука, 1968. С. 166.
20. *Демидов С. С.* О понятии решения дифференциальных уравнений с частными производными в споре о колебании струны в XVIII веке // Ист.-мат. исслед. 1976. Вып. 21. С. 158—182.
21. *Колмогоров А. Н.* Математика // БСЭ. 2-е изд, 1954. Т. 26. С. 294.
22. *Taton R.* Inventaire chronologique de l'oeuvre de Lagrange // Rev. hist. sci. 1974. Т. 26. Р. 3—36.
23. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. 2-е изд. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. Т. 1—2.

# «ПИСЬМА К НЕМЕЦКОЙ ПРИНЦЕССЕ» И ФИЗИКА ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

А. Т. ГРИГОРЬЯН, В. С. КИРСАНОВ

Свои знаменитые «Письма к немецкой принцессе» Эйлер написал с 1760 по 1762 г. в конце 25-летнего пребывания в Берлине. Они были предназначены для маркграфини Софии-Шарлотты Бранденбургской, родственницы прусского короля Фридриха II. Написанные по-французски «Письма» вышли в свет только в 1768 г. [1]<sup>1</sup>, когда Эйлер возвратился уже из Берлина в Петербург, поссорившись с Фридрихом II и при поддержке императрицы Екатерины II. «Я уверена, — писала Екатерина в январе 1766 г. графу Воронцову, — что Академия возродится из пепла от такого важного приобретения, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека» [2]. Почти одновременно с оригиналом в Петербурге выходит перевод писем, сделанный одним из учеников Эйлера, академиком С. Я. Румовским (все цитаты приведены по этому переводу).

Публикация этого трехтомного труда Эйлера под заглавием «Письма о разных физических и философических материях, писанные к некоторой немецкой принцессе» [3]<sup>2</sup>, явилась знаменательным событием в истории науки и просвещения. По сути, это была уникальная энциклопедия физических и философских знаний, изложенных популярно и потому доступных самому широкому кругу читателей. Успех этих книг был удивительным, и интерес к ним не угасал ни во времена Эйлера, ни после его смерти. Достаточно сказать, что «Письма» были переведены на многие языки, в том числе на английский, немецкий, итальянский, испанский, голландский и шведский, выдержали только в свое время более 30 изданий, а всего к настоящему времени насчитывается 111 изданий этого труда [4].

«Письма» охватывают широкий круг проблем: помимо физических представлений, которые являются основным предметом данного сообщения, мы находим в них обсуждение философских, теологических, географических и других вопросов. В основном Эйлер ограничивается рассмотрением вопросов оптики, электричества и магнетизма, хотя, конечно, трудно отделить эти области от механики или астрономии, ибо в основе концепции Эйлера лежит идея о взаимосвязанности всех явлений природы и «Письма к немецкой принцессе» являются в этом смысле попыткой дать возможно полную единую картину мира.

Подтверждением этого положения служит и незавершенное сочинение Эйлера «Руководство к учению о природе» [5], целью которого также является попытка свести все многообразие явлений к взаимодействию двух наиболее простых видов материи. Как утверждает Давид Шпайзер, «в „Руководстве“ мы находим в систематизированном виде ту программу,

<sup>1</sup> Поражает интенсивность, с которой Эйлер работал над этим сочинением: им было написано 234 письма (главы), следовательно, в среднем на написание каждой главы он должен был тратить не более трех дней.

<sup>2</sup> В дальнейшем все цитаты из «Писем» Эйлера даются по этому изданию.

которая в деталях была разработана в „Письмах“ и других исследованиях» [6].

Итак, рассмотрим основные физические идеи Эйлера в том виде, как они были представлены в его «Письмах», не забывая при этом, что все они явились результатом его предыдущих исследований и размышлений, к которым по ходу дела мы также будем обращаться.

Центральным понятием в физике Эйлера был эфир — «тонкая» материя, заполняющая в природе всевозможные пустоты и ответственная за большинство физических явлений — оптических, электрических, магнитных, а также, по-видимому, лежащая в основе природы тяготения. Именно представление об эфире обусловило взгляд, встречающийся у некоторых исследователей физики Эйлера, что «гипотезы, которые Эйлер использовал для объяснения физических явлений, были неизменно картезианскими и всегда строились на главном принципе картезианской физики» (см., например, [7]). Однако, как мы в дальнейшем покажем, эфир Эйлера имел мало общего с картезианским эфиром, более того, он был во многом идентичен эфиру Ньютона и введен для объяснения тех же самых затруднений, с которыми сталкивался и Ньютон. Но в дальнейшем область использования этого понятия была расширена у Эйлера, так что стала охватывать и оптику.

Впервые упоминание об эфире появляется в письме 19, где в процессе обсуждения природы оптических явлений Эйлер приходит к выводу: «Итак, должно согласиться на две вещи: первое, что места между небесными телами наполнены жидкой материей; второе, что лучи не истекают от Солнца и других светящихся тел, как Невтон утверждал. Сия тонкая материя, небеса между телами наполняющая, называется эфир, о безмерной тонкости и жидкости которого сомневаться невозможно» [3, т. 1 с. 73]. Вспомним, что эфир Декарта служил основой его космологии; механическое действие эфира, вращающегося во Вселенной, обуславливало в картезианской картине мира движение небесных тел по замкнутым орбитам. У Эйлера эфир не имеет ничего общего с космологией, и в то время как у Декарта свет представляется в виде давления, распространяющегося мгновенно, посредством так называемого второго элемента — давления

LETTRES  
A UNE PRINCESSE  
D'ALLEMAGNE  
SUR DIVERS SUJETS  
de  
PHYSIQUE & de PHILOSOPHIE

TOME PREMIER



A SAINT PETERSBOURG  
de l'Imprimerie de l'Academie Impériale des Sciences  
M DCC LX VIII.

*Титульный лист I тома «Писем  
к одной немецкой принцессе»  
Л. Эйлера 1768 г.*

эфирного вихря, в представлении Эйлера «свет не что иное есть, как сотрясение, производимое в частицах эфира» [3, т. 1, с. 77, письмо 20]. Явление света объясняется Эйлером по аналогии со звуком: точно так же, как звук представляет собой колебания воздуха, так и свет представляет собой колебания эфира, который является чрезвычайно разреженной и чрезвычайно упругой средой. Он говорит: «... Ежели бы вдруг густота воздуха сделалась меньше, а упругость больше, то бы от этих двух причин скорость звука увеличилась... Если бы воздух сделался бы так же редок и упруг, как эфир, то звук так же бы скоро, как и свет, простирался» [3, т. 1, с. 78]. Итак, Эйлер был одним из немногих физиков того времени (в их число входил и Иоганн II Бернулли), которые отвергали ньютонову корпускулярную теорию истечения. Эйлер решительно высказывался в пользу волновой теории, дав ее качественное объяснение в «Письмах», но предварительно проведя детальный математический анализ в «Новой теории света и цветов» в 1744 (1746) г. [8]. В этой работе, как отмечает С. И. Вавилов, «Эйлер пишет, вероятно, впервые в истории учения о свете привычное нам теперь уравнение плоской гармонической волны, т. е. создает аппарат элементарной волновой оптики, вполне достаточный для решения простейших интерференционных задач» [9]. Эйлер не дал объяснения явлению интерференции, однако он пытался в другой своей работе «Опыт физического объяснения цветов тонких пленок и ньютоновых колец» [10]. Этого объяснения мы не находим в «Письмах», но оно основано на своеобразной теории цветов, которая там изложена достаточно полно.

Эйлер считает, что каждому цвету соответствует определенная частота колебания эфира; при этом он изобретает специальный механизм возбуждения в нем таких колебаний. Он полагает, что красное, например, тело содержит частицы, которые могут колебаться только с частотой красного цвета, поэтому, когда оно освещается белым светом, содержащим весь спектр цветовых колебаний, они начинают колебаться с «красной» частотой, затем передают эти колебания эфиру и мы видим тело красным, и т. д. Эйлер говорит: «Вопрос о свойстве цветов всегда мучил философов. Иные говорят, что они происходят от некоторого изменения лучей, нам неизвестного. Декарт утверждает, что все цвета не что иное суть, как смешение света и тени; а Невтон ищет причины их в солнечных лучах, которые по мнению его на самом деле из Солнца истекают, и думает, что материя их может быть неодинаковой тонкости; откуда производит лучи всех цветов: красного, желтого, зеленого, синего и фиолетового. Но понеже система сия не может иметь места, то все, что ни умствовали по сие время о цветах, служит только к доказательству неведения о свойствах их. Теперь В[аше] В[ысочество] ясно понимаете, что свойство каждого цвета зависит от некоторого числа сотрясений, которые частицы, цвет нам представляющие, в известное время совершают» [3, т. 1, с. 109, письмо 27].

К этому вопросу Эйлер возвращается в конце второго тома, где снова, используя аналогию со звуком, утверждает: «Малейшие частицы, составляющие основу поверхности тел, могут быть почтены за натянутые струны, поелику они наделены упругостью и суть материя; и надлежащим образом будучи ударены, получают сотрясения, коих известное число издают в секунду; от сего числа зависит цвет, который мы сему телу приписываем» [3, т. 2, с. 256, письмо 135].

Введение эфира в физическую картину мира обуславливалось у Эйлера принципиальным отказом принять существование дальнего действия. Наиболее отчетливо это выражается в том месте «Писем», где он обсуждает проблему тяготения. Он говорит, что существует две точки зрения, согласно первой тяжесть рассматривается как врожденное свойство материи, согласно же второй тяготение есть следствие действия внешних сил и обусловлена эфиром. «Последнее мнение, — пишет Эйлер, — нравится больше тем, кои ясные начала в философии темным предпочитают, ибо они не понимают, каким образом два тела, между собой отстоящие, могут действовать одно на другое, ежели между ними ничего не будет» [3, т. 1, с. 272, письмо 68]. Это высказывание почти дословно совпадает с тем знаменитым местом из письма Ньютона к Бентли, в котором говорится о невозможности представить себе действие на расстоянии через пустоту [11]. Добавим, что и для Ньютона представление об эфире было гипотезой, с помощью которой он пытался объяснить широкий круг явлений: как следует из его «Вопросов» в «Оптике», а также из множества неопубликованных рукописей, эфир был способен объяснить столь различные явления, как перенос тепла в камере, лишенной воздуха, затухание маятника в вакууме, различные свойства света, передачу раздражений от органов чувств в мозг и многое другое [12]. В одном из вариантов «Оптики» Ньютон использует понятие эфира для объяснения сил тяготения. У него эфир имеет меньшую плотность внутри материальных тел, чем в окружающем их пространстве, и это различие будет являться причиной движения тел друг к другу — как из более плотной в более разреженную среду [13]. Как показывают современные исследования, для Ньютона эфир, несмотря на все декларации относительно неприятия гипотез, оставался важной частью представления о мироздании. К этому добавим, что и Ньютон, и Эйлер сходились в том, что если плотность эфира принять порядка одной миллионной плотности воздуха, то его присутствие во Вселенной не будет оказывать никакого заметного влияния на движение планет. В то же время Ньютон показал во второй книге «Математических начал», что небесные тела не могут описывать замкнутые траектории, если они движимы картезианскими вихрями (Предложение III. Теорема XII). На сходство подхода к проблеме движения небесных тел сквозь эфир у Ньютона и Эйлера указывал Я. Г. Дорфман [14].

Эйлер, как и Ньютон, прибегал к понятию эфира с целью избежать введения в физику «окультурных качеств», каким ему казалось тяготение, понимаемое как врожденное свойство. Поэтому использование этого понятия отвечало материалистическим тенденциям в эйлеровском подходе к природе.

Если мы обратимся теперь к проблеме материи, то снова увидим явное сходство между позицией Ньютона и Эйлера.

В то время как Декарт идентифицировал материю и протяженность, Эйлер, следуя Ньютону, проводил между ними строгое различие. Главным свойством материи он считал непроницаемость. В письме 69 после того, как он излагает точку зрения Декарта по этому вопросу, Эйлер заключает: «Между тем удобно видим всеобщий признак, приличный всякой материи, а следовательно, всякому телу; оный есть непроницаемость, или невозможность, чтоб одно тело проходило сквозь другое или чтоб два тела вдруг одно место занимали» [3, т. 1, с. 277—278, письмо 69]. При

этом тело отличается от пустого пространства тем, что «пустота имеет протяжение, но лишена непроницаемости» [Там же, с. 279, письмо 70].

В письме 74 разъясняется понятие инерции. При этом подчеркивается важность равносильности состояния покоя и состояния прямолинейного и равномерного движения. Заслуга придания этим двум состояниям одинакового онтологического статуса в равной мере принадлежит и Декарту, и Ньютону. Известный историк науки А. Койре видел в этом факте один из наиболее революционных шагов науки Нового времени [15], и Эйлер со свойственной ему пронизательностью сразу осознал и подчеркнул в своих «Письмах» важность этого момента.

Эйлер понимал под инерцией (в переводе Румовского — «грубость») качество, благодаря которому тело удерживается в данном состоянии: «Сие качество, всем телам существенное, называется грубость и равно всем телам приличествует, как протяжение и непроницаемость» [3, т. 1, с. 297, письмо 74].

Итак, три основных свойства определяют материю — протяженность, непроницаемость и инерция. Согласно Эйлеру, величина инерции определяется массой, а для преодоления инерции и изменения состояния необходима сила; «сила есть внешняя причина изменения состояния» [Там же, с. 298]. Очевидно, что все эти представления полностью соответствуют ньютоновским. К этому добавим, что, как и Ньютон, Эйлер предполагал существование абсолютного времени и абсолютного пространства, а строение любого вещества предполагал пористым, так что между его частичками находятся пустоты. Отличие его точки зрения от Ньютона состоит в том, что Эйлер всегда считал эти пустоты или поры заполненными «тонкой» материей, или эфиром, а Ньютон не высказывался столь категорично и не включил представления об эфире в текст «Математических начал», хотя существуют данные о том, что он намеревался это сделать.

Перейдем теперь к электричеству и магнетизму. Этим вопросам среди физических проблем уделено наибольшее место и внимание. Так, первому вопросу посвящено по меньшей мере 17 писем (письма 138—154) второго тома, а магнетизму — 19 писем (письма 169—187) третьего тома.

После описания различных явлений электричества в обширном письме 138 — сюда входят электризация трением, искры, молния и гром — Эйлер сразу заявляет: «Нет никакого сомнения, что источник всех электрических явлений надлежит искать в некоторой жидкой и тонкой материи; и нет нужды нам оную выдумывать. Той самой тонкой материи, которая называется эфир» [3, т. 2, с. 271—272, письмо 139]. Упругость эфира — ключ к разгадке электричества. Далее Эйлер замечает: «Упругое равновесие не что иное есть, как состояние покоя, когда силы, могущие оное разрушить, взаимно себя уничтожают... От недостатка равновесия в воздухе рождается ветер, которым он переносится с одного места на другое; поэтому в эфире произойдет некоторый род ветра, когда равновесие его нарушится, но ветер несравненно тончайший, которым он от мест, где более сжат и упруг, переходит в такие, где упругость его меньше.

Положивши сие, смею утверждать, что все явления электрические суть следствия недостатка равновесия в эфире... Электрическая сила не что иное есть, как разрушение равновесия в эфире» [Там же, с. 276, письмо 140]. Затем Эйлер весьма детально описывает механизм того, как нару-



шение равновесия в эфире приводит к видимым проявлениям электричества, таким, как искры при разряде, гром, молния и т. д. Для этого он вводит иерархию структуры материальных тел. Прежде всего поры или «скважины» тел могут быть различны по отношению к содержащемуся в них эфиру: из одних эфир освобождается и входит в них с трудом, из других — вполне легко, а третьи занимают промежуточное положение. Соответственно существует два рода тел: тела с «запертыми» скважинами (в них эфир находится в более напряженном состоянии) и тела с «открытыми» скважинами (содержащими эфир, находящийся в менее напряженном состоянии). Тела первого рода, как мы сказали бы сегодня, являются изоляторами, а второго — проводниками. Затем Эйлер вводит понятия положительного и отрицательного электричества соответственно тому, сжат или разрежен эфир в порах тела.

Электризация трением объясняется тем, что в соприкасающихся частях тел их поры сжимаются, вследствие чего эфир перетекает от одного тела к другому, что приводит к нарушению равновесия, когда трение прекращается.

Поскольку, согласно Эйлеру, воздух имеет наиболее «запертые» поры, это приводит к световым и звуковым эффектам при разряде: «Когда эфир из одного тела, где он больше сжат, переходит в другое, в котором он сжат меньше, то переходу его всегда мешает воздух, имеющий скважины запертые; от этого эфир приходит в жестокое сотрясение, в котором, как мы уже видели, состоит свет; чем сильнее будет сотрясение, тем ярче свет, от этого света тела даже загореться могут» [Там же, с. 150, письмо 150]. Аналогичным же образом появляется и звук при разряде, так как эфир, колеблясь, приводит в колебание окружающий его воздух.

Пользуясь представлением об упругом эфире, Эйлер в этой части «Писем» объясняет практически все явления электростатики. Следует сказать, что в применении эфирной теории к электростатике он наиболее самостоятелен, во всяком случае, нам неизвестны подобные взгляды до Эйлера. И еще один важный момент — в Письме 144 Эйлер говорит о «весьма существенном обстоятельстве, сопровождающем как положительную, так и отрицательную электризацию тел, которая позволяет нам многое раскрыть в объяснении электрических явлений» [Там же, с. 324]. Речь идет о том, что всякое наэлектризованное тело должно быть окружено «электрической атмосферой». Я. Г. Дорфман рассматривал это замечание как введение в физику электрического поля.

Если объяснение электростатических явлений можно считать вполне оригинальным, в объяснении магнитных явлений у Эйлера легко увидеть влияние Декарта. Декарт представлял себе земной шар пронизанным вдоль оси тончайшими винтовыми каналами, по которым непрерывно циркулируют частицы особой материи, образующей вихрь вокруг Земли. По мнению Декарта, железо отличается от всех других тел наличием винтовых каналов, подобных каналам Земли. Поэтому поток материи, непрерывно циркулирующий вокруг Земли, ориентирует любой кусок железа так, чтобы поток проходил сквозь него беспрепятственно.

Эйлер видоизменил картину, нарисованную Декартом, лишь в том, что каналы в телах, вместо того чтобы иметь винтообразную форму, снабжены клапанами наподобие венозных, так что магнитная жидкость может течь только в одну сторону.

Теория, представленная Эйлером в «Письмах», является несколько более сжатым вариантом его работы «Новая теория магнита» [16], премированной Парижской академией наук в 1744 г.; в частности, в «Письмах» отсутствует объяснение природы тяготения, которое в «Новой теории магнита» весьма сходно с тем, какое было дано Ньютоном и уже упоминалось нами.

В «Письмах» Эйлер рассматривает сначала свойства магнитной стрелки и опыты с магнитом и железными опилками. Из этого рассмотрения он делает вывод, что «расположение, в опилках усматриваемое, не позволяет сомневаться, чтоб нетонкая и невидимая материя понуждала опилки таким образом располагаться. Сверх сего, видно, что сия материя проходит сквозь магнит, входя в один полюс и выходя в другой: так что она беспрепятственным движением около магнита составляет вихрь, материю от одного полюса к другому переносящий, и нет никакого сомнения, чтоб сие движение не было безмерно скоро» [3, т. 3, с. 107, письмо 176]. Эйлер считает, что суть магнитных тел и состоит в том, что их пронизывает непрерывающийся вихрь тонкой материи, которая представляет собой эфир еще более тонкий, чем тот, что служит Эйлеру для объяснений явлений оптики и электричества. Представление об отдельном магнитном эфире ему необходимо, чтобы объяснить магнитные явления в вакууме — магнитная материя свободно проходит даже сквозь эфир, а также отличие магнитных тел от немагнитных: сквозь немагнитные тела магнитная материя свободно проходит во всех направлениях, в то время как в магнитных телах она может двигаться лишь в одном направлении — по линии, соединяющей полюса.

Эйлер говорит, что обычный эфир не столь тонок, как магнитная материя; как же в таком случае более грубое вещество может встречать большее сопротивление (ибо в магнитных телах эфир свободно проходит сквозь поры в любом направлении)? Эйлер на это отвечает: «магнитная материя движется в порах с гораздо большей, чем эфир, скоростью» и потому встречает большее сопротивление.

По тому, выходит или входит магнитная жидкость в магнит, Эйлер определяет различные его полюса, а затем исходя из гидродинамических соображений объясняет притяжение разноименных и отталкивание одноименных полюсов. Интересно объяснение Эйлером природы намагничивания: магнит упорядочивает поры или «скважины» в железе, а также клапаны, в них содержащиеся и до той поры находящиеся в хаотическом беспорядке.

Такова в общих чертах картина физических явлений, нарисованная в «Письмах к немецкой принцессе».

Каково же было влияние эйлеровских воззрений на развитие физики? Прежде всего здесь надо отметить его заслугу в критике ньютоновской корпускулярной оптики. Большинство его современников и младших современников не решались порвать с теорией истечения. Даже И. Г. Ламберт, который, как известно, отдавал предпочтение теории Эйлера, на это не решился. Решение в пользу волновой теории пришло в начале XIX в. благодаря открытиям Юнга и Френеля, которые оба были хорошо знакомы с работами Эйлера.

Что касается эйлеровского подхода к дальнему действию и его понятия эфира, то и его плодотворность была понята лишь значительно позже времени самого Эйлера. Одним из первых, кто осознал его важность, был Фа-

радей. Вот что он писал в своих «Экспериментальных исследованиях по электричеству»:

«В настоящее время существуют две, или скорее три фундаментальные гипотезы относительно физической природы магнитного действия. Первая — гипотеза эфира, связанная с идеей о потоках или токах, и ее самую выдвинул Эйлер в популярной форме, обращаясь к философу-нематематику в своих письмах; согласно этой гипотезе магнитная жидкость или эфир предполагается движущейся в потоке сквозь магниты, а также пространство и частицы, их окружающие... Затем существует гипотеза о двух магнитных жидкостях, которые, находясь во всех магнитных телах и скапливаясь на полюсах магнита, вызывают притяжение и отталкивание частей обеих жидкостей на расстоянии и, таким образом, обуславливают притяжение и отталкивание далеких тел, их содержащих. Наконец, существует гипотеза Ампера, которая предполагает существование электрических токов вокруг частиц магнитов, чьи токи, действуя на расстоянии на другие частицы, обладающие такими же токами, соединяют их в массы, их содержащие, и, таким образом, заставляют эти массы подчиняться магнитному действию. Каждая из этих идей изменялась более или менее различными философами, однако для моей настоящей цели достаточны эти три строго определенных направления, которые я только что изложил. Мое физико-гипотетическое представление не идет столь далеко в своих предположениях, как вторая или третья из этих идей, ибо оно не претендует сказать, откуда происходят или как поддерживаются магнитные силы в магните; оно совпадает, скорее, с первой точкой зрения, не делая слишком много предположений»<sup>3</sup>.

Что же представлял собой эфир Эйлера, который стоял в центре его физических представлений? Это вовсе не был еще один вариант обычной материи. Эйлеровский эфир был носителем поля сил, и в этом Эйлер был прямым продолжателем идей Ньютона, тех самых идей, которые, по выражению Л. Розенфельда, «были впоследствии вытеснены из его системы менее тонко чувствующими предмет эпигонами» [18]. Эти идеи содержали в себе возможность объяснения явлений природы «с помощью иных, нежели механических законов»<sup>4</sup>. Эту линию преемственности можно проследить в XIX в. на примере английских математических физиков — от Грина и Маккулага до Уильяма Томсона, лорда Кельвина, для которых упругий эфир, введенный в оптику Эйлером, остался существеннейшим элементом картины мира и главным центром приложения творческих усилий. В этом же русле развивались работы Фарадея и Максвелла, приведшие к созданию классической теории поля.

В заключение скажем несколько слов о влиянии физических идей Эйлера на науку в России. Несомненно, что они оказали существенное влияние на формирование естественно-научных взглядов в конце XVIII и начале XIX в., причем это влияние можно проследить по трем направлениям. Во-первых, существовало известное сходство во взглядах на физические явления у Эйлера и Ломоносова, которое не могло не отразиться на всем дальнейшем развитии науки и философии в России. Во-вторых,

<sup>3</sup> Цитата приводится из книги [17]. Интересно, что в этом месте у Фарадея имеется сноска: «Перевод эйлеровых «Писем» 1802 г., т. I, с. 214, т. II, с. 240, 242, 244».

<sup>4</sup> Черновик письма Ньютона к Лейбницу. Цит. по [19].

у Эйлера было несколько учеников в Петербургской академии наук (С. К. Котельников, С. Я. Румовский, М. Е. Головин, Н. И. Фус), и они сделали немало для пропаганды взглядов своего учителя. Наконец, в-третьих, нашлись энтузиасты и просветители вне академических кругов (Я. П. Козельский, А. Н. Радищев, П. И. Гиляровский, М. М. Сперанский), для которых имя Эйлера символизировало наивысшие достижения науки того времени, и это нашло отражение в их книгах, лекциях и их деятельности в целом [20].

В частности, теория света и цветов Эйлера оказала сильнейшее влияние на М. В. Ломоносова в его «Слове о происхождении света, новую теорию о цветах представляющем» (1756) [21]. Здесь же упомянем работы Н. И. Фуса по диоптрике, являющиеся продолжением работ Эйлера и основывающиеся на них. Особенно отметим ту часть работы, которая касается построения ахроматических оптических инструментов. Следы эйлеровского влияния можно увидеть в философских произведениях Козельского и Радищева [22, 23]. Эти примеры без труда можно было бы продолжить.

Наконец, идеи Эйлера составили основу реформы физического образования в России в эпоху Екатерины II. Первый учебник по физике, удовлетворяющий новым требованиям и написанный Гиляровским, написан буквально по следам эйлеровских «Писем» [24]. Отмечу, что и знаменитый Сперанский, будущий советник Александра I, автор «Введения к уложению государственных законов», содержащего идеи конституционной монархии, начинал свою карьеру скромным учителем физики Невской духовной семинарии. Лекции Сперанского также целиком основывались на «Письмах» Эйлера, что стало известно, впрочем, лишь в 1872 г., когда была найдена их запись, и затем они были изданы Московским университетом [25].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Euler L. Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie.* SPb., 1768—1772. Т. 1—3; Opera III-11, 12.
2. *Пекарский П.* Екатерина II и Эйлер // Зап. имп. Акад. наук. 1864. Т. 6, Кн. 1. С. 59—92.
3. *Эйлер Л.* Письма о разных физических и философических материях, писанные к некоторой немецкой принцессе, с французского языка на российский переведенные Степаном Румовским. СПб., 1768—1774. Т. 1—3.
4. *Fellmann E. A. Leonhard Euler: Ein Essay über Leben und Werk* // Leonhard Euler. 1707—1783. Basel, 1983. S. 71.
5. *Euler L. Anleitung zur Natur-Lehre, worin die Gründe zu Erklärung aller in der Natur sich ereignenden Begebenheiten und Veränderungen festgesetzt werden* // Opera III-1. P. 16—178.
6. *Speiser D. Eulers Schriften zur Elektrizität und zum Magnetismus* // Leonhard Euler. 1707—1783. Basel, 1983. S. 226.
7. *Минченко Л. С.* Физика Эйлера // Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР. 1957. Т. 19. С. 221—270.
8. *Euler L. Nova theoria lucis et colorum* (1746) // Opera III-5. P. 1—45.
9. *Вавилов С. И.* Физическая оптика Леонарда Эйлера // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1935. С. 32—33.
10. *Euler L. Essai d'une explication physique des couleurs engendrées sur des surface extrêmement minces* (1752). Opera III-5. P. 156—171.
11. Four letters from Sir Isaac Newton to Dr. Bentley. London, 1756. P. 25.
12. *Ньютон И.* Оптика. М. Гостехтеориздат, 1954. С. 264—268.
13. *Newton I. Optics*/Dover ed., based on the 4th ed. of 1730. New York, 1952. P. 348.

14. Дорфман Я. Г. Физические воззрения Леонарда Эйлера // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 383.
15. Koyré A. Newtonian studies. London, 1965. P. 66—69.
16. Euler L. Nova theoria magnetis // Opuscula varii argumenti. Berolini, 1751. Vol. 3; Opera III-10.
17. Speiser D. L'oeuvre d'Euler en optique physique // L'Histoire des sciences: Textes et études. Paris, 1978. P. 218.
18. Rosenfeld L. The velocity of light and the evolution of electrodynamics // Nuovo cim. suppl. Ser. 10. 1957. Vol. 4. P. 1638.
19. McGuire J. E. Body and void // Arch. Hist. Exact Sci. 1966. Vol. 3. P. 203.
20. Grigor'ian A. T., Kirsanov V. S. Euler's Physics in Russia // Leonhard Euler. Basel, 1983. P. 385—394.
21. Ломоносов М. В. Слово о происхождении света, новую теорию о цветах представляющее (1756) // Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1953. Т. 3. С. 315.
22. Козельский Я. П. Философские предложения. СПб., 1764.
23. Радищев А. Н. О человеке, его смертности и бессмертии // Избр. философские произведения. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949.
24. Гиляровский П. И. Руководство к физике, сочиненное Петром Гиляровским, учителем математики и физики в учительской гимназии, физики в обществе благородных девиц, русского слога и латинского языка в благородном Пажеском корпусе. СПб., 1793.
25. Сперанский М. М. Физика, выбранная из лучших авторов, расположенная и дополненная Невской семинарии философии и физики учителем Михаилом Сперанским 1799 года в Санктпетербурге. М.: Изд. Об-ва истории и древностей российских при Моск. ун-те, 1872.

# ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР И И. П. КУЛИБИН

*Н. М. РАСКИН*

В творчестве Л. Эйлера заметное место занимало решение технических проблем. Круг интересов Эйлера в области техники был исключительно широк. Едва ли оставались области технической практики его времени, которые он, применяя новейшие достижения математики и механики, не подверг теоретическому изучению. Это позволило ему создать новую теорию машин, которую можно рассматривать как ответвление разработанной им теории движения твердого тела.

Такое положение давало Эйлеру возможность очень быстро и точно оценивать различные новые технические предложения, конструкции и изобретения. При этом он предлагал методы для проверки предложенных конструкций, которые применялись и в дальнейшем, а также дорабатывал и улучшал сами эти предложения.

Авторитет великого ученого в области складывавшихся тогда технических наук был очень велик. Не случайно Петербургская и Берлинская академии наук постоянно привлекали его к экспертизе различных изобретений и технических проектов, поступавших на их рассмотрение. Кроме того, Эйлер с начала научной деятельности участвовал (и получал поощрения и премии) в конкурсах по техническим вопросам, объявлявшихся Парижской академией наук.

Иногда экспертизы, к которым Эйлера привлекали, служили отправной точкой создания им не только новых теорий, но и принципиально новых технических конструкций. Достаточно вспомнить, что реактивная гидравлическая турбина Эйлера возникла в результате усовершенствования «колеса» И. А. Зегнера.

Здесь мы остановимся на сотрудничестве Л. Эйлера с замечательным русским изобретателем и механиком Иваном Петровичем Кулибиным, который в 1769 г. был принят на службу в Петербургскую академию наук, где занял место механика и руководителя инструментальных мастерских.

Знакомство Л. Эйлера с техническим творчеством И. П. Кулибина произошло, вероятно, при рассмотрении первого варианта проекта одноарочного моста через Большую Неву, который изобретатель представил в Петербургскую академию наук в 1771 г.

Сооружение постоянных мостов через широкие и многоводные реки было одной из проблем, стоявших во второй половине XVIII в. перед мостостроителями. Необходимость постройки постоянного моста с особой остротой ощущалась в Петербурге. Большой и быстро растущий город, расположенный на островах дельты Невы, жизненно нуждался в новых, более совершенных мостах, чем существовавшие тогда наплавные переправы. Однако состояние инженерных знаний в XVIII в. не позволяло произвести надежный расчет такого сложного сооружения, как постоянный мост через широкую и многоводную Большую Неву. С этим обстоятельством столкнулся Кулибин, когда вскоре после переезда в Петербург приступил к составлению проекта одноарочного деревянного моста через

Неву. Разрабатывая первый вариант проекта, Кулибин построил модель будущего моста, чтобы по результатам ее испытания составить заключение о прочности и грузоподъемности натурального моста. Однако отсутствие научно-экспериментальной методики, позволявшей пересчитать данные испытаний модели на натуральный мост, не дало возможности судить о грузоподъемности и других качествах будущего моста. Поэтому Кулибин должен был заняться разработкой такой методики испытаний, которая дала бы возможность произвести нужный пересчет.

Мысль о работе в этом направлении возникла у изобретателя в результате рассмотрения в Академии наук первого проекта его моста через Большую Неву. По этому проекту Кулибин после нескольких неудачных попыток в 1771 г. изготовил модель моста в  $1/40$  натуральной величины. Модель была испытана в Академии наук. Для этой цели на середину пролета арки помещали сосредоточенную нагрузку, которая равнялась 15 собственным весам модели. Такое испытание модель выдержала, но тем не менее ее, как писал Кулибин, «господа академики рассматривали и по рассуждению их признавали сумнительной». При этом, как отмечал изобретатель, «главная же причина сумнительства та, что я не мог чрез ее доходить к тяжести настоящего моста, а ныне с помощью Всевышнего Творца чрез опыты несколько дошел, что чрез малую модель можно познать настоящему мосту тяжесть. . .» [1, ф. 236, оп. 1, № 38, л. 2,5].

Нет сомнения, что среди академиков, рассматривавших первый проект Кулибина, был и Л. Эйлер. Это, возможно, был и первый случай их общения. Ведь в это время Эйлер, несмотря на постигшую его почти полную потерю зрения, продолжал с помощью своих помощников и учеников интенсивную научную деятельность, в том числе осуществляя и экспертизы технических предложений, поступавших в Петербургскую академию наук.

В своей записке об изготовлении новой модели одноарочного моста, приложенной к прошению на имя вице-директора Академии наук А. А. Ржевского от 9 декабря 1772 г., Кулибин писал, что путем рассуждений и ряда опытов он вывел «правило» для пересчета грузоподъемности с модели на конструкцию [2, с. 154—155].

Л. Эйлер, которому приходилось заниматься испытанием моделей и давать заключения о других проектах мостов, также встретился с необходимостью разрабатывать методы пересчета результатов испытаний с модели на конструкцию. Свои выводы Эйлер изложил в статье, которая 25 сентября 1775 г.<sup>1</sup> была доложена Конференции (Академическому собранию) [3, с. 205]. Эта статья под названием «Простое правило определения прочности моста или другого подобного тела исходя из прочности модели» была опубликована на латинском языке в 1776 г. [4, с. 271—285]. В ней Эйлер писал:

«§1. Эта проблемы возникла недавно, по случаю постройки прочного моста через реку Неву. Многие попытались приступить к такому делу и для этой цели изготовили модели, подобием которых мог быть сам мост. Большинство при этом полагало, что мост будет достаточно прочным, если только модель будет иметь определенную степень прочности. Они считали, что если модель сможет выдержать груз, подобный тому, который должен выдержать мост, то тогда нет сомнения в том, что сам мост, построенный в соответствии

<sup>1</sup> Все даты приведены по старому стилю.

с этой моделью, будет достаточно прочным. Однако этот вывод является ложным, как это становится совершенно ясно из того, что такой мост, конечно, не может быть протянут на сколь угодно большое расстояние, например одной или многих миль, не подвергаясь искривлению под влиянием собственного веса, какой бы прочной ни казалась модель. . . Поэтому я попытаюсь здесь точно исследовать, каким образом исходя из прочности модели можно судить о прочности самого моста какой угодно величины. . .» [4, с. 271—272].

Далее Эйлер, используя математический аппарат, ясно изложил основы моделирования мостов, вывел и подтвердил «правило», найденное Кулибиным опытным путем еще до 1772 г. Краткое и общедоступное изложение некоторых результатов расчетов Эйлера было позже опубликовано в статье, помещенной в одном из «Месяцесловов» (календарей) на 1776 г., издававшихся Академией наук на русском языке [5]. Статьи, помещаемые в «Месяцесловах», предназначались относительно широкому кругу читателей, поэтому были написаны просто, без математических выкладок.

В этой статье отмечалось, что испытываемая модель должна быть «во всех частях строящемуся мосту совершенно подобна». Затем автор предлагал определить вес модели, взвесив ее. Тогда вес натурального моста может быть получен, если «вес модели умножить кубом содержания [т. е. отношения линейных размеров моста и модели ( $n$ ).— *Примеч. ред.*], что и дает искомого тяжесть моста». Для определения несущей способности проектируемого моста предлагалось: «накласть... на модель столько тяжести, сколько она поднять может, то есть положи на оную вдоль и поперек столько весу, чтобы она напоследок едва не переломилась; после сего свесь все сии тяжести, и сложи оные вместе. Теперь если сумма всех сих тяжестей не будет превышать тяжести модели, умноженной содержанием меньше 1 [т. е. умноженной на ( $n - 1$ ).— *Примеч. ред.*], то заподлинно утвердить можно, что строящийся мост едва сам держаться будет и обрушится от присоединения к его собственной тяжести малейшего постороннего бремени». Если же «модель может, — отмечается далее, — действительно сдерживать больше, то по сему легко вычислить можно, сколько самый мост, кроме собственной своей тяжести, в состоянии будет держать; а дабы сие найти, то надлежит только избыток тяжести, которую действительно держит модель, сверх той тяжести, которую бы по крайней мере держать ей надлежало, умножить квадратом содержания»<sup>2</sup>.

Изложенные Эйлером правила определения грузоподъемности моста становятся очевидными, если принять во внимание, что вес модели и реальной конструкции, а следовательно, и усилия от него, возникающие в сечениях элементов модели и конструкции, относятся, как кубы линейных размеров (при одинаковых объемных весах материала модели и моделируемой конструкции), а площади поперечных сечений элементов относятся, как квадраты линейных размеров. Следовательно, напряжения в поперечных сечениях модели и моделируемой конструкции относятся, как линейные размеры.

Таким образом, по результатам испытаний модели, изготовленной в определенном масштабе, оказалось возможным определять несущую спо-

<sup>2</sup> Действительно, мост выдержит груз  $Q = n^2 \Delta q$ , где  $\Delta q$  — избыток выдерживаемого моделью груза над грузом, соответствующим предельной прочности моста без дополнительной нагрузки.— *Примеч. ред.*



способность натурального моста. Основываясь на этих выводах, можно было быстро и надежно оценивать результаты экспериментов с моделями мостов и давать объективную оценку проектов.

Очень скоро Эйлеру, его коллегам и ученикам пришлось применить на практике правило пересчета грузоподъемности моста с модели на конструкцию. Дело в том, что близкий к придворным кругам капитан Сухопутного шляхетного кадетского корпуса Иосиф де Рибас<sup>3</sup> представил проект одноарочного деревянного моста через Большую Неву. Проект по указу Екатерины II должен был быть рассмотрен в Академии наук. Для испытания модели де Рибаса, которая до этого демонстрировалась императрице, 22 февраля 1776 г. была назначена Комиссия, которую возглавил Эйлер и в которую вошли академики С. К. Котельников, И. А. Эйлер, С. Я. Румовский и адъютанты Н. И. Фус и М. Е. Головин [3, с. 229].

Так как рассмотрение модели производилось на основании указа Екатерины II, то Комиссия действовала очень быстро. Уже 4 марта 1776 г. Конференции был представлен отчет [3, с. 230—232] с заключением, что «по этой модели нельзя строить мост на такой широкой реке, как Нева, так как... она [модель. — *Н. Р.*]... не выдержала и вчетверо меньшего веса, чем тот, который она должна была бы выдержать согласно расчетам». Комиссия отмечала также, что относительно небольшая грузоподъемность модели моста де Рибаса по сравнению с ее собственным весом происходит из-за того, что материалом для постройки модели служил дуб вместо ели, предполагавшейся для сооружения моста и имеющей значительно меньший удельный вес. Можно думать, что это обстоятельство заставило в русском варианте «Правил» моделирования подчеркнуть: «... оный [т. е. натуральный мост. — *Н. Р.*] должен быть во всем подобен модели и из такого же лесу построен» [5, с. 138].

Неудача первых испытаний не остановила де Рибаса и к ноябрю 1776 г. он закончил изготовление второй модели деревянного одноарочного моста по своему новому проекту. Де Рибасу удалось вновь получить указ Екатерины II об испытаниях Академией наук его новой модели, и 11 ноября 1776 г. Академическая конференция снова назначила Комиссию под руководством Эйлера для проведения таких испытаний. В ее состав входили академики С. К. Котельников, И. А. Эйлер, Л. Ю. Крафт, А. И. Лексель и адъютанты Н. И. Фус и М. Е. Головин [3, с. 265—266].

Комиссия провела испытания второй модели де Рибаса дважды: первый раз 15 ноября, когда, как отмечалось в протоколе Конференции, «... способ производства опытов, которыми г. де Рибас пользовался при этом испытании, показался им [академикам. — *Н. Р.*] несовершенным и даже сомнительным»... [3, с. 267], и вторично 26 ноября, когда выяснились резко отрицательные мнения некоторых академиков об этой модели. Результаты вторичных испытаний, проведенных по методике, предложенной учеными, оказались неудовлетворительными, и Комиссия забраковала и второй проект И. де Рибаса [6, с. 543—546].

Теперь Комиссия могла приступить к рассмотрению проекта Кулибина. Впрочем, как нам известно, Академия наук и Эйлер занимались проек-

<sup>3</sup> И. М. де Рибас (1749—1800) впоследствии отличился в русско-турецкой войне 1787—1791 гг. и дослужился до адмиральского чина. По его проекту велось строительство города и порта Одессы, одна из главных улиц которой называется Дерибасовской.

тами деревянного одноарочного моста Кулибина еще с 1771 г., но консультации, которые давались академическому механику, и испытания моделей, построенных по его проектам, проводились, можно думать, в рабочем порядке. Только этим обстоятельством можно объяснить то положение, что об испытаниях (в том числе и об испытаниях модели по известному третьему проекту Кулибина) не упоминается в протоколах Конференции; нет сведений об этом и в других официальных документах Академии.

Лишь в 1776 г., когда работы по сооружению модели по третьему проекту Кулибина подходили к концу, о его работе встречаются два упоминания в протоколах Конференции. Первое из них содержится в уже упомянутом протоколе от 22 февраля 1776 г. [3, с. 229]. После перечисления членов Комиссии, которая должна была рассмотреть и испытать первую модель де Рибаса, указывалось, что тогдашний директор Академии наук С. Г. Домашнев поручил этой же Комиссии «рассмотреть. . . чертежи, описание и расчет другого моста, который проектировал механик-художник Академии Кулибин и модель которого должна быть закончена в скором времени». Второе упоминание содержится в протоколе заседания Конференции от 18 апреля 1776 г., в котором сказано, что «г. Головин представил немецкий перевод мемуара механика Кулибина, содержащий описание деревянного одноарочного моста, который он проектировал для постройки на Неве и модель которого будет закончена в ближайшее время. Секретарь взял этот перевод для прочтения и чтобы сообщить свое мнение другим членам Комиссии, назначенным для проверки указанного проекта» [3, с. 237].

Проект Кулибина рассматривали как академики, назначенные директором Академии наук, так, очевидно, и приглашенные Эйлером ученые. Свидетельством этому служит отрывок документа с мнениями академиков Лекселя, Крафта и третьего ученого (судя по почерку — Фуса), который не подписал свой отзыв. Этот документ был составлен в феврале 1776 г. Так как он имеет важное значение для оценки отношения Эйлера к проекту одноарочного моста Кулибина, приведем его здесь полностью: «Хотя мне весьма сомнительно, чтобы модель Кулибина могла выдержать нагрузку, в 12 раз превышающую ее собственный вес, однако я не знаю, удобно ли высказывать такое предположение, не проверив его; достаточно, если модель выдерживает на 485 пудов больше, чем она должна бы выдерживать, чтобы мост в натуральную величину мог выдерживать собственный вес; можно считать, что мост в натуральную величину мог бы быть перегружен почти на 50 000 пудов, не подвергаясь ни малейшему риску; это мне представляется наибольшей нагрузкой, которую он может вообще вынести. Впрочем, я присоединяюсь к мнению г. Румовского. Лексель».

«Чтобы быть в точности согласным с истиной, следовало бы, по-видимому, вместо слов «Взвесив. . .» поставить: «Вследствие составленного г. Кулибиным расчета, который не вполне точен, но не должен значительно отклоняться от требуемой точности, общий вес следует оценить в . . . Крафт».

«Ваш уважаемый отец [документ, по-видимому, адресован И. А. Эйлеру.— *Н. Р.*] считает, что от этого наброска ничего нельзя отнять и ничего прибавить, он находит его вполне отвечающим его собственным мыслям. Было ли что-нибудь решено относительно предложения г. Румовского — поручить некоторым членам Комиссии рассмотреть вес, указанный в

этом докладе? Этот пункт слишком существенен, чтобы им можно было пренебречь» (Н. И. Фус) [1, ф. 1, оп. 2-1776, № 2].

Этот документ отчетливо свидетельствует о той высокой оценке, которую Эйлер давал проекту Кулибина уже в начале 1776 г. В этом нет ничего удивительного, так как нам известно, что изобретатель уже в 1771 г. построил модель моста по первому проекту, которая была забракована академиками (среди которых, безусловно, был и Эйлер), а к концу 1772 г. механик закончил второй вариант проекта деревянного одноарочного моста. В описании этого проекта Кулибин дал экспериментальное обоснование принятой им схемы моста и размеров его отдельных элементов, а также эмпирический вывод правила пересчета грузоподъемности с модели на конструкцию. И этот вариант его проекта и модель, несомненно, рассматривались и испытывались при участии Эйлера.

К концу 1776 г. была закончена постройка модели моста по третьему проекту Кулибина. В то же время были произведены и ее испытания.

27 декабря 1776 г. Комиссия Эйлера (в которую он, возможно, по собственной инициативе включил академиков А. И. Лекселя, Л. Ю. Крафта и адъюнкта П. Б. Иноходцева) подвергла модель Кулибина испытанию статической нагрузкой. Первоначально по решению Комиссии на модель (которая была выполнена в 1/10 натуральной величины и весила 330 пудов) был уложен весь расчетный груз — 2970 пудов «полосного железа» (т.е. вместе с весом самой модели — 3300 пудов). Этот груз был пропорционально размещен по всей модели. Затем на модель было положено дополнительно еще 570 пудов сверх расчета. Комиссия, помимо этого, размещала на известный срок по всей длине модели моста 15 человек. «... Стоявши под тем железным грузом оная модель, — писал Кулибин, — 28 дней не показала ни малейших знаков к повреждению. . .» [2, с. 166]. Можно думать, что Эйлер и Кулибин имели в виду свойство древесины ползти под нагрузкой, в связи с чем испытания были сделаны не кратковременными.

Газета «Санктпетербургские ведомости» от 10 февраля 1777 г. писала об этих испытаниях и о самом изобретателе: «Сей отменный художник, коего природа произвела с сильным воображением, соединенным с справедливостью ума и весьма последовательным рассуждением, был изобретатель и исполнитель модели деревянного моста, каков может быть построен на 140 саженях, т.е. на широте Невы-реки. . . Сия модель. . . была свидетельствована Санктпетербургскою Академиею наук 27 декабря 1776 г. и, к не ожидаемому удовольствию Академии, найдена совершенно и доказательно верно для произведения оной в настоящем размере. . . Оный Кулибин в 1773 году дошел сам собою до тех правил, чтоб узнавать по модели, может ли настоящий мост снести собственную свою тягость и сколько может понести постороннего груза. Сии правила совершенно явились сходны с теми, кои *после произвел* [Курсив мой. — Н.Р.] из механических оснований славный г. Эйлер, здешний академик, и кои напечатаны в Календаре с наставлениями на 1776 год и внесены в Академические комментарии» [2, с. 164].

Приведенный текст свидетельствует, что в разработке своей методики пересчета грузоподъемности с модели на конструкцию Кулибин был вполне самостоятелен. Нужно помнить, что «Санктпетербургские ведомости» издавались Академией наук и сведения, сообщаемые в газете относительно событий, связанных с этим учреждением, были вполне достоверными.

Скоро известия об успехе испытаний модели Кулибина широко распространились в России. Проект Кулибина вызвал большой интерес среди ученых за рубежом. Видимо, первым, кто привлек внимание иностранных ученых к нему, был адъюнкт Петербургской академии наук Фус.

Работая под руководством Эйлера, Фус постоянно привлекался им и к тем экспертизам по техническим и другим вопросам, которыми в то время занимался сам ученый, и был, конечно, лучше, чем кто-либо другой, осведомлен о его мнениях и оценках.

Недавно выявленные копии писем Фуса к Д. Бернулли [8, с. 113—114] дают возможность осветить многие ранее неизвестные обстоятельства, имевшие место при испытаниях модели моста Кулибина <sup>4</sup>.

Через десять дней после испытаний модели Кулибина 5 января 1777 г. Фус писал Д. Бернулли: «У нас здесь с некоторого времени появилось так много проектов строительства моста через Неву, что это предприятие стало почти предметом насмешек. Однако академический механик Кулибин, который заслуживает, чтобы Вы о нем узнали, по удивительности того факта, что он из простого крестьянина сделался человеком поистине замечательным благодаря полученному от природы счастливому расположению к искусству механики и который без всякой посторонней помощи уже создал шедевры, заставил публику восхищаться им и его моделью, над которой он не прекращает работать. Это модель одноарочного моста через Неву шириной в 1057 английских футов. Кулибин, совершенно неискушенный в математике, нашел, я не знаю каким путем, что очертания арки должны иметь форму цепной линии, что его модель весит 333 пуда, что элементы, из которых состоит мост, должны равномерно и последовательно уменьшаться [к середине.— *Н. Р.*] и, наконец, что модель его моста должна нести груз весом в 3300 пудов, чтобы мост мог выдержать свой собственный вес. То же самое г. Эйлер нашел а priori в рассуждении, которое будет опубликовано в XX томе наших «Комментариев». Он [*Л. Эйлер.— Н. Р.*] работал больше года и закончил его недавно.

*Десять дней тому назад* [Курсив мой.— *Н. Р.*] на модель погрузили 3500 пудов, она не прогнулась и не оставила сомнений у Комиссии, которая должна изучить ее в один из этих дней. Он [Кулибин.— *Н. Р.*] делает приготовления, чтобы добавить еще 500 пудов. Конструкция этой модели не только остроумна, так что возможность использования столь тяжелой машины очевидна, но она еще и так пропорциональна, так хорошо смотрится, что издали ее можно принять за арку каменного моста» [1, ф. 40, оп. 1, № 189, л. 4—4 об.].

На это сообщение Д. Бернулли откликнулся в письме от 7 июня 1777 г. В нем он отмечал: «...То, что Вы сообщаете мне о Вашем русском уроженце механике г. Кулибине по поводу деревянного моста через Большую Неву, имеющую ширину в 1057 английских футов, внушает мне высокое мнение об этом талантливом и искусном плотнике, воспитанном среди простых крестьян и обязанном своими высшими познаниями только своего рода наитию... Мне кажется, что самое главное искусство состоит в выборе дерева, в крайней точности всех размеров... Все главные

<sup>4</sup> Приведенные далее выдержки из копий писем Н. И. Фуса к Д. Бернулли публикуются с небольшими изменениями по статье Е. П. Ожиговой [8, с. 113—114].

части должны, насколько возможно, взаимно давить друг на друга с помощью больших железных болтов, клиньев, шкворней, хороших шипов и правильно сделанных вырезов. Вы без сомнения видели труд г. Андрее (Andreae), изданный в Цюрихе в 1776 году в форме писем. Вы найдете в нем весьма подробное описание деревянного моста, построенного в Шафхаузене, длиной в 364 английских фута, но там воспользовались естественным устоем около середины реки, так что протяженность наиболее длинной части составляет примерно 200 футов, что гораздо меньше чем 1057. Эта ширина Невы представляется мне чрезвычайной, и я сознаюсь, что никогда не решился бы высказаться за постройку такого моста, разве только если бы между одним и другим берегом Невы было сооружено два или три свайных устоя, которые делили бы мост на три или четыре примерно равных части. Я пришел к этому мнению, лишь прочитав со вниманием все описание г. Андрее; при этом я не руководюсь простой теорией, которая приводится в такого рода работах, потому что нет возможности перечислить все обстоятельства, которые необходимо принять в расчет... Главный строитель чаще всего должен полагаться на свое собственное чутье. Здесь я и ощущаю всю выгоду иметь такого человека, как Кулибин, к которому я проникнут уважением, но я не могу победить своего недоверия, когда дело идет о таком огромном мосте. Можно ли быть уверенным в том, что большие морозы, свойственные этой стране, не нарушат конструкцию моста? Ведь самое малое сжатие всех частей могло бы оказаться для него роковым. Сообщите мне, пожалуйста, какова высота модели в ее середине по сравнению с концами и каким именно способом этот великий мастер распределяет те 3500 пудов, которыми он нагрузил свою модель? Если бы модель могла выдержать еще 500 пудов, которые он собирался на нее наложить, то это было бы лишним веским доказательством возможного успеха. В свое время я произвел много исследований, относящихся к прочности и сопротивлению дерева, примененного различными способами, и опыт всегда подтверждал мои результаты; но я еще сомневаюсь относительно сопротивления балки известной длины, четырехгранно обтесанной и сильно сжатой в продольном направлении, пока эта балка не начинает гнуться, или какой груз может выдержать столб, поставленный строго вертикально, чтобы не сломиться под его тяжестью? Мне хотелось бы, чтобы Ваш вдохновенный механик высказал Вам свое мнение на одном-двух примерах; мне нужна лишь его приблизительная оценка» [9, с. 671—673].

В своем ответе Д. Бернулли Фус уточнил предыдущее сообщение о модели Кулибина и дал ответ на поставленные вопросы:

«Я предвидел, что краткое упоминание о модели Кулибина, которое я сделал в последнем [письме.— *Н. Р.*], привлечет Ваше внимание. Мне также было ясно, что Вы отметите те затруднения, которые возникнут при осуществлении столь сложного проекта.

Я знал, что различные мосты такого рода есть в Швейцарии, например в Шафхаузене и Веттингейле, их называют *gestreifte Brücken*. Вспоминаю также, что видел модель моста, который должен был быть построен в Ирландии, изготовленную жителем Альп по имени Шварценбах и одобренную в Лондоне. Но эта модель, по моему мнению, была недостаточно прочной, а мост, который с большим трудом построили по ней, как я узнал позже, рухнул.

Модель Кулибина не похожа на все то, что я видел в этом роде. Она слишком сложна, чтобы ее можно было описать в нескольких словах, и то, что я мог бы сказать Вам об его идее, какой бы она ни была несовершенной, могло бы может быть разрушить то хорошее мнение, которое я желал бы Вам о ней дать. Это, как я уже говорил, низкая арка (*un arc surbaissé*)<sup>5</sup>, наподобие опрокинутой цепи, высота которой в середине (*par dessus*) по сравнению с концами равна 8,4 английских фута. Она состоит из четырех вертикальных плоскостей (*plans*) шести футов высоты, брусья которых, соединенные в виде решетки, поддерживают друг друга так, чтобы они ни в коем случае не могли согнуться. Для этого они в каждом соединении укреплены железными болтами. Все четыре плоскости соединены и переплетены таким образом, что все кажется единой системой. Это достигается благодаря плоскостям ..., изогнутым так, что к концам мост имеет ширину в два с половиной раза большую, чем в середине, чтобы противостоять разрушительным толчкам, которые могли бы произойти от слишком большого давления ветра на эти большие поверхности. Такова модель, которую Академия наук сочла достойной своего одобрения, после того как убедилась, что эта тонкая конструкция сразу же выдержала груз в 3600 пудов железа, больше половины которого было погружено на треть у середины модели.

Но каким бы убедительным ни явилось это испытание, мы были настолько осторожны, что ничего не решили в пользу осуществления этого проекта, о чем, правда, вопрос и не стоял. В докладе о г. Кулибине ему воздали всяческие похвалы, каких заслуживают его старание и его искусство, хотя они не дали ответа на множество обстоятельств, которые могли бы встретиться при осуществлении проекта и сделать его, быть может, неосуществимым. Ведь возможно, возникла бы неотложная необходимость закончить постройку за 4—5 месяцев, произведя подбор большого количества отборной древесины, воздвигнуть леса, которые должны были бы протянуться на довольно большое расстояние для того, чтобы мост был достаточно высоким с целью пропуска судов, входящих, как Вам известно, между крепостью и Академией наук в Малую Неву для разгрузки своих товаров на бирже. И даже если бы все эти проблемы были решены, то какая от этого была бы польза? Иметь возможность переходить через реку на два месяца дольше в течение года? Ведь зимой всегда перебирались бы по льду вместо того, чтобы подниматься на этот мост высотой в 84—90 футов, а летом наплавной мост служит также и стоит вместе с двумя другими мостами через Малую Неву и Невку 8 тысяч рублей. Поэтому только на время ладожского ледохода и невского ледостава нужно было бы построить деревянный мост, содержание которого обошлось бы вскоре так же дорого, а время его существования было бы очень непродолжительным.

Каменный мост стал бы украшением города и существовал бы века. Однако лед представляет непреодолимое препятствие такому сооружению. Мост можно было бы предохранить деревянными замороженными ледоходами (*par des bois églacés*), если бы лед не был таким мощным, особенно при ледоходе, и если бы река имела более быстрое течение, чтобы она могла с большей силой преодолевать препятствия.

<sup>5</sup> Так называют арки, высота которых меньше половины расстояния между концами.—  
*Примеч. ред.*

Я беседовал с г. Кулибиным относительно грузоподъемности моста, вертикально построенного, но не смог получить от него удовлетворительного ответа. Он никогда не проводил подобных экспериментов и не особенно доверяет своим собственным оценкам, но он обещал мне провести такие опыты в ближайшее время. Я предоставил ему [Кулибину. — *Н. Р.*] выбор метода, каким он их мог бы провести, и буду иметь честь сообщить Вам о результатах, как только узнаю от него сам...» [1, ф. 40, оп. 1, № 189, л. 5—6 об].

Позже, когда Д. Бернулли, видимо, узнал более подробно о результатах опытов Кулибина, он в своем письме к Фусу 18 марта 1778 г. писал: «... Не могли бы Вы поручить г. Кулибину подтвердить теорию Эйлера подобными опытами, без чего его теория остается верной лишь гипотетически?» [9, с. 677].

Переписка Д. Бернулли с Фусом дает возможность во многом по-новому понять и оценить события, развернувшиеся вокруг испытаний модели и утверждения проектов деревянного одноарочного моста через р. Неву, которые представлял в Петербургскую академию наук Кулибин. Молодой Фус (ему в это время было 22 года) отчетливо выразил в цитированных письмах к своему учителю и покровителю не только личные чувства симпатии к талантливому изобретателю, но и ту атмосферу доброжелательного внимания и поддержки, которая существовала вокруг Кулибина среди ряда академических ученых. Ясно также, что Фус (хотя это и была лишь его вторая техническая экспертиза в Академии наук) хорошо понял основные идеи проекта Кулибина. Однако Фус, видимо, ничего не знал и даже не догадывался о той большой экспериментальной работе, которая была проведена изобретателем и положена в основу его проектов. Мало знал Фус и о том плане работ по постройке моста, который был разработан Кулибиным.

В своих письмах Фус подтверждает, что правило пересчета грузоподъемности моста с модели на конструкцию было независимо указано Л. Эйлером и И. П. Кулибиным. Это свидетельство особенно важно, так как в качестве помощника Эйлера Фус постоянно участвовал в трудах великого ученого.

Представляют интерес и высказывания Фуса об обстановке, в которой производились испытания модели де Рибаса и Кулибина. Проектов моста через Б. Неву было так много, «что это предприятие стало почти предметом насмешек», пишет Фус своему корреспонденту. Однако и при этих обстоятельствах Фус выделяет проект Кулибина и подчеркивает свою симпатию и внимание к проекту и его творцу.

Очень важными для оценки последующих событий являются высказывания Фуса о том, что в Академии наук никто и не думает об осуществлении проекта Кулибина, о явном предпочтении, которое отдается проектам каменных мостов (что нашло свое выражение в правительственных заказах на проекты каменных мостов в Петербурге, которые были разработаны крупнейшими архитекторами и мостостроителями тех дней Перроне, Фламани-Миноцци).

Важными также являются экономические соображения в письмах Фуса к Д. Бернулли. Основываясь на неверных представлениях о высоте моста, которые разделяли и некоторые его современники, он полагал, что мостом будут пользоваться только на протяжении тех двух месяцев

в году, когда на реке будет господствовать ледоход и ледостав. Причину такого положения он усматривал в высоте моста. Между тем, как теперь установлено, мост по проекту Кулибина должен был иметь подъем, обычный для мостов с подвесной проезжей частью («ездой по низу») [10, с. 216].

Отличной от взглядов ряда современников была оценка Фусом архитектурного оформления моста Кулибина. Он считал его вполне удовлетворительным, похожим по архитектуре на каменный мост.

Любопытна и оценка трудов И. П. Кулибина со стороны Д. Бернулли, который сразу понял, что за выводами и заключениями изобретателя стоит большая экспериментальная работа, и просил Фуса расспросить о ней самого механика. Получив нужные ему сведения, швейцарский ученый предлагает Кулибину проверить теорию Эйлера опытным путем. Такое предложение со стороны Бернулли являлось полным признанием заслуг и таланта Кулибина.

\* \* \*

Хотя Л. Эйлер, как правило, не вел экспериментальных работ, но у него были встречи с Кулибиным и в связи с созданием новых научных приборов и инструментов.

Кулибин, назначенный руководителем академических инструментальных мастерских, благодаря своему опыту (в Нижнем Новгороде он самостоятельно сконструировал в 1764—1766 гг. зеркальный отражательный телескоп, микроскоп и электрическую машину) и опираясь на хорошо подготовленных академических мастеров (И. И. Беляева, И. Г. Шершневого, В. Васильева, З. Воронина), занял видное место в истории русской инструментальной оптики XVIII в. [11].

Вскоре после прихода в академические мастерские Кулибин организовал изготовление новых шлифовальных форм, служивших для обработки стекол различных оптических приборов. Он писал Академической комиссии (консультативному органу при директоре Академии), что приступает к изготовлению «для точения и полирования стекол и металлических зеркал нескольких пар форм разной величины, набирая от линии до дюйма, от дюйма до фута, от фута до нескольких футов, прибавляя по несколько одна другой больше, чрез которые можно было бы делать микроскопы солнечные и сложные разных препорций, зрительные трубы, разной величины телескопы и прочие зрительные стекла разных фокусов» [1, ф. 3, оп. 7, № 36, л. 2—4].

Работая совместно со старейшим оптиком Академии наук И. И. Беляевым, Кулибин сумел поднять работу оптической мастерской на высокий уровень.

Мастерская могла не только выполнять заказы академических ученых на сложные оптические приборы, но изготовляла их и по заказам посторонних лиц. При этом Кулибин, как свидетельствуют многочисленные чертежи и заметки, хранящиеся в его личном архиве, уделял много внимания оборудованию оптической мастерской новыми станками и инструментарием [2, с. 378—428, рис. 108—140].

Среди чертежей Кулибина находятся и три рисунка микроскопов. Первый из них представляет собой типичный контур тубуса микроскопа



Кёффа. Второй рисунок воспроизводит схему пятилинзового микроскопа с двояковогнутой линзой, помещенной между коллективом и двухлинзовым окуляром. По мнению известного историка микроскопов С. Л. Соболя, «такая линза должна несколько увеличивать изображение без отодвигания окуляра от объектива, т. е. делать излишним удлинение тубуса... Кулибин, очевидно, преследовал другую цель: компенсировать то уменьшение изображения, которое вызывается коллективом. Если это так, то это представляет его оригинальную идею... Вполне вероятно, что Кулибин самостоятельно пришел к этой идее, которая впоследствии, начиная с 20—30-х годов XIX в., получила широкое распространение в ахроматических микроскопах» [12, с. 325].

Таким образом, ясно, что одной из сторон изобретательской деятельности Кулибина было конструирование новых систем микроскопов.

Много сил Кулибин отдал и разработке технологии производства оптического стекла [13, с. 93—95].

Со своей стороны Л. Эйлер, который уделял большое внимание теоретическим проблемам оптики, также обращался к практическим вопросам оплотехники. Одной из важнейших его работ в этом направлении была попытка создания ахроматического микроскопа. Идея от исследований Ньютона, направленных на изучение закона дисперсии, Эйлер стремился установить закономерность, дающую возможность так сочетать две линзы, чтобы освободить изображение от хроматической аберрации. С этой целью он даже предложил свою собственную формулу. Эти исследования Эйлера послужили исходной точкой для работ английского оптика Дж. Доллонда, который, не принимая формулу Эйлера, задался целью проверить, не даст ли сочетание линз из кронгласа и флинтгласа ахроматический эффект. Работы Доллонда сопровождалась полным успехом, после чего Л. Эйлер рассчитал ряд оптических систем ахроматических телескопов и микроскопов.

Новая встреча Эйлера и Кулибина произошла при работе по созданию ахроматического микроскопа.

Среди материалов ЛО Архива Академии наук СССР, освещающих деятельность Кулибина в качестве руководителя мастерских Петербургской академии наук, привлекает внимание группа документов, являющихся отчетами о деятельности мастерских за 1771 и последующие годы [2, с. 134, 481—492]. В этих отчетах отмечается весь последовательный ход работы по созданию ахроматического микроскопа Эйлера.

В рапорте Кулибина от 8 января 1773 г. о работах, которые велись в декабре 1772 г., находится первое упоминание об этой работе. «...По присланной копии с комисской резолюции и по наставлению г. профессора Леонарда Эйлера для делания нового манера микроскопа восемь пар медных лекал для точения медных форм делается...» В январе 1773 г. было начато и изготовление самих медных форм для «точения стекол». Для изготовления линз к микроскопу невозможно было использовать готовые, обычные формы, которые имелись в мастерской, а нужно было выточить специальные формы нужных радиусов кривизны. Эта работа была закончена в марте 1773 г. Изготовлено было восемь пар форм, что соответствовало оптике микроскопа Эйлера [12, с. 309—320].

С конца марта 1773 г. «зачаты точить стекла», видимо, первоначально кронгласовые, а в апреле и мае — флинтгласовые. С апреля по июнь

включительно изготовлялась для «нового микроскопа... медная с прибором микроскопная трубка», т. е. тубус со всеми его частями. В июне было изготовлено учеником И. Г. Шершневым вогнутое зеркало «для преломления лучей», которое в августе было «подведено ртутью» мастером Беляевым. Изготовление флинтгласовых линз было начато в июле 1773 г.: «учеником Шершневым по наставлению г. профессора Леонарда Эйлера нового манера к микроскопу из флинтовых стекол двух материй десять стекол полируется». В рапорте от 3 сентября 1773 г. Кулибин писал, что «учеником Шершневым ко оному ж микроскопу из флинтовой материи стекла дополированы...»

Затем в работах по изготовлению микроскопа Эйлера наступил перерыв до мая 1774 г.; в отчетах за май и сентябрь имеются сведения, что «по наставлению г. профессора Леонарда Эйлера нового манера к сложному микроскопу медный прибор делается». Видимо, под «медным прибором» имелся в виду штатив микроскопа со столиком и другими частями. С октября 1774 г. по январь 1775 г. включительно в отчетах Кулибина нет никаких сведений о работах над микроскопом Эйлера и лишь в отчете за февраль 1775 г. сообщается, что «нового манера микроскоп» находится в полировке. В марте 1775 г. работа была полностью закончена и в начале апреля Кулибин сообщил Академической комиссии, что сложный микроскоп выполирован и отлакирован.

Отчеты Кулибина свидетельствуют, что основные работы по изготовлению микроскопа Эйлера выполнял Шершневы, который был помощником изобретателя еще в Нижнем Новгороде. Конечно, он был лишь исполнителем указаний Кулибина, руководившего всей работой. По мнению С. Л. Соболя [12, с. 328], Кулибину принадлежала идея устройства тубуса этого микроскопа, который имел много новых своеобразных черт.

Таким образом, ахроматический микроскоп Эйлера — этот новейший в то время научный прибор — был построен при участии и под руководством Кулибина.

\* \* \*

Большая Нева и ее дельта не могли не привлекать внимание не только путешественников, художников, писателей и поэтов, но ученых и техников-изобретателей. Действительно, почти с момента основания Петербургской академии наук ее ученые пытались изучать могучую и исключительно своеобразную реку, протекавшую в самом центре молодой столицы России. Академики-естествоиспытатели подвергали анализу ее воду, вели систематические многолетние наблюдения за ее уровнем и скоростью течения, пытались понять сущность и причины особенностей водного режима и тех грозных наводнений, которые иногда ставили под угрозу самое существование города. Многочисленные техники-изобретатели часто обращались к составлению проектов постоянных переправ через Большую Неву.

Л. Эйлер, который в Берлине постоянно занимался рассмотрением различных технических проектов (в том числе и гидротехнических, например обследованием нивелирования Финов-канала между реками Хафелем и Одером), в Петербурге также принимал участие в работах по изучению

водного режима Большой Невы. В этих работах ему постоянно помогали его сотрудники и ученики — Лексель, Фус, Головин [3, с. 477, 480]<sup>6</sup>.

21 августа 1780 г. директор Академии наук С. Г. Домашнев приказал составить Комиссию для определения уровня и скорости течения Невы. В состав Комиссии были включены Л. Ю. Крафт, Н. И. Фус и М. Е. Головин, а секретарем назначен И. А. Эйлер. Комиссия, как отмечалось в протоколе, должна была работать при консультациях и под руководством Л. Эйлера [3, с. 484]. Можно думать, что организация этой Комиссии производилась по требованию какого-то правительственного учреждения (может быть, и двора императрицы).

Через неделю Комиссия могла сообщить свое мнение в рапорте на имя Домашнева [3, с. 486—487]. В нем указывалось, что Комиссия собралась 26 августа 1780 г. и «было решено по общему согласию сообщить следующие размышления и предложения:

1. Уровень воды и скорость течения Невы должны наблюдаться и устанавливаться раздельно...» Комиссия далее предупреждала: «Познание уровня реки — работа продолжительная, трудная и хлопотливая...», — и констатировала, что лучшим временем года для проведения такой работы является зима, а для выполнения таких работ нужны хорошие астрономические инструменты. Затем подчеркивалась необходимость большой точности в установке точек наблюдения и учета влияния рефракции на точность наблюдений.

«Скорость течения реки меняется день ото дня. Она находится в зависимости от направления и силы ветра...», — отмечалось во втором пункте рапорта Комиссии. Далее обращалось внимание на большое значение, которое имеют для определения скорости течения реки конфигурация берегов и внутренние силы самого течения. Отмечалось и то значение, которое имеет для точности наблюдений установление расстояния от берега и глубины реки в точке наблюдения, а также учет силы и направления ветра и ряда других факторов. Также отмечалось, что лучшим временем для наблюдений будет зима, которая позволяет наблюдать все отмеченные явления с поверхности ледяного покрова.

Таким образом, Комиссия Эйлера составила подробную инструкцию, очертившую круг деятельности тех лиц, которым предстояло наблюдать и изучать уровень и скорость течения Невы. Сама же Комиссия от проведения наблюдений, как можно думать, уклонилась.

С какой целью и кому из близких к правительству Екатерины II лиц или учреждений столь экстренно понадобились эти сведения? Можно предполагать, что такой интерес мог быть вызван двумя причинами: 1) подготовкой к конкурсу на улучшение конструкции речных судов, который был объявлен правительством в 1781 г., или 2) известиями о работах Кулибина по конструированию его «машинного водоходного судна», которые он проводил в то время.

Свои работы по постройке и испытаниям «машинных судов» Кулибин вел на арендованном им участке земли на берегу Невы, «по Шлиссельбургской дороге, за Славянкой рекой». Эти работы Кулибин, естественно, не рекламировал, и данных о них до нас почти не дошло. Спустя почти

<sup>6</sup> Наблюдения за водным режимом Невы вели и другие академики (П. С. Паллас, Л. Ю. Крафт).

полвека его сын С. И. Кулибин в 1832 г. писал: «Сначала делал маленькие опыты, потом сделал опыт на небольшом ялике, но чтобы утвердиться в настоящем успешном действии оной, он купил тихвинскую лодку [баржу. — *Н. Р.*], которая поднимала груза до 4000 пудов, и на сей лодке сделал он первый настоящий опыт. Все сие стоило ему более 7000 рублей. Испытавши свою машину без свидетелей и уверившись в несомненной пользе, доложил князю Потемкину, который довел сие изобретение до сведения государыни императрицы, вследствие чего последовало высочайшее повеление Адмиралтейской коллегии свидетельствовать оное в настоящем виде» [1, ф. 296, оп. 1, д. 163, л. 1—2].

Итогом многолетнего напряженного труда изобретателя было его «машинное водоходное судно», в котором тяга бурлаков была заменена работой машины, действовавшей силой течения реки.

Важно отметить, что в этой работе И. П. Кулибин использовал опыт и наблюдения, приобретенные во время конструирования переправ через Неву [2, с. 179—180, 224—225]. В частности, он производил измерения «силы речного стремления» с помощью сконструированного им самим простого прибора.

8 ноября 1782 г. на Неве были проведены испытания кулибинского «водохода». Эти испытания проводились особой правительственной комиссией, в состав которой входили, кроме членов Адмиралтейств-коллегии, и видные сановники Российской империи. Испытания, по мнению Комиссии, прошли успешно, и 10 ноября 1782 г. было объявлено о выдаче Кулибину 5000 рублей ассигнациями в качестве премии за построенное им судно.

Необходимо отметить, что Академия наук не принимала никакого участия в проведении этих испытаний. Однако Л. Эйлер, который, видимо, внимательно присматривался ко всем предложениям, связанным как с именем Кулибина, так и с постоянно интересовавшими его вопросами кораблестроения, быстро откликнулся на результаты испытаний кулибинского машинного судна.

28 апреля 1783 г. на заседании Конференции Академии наук было принято решение о включении в физико-математический раздел первой части научного журнала Академии за 1780 г. (академический журнал, как и другие издания Академии, печатался с большим опозданием) трех отобранных сочинений Л. Эйлера и среди них статьи об использовании силы течения реки для движения судов, идущих против течения [3, с. 668]. Эта работа Эйлера [14] была несомненно вызвана к жизни кулибинским «водоходом».

В своей статье Эйлер подверг анализу работу установленного на судне двигателя, приводимого в действие течением реки. Результаты анализа были отрицательными. Академик С. Е. Гурьев, который в 1805 г. реферировал содержание этой статьи [15], писал: «§ 17... И тогда судно против течения реки будет идти со скоростью 0,0460, которая равняется почти двадцать второй части речной скорости... § 18. Что касается до практического употребления таковых машин, то мы по справедливости сомневаемся, чтобы когда-либо таковая машина могла быть в употреблении. Ибо так как приуготовление оной немалых требует издержек, то лучше всего употреблять к тому людей, без коих суда никак не могут обойтись, а наипаче, когда таковое действие от довольно посредственного числа

людей может быть исполнено. Но между тем, несмотря на то, самый вопрос кажется достоин того, чтобы решение его выведено было из начал механики» [15, с. 104—105].

Кулибин, которому, возможно, не были известны выводы Л. Эйлера, продолжал работу по улучшению конструкции своего водоходного судна и методов его эксплуатации почти до последних дней своей жизни. Он внес и здесь немало нового и самобытного, но устранить основные пороки старого вододействующего двигателя, конечно, не мог. Водяные колеса, хотя во многом и усовершенствованные Кулибиным, были недостаточно эффективными и надежными для применения их на водоходных судах. Ведь, помимо присущего им крайне малого коэффициента полезного действия, они целиком зависели от силы речного течения, непостоянство которого наблюдал и отмечал Л. Эйлер. В силу этого «водоходы» не могли применяться для повышения грузоподъемности и скорости движения речных судов: они были неконкурентоспособны даже с судами, идущими бурлацкой тягой. Изобретатель пережил в конце своей жизни тяжелую драму, связанную с крушением надежд на применение «водоходов» в речном транспорте.

Однако необходимо отметить, что, живя в период перехода от водяного колеса к теплоэнергетике, Кулибин немало внимания посвятил вопросам, связанным с использованием парового двигателя в речном судоходстве. Он был бесспорно пионером парохозяйства в России [2, с. 13, 20, 80].

\* \* \*

В своих творческих исканиях И. П. Кулибин, как и многие изобретатели его времени, постоянно оказывался перед необходимостью применения двигателя. Между тем старые двигатели — водяные колеса и ветряные мельницы — очень часто оказывались непригодными для объектов их работы. И тогда мысли изобретателей в тщетных поисках решения стоящих перед ними задач обращались к вечному двигателю. Обращался к проблеме вечного двигателя и Кулибин. Изобретатель в ряде записок, относящихся к последним годам его жизни, писал, что уже с момента поступления на службу в Петербургскую академию наук он занимался конструированием и постройкой различных «самодвижимых машин» [1, ф. 296, оп. 1, д. 5, л. 2; д. 9, л. 1—2; д. 35, л. 2—3; д. 36, л. 3—4; д. 78, л. 2—4]. Академический механик утверждал, что в 1776 г. он консультировался по этому вопросу с Л. Эйлером и последний якобы ответил ему, что «он сего мнения о произведении таковые машины [вечного двигателя.— *Н. Р.*] в действо никак не опровергает», и сказал, что «может де быть в свое время какому щастливому сделать таковую машину и откроется» [1, ф. 296, оп. 1, № 5, л. 2].

Видимо, на основании этого утверждения первый биограф И. П. Кулибина П. П. Свиныин писал: «Любопытно заметить, что Кулибин поощрен был к сему открытию знаменитым математиком Л. Эйлером, который на вопрос его, какого он мнения насчет вечного движения, отвечал, что он почитает его существующим в природе и думает, что оно обретется каким-либо счастливым образом, подобно откровениям, почитаемым до того невозможными» [16, с. 37]. После Свиныина это утверждение было повторено во многих биографиях Кулибина. Между тем известно, что

Петербургская академия наук, где Эйлеру и его школе принадлежало решающее слово в этом вопросе, в последней четверти XVIII в. не только перестала обсуждать проекты вечного двигателя, но и прекратила принимать их к рассмотрению.

\* \* \*

Рассмотренные выше встречи Л. Эйлера с И. П. Кулибиным дополнялись непосредственным общением с последним учеников и сотрудников великого ученого. Ведь мы теперь знаем, что в последние годы жизни творчество Л. Эйлера проходило в тесном содружестве с теми молодыми учеными, которые группировались вокруг него и образовали в Академии наук его школу. Общение Кулибина с главой этой школы и ее членами оставило заметный след в истории научной и технической мысли в нашей стране.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. ЛО Архива АН СССР.
2. Рукописные материалы И. П. Кулибина в Архиве АН СССР: Науч. описание с прил. текстов и чертежей. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1953.
3. Протоколы заседаний Конференции имп. Академии наук с 1725 по 1803 г. СПб., 1900. Т. 3.
4. *Euler L. Regula facilis pro dijudicanda firmitate pontis aliusve corporis similis ex cognita firmitate moduli // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1775). 1776. Vol. 20. P. 271—285; Opera II-17.*
5. [Эйлер Л.] Легкое правило, каким образом из модели деревянного моста или подобной бременоносной машины познавать, можно ли то же сделать и в большом // Собрание сочинений, выбранных из Месяцословов на разные годы. СПб., 1792. Ч. 8. С. 138—140<sup>7</sup>.
6. *Раскин Н. М.* Вопросы техники у Эйлера // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 499—556.
7. *Лысенко В. И.* Николай Иванович Фусс. М.: Наука, 1975.
8. *Ожигова Е. П.* О переписке Даниила Бернулли с Николаем Фуссом // *Вопр. истории естествозн. и техн.* 1981. Вып. 1. С. 108—115.
9. *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle.* SPb., 1843. Т. 2.
10. *Якубовский Б. В.* Проекты мостов И. П. Кулибина. 1. Деревянный арочный мост через р. Неву // *Архив истории науки и техники.* 1936. Вып. 8. С. 191—252.
11. *Ченакал В. Л.* Оптика в дореволюционной России // *Тр. Ин-та истории естествозн. АН СССР.* 1947. Т. 1. С. 121—167.
12. *Соболь С. Л.* История микроскопа и микроскопических исследований в России XVIII в. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949.
13. *Раскин Н. М.* И. П. Кулибин. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962.
14. *De vi fluminis ad naves sursum trahendas applicanda // Acta Acad. sci. Petrop. (1780 : 1). 1783. P. 119—131; Opera II-21.*
15. О силе течения реки, приложенной к судам, вверх по той реке идущим. Из сочинений знаменитого Эйлера, сообщено академиком Гурьевым // *Технол. журн.* 1805. Т. 2, ч. 2. С. 89—113.
16. *Свиньин П. П.* Жизнь русского механика И. П. Кулибина и его изобретения. СПб., 1819.

<sup>7</sup> Первоначально статья опубликована в «Месяцослове с наставлениями на 1776 год» (СПб., б. г., б. п.).— *Примеч. ред.*

# ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР И ИСТОРИЯ ОДНОЙ МУЗЫКАЛЬНО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИДЕИ

Е. В. ГЕРЦМАН

В рамках всего научного наследия Леонарда Эйлера музыкально-теоретические работы занимают довольно скромное место. К ним относятся трактат «Опыт новой теории музыки, ясно изложенной на надежнейших принципах гармонии», опубликованный в 1739 г. [7], три сравнительно небольшие статьи «Предположение о причине некоторых диссонансов...» (1766) [8], «О подлинном характере современной музыки (1766) [9], «Об истинных принципах гармонии...» (1774) [10], а также ряд писем (II—VIII) из знаменитых «Писем к одной немецкой принцессе» (1768) [11, т. 1]. Даты публикаций этих сочинений показывают, что на протяжении почти всей своей научной деятельности Эйлер много раз обращался к изучению музыки. Однако участь его музыкально-теоретических работ оказалась не столь блестящей, как судьба трудов по естественным наукам. Некоторые из них вовсе забыты, а другие известны узкому кругу специалистов лишь по названию или, в лучшем случае, по своим основным положениям.

Для такого отношения потомков к музыковедческим трудам Эйлера были многочисленные причины. Главные из них связаны с активным внедрением в европейское музыкознание темперации и с всеобщим распространением теоретической концепции Жана Филиппа Рамо.

Совершенно очевидно, что проникновение равномерной темперации в европейскую музыку было вызвано особенностями исторического этапа музыкального мышления. Эйлер тоже понимал, что благодаря равенству всех тонов и всех полутонов при равномерной темперации «легко (non incummode) можно спеть всякую мелодию выше или ниже на полутон, тон или любой (другой) интервал» [7, с. 150]. Но он считал, что такая темперация неприемлема «из-за отсутствия разумного отношения (rationem rationalem) между звуками, исключая октаву» [7, с. 149].

Судя по воззрениям Эйлера, он не мог согласиться с темперацией, так как она унифицировала интервальные величины и одновременно с некоторыми удобствами обедняла интонационное разнообразие музицирования. Поэтому он строил свою систему, не учитывая равномерную темперацию, принятую абсолютным большинством музыкальных теоретиков чуть ли не с конца XVIII в. Таким образом его работы шли «против течения», и это не могло способствовать их популяризации. Кроме того, его взгляды часто отличались от точки зрения Рамо, теория которого начала в то время свое победное шествие по Европе. Если же говорить точнее, то музыкант Рамо и математик Эйлер пользовались «различными языками», что также не способствовало их взаимопониманию (сохранилось по одному письму, которыми обменялись Рамо и Эйлер в 1752 г. [19, с. 151—152; 25, с. 481]; об этих письмах см. [12, 14]). Постепенно же укреплявшийся авторитет Рамо оттеснял идеи Эйлера.

# TENTAMEN NOVAE THEORIAE MUSICAE

EX  
CERTISSIMIS  
HARMONIAE PRINCIPIIS  
DILUCIDE EXPOSITAE.

APUD  
LEONHARDO EYLERO.



ΠΕΤΡΟΠΟΛΙ, EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.  
MDCCLXXXIX.

*Титульный лист «Опыта новой теории музыки» Л. Эйлера 1739 г.*

представлений. Но вместе с тем отдельные факты говорят о том, что зачастую именно в его работах можно заметить преемственность в развитии прогрессивных тенденций европейского музыкознания, а в некоторых случаях — и первое изложение плодотворных для его развития идей, не говоря о том, что ряд вопросов решался им оригинально и по-новому. Для подтверждения этого можно обратиться хотя бы к одной из небольших музыкально-теоретических работ Эйлера, например к статье «О подлинном характере современной музыки» [9]. Одно из ее положений — безусловно новая и прогрессивная для своего времени мысль, что музыкальный диссонанс — явление не статичное, а исторически развивающееся в процессе эволюции музыкального искусства.

Свою мысль ученый аргументирует сопоставлением созвучий «древней» и «новой» музыки (цит. здесь и далее по «Opera omnia» [9, с. 516—518]). Вспомним, что в музыкознании эта мысль стала постепенно утверждаться значительно позже, лишь на рубеже XIX и XX вв. [3, с. 1500—1516]. Историкам музыкальной педагогики еще предстоит по достоинству оценить практические рекомендации Эйлера по сольфеджированию нетемперированного звукоряда, изложенные в указанной работе [9, с. 530—533]. Здесь же Эйлер приводит доказательства того, что в музыкальной практике стали применяться интервалы, выражаемые числом 7. Причем он стремится обосновать закономерность их введения [9, с. 527—529].

Не следует также забывать об отрицательном отношении многих ведущих теоретиков последних двух столетий к применению математики в музыкознании. Ведь именно в этот период осуществляются серьезные и удачные попытки становления фундаментальных музыкально-теоретических методов анализа звучащей музыки. Они радикально отличались от прежних, частично использовавших простейшие математические категории (дроби и пропорции) для выражения интервалов и метроритмических отношений. С этой точки зрения математический аппарат, применявшийся Эйлером, также входил в конфликт с общепринятым направлением.

Все эти обстоятельства сыграли немаловажную роль для судьбы музыкально-теоретических сочинений Эйлера. Но сейчас уже постепенно становится ясно, что во многом она была несправедливой. Конечно, Эйлер нередко находился в плену сомнительных, с точки зрения музыкальной логики,



Как известно, впервые в пользу «септимальных» интервалов высказался М. Мерсенн. Затем эта мысль прозвучала у Декарта и Лейбница, а Х. Гюйгенс даже разработал 31-звуковую темперацию, содержащую такие интервалы [37]. Это были ученые, понимавшие направленность расширения средств музыкальной выразительности и способствовавшие активизации теории в их изучении. В XVIII в. первым к ним присоединился Эйлер [7, с. 118]. Позднее примеру Эйлера последовали Дж. Тартини, Ж. Серр, Ж. Ж. Руссо и другие. Таким образом, среди ученых XVIII в. Эйлер и в этом вопросе стоял на передовых позициях.

К многообещающим идеям Эйлера, высказанным в рассматриваемой статье, следует отнести и ту, которую условно можно было бы назвать «теорией слуховой замены». Ее суть вкратце сводится к следующему. При восприятии интервалов и аккордов, звуковые отношения которых выражаются сложными числовыми пропорциями, затрудняющими их восприятие, слух «подставляет вместо одного или двух звуков другие, лишь немного отличающиеся от них и выраженные такими числами, которые находятся между собой в довольно простых отношениях» [9, с. 525]. Например, при восприятии аккорда  $D - d - f - h$ , звуковые отношения которого выражаются числами 27, 54, 64, 90, слух, по мнению Эйлера, «подставляет» вместо звука  $f = 64$  другой, более низкий звук  $f = 63$ , «чтобы иметь числа 27 : 54 : 63 : 90, которые делятся на 9». В этом случае «звуки будут находиться между собой в том же отношении, что и числа 3, 6, 7, 10, которые конечно достаточно малы и оказывают приятное действие на слух» [9, с. 526].

Эту же мысль Эйлер пропагандировал в статье «Предположение о причине некоторых диссонансов...», утверждая, что «необходимо различать отношения, которые в данный момент замечает наш слух, от тех отношений, которые заключаются в звуках, выражаемых числами» [8, с. 511].

Эйлер считал, что при равномерной темперации, допустим, квинта может выражаться различными иррациональными пропорциями (даже  $\sqrt[12]{27}$ ), незначительно отличающимися от простейшей квинтовой пропорции  $3/2$ . И хотя инструмент настроен по равномерной темперации, слух все равно воспринимает этот интервал как  $3/2$ . Эйлер был убежден, что «воспринимаемая пропорция проще, чем действительная, так как их разница настолько мала, что не ощущается. Орган слуха привык принимать за простую пропорцию все пропорции, имеющие незначительные различия» [8, с. 512]. Не является ли «теория слуховой замены» предвосхищением идеи о «зонной природе слуха» [14]?

В самом деле, обе концепции предполагают наличие конкретных интервальных разновидностей (конечно, в определенных пределах), которые в конечном счете воспринимаются слухом как одна и та же интервальная форма. Представляется, что для выявления вклада Эйлера в музыковедение это сопоставление достаточно знаменательно.

Сюда же необходимо добавить, что Эйлер самостоятельно один из первых пришел к мысли о необходимости использовать логарифмы в музыкальной теории [7, с. 117] (первым применил «музыкальные логарифмы» Жуан Карамуэль де Лобковиц в 1670 г. в трактате «Новая наука» (Mathesis nova) [1, с. 3]. Перспективность этого метода показало дальнейшее развитие музыкальной акустики, когда в конце XIX в. стали применять такую единицу измерения интервалов, как «цент», введенную

А. Эллисом (в «Дополнении» к его английскому переводу трактата Г. Гельмгольца [16, с. 446—451]).

К оригинальным идеям Эйлера нужно отнести и предложенный им метод математического определения «степени приятности» (*gradus suavitatis*) интервалов и созвучий, а по сути дела — способ определения консонансов и диссонансов. Хорошо известно, что сама проблема консонанса и диссонанса издавна занимала музыкальных теоретиков. В чем их различие? Что следует считать консонансом, а что — диссонансом? Каковы их критерии? Как определить их степень в различных звучаниях?

Развитие музыкального мышления и исторические изменения музыкального языка постоянно ставили перед музыковедением задачи, связанные с оценкой новых средств художественной выразительности, когда новые и необычные звуковые формы часто воспринимались как диссонансирующие. Вся история музыкальной критики свидетельствует о том, что композиторы-новаторы всех времен обвинялись современниками в «злоупотреблении диссонансами», в «неверном использовании диссонансов», в «пренебрежении к консонансам» и т. д. Поэтому проблема «консонанс—диссонанс» всегда интересовала науку о музыке. Любая музыкально-теоретическая концепция, претендовавшая на серьезность, должна была дать четкое и ясное определение консонанса и диссонанса. Это было делом престижа. Следовательно, и для Эйлера методология определения «степени приятности» была вопросом большой важности. Но для того, чтобы полнее понять его достижения в этой области, необходимо вначале обратиться к далекому прошлому, когда появились первые попытки математического различения консонансов и диссонансов.

Дело в том, что в абсолютном большинстве случаев при подразделении звучаний на консонансирующие и диссонансирующие в науке о музыке использовался слишком субъективный критерий индивидуального слухового восприятия. Понимая ненадежность такого подхода, некоторые теоретики пытались решить эту проблему с помощью математики. В 6-й главе первой книги «Гармоник» Клавдия Птолемея (I—II вв.) излагается идея пифагорейцев о вычислении степени консонантности интервалов, выражающихся различными числовыми пропорциями (2 : 1 — октава; 3 : 2 — квинта; 4 : 3 — кварта), отражающими соответствующие деления струны монохорда.

Согласно Птолемею, пифагорейцы «ради сохранения пропорциональности (*ἰσότητος*) отношений отнимают единицу от каждого из обоих создающих их чисел, а оставшиеся числа используют для определения коэффициентов (*τῶν ἀνομίῶν*). Отношения, при которых получаются меньшие (коэффициенты), они называют более консонантными (*συμφωνοτέρας*)» [4, с. 14]. Комментатор Птолемея Порфирий так поясняет используемую здесь пифагорейскую терминологию: «Вычитаемые единицы они называли одинаковыми (*ἴμοια*), а величины, оставшиеся после вычитания, неодинаковыми (*ἀνόμοια*)» [5, с. 108]. (Поэтому я и позволил себе перевести *τὰ ἀνόμοια* как «коэффициенты».)

Значит, пифагорейцы вычитали единицу из обоих чисел каждой пропорции, а затем складывали получающиеся остатки. Чем меньше был результат, тем более консонантным считался интервал. Как пишет Порфирий, «они говорят, что интервалы, при которых получаются наименьшие коэффициенты (*τὰ ἀνόμοια ἐλάττωτα*), более консонантны, чем другие»

[5, с. 108]. В соответствии с таким методом октава имеет наибольшую степень консонантности — 1, дуодецима (3 : 1) — 2, двойная октава (4 : 1) и квинта — 3, кварта — 5.

Однако, по мнению самого Птолемея, такой способ «весьма смехотворен». С его точки зрения у пифагорейцев возникает «трудность» прежде всего из-за того, что они «относят к консонансам только [интервалы] эпиморных и многократных отношений» [4, с. 13]. Поэтому «совершенно очевидный консонанс ундецимы не соответствует правилу, приспособленному ими для консонансов», так как ундецима (8 : 3) — «не эпиморий, не многократное отношение». Свое мнение Птолемей аргументирует следующим образом. Созвучие ундецимы состоит из октавы и кварты. Но если консонанс октавы, состоящий из неразличимых по значению (*κατά τῆν ὁμοειδίαν*) звуков, присоединяется к какому-либо из других [интервалов], то обязательно сохраняется вид того [интервала, к которому он был присоединен]... Из этого непременно следует: если квинта — консонанс, то октава и квинта — [также] консонанс; если же кварта — консонанс, то октава и кварта (т. е. ундецима) — также консонанс» [4, с. 13].

Возражение Птолемея вызывает и то обстоятельство, что согласно пифагорейскому способу определения консонантности дуодецима (3 : 1) получает коэффициент 2, а квинта (3 : 2) и двойная октава (4 : 1) — 3, тогда как, по его словам, «совершенно очевидно, что каждый из них весьма естественно консонантнее (*συμφωνωτέρου*) предлагаемой дуодецимы. Ведь квинта проще, менее сложна и как бы [созвучие] более чистого консонанса, чем дуодецима. Двойная октава так относится к дуодециме, т. е. 4 : 1 [так относится] к 3 : 1, как единичная октава к единичной квинте, т. е. как 2 : 1 к 3 : 2... Поэтому октава на столько консонантнее квинты, на сколько двойная октава консонантнее дуодецимы» [4, с. 14—15].

Кроме того, Птолемей обнаруживает в концепции пифагорейцев и другой недостаток, она не учитывает, что одни и те же интервалы могут выражаться отношениями различных чисел, а не только наименьшими: «Ведь отношение остается тем же (*ἴδιος*) не только при создающих его малых числах, но и вообще при всех числах, находящихся друг с другом в подобных отношениях, так как при таких [отношениях] сохраняется подобие (*τὸ παραπλήσιον*)» [4, с. 14]. Следовательно, не при всех пропорциональных выражениях одних и тех же интервалов коэффициенты их консонантности останутся неизменными.

Таким образом, критикуя пифагорейцев, Птолемей основывается на двух аргументах: музыкально-теоретическом и математическом. Первый из них связан со слуховым восприятием, или, как пишет сам автор, «согласно очевидному опыту» (*ἄπο τῆς ἐναργοῦς πείρας*). Специфика античного музыкального мышления предполагала ладовую идентичность звуков октавы в том случае, когда она была образована однофункциональными звуками различных тетрахордов [17, с. 219]. Увеличение любого интервала на величину такой октавы не нарушало особенностей его восприятия. Значит, в тексте Птолемея речь идет не о тождественности слуховой реакции на такие интервалы, как кварта и ундецима, квинта и дуодецима (слух любого музыканта без труда фиксирует разницу между ними). Птолемей говорит о неизменности ладовой сути кварты и квинты после их увеличения на октаву. Именно поэтому ундецима и дуодецима остаются в классе консонансов.

Математическая сторона этой критики также ясна. Птолемей выступает, во-первых, за то, чтобы выражение консонансов не ограничивалось эпиморными и многократными отношениями, а во-вторых, против пифагорейского определения коэффициента консонантности. Судя по всему, пифагорейцы стремились к одной-единственной цели: показать наибольшую консонантность октавы по сравнению с другими интервалами. Вряд ли Птолемей возражал против этого. Его не удовлетворяла лишь предлагаемая ими методология, не учитывавшая всевозможные пропорциональные выражения консонансов. Ведь та же октава может выражаться не только отношением  $2 : 1$ , но и любым другим, числа которого находятся в аналогичном отношении. Поэтому наименьший пифагорейский коэффициент далеко не всегда будет соответствовать наибольшей консонантности.

Как видно, И. Дюринг был не прав, считая, что птолемеевская критика пифагорейцев исходит от Дидима Александрийского [6, с. 180]. Из текста Порфирия, на который ссылается Дюринг, явно следует, что Дидим либо разделял точку зрения пифагорейцев, либо просто излагал ее: «Некоторые из пифагорейцев, как Архит и Дидим, передают, что для установления отношений консонансов они (т. е. пифагорейцы) сравнивают их между собой...» [5, с. 107]. Поэтому нет никаких оснований не считать самого Птолемея автором этого критического эссе.

Свой собственный метод Птолемей излагает в следующих словах: «Для определения (коэффициента консонантности) представляется более целесообразным, если мы одно и то же число, например 6, подставим ко всем меньшим числам [каждой пропорции] и, отнимая от больших [членов] равное ему (а не пропорциональное), сравним остатки как коэффициенты. При двойном отношении получится 6, при полуторном — 3, при эпитристе — 2 и коэффициенты [окажутся] больше у более консонантных [интервалов]» [4, с. 14]. Значит, Птолемей предлагает вместо меньших членов серии пропорций ввести одно и то же число и его разность с большими членами рассматривать как коэффициент консонантности. В приведенном тексте он явно намекает на знаменитый в античности «гармонический» ряд  $6 : 8 : 9 : 12$ , в котором октава представлена отношением  $12 : 6$ , квинта —  $9 : 6$  и кварта  $8 : 6$ . По птолемеевскому методу коэффициент консонантности октавы равен 6 ( $12 - 6$ ), квинты — 3 ( $9 - 6$ ), кварты — 2 ( $8 - 6$ ).

Несмотря на разницу обоих методов, и у пифагорейцев, и у Птолемея оценка интервалов сходная: октава рассматривается как наиболее консонантное созвучие, затем идет квинта, потом — кварта. Ведь у пифагорейцев наивысшая степень консонантности выражается наименьшим числом, а у Птолемея — наибольшим. В зависимости от этого «перестраиваются» и показатели консонантности других интервалов:

	Пифагорейцы	Птолемей
Октава	1	6
Квинта	3	3
Кварта	5	2

Это говорит о том, что оба метода стремились лишь подвести «математическое обоснование» под естественную реакцию слуха. Вместе с тем совершенно очевидно, что оба способа несостоятельны именно с математической точки зрения. Скорее всего, именно это обстоятельство было основ-

ной причиной того, что исследователи античности почти всегда обходили молчанием птолемеевско-пифагорейский диспут. Достаточно сказать, что даже К. Штумпф, тщательно изучавший античные представления о консонансе, ни словом не упоминает о нем [34, с. 6—8, 55—64]. Чем же объяснить, что такая серьезная математическая школа, как пифагорейская, и такой основательный математик, как Птолемей, допустили очевидное *absurdum in adjecto*?

Дело в том, что в задачу античных ученых не входило выражение степени консонантности абсолютно всех интервалов. Термином *συμφωνία* в античном музыкознании обозначались лишь определенные интервалы: кварта, квинта, октава и их производные (ундецима, дуодецима, двойная октава и т. д.) [22, с. 307—308]. Следовательно, для пифагорейцев было абсолютно безразлично, что согласно их методу диссонансирующая секунда (9 : 8) имела такой же коэффициент консонантности, что и интервал, воплощавший саму идею консонантности, — октава. Ведь секунда не входила в класс двухзвучий, определяемых термином *συμφωνία*.

Аналогичным образом, для Птолемея не имело никакого значения, что «гармоническая» пропорция 6 : 8 : 9 : 12, используемая им при выявлении степени консонантности, не была приспособлена для математического выражения других интервалов, кроме «симфонных», заключенных в пределах октавы. Античной науке важно было распределить по степени консонантности лишь те интервалы, которые рассматривались музыкознанием как «симфонные», и не более. Пифагорейцы критиковались Птолемеем как раз за то, что в вопросе консонантности ундецимы их метод частично противоречил музыкально-теоретическим установкам. Теория же в данном случае зафиксировала нормы музыкальной практики.

Значит, музыкально-теоретическая задача, стоявшая перед пифагорейцами и Птолемеем, первыми была решена частично, а вторым — полностью, хотя с математической стороны оба метода более чем уязвимы. Но любая односторонняя критика античных способов определения степени консонантности только с точки зрения математики (см., например, [24, с. 74]) не способна исторически верно оценить первые попытки науки освоить художественно-эстетические тенденции древнего музыкального искусства.

Средневековье и Возрождение не сохранили свидетельств таких попыток. Они возрождаются через 16 столетий в главном музыкально-теоретическом труде Эйлера «Опыт новой теории музыки...» Причем он не ограничивается выявлением «степени приятности» интервалов и простейших аккордов, а стремится к ее определению в сложных аккордовых последовательностях и в целых музыкальных построениях. Более того, он даже высказывает мысль, что можно определить «степень приятности» всего музыкального произведения, а другими словами, дать математическое выражение художественно-эстетической оценке произведения. При ближайшем знакомстве с эйлеровским методом оказывается, что он представляет собой новый способ определения степени консонантности. Но прежде чем изложить его суть, вкратце напомним отношение Эйлера к дискуссии между Птолемеем и пифагорейцами (к началу XVIII в. уже имелось не только весьма хорошее для своего времени издание «Гармоник» Птолемея [26], но и довольно удачный латинский перевод этого трактата [27]).

В IV книге своего «Опыта» (§ 16—19) Эйлер описывает этот спор, упоминая выступление Птолемея в защиту консонантности ундецимы: «В этом опровержении Птолемея я не нахожу ничего сомнительного (*refutationo nihil reprehendum reperio*), так как следует принимать во внимание не виды отношений, а должна постигаться их простота или сложность». Однако, по мнению Эйлера, доказательство самого Птолемея «не более надежно» (*neque... magis est firmum*), чем метод пифагорейцев. Свое обсуждение позиции александрийского ученого он завершает следующими словами: «Я не считаю, что вообще эта приятность консонансов определяется столь ненадежным отношением (*rationem ...pescariam*)». Небезынтересно отметить, что при описании пифагорейско-птолемеевской дискуссии Эйлер ни словом не упоминает об античных способах определения коэффициента консонантности, а лишь высказывает свою точку зрения в отношении возможностей тех или иных пропорций выражать консонантность или диссонантность.

Метод же самого Эйлера основывается на его воззрениях, согласно которым он объяснял восприятие взаимосвязи звуков: «Мы воспринимаем взаимосвязь двух предлагаемых звуков, если понимаем их отношения как числа, содержащие [их] вибрации в единицу времени (*si intelligamus rationem, quam pulsum eodem tempore editorum numeri inter se habent*)» [7, с. 34]. После этого совершенно естественно следует далеко идущий вывод: «Всякое удовольствие в музыке возникает от постижения отношений, которыми связываются между собой числа». В этом вопросе Эйлер был прямым последователем Лейбница, который считал, что музыка — это «скрытое упражнение в арифметике не умеющей считать души» (*exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi*) [20, с. 240]. Такая точка зрения была распространена в среде ученых. Так, например, старший коллега Эйлера по Петербургской академии Х. Гольдбах также считал, что «музыка — проявление скрытой математики» [18, с. 180]. И Эйлер был убежден, что с увеличением разницы вибрационных движений звуков, составляющих любое созвучие, его консонантность уменьшается. Поэтому простейшим и наиконсонантнейшим созвучием является унисон, так как оба его звука имеют одинаковое число колебаний (1 : 1). Схематически Эйлер представлял унисон двумя рядами точек, расположенных друг против друга:

: : : : : : :

Отсюда он заключил, что унисон — «первая и простейшая для нас степень порядка» (*primum et simplicissimum nobis... gradum ordinis*), а следовательно, он имеет и первую «степень приятности». На том же основании октава (1 : 2) имеет вторую «степень»:

: . : . : . : . :

Затем следовала дуодецима (1 : 3) и двойная октава (1 : 4), которым придавалась одна общая третья «степень приятности»:

: . . : . . : . . : . . : . . : . . :

Свою позицию в этом вопросе Эйлер аргументирует следующим образом. Отношение  $1 : 3$  очень простое, так как «выражено меньшими числами». Отношение же  $1 : 4$  «воспринимается легче, так как состоит из удвоенного двойного отношения и поэтому узнается не намного труднее, чем двойное» (*ideo facilius percipi videtur, quod sit rationis duplae dupla, hincque non multo difficiliter discernatur quam dupla ipsa*) [7, с. 37]. Судя по фразе Эйлера «можно говорить за и против» (*in utramque partem potest disputari*), он понимал спорность своего аргумента, однако не отказался от него. Вслед за дуодецимой и двойной октавой коэффициенты «степени приятности» получают квинта ( $2 : 3$ ), кварта ( $3 : 4$ ), терция ( $4 : 5$ ) и т. д. Далее рассуждения Эйлера шли по такому пути.

Степень консонантности интервалов увеличивается с увеличением знаменателя интервальной дроби:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$  и т. д., что может быть выражено как  $1 : 2^n$ , где степень консонантности  $n + 1$  (во всех случаях Эйлер имел в виду только целые числа, ибо в противном случае получаются иррациональные отношения, которые, по его мнению, недоступны для слухового восприятия). Так как  $1 : 1$  дает первую «степень приятности»,  $1 : 2$  — вторую,  $1 : 3$  — третью,  $1 : 4$  — четвертую и т. д., то, следовательно, отношение  $1 : p$  дает степень  $p$ . Значит,  $1 : 2p$  имеет степень  $m + 1$ , а  $1 : 2^n p$  — степень  $m + n$ . Но  $1 : 2p$  в 2 раза труднее для восприятия, чем  $1 : p$ , и увеличивается только на единицу по сравнению с числом, выражающим степень консонантности последнего отношения. Таким образом, степень консонантности  $1 : pq$  представляется как  $p + q - 1$ . Отсюда понятно, что степень консонантности сложного созвучия является суммой аналогичных степеней составляющих его интервалов. Например, степень консонантности отношения  $1 : pqr$ , состоящего из  $1 : pq$  и  $1 : r$ , индивидуальные степени которых  $p + q - 1$  и  $r$ , будет  $p + q + r - 1$  и т. д.

Для практических операций с выведенными формулами Эйлер рассматривал все числа как состоящие из более простых. Всякое натуральное число  $n$  состоит из простых  $p_1 p_2 p_3 \dots p_m$  и  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_m^{\alpha_m}$ . Например,  $72 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 1$ , где  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 1$ ,  $\alpha_1 = 3$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\alpha_3 = 1$ . Эйлер определяет степень консонантности  $C(n)$  числа  $n$  как

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_m p_m - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m - 1).$$

В нашем примере ( $n = 72$ )  $C(72) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 - (3 + 2 + 1 - 1) = 6 + 6 + 1 - 5 = 8$ . Если известна степень консонантности чисел  $m$  и  $n$ , то  $C(mn) = C(m) + C(n) - 1$ . Например, степень консонантности мажорного трезвучия  $4 : 5 : 6$  ( $4 : 5$  — большая терция,  $5 : 6$  — малая терция) он определяет следующим образом:  $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$ , откуда

$$C(60) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 - (2 + 1 + 1 - 1) = 9.$$

Идею о показателе (exponens) «степени приятности» Эйлер, как уже указывалось, распространяет на различные смысловые уровни звучания и на все музыкальные структуры произведения: «Чтобы музыкальное произведение было приятным, требуется, чтобы были известны показатели отдельных созвучий (*singularum consonantiarum*), во-вторых, показатели аккордовых последовательностей (*consonantiarum successionum*), в-третьих, показатели отдельных периодов (*singularum periodorum*),

в-четвертых, показатели двух последовательных периодов или изменений ладов (*modorum mutationes*), в-пятых, показатель всех периодов, т. е. всего музыкального произведения» [7, с. 94].

Таким образом, для Эйлера всякое музыкальное произведение после соответствующего анализа превращалось в систему коэффициентов, выражающих «степень приятности» музыкального материала. Интересно, что даже лад (*modus*) для него представлялся «не чем иным, как показателем серии аккордов» (*nil aliud sit nisi exponens seriei consonantiarum*) [7, с. 175].

Все это свидетельствует о том, что метод Эйлера знаменует новую историческую ступень в деле «математического освоения» музыкального искусства и не идет ни в какое сравнение со всеми аналогичными опытами прошлого. Через 10 лет после выхода в свет труда Эйлера профессор из Кембриджа Роберт Смит лишь повторил пифагорейский метод определения степени консонантности [33, с. 22].

Абсолютное большинство музыкальных теоретиков Европы восприняло трактат Эйлера критически. Знаменитый И. Маттесон, критикуя «Опыт», вообще выступал против использования всякого математического аппарата при обсуждении вопросов музыки [21, с. 539]. Критиковал Эйлера и издатель «Музыкальной библиотеки» Л. Мицлер [23, с. 328]. И. Шайбе, негативно относясь к любому проникновению математики в музыкальную теорию, саркастически заметил, что «аккорды великого Эйлера... никогда бы не смогли тронуть и взволновать сердца слушателей» [32, с. XVIII]. Среди приверженцев Эйлера можно назвать лишь знаменитого немецкого композитора и теоретика И. Кирнбергера (см. [36, с. LVI]).

В XIX в. продолжают споры вокруг музыкально-математической концепции Эйлера, правда, уже не с такой активностью. Так, Г. Риман писал, что основной труд Эйлера доказал «несостоятельность математики для обоснования музыки» [29, с. 1473] и рассматривал его концепцию как «чрезвычайно вычурное построение» [30, с. 10], называя эйлеровский опыт «предостерегающим примером для всех времен» [31, с. 60]. Такой же точки зрения придерживался и К. Штумпф [35, с. 22]. Однако Ф. Фетис высоко оценил теоретические изыскания Эйлера [13, с. 90]. Благосклонно отнесся к ним и Г. Гельмгольц, считавший, что в построениях Эйлера «множество частных выходят внешне поразительно верно» [15, с. 326, 327].

В XX в. также нет единой оценки эйлеровского вклада в теорию музыки. Одни его начисто отвергают [38, с. 1616—1617], другие же видят в его исследованиях рациональную основу для развития подлинно научной теории музыки [36, с. LIII — LIV]. Вне сомнения, на такую оценку оказало влияние восприятие всех эйлеровских музыкально-теоретических идей. Но также совершенно очевидно, что его метод определения степени консонантности был решающим в этом вопросе. Столь бурное отношение к нему естественно, так как сама мысль о математическом выражении «степени приятности» музыкальных созвучий и последовательностей вторгается в те сложнейшие проблемы художественного мышления, многие из которых до сих пор остаются нерешенными.

Современное толкование математической стороны эйлеровского метода дал Рихард Буш [2, с. 43—44]. Что же касается его музыкально-теоретических аспектов, то нужно отметить, что по сравнению с пифагорейцами и Птолемеем Эйлер расширил сферу определения консонантности. Если



античные ученые ограничивались выявлением коэффициента консонантности лишь «симфонных» интервалов, то у Эйлера такие показатели возможны для любого смыслового уровня музыкальной структуры (уже не говоря о самых различных интервальных и аккордовых образованиях). Однако в основе его способа лежат физико-акустические параметры музыкального материала (вибрационные движения), а не собственно музыкальные, т. е. не ладовые. Это привело к тому, что, по Эйлеру, звуки, расположенные, например, на расстоянии октавы, не рассматриваются как ладово-идентичные, а выражаются различными математическими символами, отражающими их акустико-высотные характеристики (в свое время эта сторона концепции Эйлера вызвала критическую статью Рамо [28]). Эйлер, прекрасно знавший, что «в музыке подобными (pro similibus) считаются звуки, отличающиеся одной или многими октавами» (цит. по Орега III-1), не запечатлел этого подобия в своей теории и рассматривал все интервалы, в том числе и октаву, как истинный математик: как «акустические расстояния» различной величины, а потому выражающиеся неодинаковыми числовыми пропорциями. В результате получилось, что в методе Эйлера не отражена столь важная для художественного мышления «музыкальная тождественность» звуков, ограничивающих ладовый объем, а шире — не зафиксирован тот смысловой континуум, в котором происходят основные музыкальные «события». Аналогичным образом все остальные интервальные единицы не представлены математическими отношениями, способными охарактеризовать ладовую суть составляющих их звуков. Но сама попытка проникновения математики в музыкально-художественную область в таком широком масштабе — весьма знаменательное явление в истории европейского музыкознания. Пусть она оказалась неудачной. Но в будущем, когда в науку о музыке будут введены математические методы анализа, не противоречащие собственно музыкальной логике, эйлеровский опыт не пройдет бесследно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Barbour M. J.* Tuning and temperament. A historical survey. New York, 1972.
2. *Busch H. R.* Leonhard Eulers Beitrag zur Musiktheorie: Diss. Regensburg. 1970 (Köln. Beiträge zum Musikforsch. Bd. 58).
3. *Dahlhaus C.* Konsonanz — Dissonanz // Die Musik in Geschichte und Gegenwart: Allgemeine Enzyklopädie der Musik. Basel, 1958. Bd. 7. S. 1500—1516.
4. *Düring I.* (Ed.). Die Harmonielehre des Klaudios Ptolemaios // Göteborgs Högsk. Årsskr. 1930. 36/1.
5. *Düring I.* (Ed.). Porphyrios Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios // Göteborgs Högsk. Årsskr. 1932. 38/2.
6. *Düring I.* Ptolemaios und Porphyrios über die Musik // Göteborgs Högsk. Årsskr. 1934. 40/1.
7. *Euler L.* Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae. Petropoli, 1739; Opera III-1.
8. *Euler L.* Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique // Mém. Acad. sci. Berlin (1764), 1766. T. 20. P. 165—173; Opera III-1.
9. *Euler L.* Du véritable caractère de la musique moderne // Mém. Acad. sci. Berlin (1764), 1766. T. 20. P. 174—199; Opera III-1.
10. *Euler L.* De harmoniae veris principiis per speculum musicum representatis // Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1773), 1774. Vol. 18. P. 330—353; Opera III-1.
11. *Euler L.* Lettres à une princesse d'Allemagne...; Opera III-11, 12.
12. *Эйлер Л.* Переписка, Аннотированный указатель. Л.: Наука, 1967.

13. *Fétis F.* Esquisse de l'histoire de l'harmonie, considérée comme art et comme science systematique. Paris, 1840.
14. *Гарбузов Н. А.* Зонная природа звуковысотного слуха. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948.
15. *Helmholtz H.* Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. Braunschweig, 1863. Рус. пер.: *Гельмгольц Г.* Учение о слуховых ощущениях как физиологическая основа для теории музыки. СПб., 1875.
16. *Helmholtz H.* Sensations of Tone. 2nd ed. London, 1885.
17. *Герцман Е.* Античная функциональная теория лада // Проблемы музыкальной науки. М.: Музыка, 1983. Вып. 5.
18. *Юшкевич А. П., Копелевич Ю. X.* Христиан Гольдбах. М.: Наука, 1983.
19. *Jacobi E. R.* Nouvelles lettres inédites de Jean-Philippe Rameau // Rech. musiq. franç. 1963. T. 3. P. 151—152.
20. *Leibnitz G. W.* Epistolae ad diversos ... auctores / Ed. Ch. G. W. Kortholt. Lipsiae, 1734. Vol. 1.
21. *Mattheson J.* Die neue Zahl-Theorie. 1739 // Plus ultra. Hamburg, 1755. Vol. 3.
22. *Michaelides S.* The music of ancient Greece: An Encyclopaedia. London, 1978.
23. *Mizler L.* Musikalische Bibliothek. Leipzig, 1746. Bd. 3, T. 2.
24. *Münxelhaus B.* Pythagoras musicus. Zur Rezeption der pythagoreischen Musiktheorie als quadrivialer Wissenschaft im lateinischen Mittelalter. Bonn-Bad-Godesberg, 1976.
25. *Pelseneer J.* Une lettre inédite d'Euler à Rameau // Bull. Cl. sci. Acad. Belg. Sér. 5. 1951. Vol. 37. P. 481.
26. Πτολεμαίου Κλαυδίου Ἀρμονικῶν βιβλία Γ./ Ex Codd. MSS Undecim, nunc primum Graece editus Johannes Wallis. Oxoniae, 1682.
27. Πτολεμαίου Κλαυδίου Ἀρμονικῶν βιβλία Γ./ Ex Codd. MSS editi; nova versione Latine, et notis, illustrati // *Wallis J.* Opera mathematica. Oxoniae, 1699. Vol. 3.
28. *Rameau J.-Ph.* Extrait d'une reponse à M. Euler sur l'identité des octaves // Mercure de France. Paris, 1753.
29. *Riemann H.* Musiklexicon. Leipzig, 1882. Рус. пер.: *Риман Г.* Музыкальный словарь. М., 1902.
30. *Riemann H.* Musikalische Syntaxis. Leipzig, 1877.
31. *Riemann H.* Grundriss der Musikwissenschaft. Leipzig, 1908.
32. *Scheibe J.* Über die musikalische Composition. Leipzig, 1773. Bd. 1.
33. *Smith R.* Harmonics or the philosophy of musical sounds. Cambridge, 1749.
34. *Stumpf C.* Geschichte des Konsonanzbegriffes. 1. Die Definition der Konsonanz im Altertum // Abhandl. Philos. Philol. Cl. Kgl. Bayer. Akad. Wiss. 1897. Bd. 21. H. 1.
35. *Stumpf C.* Konsonanz und Dissonanz // Beiträge zur Akustik und Musikwissenschaft. Berlin, 1898. Bd. 1.
36. *Vogel M.* Die Musikschriften Leonhard Eulers // *Euler L.* Opera III-11, 12.
37. *Vogel M.* Die Zahl Sieben in der spekulativen Musiktheorie: Philos. Diss. Bonn, 1954.
38. *Winckel F.* Euler // Die Musik in Geschichte und Gegenwart: Allgemeine Enzyklopädie der Musik. Basel: Kassel, 1954. Bd. 3.

# МУЗЫКАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РУКОПИСИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА И СТАНОВЛЕНИЕ ЕГО КОНЦЕПЦИИ ТЕОРИИ МУЗЫКИ

*С. С. ЦЕРЛЮК-АСКАДСКАЯ*

Научная деятельность Леонарда Эйлера охватила различные области знания. Хотя в центре его интересов, безусловно, находились проблемы математики и ее возможных приложений в других, преимущественно естественных науках, труды по теории музыки не были случайным эпизодом в научной биографии ученого. Влечение к музыкальному искусству сопутствовало Эйлеру на протяжении всей жизни. Об этом упоминает первый биограф Леонарда Эйлера — его ученик и зять Н. Фус, который в последние годы жизни выдающегося математика выполнял при нем обязанности секретаря. По свидетельству Фуса [1, 16], все свое свободное время Эйлер отдавал музицированию, и эту любовь к музыке впоследствии нередко ставили в связь с эйлеровскими исследованиями по теории музыки.

Сведения о каком-либо музыкальном образовании, полученном Эйлером, до нас не дошли. Можно лишь строить догадки о том, в какой степени интерес к музыке и ее теоретическому осмыслению мог проявиться у Эйлера в домашней обстановке или в годы обучения в латинской школе, так как никаких документальных свидетельств или воспоминаний об этом не сохранилось. Несколько более конкретными могут быть предположения, касающиеся периода обучения Эйлера в Базельском университете. Известно, что Базель был важным центром развития европейской мысли о музыке. С этим городом в течение многих лет была связана деятельность выдающегося теоретика музыки XVI в. Глареана [2]. В Базельском университете изучались музыкальные дисциплины [3, 273], и весьма вероятно, что именно в его стенах Леонард Эйлер получил основательное музыкально-теоретическое образование.

Но одно можно утверждать с уверенностью: еще до начала работы над «Диссертацией о звуке» — первым крупным исследованием молодого ученого — познания Эйлера в области музыкальной теории были достаточно глубокими и разносторонними. Свидетельство тому — записные книжки (своеобразные научные дневники) молодого Эйлера, сохраняющиеся в ЛО Архива Академии наук СССР [4] и подробно описанные Г. К. Михайловым [5]. Заметки по теории музыки встречаются в этих записных книжках раньше записей, связанных с «Диссертацией о звуке».

Частично материалы по теории музыки из ранних записных книжек Эйлера были опубликованы Г. Энестрёмом [6]. Для этой публикации Энестрём отобрал набросок плана большого исследования по теории музыки и заметки по цифрованному басу (каденционные последовательности в различных ладах). Основное место в планируемом Эйлером исследовании

должны были занять вопросы сочинения одноголосных и аккордовых построений в мажорном, минорном и «среднем» ладах, а также закономерности музыкальных жанров и форм. При сопоставлении этих ранних заметок с содержанием опубликованных трудов Эйлера по теории музыки справедливо отмечалось резкое изменение направления поисков ученого в данной области научного знания.

За пределами публикации Энестрёма, однако, остались многие интересные записи, касающиеся вопросов теории музыки. Среди них — опыты с ритмическими комбинациями, попытки вычислить соотношение между длиной струны монохорда и всеми двенадцатью ступенями хроматического звукоряда, заметки, озаглавленные как «Правила композиции».

Правила композиции в понимании Эйлера были правилами подготовки и разрешения диссонансирующих интервалов, и он пытался обнаружить закономерности подобных разрешений исходя из того, в каких голосах находятся звуки интервала. В таком подходе несомненна связь с музыкальной практикой полифонии строгого стиля, хотя констатируемые Эйлером возможности разрешения диссонансов соответствуют нормам более позднего времени.

Так, записи, относящиеся к малой септима, фиксируют следующие случаи ее разрешения: «1. Малая септима, задержанная в дисканте, должна разрешиться в кварту. 2. Малая септима, задержанная в басу, должна разрешиться в большую сексту, крайне редко в октаву. 3. Задержанный дискант непосредственно после октавы, или малой сексты, или квинты, или малой терции переходит в малую септиму. 4. Задержанный бас непосредственно после октавы переходит в септиму» [4, л. 35 об.]. Для больших секунд «правила композиции» следующие: «1. Задержанная в басу секунда или нона сменяются октавой или децимой. 2. Задержанный дискант непосредственно после малой терции переходит в большую секунду или октаву. 3. Задержанный бас непосредственно после терции переходит в секунду. 4. Задержанная в дисканте большая секунда сменяется малой терцией» [4, л. 36]. Заметки эти отрывочны и ни в коей мере не претендуют на самостоятельное значение. Но записи такого рода ярко свидетельствуют о том, что Эйлер не чуждался методов эмпирического музыкознания и стремился теоретически обобщить результаты своих наблюдений над закономерностями музыкального творчества.

В заметках того же периода мы сталкиваемся с первыми попытками Эйлера найти объективные источники гармонии в музыке и предпосылки к их постижению в слуховом восприятии — тема, которая впоследствии заняла центральное место в эйлеровском музыкально-теоретическом наследии. Уже в Базеле начинающий ученый приходит к мысли соотносить характер восприятия двузвучных и трехзвучных сочетаний с соотношением количества колебаний в образующих эти сочетания звуках. Указанная мысль проиллюстрирована в записной книжке соответствующими рисунками [4, л. 40—40 об.]. Именно из этого «зерна» впоследствииросло разветвленное древо эйлеровской музыкально-теоретической концепции.

Принято считать, что эйлеровские исследования по теории музыки складывались под немалым влиянием музыкально-теоретических воззрений Г. В. Лейбница [8]. Сам Эйлер неоднократно ссылаясь на Лейбница в своих работах по теории музыки [9, с. 163; 10, с. 173, 177, 184], так как

ему весьма импонировала лейбницевская трактовка музыки как «скрытого арифметического упражнения души, не умеющей считать» [11, с. 179]. Тем не менее упомянутые выше материалы записных книжек Эйлера позволяют исключить прямое воздействие этой идеи Лейбница на эйлеровскую концепцию теории музыки в начальном этапе ее формирования. Знакомство Эйлера с перепиской Лейбница и Х. Гольдбаха, сконцентрировавшей в себе большинство высказываний Лейбница по вопросам музыки, могло произойти только в Петербурге. Опубликована была эта переписка лишь в 1734 г. [12], хотя не исключено, что благодаря дружбе с Гольдбахом Эйлер мог познакомиться с письмами Лейбница на 4—5 лет раньше их публикации [11, с. 118]. Таким образом, замысел Эйлера сложился независимо от влияния Лейбница, а позднейшее знакомство петербургского академика с высказываниями Лейбница о музыке могло лишь укрепить Эйлера в его намерениях.

Весьма вероятно, что именно увлечение теоретическими основами музыкального искусства послужило непосредственной предпосылкой и для появления исследований Эйлера по акустике. «Диссертация о звуке» стала первой в ряду этих исследований, и о связи ее с музыкально-теоретическими поисками Эйлера свидетельствует то обстоятельство, что выводы диссертации суммируются в начальной главе трактата Эйлера «Опыт новой теории музыки». Эти выводы стали необходимой естественно-научной предпосылкой появления эйлеровской музыкально-теоретической концепции, без которой она не могла бы быть сформулирована в своем настоящем виде.

Качественно новый характер приобрели музыкально-теоретические изыскания Эйлера после переезда в Россию и начала работы в Петербургской академии наук. Исключительно благоприятные условия, созданные для ученых Академией русским правительством, предусматривали возможность заниматься самыми разнообразными проблемами. Наряду с многочисленными исследованиями по математике, физике, механике и астрономии Эйлер не забывает и своих юношеских планов о создании музыкально-теоретического труда.

Первые попытки создания большого труда по теории музыки не удовлетворили самого автора. В эйлеровском архиве сохранились две неоконченные рукописи [13, 14], страницы которых свидетельствуют, насколько непростым был для Эйлера процесс кристаллизации и изложения его музыкально-теоретической концепции. Ученый, который даже большие математические исследования, требующие сложных вычислений и развернутых выкладок, писал с минимальным количеством подготовительных материалов, дважды принимался излагать свой труд по теории музыки и лишь последний, третий вариант удовлетворил его настолько, что он решился вынести его на суд читателей.

Впервые оба музыкально-теоретических манускрипта Эйлера были описаны в 17-м выпуске Трудов Архива АН СССР [15, с. 103], однако никем из исследователей они к анализу не привлекались. Более того, Х. Р. Буш высказал мнение, что «Опыт новой теории музыки» представляет собой соединение не очень согласованных друг с другом фрагментов, относительно содержания которых он делает самые произвольные предположения [7, с. 13—16]. Эти предположения лишены всяких документальных и содержательных оснований, так как даже в ранних рукописях точка зрения

Эйлера на вопросы музыкальной теории отличается продуманностью и взаимной согласованностью всех разделов.

Из двух неопубликованных рукописей Эйлера по теории музыки раньше, по всей вероятности, был написан «Трактат о музыке». Данное предположение может быть обосновано целым рядом аргументов. Прежде всего содержание этой рукописи больше отличается от тех формулировок эйлеровской музыкально-теоретической концепции, которые автор считал возможным опубликовать. Совершенно иной в сравнении с текстом «Опыта новой теории музыки» и более близкой к нему второй рукописи представляется сама структура «Трактата о музыке» со сквозной нумерацией параграфов внутри вступительного раздела и четырех глав, имеющих такие названия:

Глава 1. О звуках, употребляемых в музыке.

Глава 2. О приятности, которая может заключаться в звуках.

Глава 3. О благозвучной последовательности звуков и созвучий.

Глава 4. О музыкальной композиции.

«Трактату о музыке» как хронологически более ранней — вероятно, даже первой — попытке изложения Эйлером целостной концепции музыкальной теории свойственна неустоявшаяся терминология. Пути ее становления, прослеживаемые по рукописи «Трактата о музыке», позволяют уточнить содержание некоторых ключевых понятий в опубликованных эйлеровских исследованиях. Такая возможность особенно ценна для тех понятий, которым сам Эйлер не дал однозначных и точных определений и которые из-за этого были впоследствии неверно истолкованы критиками его трудов.

Так, одна из центральных категорий в исследованиях Эйлера по теории музыки — степень благозвучия (*gradus suavitatis*) — отождествлялась критиками эйлеровского музыкально-теоретического наследия [16—20, 7] со степенью консонантности. В результате неправомерной подмены одного понятия другим многие рассуждения Эйлера производили впечатление ошибочных, так как находились в полном противоречии со всем опытом восприятия консонантных и диссонантных отношений. Критиков Эйлера не смущало даже то обстоятельство, что сам ученый в трактате «Опыт новой теории музыки» недвусмысленно противопоставил понятия благозвучия (*suavitas*) и консонантности (*consonantia*).

По Эйлеру, выяснение степени благозвучия позволяет определить границу, разделяющую консонансы и диссонансы, лишь «до некоторой степени» [9, с. 62]. В его понимании степень благозвучия является акустико-математической характеристикой звуковысотности, определяющей меру приятности и простоты оценки при восприятии. «Отличие консонансов и диссонансов не только в большей или меньшей легкости их оценки, но оно также и в системе композиции. Созвучия, применение которых менее удобно [т. е. связано со стилистически обусловленными требованиями подготовки и разрешения. — С. Ц.-А], названы диссонансами, даже если они более легки для оценки, чем те, которые располагают среди консонансов» [9, с. 62].

В «Трактате о музыке» понятие степени благозвучия вводится не сразу. На страницах рукописи с ним соседствуют как тождественные «степень приятности» (*gradus gratitudinis*), «степень легкости или трудности постигаемого порядка» (*gradus facilitatis vel difficultatis, quo ordo percipitur*),

«степень красоты» (*gradus venustatis*) и «степень созвучности» (*gradus consonantiae*). В дальнейших исследованиях по теории музыки эти термины не встречаются, так как все оттенки заключенных в них значений поглотились термином «степень благозвучия».

Кроме того, понятие «*gradus consonantiae*» оказалось неудобным для исследований Эйлера еще по одной причине. Наряду с общим значением «созвучность, гармония», которое слово «*consonantia*» имеет в латинском языке, в специальной музыкально-теоретической литературе сложилось еще одно его значение — «консонанс», которое приобретает смысл лишь в оппозиции к понятию «диссонанс». Правдоподобно будет предположить, что Эйлер опасался терминологической путаницы и старался в дальнейшем избегать термина «*gradus consonantiae*». То обстоятельство, что в литературе об Эйлере один термин подменили другим, уже полностью находится на совести критиков его музыкально-теоретических трудов.

Как это можно заключить уже по названиям основных разделов рукописи, «Трактат о музыке» охватывает многие важные вопросы эйлеровской музыкально-теоретической концепции. Однако некоторые существенные вопросы эстетики, музыкальной акустики и практической реализации воззрений Эйлера здесь едва намечены, да и круг музыкально-теоретических проблем далеко еще не полон в сравнении с опубликованными работами. С другой стороны, в «Трактате о музыке» значительно подробнее представлены расчеты и полностью разработаны все акустико-математические основания исследования, немало внимания уделено здесь и эстетическому обоснованию концепции. Таким образом, основное ядро музыкально-теоретических исследований Эйлера было сформировано и изложено уже на этом начальном этапе.

Второй музыкально-теоретический манускрипт Эйлера не имеет авторского названия. Возможно, данная рукопись создавалась как черновой вариант музыкально-теоретического труда и потому не была озаглавлена. На первой ее странице значится «Первая глава теории музыки», после чего указано название этой главы — «О музыке и звуках вообще». За начальной главой следуют еще шесть, имеющих собственные названия:

Глава 2. Об основах благозвучия.

Глава 3. О созвучиях.

Глава 4. О последовательности созвучий.

Глава 5. О рядах созвучий.

Глава 6. О различных интервалах, разделяющих октаву.

Глава 7. Об интервалах, имеющихся в представленных родах.

В описании эйлеровского архива [15] эта рукопись получила название «Семь глав теории музыки», которого мы в дальнейшем будем придерживаться.

Многое в «Семи главах теории музыки» повторяет выводы «Трактата о музыке», но если в более ранней рукописи читатель становится свидетелем рождения замысла, то здесь изложение производит впечатление пересказа уже установленных фактов. Тем не менее в этой рукописи есть немало нового. «Семь глав теории музыки» интересны тем, что содержат развернутый тезисный план всего, что по замыслу Эйлера должно было быть рассмотрено в его музыкально-теоретическом исследовании. По этому плану понятно, что рукопись в дополнение к сохранившимся семи должна была содержать еще пять глав, где предусматривалось исследо-

вать проблемы изменения ладов и систем в рамках простой композиции, правила сочинения мелодии с сопровождением (расцветенная композиция), вопросы благозвучия временных (ритмических) соотношений в абстракции от высотных, особенности употребления различных тактов и размеров, а в заключение — технику связанной композиции, объединяющей в себе звуковысотную и временную организацию. Все перечисленные вопросы, за исключением вопроса об изменении ладов и систем, рассмотренного в трактате «Опыт новой теории музыки», никогда впоследствии Эйлером не исследовались. Их разрешение явилось бы логическим завершением эйлеровских исследований теории музыки и сделало бы более явной практическую направленность его концепции, которую современникам трудно было ощутить в рассмотренных Эйлером вопросах.

Если сравнить «Семь глав теории музыки» с «Трактатом о музыке», то налицо большая зрелость в содержании и воплощении замысла. Здесь охвачены почти все вопросы, содержащиеся в более ранней рукописи, но изложены они более компактно и стройно. За пределами изложения остались лишь некоторые частности, впрочем достаточно интересные, как, к примеру, равенство по благозвучию мажорного и минорного трезвучий или вопрос об идентичности октав. Не попали в эту рукопись и рассуждения о временных соотношениях, так как, по всей вероятности, предназначались для главы, которая специально должна была быть посвящена этому вопросу, но осталась ненаписанной. В то же время музыкально-теоретическое исследование Эйлера углубилось, дополнилось новыми мыслями, уточнилась его терминология. Ученый ввел в свой труд большой раздел, связанный с акустикой музыкальных звуков, развил теорию перехода от одного лада к другому через общее созвучие, рассмотрел различные способы темперации инструментов. Большое влияние уделено в этой рукописи акустико-математическому обоснованию трех родов музыки — диатонического, хроматического и ангармонического, причем последний из них, по Эйлеру, образуется с участием интервала натурального малой септимы (седьмого обертона натурального звукоряда). Интересно, что рассуждения, связанные с перспективами применения натуральной малой септимы, были зачеркнуты Эйлером в этой рукописи [14, л. 33], хотя в поздних музыкально-теоретических статьях ученый активно исследовал вопрос об этом созвучии [10].

Центральное место в музыкально-теоретическом наследии Леонарда Эйлера занимает трактат «Опыт новой теории музыки». С этим трудом у 32-летнего петербургского академика, по всей вероятности, было связано немало надежд, так как готовил он его с большой тщательностью. В трактате ученый наиболее полно изложил свои взгляды на предмет музыки, ее теоретические основы и практические задачи.

Трактат «Опыт новой теории музыки, ясно изложенной на надежнейших принципах гармонии» — именно таково его полное название — содержит в себе авторское предисловие, нотное приложение и 14 глав:

Глава 1. О звуке и слухе.

Глава 2. О прекрасном и основах гармонии.

Глава 3. О происхождении музыки.

Глава 4. О созвучиях.

Глава 5. О последовательности двух созвучий.

Глава 6. О родах созвучий.



Глава 7. О названиях, данных различным интервалам.

Глава 8. О родах музыки.

Глава 9. О диатонико-хроматическом роде.

Глава 10. О более сложных, чем диатонико-хроматический, родах музыки.

Глава 11. О созвучиях в диатонико-хроматическом роде.

Глава 12. О ладах и системах в диатонико-хроматическом роде.

Глава 13. О рациональном сочинении в данном ладу и системе.

Глава 14. Об изменении ладов и систем.

Лишь при сравнении «Опыта новой теории музыки» с ранними рукописями становится понятным, какой огромный труд проделан Эйлером при подготовке его музыкально-теоретического исследования к публикации. Сохранив в неприкосновенности основные идеи своей концепции, ученый настойчиво совершенствовал ее, дополняя новыми соображениями и выводами. Все поиски и труды Эйлера были направлены к одной цели: созданию музыкальной теории, которая, будучи основанной на объективно существующих физико-акустических и эстетических закономерностях, могла бы стать полезной для практических музыкантов.

Проблематика трактата «Опыт новой теории музыки», как указывалось выше, не исчерпывает всего круга вопросов, намеченных к разрешению в незавершенной рукописи «Семь глав теории музыки». За пределами исследования осталось именно то, что могло бы приблизить результаты размышлений ученого к современной ему композиторской практике. Но сказанное отнюдь не означает недооценки Эйлером роли музыкальной практики. Он охотно и многократно констатирует факты совпадения его теоретических выводов с принятыми в творчестве его современников нормами музыкального письма и вообще охотно апеллирует к практике как доказательству истинности своих рассуждений. Но источник этих рассуждений он предпочитает искать вне музыкального искусства.

В эйлеровском трактате своеобразно преломились музыкально-теоретические воззрения эпохи барокко. Сравнения с рукописями позволяют установить, что ученый сознательно искал таких точек соприкосновения, так как соответствующие мысли появились лишь в том варианте его музыкально-теоретического труда, который готовился к публикации. На страницах «Опыта новой теории музыки» можно встретить отголоски теории эффектов, учения о музыкальной риторике. Эйлер связывает свои выводы с практикой генерал-баса, с дискуссиями по вопросам темперации и настройки клавишных инструментов. Он также подвергает критическому рассмотрению труды своих предшественников, особое внимание уделяя при этом концепциям Пифагора, Аристоксена и Птолемея и подчеркивая коренные различия их взглядов с собственными.

Среди источников музыкально-теоретических исследований Эйлера нужно упомянуть также труды А. Бозция [21], на которые Эйлер ссылается в рукописях [14, л. 29]. Есть основания предположить, что Эйлер также изучил «Musurgia universalis» А. Кирхера (к деятельности Кирхера проявлял большой интерес друг Эйлера и его многолетний корреспондент Х. Гольдбах [11, с. 54—55]). Именно в этом трактате Кирхера впервые по отношению к музыке употребляется термин «suavitas»<sup>1</sup>, полу-

<sup>1</sup> На это указал Х. Р. Буш [7, с. 3].

чивший у Эйлера значение музыкально-эстетической категории. О связях с Кирхером говорит также одна неточность, которая впервые встречается в «Musurgia universalis» [22, с. 217] и оттуда, по-видимому, была заимствована Эйлером, в рукопись «Трактата о музыке» [13, л. 2 об.]: в расчленениях о длительностях звуков оба ученых пользуются терминологией мензуральной ритмики и при этом две самые краткие единицы длительности ошибочно называют «хрома» и «семихрома» (общепринятые их наименования — «фуза» и «семифуза»). Кроме того, у Эйлера встречаются ссылки на труды Ж. Ф. Рамо, Ж. Совера, Г. В. Лейбница.

Дальнейшее развитие получили в «Опыте новой теории музыки» те идеи Эйлера, которые разрабатывались им в рукописных вариантах. Эйлер значительно углубил раздел, посвященный музыкальной акустике, ввел в него рассмотрение принципов звукообразования и звукоизвлечения в различных музыкальных инструментах, исследовал законы колебания струн. В эстетическом обосновании концепции здесь сформулирован важнейший принцип единства объективного и субъективного в оценке музыки, причем восприятие музыки сводится к восприятию упорядоченности в отношениях колебаний. Категория приятности, благозвучия утверждается в данном труде не только в узком музыкально-теоретическом, но и в более широком эстетическом значении. В трактате широко развито учение о ладе, обосновываются возможности и способы перехода из одного лада в другой через общее трезвучие. Выделяя различные уровни звуковысотной организации, Эйлер указывает на то, что восприятие их происходит от низших уровней к высшим. При этом способность к оценке всей звуковысотной структуры он ставит в зависимость от развития слуха и слухового опыта воспринимающего субъекта.

В «Опыте новой теории музыки» развиты многие теоретические положения, намеченные в ранних рукописях, дополнены новыми соображениями учение о полных и неполных созвучиях, об интервалах, о родах музыки, об особенностях музыкального восприятия, высказаны меткие замечания о стилистической детерминированности восприятия консонантности и диссонантности. Для измерения величины интервалов здесь введены логарифмы с основанием 2<sup>2</sup>. Подробному рассмотрению в трактате подвергается диатонико-хроматический род музыки вследствие его доминирующего положения в современном Эйлеру музыкальном искусстве. Немало проницательных наблюдений сделал Эйлер и при описании закономерностей изменения сложности показателя на различных участках формы музыкального произведения.

Произведенное сравнение трактата «Опыт новой теории музыки» с предшествовавшими ему рукописными вариантами заставляет внести поправку в распространенную трактовку содержания письма Леонарда Эйлера к его учителю И. I Бернулли от 25 мая / 5 июня 1731 г. [24]. Обычно это письмо однозначно связывается исследователями с работой над трактатом «Опыт новой теории музыки» [25, с. 37], и в литературе об Эйлере нередко приводится цитата из этого письма, которая якобы исчерпывающе

<sup>2</sup> Долгое время принято было считать, что Эйлер был первым, кто ввел логарифмы с основанием 2 для измерения величины интервалов. Однако Дж. Яссер сообщил, что в Нью-Йоркской публичной библиотеке им обнаружена анонимная рукопись, датированная 1705 г., где логарифмы с основанием 2 уже применены для выражения музыкальных интервалов [23, с. 21].

характеризует замысел ученого: «... Я стремился представить музыку как часть математики» [26, с. 48]. Два вывода, которые обычно следуют после изложения этих фактов, нуждаются в коррекции.

Во-первых, на основании упомянутого письма исследователи делали заключение о том, что к середине 1731 г. работа над «Опытом новой теории музыки» была в значительной мере завершена. Однако при этом почему-то упускалось из поля зрения то обстоятельство, что содержание музыкально-теоретического труда Эйлера по его подробному изложению в письме к Бернулли не совпадает с содержанием трактата «Опыт новой теории музыки». Речь идет, разумеется, не о несовпадении общего замысла, который, как указывалось выше, сформулировался уже в первых набросках Эйлера по теории музыки, а о характере изложения и степени разработанности тех или иных вопросов и их практического применения. Изложение эйлеровской музыкально-теоретической концепции в письме к Бернулли соответствует содержанию рукописи «Трактат о музыке», и, по всей вероятности, именно 1731 год вследствие этого нужно будет считать годом начала активной работы ученого над музыкально-теоретической проблематикой. То, что письмо Эйлера ставили в связь с трактатом «Опыт новой теории музыки», легко понять. Так как ранние рукописи Эйлера по теории музыки никем не изучались, письмо связывали с ближайшим исследованием в данной области науки, которое хронологически следовало за ним.

Далее, нельзя признать удовлетворительной трактовку замысла Эйлера, сводящую его концепцию к изложению теории музыки как части математики. Подлинное высказывание Эйлера о замысле его труда следующее: «Моей конечной целью в этом труде было то, что я стремился представить музыку как часть математики и вывести в надлежащем порядке из правильных оснований все, что может сделать приятным объединение и смешивание звуков» [24, с. 383]. Из дальнейшего изложения становится понятным, что такими правильными основаниями он считает эстетические («метафизические») и акустические закономерности, а роль математики сводилась к языку описания изучаемых явлений, а также к самому методу мышления, где вся концепция выводится путем логически строгих рассуждений из немногих положений, истинность которых не подлежит сомнению. Лишенная контекста, эта цитата в усеченном виде не отражает подлинных намерений Эйлера и представляет их в искаженном виде.

После выхода в свет трактата «Опыт новой теории музыки» Эйлер длительное время не обращался к музыкально-теоретической проблематике<sup>3</sup>. Труд его вызвал множество дискуссий. При этом теоретики музыки эмпирической ориентации не находили в эйлеровском исследовании результатов, позволяющих применить их в творческом процессе, и выступили с резкой критикой трактата. Немногие положительные отзывы были связаны с частными вопросами концепции и отнюдь не определяли общей картины. Несомненно одно: подлинная сущность музыкально-теоретической концепции Эйлера никем из критиков не была раскрыта, что с грустью констатировалось самим автором [28, с. 273].

<sup>3</sup> О. Шписс [27, с. 175] упоминает о композиторских опытах Леонарда Эйлера, которые также были подвергнуты резкой критике. Нотные рукописи Эйлера по сих пор не обнаружены.

Все это совпало с переездом Эйлера в Берлин, где эмпирическая направленность теоретической мысли о музыке была очень сильна. Лагерь музыкантов-теоретиков эмпирической ориентации возглавлялся тут видным музыковедом и блестящим публицистом Ф. В. Марпургом, мнение о музыке которого при дворе Фридриха II не решался оспаривать никто. Понятно, что подобные обстоятельства не могли способствовать появлению новых эйлеровских музыкально-теоретических трудов.

Лишь к концу 50-х годов в записных книжках Эйлера снова появляются заметки по теории музыки [29, л. 62 об.— 63]. Содержание этих заметок предвещало и намечало новый поворот в музыкально-теоретических исследованиях Эйлера, связанный с разработкой вопросов, лишь отчасти затронутых в его прежних работах. Эти вопросы получали новое освещение, хотя в основе их разрешения лежали установки, сформулированные в «Опыте новой теории музыки». Правда, Эйлер попытался приспособить характер изложения ко вкусам практических музыкантов, сведя к минимуму математический аппарат описания, что свидетельствует о его стремлении быть понятым современниками.

В музыкально-теоретических статьях Эйлера 60—70-х годов [10, с. 30] исследуются две центральные проблемы. Первая из них — о роли натуральной малой септимы, а вторая, тесно связанная с предыдущей, касается особенностей восприятия высоты звука. Эйлер формулирует важный тезис о приближительности восприятия звуковысотности и о том, что слух производит коррекцию услышанного в сторону упрощения отношений между звуками (отношения выражаются количеством колебаний). Ученый высказывает предположение о том, что слух человека развился до восприятия натуральных малых септим как консонирующих интервалов, которые не требуют ни подготовки, ни разрешения. В связи с этим рассматривается соотношение понятий консонанса и диссонанса.

Леонард Эйлер не относился к своим музыкально-теоретическим исследованиям как к чисто умозрительным построениям. Он настойчиво стремился к внедрению своих идей в практику, полагая, что открытые им «истинные основания музыки» должны способствовать совершенствованию музыкального творчества и исполнительства. Поэтому он предложил систему воспитания слуха, основанную на начальных интервалах натурального звукоряда, дающих самые простые акустические отношения. Им был также произведен расчет 24-ступеневой темперации, учитывающей интервал натуральной малой септимы. На инструментах, темпированных подобным образом, можно было бы воспроизвести огромное количество новых созвучий, которые обогатили бы ресурсы выразительных средств и вместе с тем отвечали бы критерию истинной гармоничности в музыке.

Постулируя тезис о важном качественном скачке в развитии человеческого слуха, связанном с консонантной трактовкой натуральных малых септим, Эйлер видел в этом предпосылку к глубоким изменениям во всей системе звуковысотности. Однако ученый в этом вопросе в значительной мере выдавал желаемое за действительное и принципы звуковысотной организации, сложившиеся в практике музыкального искусства к началу XVIII в., в своих основополагающих чертах еще долгое время сохраняли жизнеспособность. Время для подобных изменений тогда еще не настало, и на протяжении полутора столетий музыкальный язык эволюциониро-

вал, реализуя возможности, заложенные в европейской звуковысотной организации еще в первой половине XVIII в. Ситуация резко изменилась к концу XIX — началу XX в., когда принципы звуковысотности, казавшиеся длительное время неизблемыми, начали претерпевать существенные изменения. Музыкальная практика современной эпохи показывает, что многое в звуковысотной организации развивается в направлении, предсказанном Эйлером, и в этой связи изучение его музыкально-теоретического наследия приобретает особую актуальность.

Труды Эйлера по теории музыки создавались в эпоху коренных сдвигов в музыкальном мышлении, в чем-то аналогичную современной. Подобный исторический период делает особенно трудным познание закономерного характера происходящих изменений и определение ведущих тенденций в процессе развития. Лишь немногие в подобных условиях решаются, как это сделал Эйлер, подойти к созданию музыкально-теоретической концепции, взяв исходной точкой широкие эстетические и теоретические предпосылки. Большинство же теоретиков музыки ограничивается констатацией и обобщением наблюдений над современным им музыкальным творчеством, определив себе в лучшем случае роль истолкователей новых музыкальных закономерностей.

Опыт Эйлера убедительно показывает, что создание музыкально-теоретической концепции значительного масштаба возможно лишь на пути выхода за рамки эмпирических наблюдений и их обобщений. Примененный Эйлером подход придал его исследованиям прогнозирующий характер и привел ученого к выводам, справедливым не только для анализируемых им явлений музыкального искусства, но и обращенным к будущему развитию музыки и теоретической мысли о ней.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Fuss N.* Éloge de Monsieur Léonard Euler. SPb., 1783.
2. *Fritzsche O. F.* H. Glarean, sein Leben und seine Schriften. Frauenfeld, 1890.
3. Базель // Музыкальная энциклопедия. М., Т. 1. 1973. Стб. 273.
4. ЛО Архива АН СССР, ф. 136. оп. 1, № 129, зап. кн. № 1.
5. *Михайлов Г. Р.* Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР // Ист.-мат. исслед. 1957. Вып. 10. С. 67—94.
6. *Eneström G.* Bericht an die Eulerkommission der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft über die Eulerschen Manuskripte der Petersburger Akademie // Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 1913. Bd. 22. S. 191—205.
7. *Busch H. R.* Leonhard Eulers Beitrag zur Musiktheorie. Regensburg, 1970.
8. *Haase R.* Leibnitz und die Musik: Ein Beitrag zur Geschichte der harmonikalen Symbolik. Hommerich, 1963.
9. *Euler L.* Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae. Petropoli, 1739; Opera III-1.
10. *Euler L.* Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique. Du véritable caractère de la musique moderne // Mém. Acad. sci. Berlin (1764). 1766. T. 20. P. 165—199; Opera III-1.
11. *Юшкевич А. И., Конелевич Ю. X.* Христиан Гольдбах. М.: Наука, 1983.
12. *Kortholt Ch. G. W.* Leibnitii epistolae ad diversos... auctores. Lipsiae, 1734. Vol. 1.
13. *Euler L.* Tractatus de musica // ЛО Архива АН СССР, ф. 136. оп. 1, № 241.
14. *Euler L.* Tractatus de musica // ЛО Архива АН СССР, ф. 136, оп. 1, № 242.
15. Рукописные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1.
16. *Mizler L.* Musikalische Bibliothek. Leipzig, 1746—1752. Bd. 3.
17. *Riemann H.* Euler Leonhard // Musiklexicon. 4. Aufl. Leipzig, 1894. S. 285.
18. *Шевалье Л.* История учений о гармонии /Пер. с фр. М.: Музгиз, 1932.

19. *Fétis F. J.* Esquisse de l'histoire de l'harmonie, considérée comme art et comme science systematique. Paris, 1840.
20. *Vogel M.* Die Musikschriften Leonhard Eulers // *Euler L.* Opera III-11, S. XLIV—LX.
21. *Paul O.* Boetius und die Griechische Harmonik. Des Anicius Manlius Severinus Boetius fünf Bücher über die Musik aus der lateinischen in die deutsche Sprache übertragen und mit besonderen Berücksichtigung der griecher Harmonik sachlich erkält von O. Paul. Leipzig, 1872.
22. *Kircher A.* Musurgia universalis. Roma, 1650. Vol. 1.
23. *Yasser J.* A theory of evolving tonality. New York, 1932.
24. *Eneström G.* Der Briefwechsel zwischen L. Euler und J. I. Bernoulli // *Bibl. Math.* 1903. Bd. 4. S. 344—388.
25. *Эйлер Л.* Переписка. Аннотированный указатель. Л.: Наука, 1967. 391 с.
26. *Thiele R.* Leonhard Euler. Leipzig, 1982.
27. *Spiess O.* Leonhard Euler. Frauenfeld; Leipzig, 1929.
28. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel, 1729—1764/ Hrsg. A. P. Juškevič, E. Winter. Berlin, 1965.
29. ЛО Архива АН СССР, ф. 136, оп. 1, № 136, зап. кн. № 8.
30. *Euler L.* De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis // *Novi comment. Acad. sci. Petrop.* (1773). 1774. Vol. 18. P. 330—353; Opera III-1.

# НЕИЗВЕСТНЫЙ ПОРТРЕТ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА КИСТИ И. Ф. ДАРБЕСА

Г. Б. АНДРЕЕВА, М. П. ВИКТУРИНА

1. В собрании Государственной Третьяковской галереи среди произведений немецкого живописца Иосифа Фридриха Августа Дарбеса числился портрет «Неизвестного старика», датированный 1778 г.<sup>1</sup> В ходе подготовки материала для нового каталога музейного собрания удалось установить, что портрет является прижизненным изображением Леонарда Эйлера.

Работа с этим произведением началась с естественного вопроса: может быть, за этим волевым, умным, очень характерным лицом изображенного человека скрывается конкретная историческая личность? Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо было исходя из биографии художника выяснить, кого портретировал И. Ф. Дарбес в конце 1770-х годов.

Имя И. Ф. Дарбеса сегодня известно только специалистам, редко оно встречается и в сводных трудах по истории немецкого искусства<sup>2</sup>. Из немногочисленных сведений о художнике, сообщаемых в основном в различных справочных изданиях и словарях по изобразительному искусству, можно восстановить некоторые факты его творческой биографии.

Художник родился в 1747 г. в Гамбурге, умер в 1810 г. в Берлине. С 1748 г. его семья жила в Копенгагене, где И. Ф. Дарбес занимался в Академии художеств<sup>3</sup>. По окончании Академии Дарбес посетил Голландию, Германию, Францию<sup>4</sup>. В 1785 г. он поселился в Берлине, а в 1796 г. стал профессором Берлинской Академии художеств. Среди современников пользовались известностью его портреты прусского короля Фридриха II Вильгельма, королевы и особенно портрет Гёте 1788 г. Дарбес славился как мастер небольших карандашных портретов и миниатюрных изображений, исполненных серебряным карандашом и сангиной<sup>5</sup>.

В интересующие нас годы Дарбес находился в России: с 1773 по 1785 г. он работал в Курляндии и Петербурге. На полотнах тех лет Дарбесом запечатлены Август Гупель — доктор философии и богословия Дерптского университета, Игнатий Феслер — профессор восточных языков и философии, барон Розен, Карл Отто и Карл Дитрих фон Лёвенштерны и др. Как свидетельствуют литературные источники, самым знаменитым среди мужских портретов кисти Дарбеса было изображение Леонарда Эйлера.

<sup>1</sup> Холст, масло, 61,3 × 47,3. Овал, вписанный в четырехугольник. Инв. 13144.

<sup>2</sup> В нашей стране произведения Дарбеса хранятся в художественных музеях Москвы, Ленинграда, Риги.

<sup>3</sup> Иногда встречается ошибочное указание на датское происхождение художника (см. [1, с. 167] и др.).

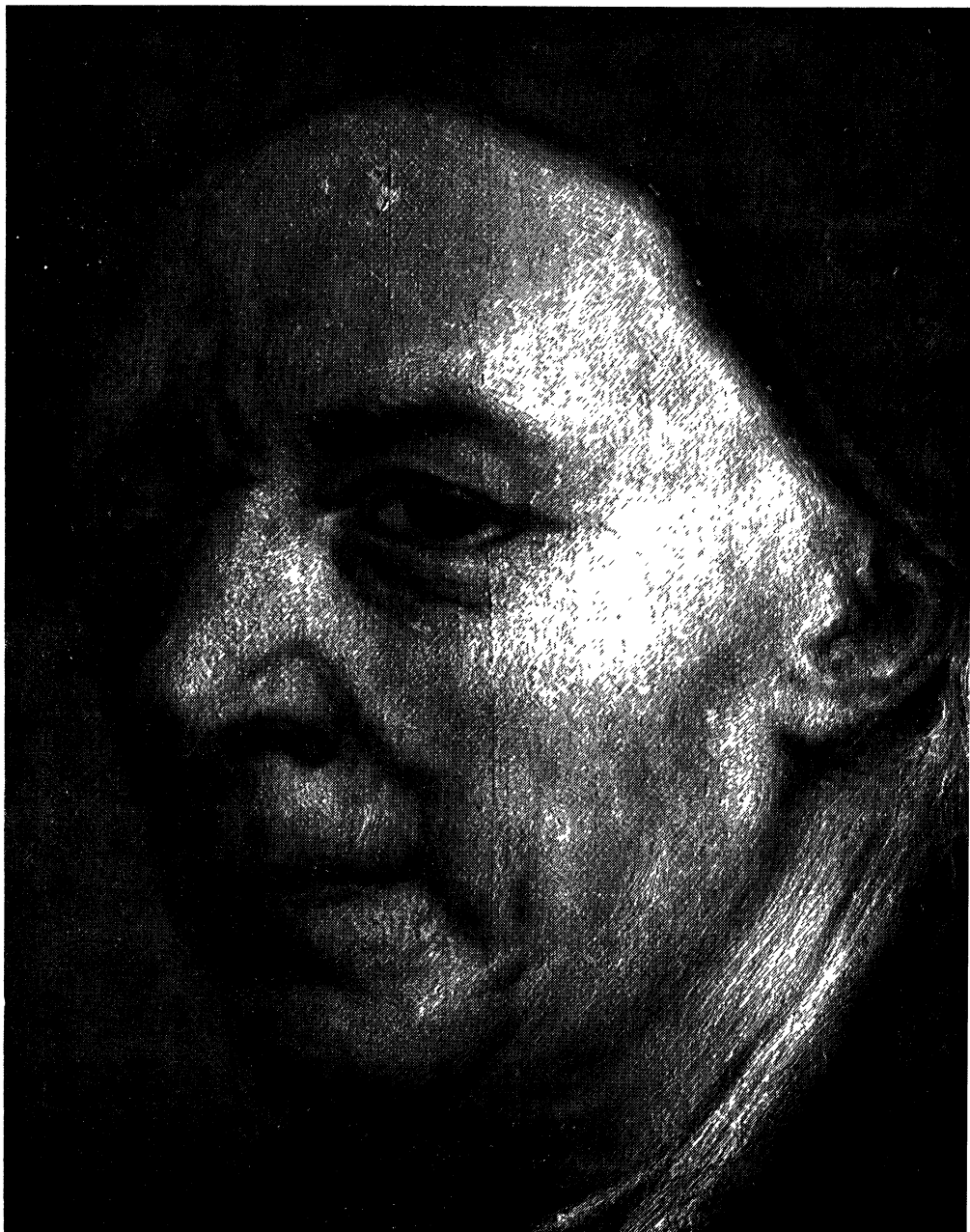
<sup>4</sup> По указанию некоторых источников, Дарбес был также в Польше [2, с. 273].

<sup>5</sup> Так исполнен автопортрет художника, хранящийся в гравюрном кабинете в Дрездене (бумага, карандаш, 11,5 × 8,5; после 1797 г. инв. 355). Более полные сведения о художнике см. [3, с. 31—32; 4, с. 391—392; 5, с. 359].



*Портрет Л. Эйлера 1778 г. кисти Ж. Ф. А. Дарбеса  
Государственная Третьяковская галерея*





*Фактурная фотография портрета Л. Эйлера 1778 г.*

В «Подробном словаре русских гравированных портретов» Д. А. Ровинского сообщалось, что с портрета Дарбеса, где Эйлер изображен в преклонном возрасте, уже слепым, была сделана в 1780 г. в Митаве гравюра Самуилом Кютнером [6, с. 2180]. Таким образом, сам портрет был написан в 1780 г. Впоследствии этот портрет, как обладающий наибольшим сходством, неоднократно гравировался другими мастерами<sup>6</sup>. Так как на воспроизводимом здесь портрете из Третьяковской галереи изображен уже старик, совсем слепой на правый глаз, а на холсте имеется дата — 1778 г., мы предположили, что перед нами изображение Леонарда Эйлера. Сравнение полотна с сохранившейся гравюрой Кютнера подтвердило нашу догадку<sup>7</sup>.

О портрете Эйлера работы Дарбеса сохранилось интересное свидетельство Иоганна III Бернулли, внука знаменитого математика. В 1778 г. он посетил Эйлера в Петербурге, и видел, как тот позировал живописцу [9, с. 245]. Таким образом, портрет имеет особую ценность — он исполнен с натуры во второй период пребывания ученого в России.

С установлением лица, изображенного на портрете, исследовательская работа не закончилась. До недавнего времени считалось, что портрет Эйлера кисти Дарбеса находится в Женеве, в Музее искусства и истории<sup>8</sup>. Происхождение и дальнейшая судьба портрета из Женевы устанавливаются достаточно ясно по сохранившимся документам [10, с. 59, № 179]<sup>9</sup>. Портрет написан в Петербурге и принадлежал некоему Пьеру Жозефу Ами, который подарил его придворному ювелиру Екатерины II Франсуа Дювалю<sup>10</sup>. По возвращении Дюваля в Женеву его коллекция слилась с собранием Этьена Дюмона, завещавшего портрет в 1829 г. Обществу искусств. В Музее искусства и истории портрет Эйлера находится с 1908 г. Таким образом, относительно создания портрета из женевского музея в XVIII в. и исполнения его в Петербурге сомнений быть не может.

Как же соотносятся между собой оба портрета? Здесь важно отметить следующее: на полотне из Третьяковской галереи имеется и дата, и авторская подпись, на полотне из женевского музея они отсутствуют, хотя большинство известных произведений Дарбеса подписанные. Наличие двух абсолютно аналогичных произведений, одно из которых подписано и датировано, заставило более тщательно исследовать портрет из Третьяковской галереи. Были проведены технологические исследования порт-

<sup>6</sup> Бартолоцци, Ридель и др. [7].

<sup>7</sup> Мы воспользовались гравюрой из собрания Государственного музея изобразительных искусств им. А. С. Пушкина. Гравюра резцом, 24,6 × 17,8. Овал в четырехугольнике. Инв. Р. 8608. Известна гравюра из коллекции Ф. Ф. Вигеля, которая находится в отделе редких книг и рукописей Научной библиотеки Московского университета [8, с. 87, № 151] (в [8] дана неверная транскрипция фамилии художника).

<sup>8</sup> Холст, масло, 62 × 45,5. Овал. Инв. 1829-8.

<sup>9</sup> Авторы приносят благодарность хранителю старой живописи Музея искусства и истории в Женеве Рене Лош, сообщившей сведения о портрете.

<sup>10</sup> Франсуа Дюваль (1776—1854) был хорошо известен в художественных кругах Петербурга как страстный коллекционер и приятель многих живописцев. Так, в 1816 г. известный русский портретист О. А. Кипренский, отправляясь в заграничное путешествие через Германию и Швейцарию в Италию, избрал своим попутчиком «доброе господина Дюваля». Прибыв в Женеву, Кипренский остановился в доме старшего брата Дюваля. Известно несколько портретов Дюваля и его семьи, исполненных Кипренским [11, с. 418; 12, с. 114, 228].



*Л. Эйлер*

*Гравюра С. Г. Кютнера 1780 г. с портрета Ж. Ф. А. Дарбеса*

рета, проанализирована техника художника, состояние живописи на холсте, изучена авторская подпись.

2. Изучение манеры письма И. Ф. Дарбеса проводилось в Государственной Третьяковской галерее с использованием стереоскопического микроскопа, фактурных фотографий и рентгенограмм. Исследование портрета Леонарда Эйлера с помощью этих методов позволило получить довольно полное представление о живописной системе автора. Рентгенографирование установило, что холст, на котором написан портрет, — полотняного плетения, среднезернистой структуры, загрунтован ручным способом на подрамнике, о чем свидетельствует обнаруженная по левому краю рентгенограммы нерезкая волнообразная деформация нитей холста. Белый грунт задерживает рентгеновские лучи, что свидетельствует о наличии в его составе химических элементов с высоким атомным весом. Присутствие в грунте свинцовых белил, бария и др. образует на рентгеновском снимке дополнительные тенеобразования, которые снижают качество скиалогического изображения от тонкого красочного слоя портрета. В данном случае на рентгеновскую пленку проектируется лишь более завершенная правая половина лица. Левая щека, оставленная в подмалевке, на снимке не получила адекватного изображения. Специфика рентгеновского изображения лица портрета состоит в том, что, несмотря на кажущуюся корпусность письма и достаточную нагруженность белилами наиболее освещенной правой половины лица, объемы не воспринимаются, так как отсутствует светотеневая моделировка. Черты лица едва различаются. Красочные слои, которые образуют на рентгенограмме различные по интенсивности белые пятна, являются завершающими. Живописный мазок на лице отсутствует, и поэтому исключается его характеристика по рентгенограмме. Следует отметить, что подобную рентгеновскую картину образует, как правило, красочный слой небольшой корпусности, в котором имеется невысокий фактурный рельеф.

Изучение системы живописного построения лица в микроскоп, а также его фактурной фотографии позволило более детально проанализировать многослойную живопись, а также уяснить характер авторского мазка. Наличие темного подмалевка говорит о том, что живописное построение лица портретируемого шло «от тени к свету». В зависимости от различной интенсивности падающего на лицо света изменяется пигментный состав красочного слоя. С нарастанием степени освещенности увеличивается количество свинцовых белил в телесном тоне, и, наоборот, небольшое количество белил присутствует в краске менее освещенных частей лица. Почти чистые белила используются художником при выделении акцентов света, например, на кончике носа. Завершающие белильные слои, как показывает фотография, сделанная в косонаправленном пучке света и подтверждающая наблюдения, которые были получены при исследовании красочного слоя в микроскоп, проложены короткими, неширокими мазками, слегка отражающими структуру кисти. Более корпусно прописана освещенная надбровная дуга ближе к виску, висок, а также выступающая часть челюсти. Частично прописана ушная раковина, освещенная боковая стенка носа, припухлость над верхней и под нижней губой. Короткие мазки своим расположением активно не участвуют в образовании определенной формы. Завершающие небольшие слои краски с фактурой кисти, как правило, передают максимальный свет. Постепенное увеличение белил

в красочных слоях создает плавность перехода от света к тени, что в свою очередь обеспечивает пластическую лепку объемов лица. Слой краски, проложенный около внутреннего угла глаза и на боковой спинке носа, также не имеет отчетливых структурных мазков, которые бы выявляли форму носа. Мазки очень короткие и с трудом различимые. Не исключается, что в некоторых местах (над губой) краска наносилась торцом мягкой кисти. Наиболее выражены мазки, прорабатывающие освещенные участки шеи, светлый шейный платок. Следует отметить, что завершающий слой краски значительно истончен за счет протертостей. Лаковое покрытие имеет неравномерную толщину, участки старого лака и более поздняя лаковая пленка дают в фильтрованных ультрафиолетовых лучах неоднородное свечение. Авторская подпись находится под старым загрязненным лаком и сделана черным пигментом по сухому красочному слою. Подпись в свете люминесценции не читается, выявляется одновременный с красочным слоем кракелюр. Все это подтверждает, что подпись является старой и, по всей видимости, принадлежит автору<sup>11</sup>.

3. В целом рентгенографическое и технологические исследования не отводят портрет Эйлера от авторства Дарбеса. О живописных особенностях и манере исполнения портрета из женеvского музея мы можем судить лишь на основании фотографии. Этого недостаточно для того, чтобы выяснить, является ли произведение бесспорно авторским или современной художнику копией с оригинала. На этот вопрос могут ответить специалисты из женеvского музея. Нам кажется, вполне возможным допустить, что портрет, принадлежащий Третьяковской галерее, — оригинальная авторская работа, а портрет Эйлера из женеvского собрания является авторским повторением И. Ф. Дарбеса с удавшегося оригинала. Возможно, этот портрет был исполнен по желанию Кютнера для гравирования. Упоминание о просьбе Кютнера прислать ему портрет Эйлера кисти Дарбеса встречается в литературе.

К сожалению, на сегодняшний день мы располагаем скудными сведениями относительно истории нашего портрета. Оборот холста картины помог уточнить некоторые данные. Штамп и номера свидетельствуют о том, что портрет находился в Государственном музейном фонде. В инвентарной книге Государственного музейного фонда № 2, хранящейся в Центральном государственном архиве литературы и искусства, портрет Эйлера значился как «Портрет неизвестного старика в шляпе». О нем сообщалось, что вместе с некоторыми произведениями немецкой и итальянской школы портрет поступил из собрания Нарышкиных в Москве, в 1926 г. он был передан в Музей изящных искусств (ГМИИ им. А. С. Пушкина) [13]. В Государственную Третьяковскую галерею портрет поступил в 1928 г.

Хочется думать, что со временем удастся выяснить, из собрания каких Нарышкиных происходит портрет и при каких обстоятельствах он попал к ним.

Уже сейчас можно отметить важность обнаруженного в Третьяковской галерее неизвестного ранее портрета Леонарда Эйлера. Ведь именно этот портрет современники считали одним из лучших и правдивейших. Академик Н. Фус, близко знавший Эйлера, свидетельствовал, что изобра-

<sup>11</sup> Исследования проводились рентгенологом-искусствоведом М. П. Виктуриной, отпечатки рентгенограмм и фактурных фотографий исполнены рентгенотехником И. Н. Фатюхиным.

жение на картине имело большое сходство с ученым [14, с. 301]. Перед нами облик старого человека, всегда отличавшегося предельной скромностью, добросовестностью, неизменным доброжелательством к людям, вызывавшего уважение и любовь всех, кто знал Эйлера лично. «Я видел его в предпоследний день жизни... веселым, приветливым, как всегда. Он только жаловался на головокружение. Около пяти часов вечера, когда вошел один из его внуков, он стал с ним шутить, сидя на диване и куря табак», — вспоминал об Эйлере один из его друзей — учитель математики Абель Бурья [15, с. 606]. Таким изображен ученый на портрете Дарбеса за четыре года до кончины. В светлокоричневом домашнем халате с меховым воротником, в бархатном берете приглушенных зеленых тонов с футляром на шее. Высокий лоб, крупные черты лица, глубокие складки на переносице и на подбородке вокруг плотно сжатых, кажется, чуть тронутых улыбкой губ, пристально смотрящий на незримого собеседника левый глаз (больной правый деликатно скрыт художником в тени). Чувствуется в облике этого одаренного человека сохранившийся, несмотря на возраст, острый ум, удивительно цепкая память (Эйлер мог читать наизусть «Энеиду», начиная с любой строки), энергия, поразительная работоспособность.

Трудно переоценить сделанную находку. Ведь Академия наук СССР не имеет ни одного прижизненного оригинального портрета ученого. Находящийся в Москве, в здании Президиума Академии наук СССР скульптурный бюст работы Ж. Д. Рашетта — посмертный. Изображение молодого Эйлера (там же) — копия с одного из портретов немецкого художника Э. Хандмана.

Удачным совпадением можно назвать то, что находка сделана в дни, когда вся мировая научная общественность отмечала 200-летие со дня смерти выдающегося математика. Это небольшой вклад советского искусствования в сохранение памяти об одном из ученых мировой науки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Врангель Н. Н.* Венок мертвым. СПб., 1913.
2. *Nagler G. K.* Neues allgemeines Künstler-Lexicon. München, 1836.
3. *Neumann W.* Lexicon Baltischen Künstler. Riga, 1908.
4. *Thieme U., Becker F.* Allgemeines Lexicon der bildenden Künstler. Leipzig, 1914. Bd. 8.
5. *Bénézit E.* Dictionnaire des peintres, sculpteurs, dessinateurs et graveurs. Paris, 1976. Т. 3.
6. *Ровинский Д. А.* Подробный словарь русских гравированных портретов. СПб., 1888. Т. 3.
7. *Глинка М. Е.* Леонард Эйлер (опыт иконографии) // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 569—589.
8. *Сапрыкина Н. Г.* Коллекция портретов собрания Ф. Ф. Вигеля: Аннот. каталог. М.: Изд-во МГУ, 1980.
9. *Bernoulli J.* Reisen durch Brandenburg, Pommern, Preussen, Curland, Russland und Pohlen in den Jahren 1777 und 1778. Leipzig, 1779. Bd. 3.
10. *Le catalogue manuscrit de la collection Duval de 1808* // Arch. Mus. art et hist. Genève.
11. Старые годы. 1908. Июль—сентябрь.
12. *Ацаркина Э. Н.* О. А. Кипренский М.: Мол. гвардия, 1948.
13. ЦГАЛИ, ф. 686, оп. 1, № 77, л. 17, № 3529.
14. *Пекарский П. П.* История имп. Академии наук в Петербурге. СПб., 1870. Т. 1
15. *Павлова Г. Е.* Забытое свидетельство современника о смерти Леонарда Эйлера // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 605—608.

# ПОХВАЛЬНАЯ РЕЧЬ \* ПОКОЙНОМУ ЛЕОНГАРДУ ЭЙЛЕРУ,

СОЧИНЕННАЯ НА ФРАНЦУЗСКОМ ЯЗЫКЕ  
И ЧИТАННАЯ В СОБРАНИИ АКАДЕМИИ  
ОКТАБРЯ 23 ДНЯ НИКОЛАЕМ ФУСОМ [1]

Изобразить течение жизни великого мужа, прославившего век свой просвещением рода человеческого, есть то же, что хвалить разум человеческой. Кто приемлет на себя сие звание, тщетно будет трудиться по достоинству оное исполнить, ежели к совершенному знанию наук, которых он обязан показать успехи, не присовокупит приятного слога, похвальной речи приличного, которой, как говорят, не совместен с отвлеченными науками. Хотя, с одной стороны, по важности предмета не имею я нужды в украшениях, однако писатель, описывая события, непременно должен расположить оные приятным образом, представить ясно и изобразить сильно. Он должен показать, каким образом природа производит великого человека, изложить обстоятельства, которые споспешествовали к разверзанию его дарований и, исчисляя подвиги его в науках, не должен оставить без исследования состояния, в каком они до него находились, и назначить предел, от которого он начал свое течение.

Принявши на себя должность представить Собранию сему жизнь Леонгарда Эйлера, мужа, незабвенную память изобретениями снискавшего, чувствовал я все сии обязанности и видел, что кроме внутреннего признания бессилия моего, умножаемого горестию, которую кончина Эйлера мне причинила и которая в самое сие мгновение во мне возобновляется, тесные пределы речей, в подобных собраниях читаемых, не дозволят мне исполнить все должности писателя. И для того изображу некоторые токмо черты жизни сего великого мужа, и тому, кто чувствует довольно сил похвалить по достоинству, доставляя нужные сведения, посыплю некоторые только цветы на гроб моего дражайшего и знаменитого наставника.

\* \* \*

Леонгард Эйлер, профессор математики, член Санктпетербургской Императорской академии наук, Королевской Берлинской академии бывший директор, член Королевской Парижской академии, Лондонского общества и пр., родился в Базеле 4/15 апреля 1707 года. Отец его был Павел Эйлер, пастор в Ригене, а мать Маргарета Брукер из рода, в ученом обществе довольно известного.

Первые свои лета препроводил он в Ригене. Сей сельской жизни в такой стране, в которой гля нравов всегда тихими стопами шествовала, и примеру своих родителей обязан он был простотою и чистотою нравов, которыми он во всю свою жизнь отличался и которые, по всей ве-

---

\* «Похвальная речь» воспроизводится по русскому переводу в «Академических сочинениях» (СПб., 1801, Ч. 1. С. 97—167). Примечания к ней [1—22] помещены после основного ее текста.

É L O G E  
D E  
M O N S I E U R  
L É O N A R D E U L E R ,

L U  
A L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES,  
DANS SON ASSEMBLEE

Du 23 OCTOBRE 1783

P A R  
N I C O L A S F U S S ,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES ET MEMBRE DE L'ACADÉMIE  
IMPÉRIALE DES SCIENCES.

AVEC UNE LISTE COMPLETE DES OUVRAGES  
DE M E U L E R

St. PÉTERSBOURG.

1783.

*Титульный лист «Похвальной речи»  
Л. Эйлера, прочитанной Н. И. Фусом*

оно имеет влияние на разверзание способности мыслить и сколь полезно во всех отраслях наших познаний, взирал на оное спокойным духом. И так разуму младого Эйлера довольно было времени на разверзание, которое с такою скоростью последовало, какая бывает признаком отменных дарований и предвестницею будущей славы.

Послан будучи в Базель для изучения философии, Эйлер со тщанием пользовался наставлениями, профессорами преподаваемыми. Ужасная память, которою был одарен, привела его в состояние скоро постигнуть все, что было не геометрия, и все оставшееся время посвятить на науку, паче прочих его привлекающую. При сильной склонности к математике и при духе, от часу более успехами воспламеняемом, не умедлил он обратит на себя внимание величайшего того времени геометра Иоганна Бернуллия, который в краткое время отличил его от прочих слушателей, и, не имея времени преподавать особливых наставлений младому геометру, согласился по прозьбе его по субботам решить все затруднения, которые встретятся при чтении труднейших математических сочинений. Способ изящной, но притом такой, от которого успеха ожидать было можно при пылком только уме и неутомимом прилежании, каковы были Леонгарда Эйлера, назначенного еще тогда превзойти своего наставника сочинениями своими толико прославившегося.

В 1723 году Эйлер произведен в магистры: при сем случае говорил

ростности, споспешествовали и в состояние его привели совершить путь, который имя его сделал бессмертным.

Первые наставления получил он от отца своего, который, любя науки математические и будучи ученик славного Якова Бернуллия, не преминул и сына своего, как скоро лета его позволили, наставлять математике. Назначая сына своего в духовное состояние, не ожидал он, чтоб то, что вначале служило полезным только препровождением времени, когда-нибудь обратилось в постоянное и важнейшее упражнение. Но семья, посеянное в младого геометра, в короткое время глубоко укоренилось. Имея щастливое расположение и отменный дар к упражнению в математических науках, тогда только был доволен, когда душевные свои силы обращал на оные.

По щастию, отец его долго не помышлял отвратить его от упражнения, которое самому ему было приятно, и, ведая, сколь великое



он речь на латинском языке, в которой сравнивал философию ньютонову с декартовой [2]. По получении сего достоинства, повинувшись воле родителя своего, начал упражняться в богословии и восточных языках. Упражнение сие, необходимо нужное для звания, к которому назначил его родитель, хотя не соответствовало склонности Эйлера, однако было небесплодно. Вскоре потом, получа от него дозволение обратиться к математике, от которой ничто совершенно отвлек его не могло, с сугубым жаром к оной прилепился. Продолжая пользоваться советами Иоганна Бернуллия, в тесное дружество вступил с детьми его Николаем и Даниилом. Сей союз, на согласии склонностей основанной, доставил Академии то, что она имела удовольствие числить его между своими членами.

Екатерина I, учреждая в столице Академию наук, произвела в действо намерение Петра Великого. В 1725 году два младые Бернуллия вызваны были в Санктпетербург; они при отъезде своем обещались Эйлеру, великое желание туда же следовать оказавшему. что возможное приложат старание доставить ему приличное место; в следующем году уведомили его, что они нашли, чего искали, и советовали ему математических знаний сделать приклад к физиологии. Человек отменных дарований ничего тщетно не предприимлет. Чтобы сделаться физиологом, нужно было только Эйлеру захотеть. Вписавшись в число учеников врачебной науки, наставлениями искуснейших врачей в Базеле пользовался с жаром, бодрому духу приличным [3].

Сие упражнение, вместо того чтобы занять все силы духа, сколь деятельного, столь и обширного, не воспрепятствовало Эйлеру издать рассуждение о свойстве и распространении гласа и решить вопрос, от Парижской академии предложенной, о выгоднейшем образе ставить мачты на кораблях; решение его ближе всех подходило к тому сочинению, которому в 1727 году определено награждение. Сие сочинение и предложение, которое он защищал для получения убылого места профессора физики в Базеле, показывают, что Эйлер давно уже обращал мысли свои на кораблеплавание, которое он в последующие времена обогатил толь многими открытиями.

По частию Санктпетербургской академии, жребий, определяющий в Базеле места как в гражданском правлении, так и в университете, Эйлеру не благоприятствовал [4], и для того оставя отечество, переселился в Санктпетербург, где нашел удобнейшее место оказать ученому свету свои превосходные дарования. Первые его сочинения соответствовали ожиданию Академии и его соотчичей Германа и Бернуллиев.

Наименован будучи адъюнктом математики, не помышляя уже о физиологии, по званию своему посвятил себя упражнению, от которого ни намерения родительские, ни малые выгоды, обыкновенно с ним сопряженные, отвлек не могли. В короткое время обогатил он первые томы *Комментариев* многими сочинениями, могущими возбудить соревнование между им и Даниилом Бернуллием, которое во всю их жизнь продолжалось, не нарушая их дружества и не возрождая зависти, качества, благородной души недостойного и все прочие добродетели помрачающего.

В то время, когда Эйлер прилепился к математике, не имела она ничего привлекательного. Человек посредственных дарований не мог надеяться оною отличиться. Имена великих мужей, конец прошедшего и настоящего века соделавших славными, были еще в свежей памяти:

Ньютон и Лейбниц, преобразившие геометрию, лишь только жизнь свою кончили; в памяти еще были важные заслуги, которые Гугений, Бернулли, Моавр, Чирнгаус, Тейлор, Фермат и многие другие геометры изобретениями своими всем отраслям математики оказали. По сей знаменитой эпохе, что Эйлеру оставалось? Мог ли он надеяться, чтоб природа, которая на дары свои нерасточительна, произведши толико великих умов, для математики способных, в пользу его еще сотворила чудо? Он, почувствовав, что она для него сделала, вступил в путь с отважностью, которую внушает чувство своего превосходства, и показал, что предшественники его не исчерпали еще всех сокровищ, которые геометрия и аналитика в себе заключают.

И в самой вещи щет бесконечно малых количеств был весьма близок к своему младенчеству и в руках своих изобретателей не достиг еще достоянного совершенства. В механике, динамике, а наипаче в гидродинамике и науке о движении светил небесных несовершенство сего щета было ощутительно. Известен был способ делать к ним приклад дифференциального щета; но когда надобно было от элементов восходить до самых величин, то повсюду встречались затруднения. Что касается до свойства чисел, сочтения Фермата, с толиким успехом трудившегося, пропали, и с ними все глубокие об них исследования. Артиллерия и кораблеплавание основаны были больше на правилах неверных и произведенных из множества примечаний, нередко между собою противоречущих, нежели на твердой истинной теории. Неравности, усматриваемые в движении светил небесных, а особливо смешение сил, движение луны изменяющих, приводило в отчаяние геометров. Практическая астрономия боролась против несовершенства зрительных труб, и не было надежных правил составлять оные. Эйлер попеременно обращал мысли свои на сии предметы. Он привел в большее совершенство щет интегральный, изобрел новой род алгебраических выкладок, до синусов и ахроматических труб касающихся; проще сделал бесчисленные действия аналитические и при помощи сих сильных пособий и удивительной способности разбирать самые труднейшие алгебраические изображения пролил новой свет на все науки математические.

Немного времени спустя после вступления в Академию Эйлер едва не избрал другого состояния, различного от того, к которому влекла его склонность. Кончина Екатерины I угрожала разрушением Академии, которая по новости своей не достигла еще до твердого состояния. На Академию взирали, как на учреждение, никакой ощутительной пользы не приносящее, но немалого иждивения требующее. Не знали еще тогда надлежащей стороны, с которой на подобные общества взирать должно, которые на тот единственно конец бывают учреждаемы, чтобы собирать, распространять и в большее совершенство приводить все полезные в науках открытия. Вызванные академики почувствовали тогда нужду принять в рассуждении состояния своего надлежащие меры, и Эйлер решился было вступить в морскую службу. Адмирал Сиверс, считая человека, каков был Эйлер, находкою, предложил ему во флоте место лейтенанта и обещался доставить ему скорое произхождение [5]. По щастию, обстоятельства переменились в пользу Академии, и когда в 1730 году академики Герман и Бильфингер, оставя Академию, возвратились в свои отечества, то Эйлер поступил на место профессора физики, а когда друг его Даниил

Бернуллий в 1733 году оставил Академию, то Эйлер наименован его премником.

Великое число сочинений, которые Эйлер по сие время представил Академии, уверяет об удивительном разума его изобилии, о великой способности решить наитруднейшие вопросы и о его безмерном прилежании, которого он показал отменной пример, когда в 1735 [году] потребно было для Академии поспешить некоторым исчислением, на которое прочие математики требовали несколько месяцев. Эйлер обязался оное сделать в кратчайшее время и к удивлению Академии кончил оное в три дня. Но сколь дорого стоил ему труд сей? Впал в горячку и был у дверей гроба. И хотя наконец избег оного, однако лишился правого глаза от опухоли, во время болезни приключившейся. Потеря толь драгоценного органа всякого другого понудила бы себя падать, чтоб сохранить другой глаз; но Эйлер не знал отдохновения и скорее отрекся бы от пищи, нежели от труда, которой от непрестанного напряжения духа сделался для него необходимо нужным [6].

Великая перемена, от изобретения дифференциального и интегрального щета во всех почти отраслях математики последовавшая, переменяла вид и механики. Невтон, Бернуллий, Герман и Эйлер по временам обогатили сию высокую и необходимо нужную часть прикладной математики бесчисленными новыми открытиями. Между тем недоставало полного сочинения о движении, выключая двух или трех, коих Эйлер чувствовал несовершенство. Он с прискорбием видел, что *Начала философии* невтоновой и *Форономия* германова, наилучшие тогдашних времен сочинения о движении, под покровом синтетического порядка скрывали путь, которым шествуя сии великие мужи обогатили механику толь важными изобретениями; на открытие оного употребил он все пособия аналитики, которые имея в своей власти в состоянии был решить множество таких вопросов, к коих решению никто до него приступить не отваживался. Он изобретения свои соединил с изобретениями прочих геометров, привел их в порядок и издал оные в 1736 году [7].

Ясность в понятиях, точность в предложении, порядок в расположении суть качества, которые каждой творец должен стараться блюсти в своих сочинениях, ежели желает, чтоб они служили читателям наставлением. Они составляют малейшую часть достоинства *Механики*, Эйлером изданной. Темнота и беспорядок суть такие недостатки, в коих никто не может укорить того, кто имел дар глубочайшие свои исследования предлагать ясно и вразумительно. Сие сочинение утвердило славу его и доставило место между первыми геометрами еще при жизни Иоганна Бернуллия. Превосходным только умам дано шествовать толь быстрыми стопами и при самом начале сравняться с мужем, толь многими украшенного победами, одержанными над всеми геометрами аглинскими и французскими, отважившимися испытать против его свои силы.

Я уже упомянул, что Эйлер при самом вступлении в Академию обогатил записки ее множеством сочинений, показывающих его проникание. В них содержится теория достопамятнейших кривых линий, каковы суть тавтохроны, брахистохроны, траектории и пр., глубочайшие исследования до щета интегрального, до свойства чисел, до движения светил небесных, до притяжения тел сфероидических и до многих других предметов касающиеся, которых сотой части довольно бы было к прославлению имени

другого. Но и решение задачи, до исопериметров касающейся, толико славной по стяжанию, бывшему между двумя братьями Яковом и Иоганном Бернуллием, из которых каждой думал, что нашел оной решение, но ни единой не познал во всей обширности сию задачу, должно было увенчать славу Эйлера и показать его превосходство в аналитике. Число и достоинство всех сих сочинений приводит в удивление, и непонятно, каким образом один человек в состоянии был издать толикое оных множество.

Правда, что человек толико трудолюбивый не принимал участия в забавах, в которые ученого, толикую славу и почтение приобретшего, сообщение вовлечь может и которые по его младости и по веселому в обращении нраву простительны бы были. Главное отдохновение Эйлер полагал в музыке, но и тут присоединял он геометрической дух. Вдаваясь приятному чувствованию согласия, углублялся он в исследование причин оного и во время самой игры вычислял соразмерность гласов, и можно сказать, что *Опыт новой теории музыки*, в 1739 году им изданной, был плод его отдохновений.

Сие глубокомысленное и новыми или новым образом предложенными мыслями наполненное сочинение не имело желаемого успеха, может быть, для того, что содержит в себе много геометрии для упражняющихся в музыке или много музыки для геометра. Несмотря на то, кроме теории, основанной отчасти на первых правилах, Пифагором изобретенных, оно содержит в себе множество наставлений для сочинителей музыки и для художников, мусикийские орудия делающих. Сверх того, наука о голосах предложена в нем с такою ясностью и точностью, какую все эйлеровы сочинения отличаются.

Что касается до самой теории, которой физическая часть никакому не подвержена сумнению, Эйлер приятность музыки производит от того, что ощущение всякого совершенства возбуждает в нас удовольствие, и поелику порядок есть одно из совершенств, приятное чувствование в нас возбуждающих, то все удовольствие, которое приятная музыка в нас производит, состоит в постижении размера, который голоса блюдут между собою как в рассуждении протяжения, так в рассуждении числа сотрясений, в воздухе производимых. Сие психологическое правило прикладывает Эйлер ко всем частям музыки и на нем основывает свою теорию.

Изъяснение сие не признано достаточным, и поелику не во власти геометра чувствования души подвергнуть исчислению, то трудно доказать истину положения, за основание Эйлером принятого. Но положивши, что оное истинно, то должно согласиться, что лучшего приклада сделать иного невозможно. Сверх сего, все возражения, кои против сего положения сделать можно, хотя бы были нерешимы, мало убавили бы цены сего сочинения. Оно подобно было бы знанию, во всех частях совершенному, но на зыблщемся основании воздвигнутому, и, удивляясь искусству зодчего, жалеть только должно о том, что не мог воздвигнуть оного на твердейшем основании.

Прежде издания рассуждения сего о музыке Эйлер сочинил *Введение в арифметику*. По желанию начальника Академии, многие академики приняли на себя труд сочинить первоначальные наук основания для наставления юношества, и великой геометр не вменял себе за унижение трудиться над сочинением, которое было ниже сил его, но важно по намерению, с которым было писано. Усердие и ревность, с которыми он прини-

мал на себя и исправлял дела, собственно до должности его не принадлежащие, были причиною, что многие на него были возлагаемы, и между прочим в 1740 году Правительствующим Сенатом препоручено было ему надзирание над Географическим департаментом.

Когда Парижская академия, уже в 1738 году увенчавшая награждением рассуждение его о свойстве огня, предложила в 1740 году важный вопрос о приливе и отливе морском, то Эйлер имел новый случай оказать силы своего разума. Сочинение его, содержащее решение сего трудного и глубоких выкладок требующего вопроса, есть превосходный образец аналитики и геометрии. Правда, что не получил он целого награждения, в нем имели участие Даниил Бернуллий и Маклорен, два достойные его соперника. Парижская академия редко имела столь блистательное содействие; и можно утвердить, что на один и тот же вопрос никогда не получила она трех толь удовлетворительных и основательных решений. Сочинение эйлерово особливо отличается понятным изъяснением действия на море сил, единственно от Солнца и Луны происходящих, определением вида Земли, поелику она от действия помянутых сил изменяется, искусством, с которым ввел в исчисление грубость воды, которую в начале пренебречь принужден был, многими главство найденными интегралами и, наконец, остроумным изъяснением главных явлений прилива и отлива.

Ничто не может столько уверить об истине глубоких в сем деле эйлеровых исследований, как согласие его мыслей с мыслями Бернуллия. Сколь ни различны начала, на которых сии великие два мужа основали свои рассуждения, однако во многих статьях заключения их согласны между собою, как, например, в определении прилива и отлива в холодных поясах. Так истина любимцам своим иногда в разных видах представляется, какими бы путями они постигнуть ее ни старались.

Я уже выше упомянул, что Эйлер и Бернуллий часто встречались в исследованиях своих, до прикладной математики касающихся. Бернуллий в некоторых случаях превосходил Эйлера тем, что на точнейших физических началах основал свои рассуждения. Бернуллий имел терпение положения, для выкладок нужные, производить из опытов, с великим рассуждением и осторожностью деланных, а Эйлер, которого пылкий дух спешил окончить свои вычисления, редко опытами занимался. Исполнен будучи проныцанием различать ложь от истины и способностью ценить их по подобию и соображению, делал иногда отважные положения, но награждал сие превосходством своим в исчислениях алгебраических и искусством связные аналитические формулы обращать в простейшие, прикладывать их к опытам и производить из них надежные заключения, превосходил он не только Бернуллия, но и всех современных математиков.

Некоторые ученые мужи снискали себе славу обширную с другими перепискою, а иным слава доставила сию выгоду, ежели только выгодою назвать можно; в числе последних был Эйлер. Ибо все славнейшие геометры за честь себе поставляли с ним переписываться. Но примечания достойно то, что переписка его с Иоганном Бернуллием началась уже в 1728 году и продолжалась до смерти его, в 1748 году последовавшей, и Нестор между геометрами не вменял себе за унижение просить нередко совета ученика своего и труды свои подвергать его рассуждению <sup>(a)</sup>.

<sup>(a)</sup> Чтобы дать понятие о доверенности, которую Бернуллий давно имел к проныцанию Эйлера, довольно будет привести здесь одно место из его писем: «De caetero

Теперь приступаем мы к достопамятному времени жизни Эйлера. Многие и отличными успехами увенчанные его сочинения соделали имя его известным по всей Европе, и потому в 1741 году Прусской министр граф Мардефельд сделал ему именем Государя своего предложение. Древнее Лейбницем учрежденное Королевское общество под покровительством Фридерика II начало приходить в силу. Он по вступлении своем на престол достойное имени своего предпринял намерение, упразднив прежнее общество, основать Академию наук и для того пригласил к себе Эйлера. Колеблющееся тогда состояние Санктпетербургской Академии наук выгодным условиям, Эйлеру предложенным, придало большую силу, и он, оставя Санктпетербург, со всем своим семейством в июне месяце 1741 года отправился в Берлин, чтобы возвысить славу Академии, под покровительством венчанного философа учреждаемой.

По прибытии в Берлин в непродолжительном времени получил он из стану при Рейхенбахе от Короля, военными действиями занятого, милостивое письмо, показывающее внимание, которое он имел к Эйлеру. Война, которая для наук всегда бывает гибельна, не позволяла Фридерiku II совершить благие в рассуждении Академии намерения. Между тем члены прежнего общества и некоторые другие ученые мужи составили новое общество. Эйлер был из числа последних и последний том *Записок* сего общества украсил пятью сочинениями, кои из всего сего собрания, может быть, были наилучшие. За сими следовало с непонятною скоростью множество исследований, рассеянных в *Записках* Академии, которые она по основанию своем ежегодно издавала.

Сему великому множеству сочинений о всем, что математические науки важного, трудного и глубокого в себе ни содержат, тем больше должны мы удивляться, что Эйлер не переставал притом сообщать подобных исследований Санктпетербургской академии, которая ему в воздаяние в 1742 [году] пенсию определила. Сочинения его составляют почти половину ее *Комментариев*. Взирая на скоропостижные разума его произведения, сказать можно, что глубочайшие рассуждения и труднейшие выкладки не больше ему труда стоили, как только писать оные, и потомству трудно будет поверить, чтобы на совершение толь многих трудов довольно было жизни одного человека.

К особливим сего времени сочинениям принадлежит изданной Эйлером общий способ находить кривые линии, заключающие в себе свойство какого-нибудь наибольшего или наименьшего количества. Когда Эйлер занимался решением задачи, до исопериметров касающейся, уже тогда он видел великую пользу сего исследования не только в чистой математике, но в решении вопросов, до физики касающихся. Он приметил, что все кривые линии, до которых таковые задачи доводят, заключают в себе что-нибудь наибольшее или наименьшее и что многие другие посредством исопе-

---

gratissimum mihi fuit intelligere, quod ad admirationem usque Tibi placuerint, quae scripsi de oscillationibus verticalibus, propter simplicitatem expressionis et insignem usum, quem praestare possunt in explicandis navium ponderibus; maluissem autem, ut ipse quoque calculum fecisses ex Tuo ingenio, quo mihi potuisset, annon in ratiocinando erraverim. Nam ingenue fateor, me Tuis luminibus plus fidere quam meis. Quae uberius affers, Vir excell. de Isoperimetricis, credo equidem, Te omnia probe ruminasse atque ad veritatis trutinam expendisse, ita ut vix quicquam restet, quod acerimam Tuam sagacitatem subterfugere potuerit etc.»

риметрии найти можно. Он даже то утверждал, что все естественные явления посредством учения о величайших и малейших, т. е. от конечных причин так, как от действующих, произвести можно, лишь бы только всегда провидеть было возможно то малейшее или величайшее количество, которое блюдет природа. Сим образом Даниил Бернулли тщился определить вид упругой нагнутой полосы, но, дошед до дифференциального четвертой степени уравнения, не в состоянии был произвести общего уравнения, изображающего все кривые линии, какие упругая полоса воспринять может. Он сообщил сие Эйлеру и притом догадку свою, что все кривые линии, около одной или многих привлекающих точек описуемые, определены быть могут равным образом. Эйлер, побужден будучи сею догадкою, паки на сей предмет обратил свои мысли и в 1744 году издал в свет полное сочинение о исопериметрах, о котором можно сказать, что истошил в нем все сокровища вышней аналитики и что оно содержит в себе первые основания щета вариаций, которой Эйлер со славным Лагранжем привел потом в большее совершенство.

В том же году возобновлена Берлинская академия, Эйлер именован директором Математического класса, издал теорию о движении комет и планет и теорию магнитной силы, увенчанную от Парижской академии награждением [8].

Учение о магнитной силе, в сем сочинении предлагаемое, столь известно, что нет нужды пространно говорить об оном. Принявши за основание декартово мнение, что все от магнита бываемые явления происходят от кругового движения бесконечно тонкого вещества по неприметным ходам магнитных тел, Эйлер воображает себе скважины магнита наподобие соприкосновенных, параллельных и подобно жилам устроенных трубок, и притом столь узких, что тончайшая только часть эфира может проходить по оным, [и полагает,] что упругость эфира понуждает оную следовать по скважинам магнита и при выходе из оных возвращаться к тому месту, где входит, и наконец составить род вихря. Из сего положения, с великим остроумием обдуманного, Эйлер изъясняет все магнитные явления, и согласие оного с опытами снискало ему многих последователей.

В том же году Король потребовал от Эйлера мнения, какое есть наилучшее сочинение, до артиллерии касающееся. В Англии издана была книга о сем предмете, которой творец был тот самый Робенс, которой охуждал *Механику* эйлерову, не разумея оной. Эйлер, приписавши сочинению сему похвалы, принял на себя труд перевести оную на немецкой язык и приобщить нужные примечания и объяснения. Прибавления сии содержат в себе полную теорию верженных тел, и в течение 38 лет не издано ничего о сем предмете, что бы было превосходнее того, что Эйлер поместил в оных о сей трудной части механики. В короткое время познали достоинство сего сочинения. Просвещенной министр Французского Короля Тюргот приказал перевести оное на французской язык и в артиллерийских училищах по нему преподавать наставления. В то же почти самое время напечатан перевод оного в Англии с возможным типографским великолепием. Эйлер, отдавая справедливость достоинству Робенса, скромным образом исправлял его погрешности и, сочинение его делая известным, отмстил хулителю своему за прежнее его злоречие. Я не скажу ничего о сем великодушном поступке, великому мужу приличном, на которой никто не будет взирать без удивления.

За сим сочинением следовали разные до физики касающиеся исследования, между которыми примечания достойнейшее есть теория о свете и цветах. Причину огня, тяжести тел, электрической и магнитной силы Эйлер произвел от эфира и исчислил малое сопротивление, которое сие тонкое вещество противопоставить может движению тел небесных. По сему удобно можно уразуметь, что в изъяснении света не мог он быть доволен невтоновою системою истечения. Исследование ее служит введением *Новой теории о свете и цветах*, в 1746 году Эйлером изданной. Тут ясно доказывает он, что пустота небесных пространств несовместна с истечением света из Солнца и неподвижных звезд. Лучи, истекая из оных, наполнили бы всю поднебесною и небесным телам противоположили бы большее сопротивление, нежели эфир, которого бытие Невтон отрицал единственно для сей причины. Он доказывает невозможность, чтобы телесные частицы могли двигаться с толь непостижимую скоростию, не мешая одна течению другой, исчисляет уменьшение солнечного вещества и находит, что все сие огромное тело в малое число секунд истечением лучей должно бы было истощиться. Наконец, приводит другое, не меньше твердое возражение от строения прозрачных тел, которые, чтобы дать во все стороны проход лучам вещественным, сами должны бы были не иметь никакого вещества или, что то же значит, не быть телами.

Декарт думал, что свет к нам приходит так, как звук или голос. И в самой вещи, ежели помыслим, что оба чувствования как глаза, так и уха далее досязают, нежели прочие, что звук и свет простираются по прямым линиям и оба могут отражаться, то ощутительное найдем сходство между чувствованием голоса и света. Эйлер, подобие сие принявши за основание, показал, что свет рождается от сотрясения эфира, так как звук от подобного движения воздуха, что разность в цветах, подобно как в голосах, зависит от числа сотрясений, и голос, касаясь до тел звонких, может переменить направление и некоторым образом претерпеть преломление так, как солнечные лучи. Доказавши сие положение со всею строгостию, какую рассуждения, до физики касающиеся, иметь могут, Эйлер изъясняет наиудобнейшим и согласным с природою образом все явления света и звука, и различное лучей преломление, которого по системе невтоновой изъяснить не можно, само собою следует из теории эйлеровой, так что одним умствованием можно бы было дойти до оногo, ежели бы по опытам не было известно.

В то самое время, когда Эйлер опровергал систему истечения света, волфова философия в Берлине отменно была уважаема. Ни о чем больше не говорили, как о монадах и довольной причине. Волф и его последователи во всех случаях прибегали к последнему из сих закону, и обширное оногo употребление служило только поводом Эйлеру к шуточным разговорам; но учение о монадах почитал он за важную погрешность и достойную того, чтобы мнение свое об оной изъяснить пред целым светом. Оно содержится в сочинении его о стихиях или элементах тел, в котором доказывает, что простые части тел не могут быть непостижимо малы, не будучи бесконечно малы или ничего, что грубость или леность тел есть столько же общее телам свойство, как протяжение и непроницаемость, и что она не может быть совместна с силою беспрестанно переменять состояние, простым частям тел приписуемою. Следовательно, простые тел части, равно как атомы епикуровы, места иметь не могут, и все заключения о различии сил,



из начала неразличаемых производимые, сами собою уничтожаются. Испровергнувши систему, которая равную имела участь с толь многими другими, кои были велики, но ложны, вместо свойства, Лейбницем и Волфом монадам приписуемого, Эйлер полагает силу грубости, Лейбницем уже принятую, и всех бываемых перемен почитает ее источником. Из сего свойства изъяснил он потом давление и действие взаимно сражающихся тел и доказал, что вещество не может иметь способности мыслить. В опровержение сего мнения защитники монад многие издали сочинения, но они купно с учением о монадах забвению преданы, и тогда только об них упоминают, когда хотят показать пример заблуждения, которому иногда разум человеческий бывает подвержен.

Что касается до свойства грубости, в которой Эйлер полагает причину всех сил, то мысль сия велика и согласна с простотою, которую природа во всех своих законах наблюдает. Правда, что она основана на метафизическом понятии, но действия ее можно подвергнуть исчислению, и ежели положение достаточно к изъяснению явлений, то ничего от оногo более требовать не можно.

Здесь было бы место говорить о многих других философических исследованиях Эйлера, в которых с удовольствием и удивлением можно бы видеть сопряжение здравой физики с вышею геометрию; но пределы речи налагают долг молчанием прейти рассуждения его о хвосте комет, о северном сиянии и зодиакальном свете, о пространстве и времени и о начале сил и проч. Сколь изобилен и щастлив он был в открытии важнейших математических истин, столь остроумен в изъяснении физических явлений. Смел в положениях, кои исчисления оправдать могли, но осторожен, кои исчислению не подвергаются. Между тем он был творец глубочайших и славнейших систем; некоторых из них цену уже познали, потомство определит прочим. Для бытописателя довольно, когда он показал, что важные сии положения нового в себе содержат.

От философа обратимся паки к геометру. Из всех полезных знаний, которые аналитика, с геометрию сопряженная, могла возвысить до некоторого степени совершенства, одно только мореплавание не видело еще никакой пользы от успехов, в науках физико-математических учивенных. Исключая гидрографическую часть и знание, до направления пути корабельного касающееся, ничего не было исследовано математическим порядком, ибо недостаточные опыты Гюгенса и кавалера Рено о управлении кораблей и определении их скорости едва внимания достойны [9]. Эйлер был первой, которой отожился кораблеплавание обратить в полную и точную науку. В 1735 году изданное рассуждение о колебании плавающих, которого сочинитель был Делаacroа, подало ему первые мысли к сему предприятию. Исследования о равновесии кораблей доставили ему способ исчислять их остойчивость, и успех, который он имел в сем деле, ободрил его объять во всем своем пространстве кораблеплавание. Отсюда произошло великое сочинение, из двух частей состоящее и в 1749 году Академиею изданное. В первой части предложено геометрическим порядком все, что теория равновесия, движение плавающих и сопротивление жидких тел труднейшего и глубочайшего в себе ни заключает.

Но сих общих правил в мореплавании недовольно; в нем вопрошается о плавающих телах определенной фигуры и нужно исчислять не только сопротивление и силы, на корабль действующие, но, сверх того, уметь умень-

шить первое и увеличить последние сколько возможно, так чтобы, предохраняя корабль от колебания, дан ему был такой вид, в котором бы соединены были все возможные выгоды, и корабль соответствовал бы намерению, к которому назначается. И так теория, кроме общих правил, до строения и управления кораблей касающихся, должна показать, каким образом можно согласить между собою все свойства, какие хороший корабль иметь должен. Между ими некоторая суть такого рода, что без жертвования других достигнуть невозможно. Так, например, наибольшая остойчивость и скорейший ход не могут вмещены быть в одно и то же судно. По сему весьма нужно знать, какую часть каждого качества для других жертвовать можно. Сему научает вторая часть, в которой Эйлер соединил все, чего искусство путевода и строителя кораблей от теории ожидать может. Сию важную часть прикладной математики в последующие времена обогатил он новыми и остроумными рассуждениями, рассеянными в *Записках* Санктпетербургской и Берлинской академии. Сюда особливо принадлежат сочинения, одно о способе награждать недостаток действия ветра, а другое о действии на корабль колебания с бока на бок и с кормы на нос, из которых последнее в 1759 году от Парижской академии удостоено награждения.

Долгое время в строении кораблей по причине недостатка верных и надежных правил принуждены были следовать на обыкновении только основанным и, не взирая на многочисленные опыты, строение и оснастка кораблей многим недостаткам были подвержены. По издании упомянутых сочинений кораблестроение вдруг обогатилось полною теориею, до которой другие искусства посредством многих испытаний и постепенно достигали.

Но теория сия писана на языке, у людей, строением кораблей занимающихся, не употребительном, и предполагает такие знания в математике, каких ни от строителей кораблей, ни от путеводителей требовать не можно. И потому важные эйлеровы открытия тогда только в практике с пользою употреблены быть могли, когда бы они отделены были от трудных выкладок аналитических и глубоких исследований. Сей недостаток сам Эйлер чувствовал, и частые беседы, кои он по возвращении в Санктпетербург имел с адмиралом Кновельсом, подали ему повод исключить из теории все, что не принадлежит собственно к мореплавателям, что для них недовольно понятно, и в 1773 году издал *Полную теорию строения и вождения кораблей, вразумительную всем в мореплавании упражняющимся*.

Никогда сочинение геометра не имело толь славного успеха. В короткое время сделано оно новое издание в Париже; по нем начали преподавать наставления в королевских училищах, для мореплавания учрежденных <sup>(b)</sup>, и Король творцу оногo в воздаяние за выгоды, которые многочис-

(b) Письмо от Тюргота, при сем случае к Эйлеру писанное, делает честь обоим сим великим мужам, и для того не могу противостоятъ искушению, чтобы не поместить здесь оногo:

à Fontainebleau, le 15 Octob. 1775  
 Pendant le tems, Monsieur, que j'ai été chargé du département de la Marine, j'ai pensé que je ne pouvois rien faire de mieux pour l'instruction de jeunes gens élevés dans les écoles de la Marine et de l'Artillerie, que de les mettre à portée d'étudier les ouvrages que Vous avez donnés sur ces deux parties des Mathématiques: j'ai en conséquence proposé

ленные его изобретения принесли Франции и всем просвещенным народам (сии суть точные выражения парижских издателей эйлеровой теории), прислал 6000 ливров. В то же почти самое время сие изящное сочинение издано на итальянском языке, аглинском и российском, и Государыня Императрица Екатерина II пожаловала Эйлеру 2000 рублей.

Хотя сочинения сии изданы в разные времена и сие последнее уже по возврате Эйлера в Санктпетербург, однако главные упражнения геометра нашего, до одного и того же предмета касающиеся, соединил я в одно место, для того чтобы можно было видеть, сколь великие оказал он мореплаванию и кораблестроению заслуги, двум наиболее полезным и глубочайшим частям познаний человеческих.

В 1749 году Фридерик II поручил Эйлеру освидетельствовать канал Фун между реками Гавелем и Одером. Из пятидесяти четырех королевских писем, от 1741 до 1777 года к Эйлеру писанных, между которыми многие писаны рукою самого Короля, вижу я, что во многих случаях требовал он от Эйлера совета, и Эйлер, рассматривая щеты Шенебекских солеварен, водяные работы в Сансуси и многие прожеқты, до доходов и расходов касающиеся, имел случай оказать Королю немалые услуги, предохраняя от великих и бесполезных издержек, и часто удостоен был доверенности по делам, до Берлинской академии и Гальского университета касающимся [10].

Время настояло собрать и привести в систематической порядок великое множество важных изобретений, до дифференциального и интегрального щета касающихся, в течение тридцатилетнее Эйлером учиненных, но рассеянных по *Запискам* разных Академий. Давно он имел сие намерение; но прежде исполнения оного нужно было для людей, могущих понимать сии высокие наставления, приготовить особое сочинение, из которого бы могли они почерпать все предварительные понятия, каких учение сие требует. На сей конец сочинил он *Введение в аналитику бесконечно малых количеств*, изданное в Лаузанне в 1748 году; в нем изъяснил он все учение о функциях алгебраических и трансцендентных, о их преобразовании, решении и развязывании; в нем совокупил все, что нужно и полезно знать о свойствах бесконечных рядов, о нахождении их сумм, показал новый и достопамятный способ обращаться с экспоненциальными количествами, произвел из оных яснейшее и изобильнейшее понятие о логарифмах и их употреблении и объяснил новой им изобретенный алгоритм количеств, до круга или углов касающийся. Во второй части предложено общее учение о кривых линиях и их разделении, а в прибавлении теория тел и их по-

au Roi, de faire imprimer par Ses ordres Votre traité de la construction et de la manœuvre des vaisseaux et une traduction française de Votre Commentaire sur les principes d'Artillerie de Robins.

Si j'avois été à portée de Vous, j'aurois demandé Votre consentement, avant de disposer d'ouvrages qui Vous appartiennent; mais j'ai cru que Vous seriez bien dédommagé de cette espèce de propriété par une marque de la bienveillance du Roi. Sa Majesté m'a autorisé à Vous faire toucher une gratification de mille Roubles, qu'Elle Vous prie de recevoir comme un témoignage de l'estime, qu'Elle fait de Vos travaux et que Vous méritez à tant de titres.

Je m'applaudis, Monsieur, d'en être dans ce moment l'interprète, et je saisis avec un véritable plaisir cette occasion de Vous exprimer ce que je pense depuis longtems pour un grand homme qui honore l'humanité par son génie et les sciences par ses mœurs. Je suis etc.

Turgot

INTRODUCTIO  
IN ANALYSIN  
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio BEROLINENSI, & Academie Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.

TOMUS PRIMUS.



LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCLXVIII

Титульный лист I тома  
«Введения в анализ бесконечных»  
Л. Эйлера 1748 г.

INSTITVTIONVM  
CALCVLI INTEGRALIS

VOLV MEN PRIMVM

IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIS VSQVE AD INTEGRATIONEM ALQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR

AUCTORE

LEONHARDO EVLERO

ACAD SCIENT BORVSSIÆ DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO  
ACAD PETROPOLISIN. ET LONDIN



PETROPOLI

Impenſ Academiæ Imperialis Scientiarum

1768.

Титульный лист I тома  
«Интегрального исчисления»  
Л. Эйлера 1768 г.

верхностей с изъяснением, каким образом измерение их доводит до уравнений, три переменные количества в себе заключающих. Сие важное сочинение кончится учением о кривых линиях, двоякую кривизну имеющих и происходящих от взаимного пересечения двух кривых поверхностей.

За сим *Введением* следовали сочинения его о щете дифференциальном и интегральном, изданием Академии в 1755, 1768, 1769 и 1770 годах изданные. Главное достоинство первого из сих сочинений, касающегося до щета дифференциального, изобретателями Невтоном и Лейбницем, а потом Бернуллиями уже в совершенство приведенного, составляет образ, которым Эйлер производит истинные начала сего щета, систематической порядок, которым расположил оные, ясность, с которою показал пользу сего щета в учении о рядах бесконечных и в теории самых малейших и величайших количеств. Его открытия смешаны с открытиями первых изобретателей, но следы его разума незагадимы. Там, где его великому уму изобретать ничего не оставалось, усовершенствует изобретения других, известные уже начала и правила приводит в большую ясность и новые следствия извлекает. Кто не видит сих преимуществ в эйлеровых сочинениях? Повсюду есть что-нибудь новое и ему собственно принадлежащее; но подробное исчисление сего здесь неуместно.

Интегральный щет, которого первые следы теряются в рождении дифференциального, далеко отстоит от совершенства, до какого достиг последний. Известны правила, по которым от величин можно доходить до элементов, но не найдено еще общих правил от элементов восходить до самых величин, и ежели они когда-нибудь будут открыты, то потомки отдадут Эйлеру справедливость, что он приготовил к сему путь, показав способ брать многие такие интегралы, которых никто, кроме его, находить не мог. Ему дать славу надлежит, что пределы сего высокого исчисления распространил далее, нежели изобретатели оного надеяться могли, и сам Невтон, ежели бы мог к нам возвратиться, удивился бы чрезвычайным трудностям, которые сей великий муж преодолеть был силен.

Третья часть *Интегрального щета* содержит в себе новую отрасль, которою обогатил он аналитику, а именно щет вариаций. Я уже выше упомянул, что задачи о исопериметрах подали к оному первую мысль, где рассуждал он о кривых линиях, бесконечно мало разнствующих от данной. Сию мысль постиг Де Лагранж, достойный Эйлера преемник, который, оставя все рассуждения геометрические, обратил оную в задачу аналитическую и решил оную посредством нового рода счисления, которое Эйлер потом привел в большее совершенство и назвал щетом вариаций, потому что самое содержание между переменяющимися количествами приемлется в нем как переменяющееся.

Мы уже видели, что обширный разум Эйлера не всегда занимался математикою, сколь она ни пространна. Что ни имело хотя малейшее к ней отношение, все служило предметом его размышлений, и подвергал исчислению все, что могло быть исчислено. Мы увидим, сколько физика, оптика и астрономия обязана одной его теории о свете и цветах.

Исследование невтоновой теории подало ему случай разыскивать различность преломления лучей и вредные следствия в составлении диоптрических труб, от рассеяния цветов происходящие, которые [трубы] почти совсем оставить принуждены были и с лучшим успехом пользоваться трубами с зеркалами. Рассматривание удивительного строения глаза подало ему повод мыслить, что посредством соединения различных прозрачных тел можно отвратить сие неудобство. На сей конец в 1747 году предложил он составлять предметные стекла из двух, между которыми пустота водою была бы наполнена. Против мнения сего восстал известный аглинской художник Доллонд, утверждаясь на том, что таковое сложение противно мнению невтонову. Эйлер не умедлил доказать истину своего мнения; несколько опытов над менисками учиненных, между которыми пустота наполняема была разными жидкостями, утвердили его в сем мнении, и Доллонд, нашедши два различного рода стекла, удобные к точнейшему исследованию эйлера мнения, щастливую его догадку в 1757 году увенчал изобретением труб, ахроматическими называемых, которые в диоптрике и астрономии эпоху составили.

Успех, который имел Доллонд в сложении труб, пользуясь изобретением Эйлера, против которого вооружался, как опытам противного, побудил Эйлера исследованию свои об орудиях диоптрических распростерты далее. Он тщился наипаче в зрительных трубах отвратить недостатки, от фигуры стекол и от различного лучей рассеяния происходящие, и предложил общие правила, до составления телескопов и микроскопов касающиеся

ся, о коих точности удостоверен он был опытами и трубами, по предписанию его сделанными<sup>(c)</sup>.

Итак, прение между Эйлером и Доллондом обязаны мы одним из важнейших изобретений сего века, которое для астрономов потому было важно и полезно, что облегчило их труд в наблюдениях и подало повод открыть на небе новые явления.

Состязание между Эйлером и Даламбертом и Бернуллием о движении колеблющихся струн важно только для геометров. Даниил Бернулли был первой, которой исследовал физическую часть, касающуюся до голосов, от струн происходящих, и мыслил, что тейлорово решение достаточно к изъяснению оных. Эйлер и Даламберт, истощившие на сей вопрос все, что аналитика глубочайшего и высокого ни содержит, показали, что решение бернуллиево, от трохид тейлоровых произведенное, недостаточно. Сие прение долго продолжалось со взаимным уважением, толь великим мужам приличным, и не прежде кончилось, как с кончиною Даниила Бернуллия<sup>(d)</sup>.

Другое состязание, которое не столь долго продолжалось, но с большим с обеих сторон жаром, было с профессором Кенигом, который утверждал, что не Мопертюи был первый изобретатель начала наименьшего действия. Но как сие прение не касалось до изобретений самого Эйлера, то довольно здесь упомянуть, что принял в оном участие по искренней дружбе к Мопертюи и что оно было ему поводом издать несколько преизящных по сей части рассуждений [11].

Решение важной задачи о предварении равноденствия и качании Земной оси, которую первой решил Даламберт, побудило Эйлера предложить о сем предмете свои рассуждения в V томе *Записок* Берлинской академии, в том же самом, в котором находится щастливое решение распри, бывшей между Лейбницем и Иоганном Бернуллием о логарифмах отрицательных чисел и мнимых. Вопрос о предварении равноденствия понудил Эйлера вникнуть в коловратное движение тел, когда не около одной и той же оси обращаются. К исследованию сего движения недостаточны были известные до того времени правила; и для того принужден он был обратиться к первоначальным законам движения и оттуда произвесть общие правила,

(c) Король Фридерик II, которому Эйлер послал несколько зрительных труб, по правилам его сделанных, изъявил к трудам его свое удовольствие следующим свосручным письмом:

Je vous remercie des petites Lunettes d'approche qui me sont arrivées à la suite de votre lettre du 14 de ce mois; et je loue le soin que vous prenez de rendre utile aux hommes la Théorie que vous fournit votre étude et votre application aux Sciences. Comme mes occupations présentes ne me permettent pas de les examiner avec l'attention, que mérite tout ce qui me vient de votre part, je me réserve à le faire, quand j'en aurai plus de loisir. Sur ce je prie Dieu, qu'il vous ait en Sa sainte et digne garde.

Waldou ce 15 Septembre 1759.

Féderic

(d) В 1766 [году] сообщил я Бернуллию новый эйлеров способ определять колебания струн. Следующая выписка из письма Бернуллия покажет, каким образом сии великие мужи друг о друге отзывались: «L'esquisse que Vous me faites de la méthode de Mr. Euler m'a fait plaisir, mais elle n'a changé en rien mes idées sur cette matière; je suis toujours persuadé, que ma méthode donne *in abstracto* tous les cas possibles; j'avoue cependant que dans certains points de vue, celle de Mr. Euler est fort préférable à la mienne; mais il y a aussi d'autres points de vue pour le contraire, puisque ma méthode peut être appliquée à tel nombre de corps fini qu'on propose, lors même que dans le Système il n'y a point de retour parfait ou période à attendre. Quoiqu'il en soit de mes prétentions, je suis toujours prêt de baisser Pavillon devant mon Admiral».

служащие к определению [движения] тел, около непостоянной оси обращающихся. Сии исследования открыли ему путь к изобретению нового закона, помощью которого возмог он решить сию задачу в обширнейшем смысле.

Сии рассуждения, всю механику новым светом озарившие, достойны были предложены быть во всем своем пространстве. Эйлер в *Механике* своей, о которой выше сего упомянуто, рассуждал о движении тел бесконечно малых, а о движении твердых предположил издать особое сочинение, которое в 1765 году напечатано и которое можно почесть за полную механику, потому что оно содержит в себе все законы движения бесконечно малых тел, ясным и новым образом предложенные, а за ними следуют все важные, но рассеянные Эйлером о движении тел изобретения, которые в состоянии его привели усовершенствовать теорию небесных тел и как астрономии, так и мореплаванью оказать толь важные услуги.

Во время пребывания своего в Берлине Эйлер не престававал Санктпетербургской академии оказывать важные услуги, сообщая ей наибольшую и важнейшую часть своих упражнений, ревностно наблюдая ее пользу и преподавая наставления посланным от Академии воспитанникам<sup>(e)</sup>. Посему всегда принадлежал он к Академии, и должно думать, что не иных мыслей было Российское воинство, которое в бытность свою в Берлине не отреклось дать ему оберегательную стражу, и Императорский Двор, который все причиненные тогда в даче его убытки вознаграждал щедрою рукою.

При толикой приверженности Эйлера к России, в которой препроводил он наилучшие лета юности своей, и к обществу, в котором положил начало своей славе, должен он был питать желание паки в Россию возвратиться. Вступление на Всероссийский престол Екатерины II, кроткое ее царствование и покровительство, наукам и в них упражняющимся оказуемое, возвеличили Академию и утвердили Эйлера в намерении окончить дни свои в России.

В мае 1766 года приблизился он к исполнению своего желания. Князь Владимир [Серге]евич Долгорукой, Российской министр при дворе Прусском, именем Монархини своей изъявил согласие на все условия, которые Эйлер предложил как в рассуждении самого себя, так и в рассуждении своего семейства [12]. С трудом получил он и два старшие его сына увольнение, а младшему, которой был поручником артиллерии, совсем отказано было следовать с отцом в Санктпетербург.

Берлин, где Эйлер препроводил двадцать пять лет, пользуясь почтением великим, его достоинством соразмерным, оставил он в июне месяце. Принцы королевские, а особливо владетельный Маркграф Магдебург-Шведский<sup>(f)</sup> с прискорбием взирали на отъезд его и сожаление свое изъявили наичувствительнейшим образом.

<sup>(e)</sup> Академики Котельников и Румовской, имея пребывание у Эйлера в доме, несколько лет пользовались наставлениями сего несравненного учителя.

<sup>(f)</sup> Кроме дружественного и откровенного Маркграфа обращения, побуждала [его] сожалеть о потере Эйлера благодарность, которою обязан он был сему великому мужу за наставление двух его дочерей. К старшей из них, которая ныне аббатиса в Герфордене, во время пребывания Королевской фамилии в Магдебурге писаны письма о разных физических и философических материях, изданные по прибытии его в Санктпетербург.

В самое то время, когда Эйлер готов был отправиться в путь, Польской Король чрез князя Чарторижского пригласил его, чтобы путь свой направил чрез Варшаву, где препроводил он десять дней со всею приятностию, какую милость щедрого Государя могут доставить философу <sup>(6)</sup>. Итак, по долговременном отсутствии увидел он Санктпетербург июля 16 дня 1766 [года], представлен был Ее Императорскому Величеству, и первая милость, которую получить удостоился, состояла в том, что по сильному Ее заступлению младший сын его получил дозволение следовать в Санктпетербург. Едва только Эйлер привел в порядок дела, до дому касающиеся, на покупку которого благоугодно было Ее Величеству пожаловать 8000 рублей, как впал в жестокую болезнь, от которой хотя избавился, но с совершенною потерей зрения. Белмо, нарощее на левом глазе, лишило его последнего зрения, поврежденного уже прежде от безмерного напряжения.

Какое жестокое приключение для человека, в котором привычка к трудам сделалась необходимостью и которого неутомимой ум, беспрестанно занят будучи каким-нибудь новым изобретением, увидел себя не в состоянии продолжать далее труды свои? Человека, не столь великими качествами одаренного, судьба была бы такова, что пришел бы в совершенную недейтельность; но эйлерова удивительная память и воображение, от всех отвлекающих предметов свободное, в короткое время наградили потерю, которая, казалось, что должна положить предел трудам сего великого мужа.

В сем положении Эйлера первой труд был руководство к алгебре, писанное молодым человеком, для услуг из Берлина взятым, и кроме способности делать некоторые арифметические вычисления, никакого понятия о математике не имеющих. Отсюда произошло известное *Введение в алгебру*, которому сколько в рассуждении обстоятельств, столько по причине порядка и ясности удивляются. И в самой сей учебной книге блистает сочинителей дух, способный к изобретениям, и, сколько мне известно, сие сочинение одно только и есть, в котором предложены и решены в надлежащем союзе вопросы диофантовы. В короткое время оно переведено и издано на российском и французском языках.

Прибытие в Санктпетербург академика Крафта в состояние Эйлера привело произвести в действо предприятие, о котором он давно размышлял,

<sup>(6)</sup> Он во всю свою жизнь с благодарностию вспоминал оказанные Королем милости и преданность его, которую вперили разум и душевные качества сего Государя, подкрепляемы были взаимною между Королем и Эйлером перепискою. Не могу воспротивиться, чтобы не украсить сию речь одним из писем, Королем в 1772 году к нему писанным:

Monsieur le Professeur Euler. En répondant à votre lettre du 4 Août dernier, J'aurois bien souhaité de pouvoir confirmer l'opinion que vous avez des circonstances plus heureuses, sur lesquelles votre amitié pour Moi vous a dicté l'expression d'un coeur vertueux et sensible. Mais... Je vous remercie cependant de votre bonne volonté à cet égard, et Je passe à la reconnoissance que Je dois à vos soins, pour me communiquer les observations que les habiles Astronomes de votre Académie ont faites à Bender et vers les embouchures du Dniestr et du Danube, avec les positions de quelques endroits également importans pour la Géographie. Je tâche de les mettre à profit pour perfectionner celles qui se font dans ce pays-ci avec assez d'application et de succès, malgré les troubles qui mettent un grand obstacle au progrès des Sciences. Je vous en demande la continuation, autant pour l'utilité publique que pour Ma propre satisfaction particulière, et désirant d'avoir des occasions pour vous en donner des marques effectives, Je prie Dieu, qu'Il vous ait, Monsieur le Professeur Euler, en Sa sainte et digne garde.

Fait à Varsovie, le 7 Juin 1772.

Stanislas Auguste Roy



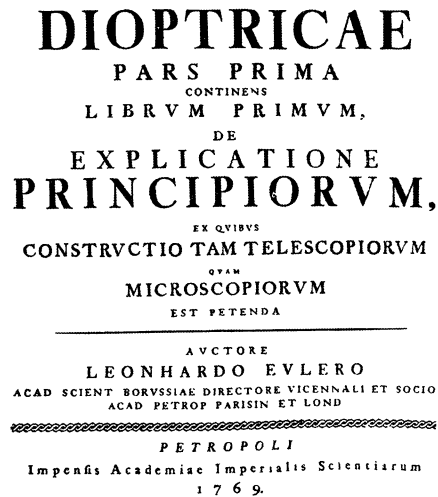
а именно соединить в одно сочинение все, что в течение тридцати лет ни изобретено для приведения в большее совершенство зрительных труб и их теории. С обыкновенною неутомимостию приступил он к исполнению намерения и в 1769, 1770 и 1771 годах издал *Диоптрику*, в трех томах состоящую.

Первая часть содержит в себе общую сей новой науки теорию. Ибо Эйлер привел оную в нынешнее состояние, а до сего времени едва наукою ее назвать было можно. По причине длины труб, какие прежде изобретения сложных предметных стекол употребляемы были, и неясности изображаемых ими предметов астрономы принуждены были почти совсем оные оставить и довольствоваться зеркальными телескопами. Вычисление для тех и других выгоднейшего сложения было настоящий хаос; и хотя задача сия собственно принадлежит к начальной и простой геометрии и весьма малого знания требует дифференциального счета, однако в решении оной весьма многого недоставало, так что успехи в сей науке должно считать с того времени, когда Эйлер начал оною заниматься.

Вторая и третья часть содержит в себе правила, как наилучшим образом составлять катоптрические телескопы и микроскопы. Исчисление неясности, происходящей от сферического вида стекол, есть превосходный образец тончайшей алгебры, и по справедливости удивляться должно искусству в приемах, которыми он умел во всех оптических орудиях соединить ясность в изображении, наибольшее поле зрения и сокращение труб для всех возможных увеличиваний, сколько бы глазových стекол употребить на благо ни рассудилось; одним словом, все роды оптических орудий исследованы и вычислены с beispiремною простотою.

Во время издания сего важного творения печатаемы были *Письма к некоторой немецкой принцессе, Наставление о счете интегральном, Вычисление кометы, в 1769 году виденной, Явления Венеры и затмения солнечного, в том же году бывшего, Новая теория Луны, Теория строения и вождения кораблей*, не упоминая великого числа сочинений, в *Деяниях Академии печатаемых* [13].

Едва только первое из сих творений было напечатано, академик Румовской перевел оное на русской язык, в Париже сделано новое оно издание и в Лейпциге переведено на немецкой язык [14]. В рассуждении его содержания довольно заметить, что оно, поелику для многих читателей и для самого прекрасного полу вразумительно, немало споспешествовало



*Титульный лист I части  
«Диоптрики» Л. Эйлера 1769 г.*

известным сделать имя сочинителево тем, кои о достоинствах его не могут судить по важным его сочинениям.

1769 год будет всегда памятен в истории наук, особливо в астрономии, когда все сильные земли совокупно старались споспешествовать астрономам в наблюдении явления Венеры в Солнце. Императрица Российская, Короли Французской, Аглинской и Гишпанской отправили астрономов во все части света для наблюдения сего толь редкого и важного явления, служащего к определению величины Солнечной системы. Седьм астрономов [15], ободренные покровительством Самодержицы Всероссийской и пылающие желанием иметь участие в сем предприятии, рассеялись в пространной Российской империи. Эйлер между тем помышлял о способе наблюдения их обратить в пользу и определить истинную величину солнечного параллаксиса. И в самой вещи, он изобрел новый способ вычислять не только наблюдения, до явления Венеры касающиеся, но и затмения солнечного, за день пред прохождением бывшего и подавшего средство определить долготу мест, в которых прохождение Венеры было наблюдаемо. Итак, можно сказать, что астрономия обязана отчасти Эйлеру совершенством, которое она от точнейшего определения солнечного параллаксиса получила.

Исследования, до Луны касающиеся, немалую часть занимали его времени. Уже 1746 году он издал *Лунные таблицы* [16], а в 1753 — *Теорию Луны*. Покойный Товия Мейер, основываясь на оной, вычислил таблицы, которые поныне употребляют астрономы и за которые получил часть награждения, от Англии обещанного за показание способа определять долготу места на море. В то же время Аглинской парламент определил Эйлеру в награждение 300 фунтов стерлингов за исследования, которые Мейеру путь открыли толико успеть в решении толь важного вопроса<sup>(h)</sup>.

Между тем Парижская академия, включивши Эйлера в число иностранных своих членов [17], и три его сочинения о движении планет увенчавши награждением, на 1770 и 1772 год предложила задачу о приведении лунной теории в большее совершенство, и Эйлер при помощи старшего своего сына получил удвоенное награждение, за решение сего вопроса обещанное [18].

В последнем из сих сочинений нашел он способ исчислять многие не-

<sup>(h)</sup> Признательность, оказуемая просвещенным народом к истинному достоинству, лестна для человека, которому она бывает оказываема, и ободрительна для тех, кой стезям его следуют, и для того не могу преминуть, чтобы не поместить здесь выписку из письма при сем случае от секретаря Комитета, в Англии для долготы учрежденного:

Admiralty Office. London, 13 June 1765.

Sir, The Parliament of Great Britain having, by an Act passed in their late sessions (a printed Copy of which I herewith transmit to you) been pleased to direct, that a sum of money, not exceeding Three hundred pounds in the whole, shall be paid to you, as a reward for having furnished Theorems, by the help of which the late Mr. Professor Mayer of Gottingen constructed his Lunar Tables, by which Tables great progress has been made towards discovering the longitude at Sea. I am directed by the Commissioners of the Longitude to acquaint you therewith and to congratulate you, upon this honorary and pecuniary Acknowledgement, directed to be made you by the highest Assembly of this Nation, for your usefull and ingenious labours towards the said discovery, etc.

равности в движении Луны, которых в первой теории по причине связности выкладок, с первым способом сопряженных, определить было невозможно. Сие обстоятельство подало ему повод вникнуть вторично в теорию Луны, и при помощи академиков Алберта Эйлера, Крафта и Лекселя довел оную до того, что составил новые Лунные таблицы, кои в 1772 году купно с теориею изданы. Вместо того чтобы стараться, как в первой теории, искать бесплодные интегралы трех второй степени уравнений, из правил механики произведенных, отнес неравности Луны к трем координатам, место ее определяющим, и поелику все неравности Луны зависят от среднего отстояния Солнца от Луны, или от несредоточенности, или от параллаксиса Луны, или от наклонения лунного пути к эклиптике, разделил оные на классы. Сие с великим тщанием употребленное средство и остроумные приемы, первому только геометру свойственные, имели успех, превосходящий ожидание, и, взирая на многочисленные выкладки, на средства, к сокращению употребленные, и на приклад оных к определению лунного движения, не можно не прийти в удивление.

Но терпение и спокойствие духа, каких требовал сей безмерный труд, еще в большее приведут удивление, когда на память приведем обстоятельства и время, в которое он был окончен. Лишенный зрения, не имеющий другого средства располагать сии огромные вычисления, как призывая в помощь память и воображение, разоренный пожаром, похитившим наибольшую часть его имения и его семейства, принужденный дом свой оставить, в котором все места ему были известны и привычка награждать могла недостаток зрения, обремененный попечением, которого сие печальное неожиданное приключение и возобновление дома требовали, Эйлер в состоянии был окончить творение, которое одно могло вечности предать имя его, ежели бы совершил иное, имея дух спокойной и при обстоятельствах благоприятных. Кто не удивится твердости души его, духу, герою только свойственному, равнодушию и непоколебимой бодрости посреди толиких несчастий <sup>(1)</sup>.

После сего несчастного приключения, которого жестокость Монархиня облегчила даром, в 6000 рублях состоящим, Эйлер в состоянии был пригласить известного глазного врача, барона Венцеля, чтобы снял с глаза бельмо. Сим врачеванием к несказанному его и всего семейства удовольствию возвращено было ему зрение, но радость сия была непродолжительна; от того ли, что по снятии бельма не употреблено надлежащего врачевания, или, нетерпеливо желая возвращенным чувством воспользоваться, не поберег Эйлер глаза, вторично лишился [он] зрения при жесточайшем страдании.

Итак, несчастный старец паки принужден был при упражнениях своих помощью других пользоваться. Дети его, академик и подполковник, академики Крафт и Лексель попеременно продолжали подавать ему помощь как в приведении к окончанию великих его начинаний, так многих частных сочинений, в последних томах *Деяний* Академии помещен-

(1) При сем случае со многими книгами и рукописными сочинениями утрачено сочинение, содержащее в себе решение задачи, от Парижской академии предложенной. Старший сын Алберт Эйлер принужден был всю теорию Луны и все выкладки вловь переделать.

ных, о которых для краткости здесь не упоминаю. Между тем не могу преминуть, чтоб не упомянуть о трудах его, до равновесия и движения жидких тел и до большого совершенства ахроматических труб касающихся.

Совершенство, которое после динамики Даниила Бернулли наука делать исчисления получила от Эйлера, подало ему мысль и сию часть механики вновь обработать, к чему он подал надежду уже в прежде изданной *Механике* и в *Записках* Берлинской академии положил основание. Ожиданию сему удовлетворил Эйлер в четырех сочинениях, в которых исчерпал все, что теория гидростатики и гидродинамики глубочайшего в себе ни содержит.

Теория сия изобильна несказанно счастливыми прикладами общих правил и удовлетворительными изъяснениями многих в природе явлений. Эйлер, рассуждая, например, о разрушении равновесия в воздухе, от разности тепла и плотности его происходящей, изъясняет общую причину ветров, особливо постоянных в Индийском океане; рассуждая о равновесии жидких тел, привлекаемых одною и многими силами, определяет вид Земли и состояние равновесия жидких тел, оную окружающих, и наконец изъясняет явления прилива и отлива. Окончавши учение о равновесии жидких тел, показывает способ всю теорию движения их объять двумя дифференциальными уравнениями второй степени и делает приклад общих правил к движению жидких тел в сосудах, в насосах и в трубах. Исследования о движении воздуха доводят его наконец до теории распространения звука и до произведения гласа в флейтах.

Таковы суть различные и важные статьи, кои Эйлер изъяснил в своей гидродинамике. О сей трудной части прикладной математики мало еще писано, и то, Эйлером об ней писано, толико все, что доселе ни издано было, превосходит, что желать должно, чтобы гидродинамика его для желающих вникнуть в сию важную часть напечатана была отдельно от *Деяний Академии*.

Сочиняя *Диоптрику*, Эйлер в теории составных предметных стекол не принял в рассуждение взаимное их расстояние и толщину, почитая их маловажными, и, несмотря на то, есть случаи, в которых пространство, ими занимаемое, не так мало, чтобы оное пренебречь было можно в рассуждении неясности изображения. Рассуждения о сложных предметных стеклах и их употреблении во всяком роде зрительных труб, в XVIII томе помещенные, служат к отвращению сего несовершенства. В них изложены разные способы орудия сии делать короче и с обширнейшим полем зрения. Следуя правилам, в сих сочинениях предложенным, издал я наставление для оптических художников, которое при Академии в 1774 году напечатано, а перевод одного на немецком языке профессор Клигель приобщил к своей *Диоптрике*, в Геттингене в 1778 году напечатанной [19].

В Немецкой земле во многих местах учреждены вдовьи казны и на другие смертные случаи. Нарекание, на оные возлагаемое, что они весьма выгодны или для участников в оных, или для учредителей, побудило Эйлера размышлять о средствах предприятія сего рода основать на верных началах, сколько дозволяет совершенство списков о умирающих. От сих размышлений начало свое получили *Изъяснения о вдовьих казнах и пр.*, в 1776 году изданные. Они заключают в себе все, что щет вероятностей важного в себе ни содержит.

Эйлер графу Владимиру Орлову неоднократно обещался представить Академии столько сочинений, что по смерти его на двадцать лет довольно их будет на класс математической *Деяний* Академии. Ни потеря зрения, ни припадки, с летами сопряженные, ни великое число изобретений, им учиненных [20], не могли [ни] уменьшить его трудолюбия, ни исчерпать его обильный разум. В течение семи лет представил он Академии больше семидесяти сочинений, адъюнктом Головиным писанных, и около двухсот пятидесяти, в коих содержащиеся исчисления мною были деланы [21].

Между толиким множеством сочинений нет ни единого, которое бы не заключало в себе какого-нибудь нового изобретения или остроумного вида, путь к изобретению открывающего. В них находятся интегралы труднейших дифференциальных выражений, множество отменных приемов, до высшей аналитики касающихся, глубоких исследований, свойства чисел объясняющих, остроумные доказательства многих теорем ферматовых, решение труднейших вопросов, до равновесия и движения твердых, гибких и упругих тел касающихся, и изъяснение многих, по-видимому, странных явлений. Все, что теория движения светил небесных, взаимного их действия и непорядочного движения ни содержит в себе трудного и отвлеченного, все в них приведено в большее совершенство, сколько аналитика, умом величайшего геометра управляемая, дозволила. Нет ни единой отрасли математической, которая бы совершенством своим ему не была обязана.

Таковы суть труды, Эйлером подъятые, таковы подвиги, незабвенной памяти достойные. Потомки совоюют имя его с именами великих мужей Галилея, Лейбница, Невтона и всех, кои разумом своим сделали честь роду человеческому, имя его пребудет в памяти, когда имена толь многих погребены будут в вечности забвения, кои мимотекущею славою обязаны суетности нашего века.

Мало было ученых, кои столько писали, сколько Эйлер; но никто с ним не сравнился ни множеством, ни различностью открытий в математике.

Размышляя о благе, которое люди, рожденные для распространения пределов наших познаний, могут принести роду человеческому, и представляя редкость отменных дарований, которым природа предоставляет право просвещать человечество, едва можно удержаться от желания, чтобы они изъяты были от общего закона, которому человек неминуемо подвержен, или чтобы жизнь их продолжалась долее обыкновенной. Но судя по делам и трудам Эйлера, жизнь его была долговременна, и, выключая потерю зрения, свободен он был от обыкновенных следствий, с сильным напряжением разума сопряженных; до последнего часа сохранил он твердость разума, которою во всю свою жизнь отличался и которая блистает в самых последних его упражнениях.

В начале прошедшего сентября месяца чувствовал он некоторые кружения в голове, но они не воспрепятствовали ему исчислять движение воздушных шаров и сыскать интеграл весьма трудного уравнения, до которого довел его сие исчисление. Сии кружения головы были предвестники его кончины, приключившейся сентября 7 дня. В тот самый день за столом беседовал он с академиком Лекселем о новой планете, около того времени открытой, и о других предметах с обыкновенным прониканием. После обеда лег отдохнуть, потом, пьючи чай, шутил с одним из

своих внуков, как вдруг, поражен будучи ударом, произнес: *я умираю*. Сии были последние его слова, и по прошествии нескольких часов кончил славное течение жизни, имея от роду 76 лет 5 месяцев и 3 дня.

Таким образом скончался старший из академиков, который пятьдесят шесть лет был славою и украшением Академии, свидетелем и споспешником ее начала и возвышения. Влияние сего великого мужа на труды Академии явно наипаче из того, что, кроме того, сколько он будучи в Берлине содействовал, в *Деяниях* Академии видны следы его отбытия и возвращения в Санктпетербург, так, как будто бы одно присутствие его могло ободрить и оживить целое общество.

Эйлер имел крепкое и здоровое сложение, и ежели бы не одарен был оным, то при толиком напряжении душевных и телесных сил не мог бы противостоять жестоким болезням, которые претерпел в течение жизни.

Последние дни его были спокойны и безболезненны, исключая некоторые припадки, со старостию сопряженные. Здравие его было таково, что время, которое обыкновенно старость принуждает употреблять на отдохновение, мог он посвятить на свои упражнения, и, посвящая остаток дней своих на науки, наслаждался славою, как плодом своего разума, общим почтением, как плодом своих добродетелей, и сладчайшим отдохновением, которое достоин был находить в лоне своего семейства.

Не чуждо было ему знание, которое называем ученостию. Он прочитал всех наилучших римских писателей, знал совершенно древнюю историю математики, деяния всех времен и народов имел в памяти и, нимало не запинаясь, в пример приводил маловажнейшие приключения. О врачебной науке, ботанике и химии большее имел сведение, нежели ожидать можно было от человека, которой не поставлял сих наук особливим упражнением.

Великая слава, а наипаче почтение, основанное на добродетелях, кои не всегда с достоинством ученого человека сопряжены бывают, часто привлекали странствующих делать ему посещения. Многие из них оставляли его, объезды будучи удивлением и изумлением: они не понимали, каким образом человек, больше половины века занимавшийся изобретениями, до физики и математики касающимися, мог вместить в себе столько познаний, для него не нужных и до упражнений его не принадлежащих. Сие преимущество доставляла ему обширная память, которая блюла все, что ей предано ни было, и тот, кто мог прочитать наизусть всю *Энеиду* и на каждой странице своего издания сказать первой и последний стих, удобно мог сохранить все то, что читал в такие лета, в которые впечатления бывают наисильнейшие<sup>(к)</sup>.

Может быть, тот же источник причиною был неспособности его подражать выговору общества, в котором обращаемся. Эйлер сохранил до конца жизни произношение базельских жителей. Часто в разговорах забавлялся он приведением на память некоторых в Базеле употребляе-

(к) Другое доказательство обширной его памяти и воображения достойно того, чтобы здесь приведено было. Он для препровождения времени обучал внучат своих алгебре и геометрии. Извлечение корней понуждало его задавать им такие числа, кои были совершенные степени; на сей конец, одержим будучи бессонницею, в одну ночь на память вычислил чисел от 1 до 19 все шесть первые степени и по прошествии некоторых дней, к великому нашему удивлению, прочитал оные наизусть.

мых выражений, коих знаменование давно из памяти моей истреблено было.

Ничто не может уподобиться непонятной готовности без малейшего знака неудовольствия оставлять выкладки свои, заниматься разговорами, ничего не значащими, и потом паки возвращаться к глубоким размышлениям. Способность слагать с себя вид ученого человека, скрывать свое превосходство и применяться к понятиям каждого была в нем столь отменна, что не можно не причесть оную в достоинство. Постоянная кротость духа, тихая и непринужденная веселость, некоторой безвредной образ шуток и дар рассказывать приключения забавно обращение его делали приятным и любезным.

Чрезвычайная Эйлера живость, без которой невместна бы была удивительная деятельность его духа, побуждала его иногда преступать пределы кротости; но гнев его столь скоро укрощался, сколь скоро возгорался, и никогда ни против кого Эйлер не был злопамятен.

Он был правдив и добродушен в высочайшей степени. Непримиримой будучи враг всякого притеснения, имел твердость духа осуждать оное и против его вооружаться, не взирая на лицо и обстоятельства. И сколь щастливо удавалось ему иногда к утешению притесняемых отвращать злоупотребления, в свежей памяти у всех еще находится [22].

Веру чтил он свято, благочестие его было искренне и молитва исполнена благоговения; должности христианина все исполнял со тщанием. Любил ближнего, терпелив был в высочайшем степени, и ежели иногда оказывал негодование, то только ко врагам веры, а наипаче ко проповедникам безбожия, чему служит доказательством *Защитение откровения против возражений безбожников*, в 1747 году изданное.

Он был добрый супруг, добрый отец, добрый друг, добрый гражданин и верен в исполнении всех обязанностей к обществу. Все споспешествует оправдать наше сожаление и праведное прискорбие наше о его потере (1).

Эйлер дважды вступал в супружество. В 1733 году сочетался браком с девицею Катериною Гзелль, дочерью живописца, родом из Швейцарии, которого Петр I, будучи в Голландии, принял в службу, и сестрою славного президента фон Лоена. По кончине первой супруги домашние обстоятельства понудили его в 1776 году вступить во второй брак с девицею Саломе Абигаиль Гзелль, двоюродною сестрою первой супруги, дочерью Марии Графф и внукою Сибиллы Мериан, известных по рисункам насекомых суринамских.

Из тринадцати детей от первого брака восемь в младенчестве лишлись жизни, а из трех сыновей и двух дочерей сыновья только в живых остались. Старший из них, которой от давнего времени шествует по следам своего родителя, известен по своим сочинениям и по участию в последних родителя своего сочинениях и славен по награждениям, полученным от Академии Санктпетербургской, Парижской, Минхской и Гет-

---

(1) За удовольствие себе поставляю уведомить читателей сей речи, что Король Прусской, Шведской, Польской, наследный Принц Прусской, Маркграф Швед[тской] и Герцог Курляндской приняли участие в потере, которую Академия, лишаясь Эйлера, претерпела, и что они старшему его сыну изъявили сожаление письмами, которые служат наивышшею похвалою разума его и добродетелей.

тингской. Второй сын, придворный медик и коллежский советник, искусным и ревностным целением снискал достойную похвалу. Третий сын, подполковник от артиллерии и директор Сестербецких заводов, известен по наблюдениям астрономическим. В 1769 году послан он был в Орск для наблюдения прохождения Венеры. Старшая дочь, бывшая в супружестве за майором Белем, скончалась в 1781 году, а младшая имела супругом барона фон Делена и скончалась в маестностях его в 1780 году в герцогстве Юльском. От пяти детей имел Эйлер тридцать восемь внучат, из которых двадцать шесть в живых еще находятся <sup>(m)</sup>.

Образ почтенного старца долго мечтаться будет в глазах моих, окруженного многочисленным своим семейством, старающимся облегчить его старость и усладить последние дни его различными образами. Уже не увижу я больше подобного толикою приятностию поражающего явления, какое я видал доселе ежедневно.

Тщетно, государи мои, будет мое старание изобразить сии восхищающие явления домашнего блаженства. Многие из вас были, как и я, очевидными свидетелями! Вы, наипаче, которые за славу себе вменяете, что имели такого наставника <sup>(n)</sup>! Здесь нас пятеро; кто из ученых может похвалиться, чтобы в одно и то же общество соединил толикое число учеников своих? Изъявим ему пред лицом света нашу наичувствительнейшую и вечную благодарность и докажем, что несравненной наш наставник достоин был удивления по редким своим добродетелям, равно как чрезвычайною силою разума. Друзья! Академики, оплачьте его с науками, которые никогда не претерпели толикой потери, с семейством его, которого он был украшение и подпора! Слезы мои совоюются с вашими, благоденствия его, особливо ко мне, на сердце моем до конца жизни пребудут незагладимы.

#### ПРИМЕЧАНИЯ

<sup>1</sup> Ближайший ученик и помощник Л. Эйлера академик Н. Фус произнес «Похвальную речь» своему учителю в заседании Академической конференции 3 ноября / 23 октября 1783 г. Речь была прочитана на принятом в то время в Академии наук французском языке и напечатана тогда же в С. Петербурге в виде отдельной книги с приложением составленного Фусом списка опубликованных сочинений Эйлера. Затем Фус подготовил несколько переработанный немецкий перевод своей «Похвальной речи», который был издан на родине Эйлера в Базеле в 1786 г. В связи с принятым в конце 90-х годов XVIII в. решением Академии наук печатать некоторые избранные свои труды и в переводе на русский язык было решено перевести и «Похвальную речь» Эйлеру. Согласно протоколу Академической конференции от 28/17 июня 1799 г.

(m) Таково было состояние семейства Эйлера во время его кончины; но когда речь сия на русском языке была прилагается, старший сын Алберт Эйлер был статский советник, среднего в живых не было и младший находился в отставке, будучи генералом лейтенантом от артиллерии.

(n) При Академии было восемь математиков, кои попеременно имели щастие пользоваться его наставлениями; а именно Алберт Эйлер, Котельников, Румовской, Крафт, Лексель, Иноходцев, Головин и я. Трое из них были в отсутствии.

О друзья мои и собратья, которых я видел при сем месте проливающих от жалости слезы! Когда скорбь лишила меня голоса, то не мог я ничего более делать, как жать ваши руки; но никогда не истребится из памяти моей сей знак искреннего вашего прискорбия, и здесь пред лицом света отдаю справедливость чувствительности вашей и любви, которую вы при сем случае оказали дражайшему и несравненному нашему наставнику.



академик С. Я. Румовский объявил, что «в знак признательности своему прежнему почитаемому учителю он сам берет на себя труд перевести эту «Похвальную речь» на русский язык». Перевод Румовского с французского оригинала 1783 г. был опубликован в 1801 г. в «Академических сочинениях, выбранных из первого тома Деяний Имп. Академии наук» (с. 97—167). Надо, впрочем, отметить, что Румовский использовал в отдельных местах своего перевода и немецкий текст Фуса 1786 г.

Перевод Румовского перепечатан здесь с сохранением особенностей русского языка конца XVIII в. Однако приведены к нынешним нормам затрудняющие чтение старинные пунктуация и правила слитного (раздельного) написания частиц и введено регламентированное в 1918 г. правописание окончаний и упраздненных тогда букв. Проведена унификация правописания отдельных слов по всему тексту. Некоторая модернизация допущена, кроме того, в употреблении прописных букв и в некоторых других частных случаях. Старомодное написание иностранных фамилий оставлено без изменений, но фамилия Эйлер пишется здесь через «Э», а не в употребленной в «Академических сочинениях» форме Ейлер, обычно использовавшейся в XVIII и в начале XIX вв.

Речь Н. Фуса снабжена минимальным количеством примечаний в тех местах, где автор допустил фактические неточности или текст речи неясен. Несколько примечаний заимствовано из первого тома «Opera omnia» Эйлера (1911), где был воспроизведен снабженный комментариями президента Эйлеровской комиссии Ф. Рудио немецкий текст речи Фуса 1786 г.

При чтении речи надо иметь в виду, что Н. Фус пользовался принятым тогда в России старым календарным стилем, отставшим в XVIII в. от нового стиля на 11 дней.— *Примеч. ред.*

<sup>2</sup> Приведенная дата не точна. Л. Эйлер записался на философский факультет Базельского университета 20 октября 1720 г. Факультет этот представлял собой первый концентр тогдашнего университетского образования. В университетской библиотеке хранятся до сих пор три маленьких сочинения молодого Эйлера: «Рассуждение об арифметике и геометрии» (1721), «Об умеренности» (1722) и «Разрешение одного кажущегося противоречия в аналитическом понятии отрицательных величин» (1722?). Там же имеются две диссертации, защищавшиеся в январе 1722 г. на соискание вакантной кафедры логики, официальным «респондентом» по которым выступал студент философского факультета Леонард Эйлер. Сохранилась и одна диссертация по истории римского судопроизводства, по которой также выступал «респондентом» в ноябре 1722 г. Л. Эйлер. 9 июня 1722 г. Леонард Эйлер получил «первые лавры» — низшую ученую степень философского факультета (которой соответствовало неофициальное звание лауреата или бакалавра). В 1723 г. он окончил философские классы, сдал осенью экзамены и на годичном университетском акте 8 июня 1724 г. произнес полатини речь о сравнении картезианской и ньютоновской философии, текст которой не сохранился. Завершением философского образования Эйлера в Базельском университете явилась присвоенная ему степень магистра. 29 октября 1723 г. Л. Эйлер записался, по желанию отца, на старший — теологический факультет, на котором он занимался, помимо прочего, древнегреческим и еврейским языками.— *Примеч. ред.*

<sup>3</sup> Официально Л. Эйлер записался на медицинский факультет к профессору И. Р. Цвингеру лишь 2 апреля 1727 г., на следующий день после объявления о занятии Б. Штеелиным кафедры физики и всего за три дня до последовавшего 5 апреля окончательного отъезда из Базеля в Петербург.— *Примеч. ред.*

<sup>4</sup> На самом деле Л. Эйлер не попал в 1727 г. в жеребьевку. Действовавший в то время порядок замещения кафедр в Базельском университете был введен 22.02.1718 г. После объявления о вакантности кафедры претенденты должны были подать заявления и представить диссертации (Specimen disputatorium pro vacante cathedra, Disseratio или Theses). Затем они должны были прочесть одну или несколько пробных лекций и провести диспут. Л. Эйлер читал свою диссертацию «О звуке» 18.02.1727 г., причем первым ему, вероятно, оппонировал официальный «респондент» Э. Л. Буркхардт, указанный на титульном листе диссертации. Однако в дискуссии могли принимать участие и все желающие. Через месяц Эйлер еще прочел лекцию «О причине тяготения», текст которой не сохранился.

На кафедру физики в 1727 г. претендовало восемь человек: Даниил Бернулли, Якоб Герман, д-р медицины Б. Штеелин, кандидат медицины А. Бир, кандидаты теологии А. И. Буксторф и П. Ригинер, лицензиат прав Л. Венц и Леонард Эйлер. Три группы по шесть представителей от профессуры и высшего административного

руководства должны были выбрать из этих соискателей по одному кандидату для жеребьевки. Одна группа тремя голосами выделила к жеребьевке Я. Германа. Другая группа отдала три голоса в пользу Б. Штеелина, в то время как Д. Бернулли, П. Ригинер и Л. Эйлер получили по одному голосу. При этом Л. Эйлер получил голос Иоганна I Бернулли, о чем стало известно, по-видимому, благодаря изучению любителями почерков на баллотировочных бюллетенях (ср.: *Burckhardt A. Ueber die Wahlart der Basler Professoren im 18. Jahrhundert // Basler Ztschr. Geschichte und Altertumskunde. 1916. Bd. 15. S. 28—46*). Третья группа избрала А. Бира. Бесстрастный жребий выбрал затем из трех претендентов Штеелина. Помимо перечисленных восьми соискателей, на кафедру первоначально претендовали еще четверо: Э. Гесс, И. Телусон, Л. Воллеб и Э. Кёниг. Однако эти претенденты сняли свои кандидатуры после того, как выяснилось, что никто из имевших право голоса при выборах не желает его им отдать.— *Примеч. ред.*

<sup>5</sup> Рассказ о переговорах Л. Эйлера по поводу перехода его на службу в морской флот никакими другими документами не подтвержден.— *Примеч. ред.*

<sup>6</sup> В 1735 г. Л. Эйлер действительно перенес тяжелую болезнь. Однако он потерял правый глаз в результате воспалительного процесса в 1738 г. (ср.: *Bernoulli R. Leonhard Eulers Augenkrankheiten // Leonhard Euler. Basel: Birkhäuser, 1983. S. 471—487*).— *Примеч. ред.*

<sup>7</sup> В русском переводе 1801 г. здесь вместо 1736 г. ошибочно указан 1733 г.— *Примеч. ред.*

<sup>8</sup> Сочинение «О магните» было удостоено премии только в 1746 г. Правда, конкурсный вопрос был поставлен еще в 1742 г., но в связи с недостаточностью ответов он был повторен в 1744 г. и еще раз в 1746 г.— *Примеч. Ф. Рудио.*

<sup>9</sup> Н. Фус упустил здесь из виду, что после выхода в 1689 г. «*Théorie de la manœuvre des vaisseaux*» Рено и его спора с Гюйгеном в Базеле было опубликовано в 1714 г. знаменитое сочинение Иоганна Бернулли «*Essai d'une nouvelle théorie de la manœuvre des vaisseaux*» (см.: *Bernoulli J. Opera omnia. 1742. T. 2. P. 1—96*).— *Примеч. Ф. Рудио.*

За три года до двухтомной «Морской науки» (*Scientia navalis*) Л. Эйлера (СПб., 1749) было опубликовано известное сочинение П. Буге «*Traité du navire, de sa construction, et de ses mouvements*» (Paris, 1746). Однако Эйлер завершил подготовку своего трактата задолго до выхода в свет сочинения Буге. Задержка в печати «Морской науки» была связана только с издательскими трудностями. Хотя это обстоятельство и подтверждается документально, Эйлер, тем не менее, утратил безусловный приоритет на ряд важных результатов, полученных им в теории корабля. По этому поводу он вынужден был высказаться в 1749 г. в предисловии к своему трактату (изданном тогда же и в переводе М. В. Ломоносова на русский язык). В частности, Эйлер писал в связи с одним специальным вопросом теории движения гребных судов: «Но в сем весьма не согласует славный господин Бугер, член Королевской Парижской Академии, в изрядном на французском языке сочинении, изданном им недавно о строении судов ... Но сие погрешение невелико и довольно награждено изрядством прочих частей, в том сочинении сообщенных». И далее: «При сем необходимо упомянуть должно, что я в сей моей книге чужих трудов за свои не почитаю, ибо многие статьи, которые мы оба сочинили так согласно, что не без причины показаться может, якобы я выписал их из того сочинения, которое почти четырьмя годами прежде моей книги вышло. Однако всей Императорской Академии наук, по которой приказанию я начал сию книгу сочинять еще с 1737 года, предовольно известно, что первая часть ее уже при отъезде моем из Санктпетербурга в 1740 году вся совершена была и другая книга сделана была до половины, которую докончал я уже здесь в Берлине скоро после моего приезда, так что все части в следующем потом году в народ изданы быть могли бы. Также во свидетельство того мог бы я привести многих приятелей, которым я еще с того времени сообщал знатнейшие главы моих размышлений; только довольно мне Академии наук к моему оправданию. К тому ж славный господин Бугер во все то время, чрез которое я трудился в сочинении сей книги, жил в Америке, где он, как сказывают, написал свое сочинение, так что между нами переписке об ученых делах быть нельзя было, из чего б один от друга в чем-нибудь мог пользоваться» (цит. по: *Ломоносов М. В. Полн. собр. соч. Л.: Наука, 1983. Т. 11. С. 177—178*).— *Примеч. ред.*

<sup>10</sup> Когда нужно было занять место Вольфа в университете в Галле, король обратился к Эйлеру, который предложил ему сначала Даниила Бернулли, а после отклонения последним приглашения Сегнера, который и получил это место на очень выгодных условиях. И именно Эйлер убедил короля купить для этого университета остав-

шиеся после Вольфа физические приборы. И это он должен был вступить по приказу короля в переговоры с Галлером, чтобы привлечь его на прусскую службу. Требования Галлера не понравились, и вопрос отпал.— *Примеч. Н. Фуса (1786).*

<sup>11</sup> Эйлер сам задолго до оповещения о законе наименьшего действия Мопертюи открыл многие минимумы в природе, например, в движении небесных тел, в движении всех тел, притягиваемых многими центральными силами, во многих кривых линиях и т. д. Я показал уже выше в связи с изопериметрическими задачами сколь близко подошел он к этому всеобщему закону. Кроме того, приложением его ко множеству механических задач, как признал это публично сам изобретатель в одном из своих сочинений, заслужил Эйлер на него определенное право собственности, от которого он, правда, всегда умел с великодушной скромностью отказываться.— *Примеч. Н. Фуса (1786).*

<sup>12</sup> Известно, что эти условия были весьма существенны. Помимо годового содержания в 3000 рублей и гарантированной пенсии в 1000 рублей для его вдовы, должны были быть весьма выгодно обеспечены (и были обеспечены) трое его сыновей.— *Примеч. Н. Фуса (1786).*

У Фуса В. С. Долгорукий ошибочно назван Владимиром Григорьевичем.— *Примеч. ред.*

<sup>13</sup> Три тома «Диоптрики» Л. Эйлера вышли в свет в 1769—1771 гг. Среди перечисленных здесь сочинений Эйлера «Письма к немецкой принцессе» (Е343, Е344, Е417) были опубликованы в Петербурге в 1768—1772 гг., «Наставления по интегральному исчислению» (Е342, Е366, Е385) в 1768—1770 гг., «Исследования и расчеты орбиты кометы 1769 г.» (Е389) в 1770 г., «Новая теория Луны» (Е418) в 1772 г., «Теория строения и вождения кораблей» (Е426) в 1773 г. Работа об определении параллакса Солнца по данным о прохождении Венеры по Солнцу (Е397) напечатана в «Новых комментариях» Академии наук за 1769 г. (СПб., 1770).— *Примеч. ред.*

<sup>14</sup> Н. Фус имел, по-видимому, в виду новое французское издание 1770 г., выпущенное в Митаве и Лейпциге, так как первый том парижского издания вышел только в 1787 г.— *Примеч. Ф. Рудио.*

<sup>15</sup> В обоих напечатанных текстах речи Н. Фуса 1783 и 1786 гг. говорится не о семи, а о десяти астрономах.— *Примеч. ред.*

<sup>16</sup> «Новые таблицы для вычисления положения Луны» (Е76) опубликованы в Берлине в 1745 г.— *Примеч. ред.*

<sup>17</sup> Известно, что число почетных членов Королевской Академии в Париже было ограничено восемью и что редко кто-либо иной, кроме лиц с особо выдающимися заслугами, смел претендовать на эту честь. Эйлер был принят, когда в Академии не имелось свободного места. Обстоятельства, сопровождавшие этот прием, были очень почетны для него, и поэтому я без колебаний помещаю здесь для пояснения их следующее письмо тогдашнего Королевского государственного министра маркиза Д'Аржансона:

à Versailles, le 15 Juin 1755

Le Roi vient de Vous choisir, Monsieur, d'après les vœux de Son Académie, pour remplir une place d'Associé externe dans cette Académie; et comme Elle a nommé en même tems Mylord Maclesfield, Président de la Société Royale de Londres, pour remplir une pareille place, qui vaque par la mort de M. Moivre, Sa Majesté a décidé que la première place de cette espèce qui vaquera, ne sera pas remplie. L'extrême rareté de ces sortes d'arrangemens est une distinction trop marquée pour ne pas Vous en faire l'observation et Vous assurer de toute la part que j'y prens. L'Académie desiroit vivement de Vous voir associé à Ses travaux, et Sa Majesté n'a pu qu'adopter un temoignage d'estime que Vous méritez à si juste titre. Soyez persuadé, Monsieur, qu'on ne peut pas Vous être plus parfaitement dévoué que je le suis.

M. D'Argenson

Пожалуй, не требует никакого оправдания то обстоятельство, что я привел здесь это и некоторые другие письма из колоссальной эйлеровской переписки с замечательными людьми. Эти документы, правда, ничего не добавляют к славе великого человека, но могут служить свидетельством справедливости, которую отдало ему его поколение. К сделанному замечанию относится, между прочим, и следующее, не безразличное для славы Эйлера добавление: король сделал преемником Эйлера в качестве почетного члена Парижской академии его старшего сына, равно как в уважение к памяти отца, так и во внимание к его собственным заслугам.— *Примеч. Н. Фуса (1786).*

<sup>18</sup> Приведенные сведения не вполне точны. В предисловии к 9-му тому «Recueil des pièces, qui ont remporté les prix de l'Académie des sciences», содержащему оба удостоенные премии сочинения, в качестве авторов первого сочинения (Théorie de la Lune, 1770) указаны Л. и И.-А. Эйлер, а в качестве автора второго (Nouvelle recherches sur le vrai mouvement de la Lune) только Л. Эйлер.— *Примеч. Ф. Рудио.*

<sup>19</sup> Согласно указателю Г. Энестрёма немецкий перевод обработанного Н. Фусом сочинения Л. Эйлера о подзорных трубах (E446) был издан хельмштедтским профессором математики Г. С. Ключелем в 1778 г. в Лейпциге отдельным изданием со своими примечаниями.— *Примеч. ред.*

<sup>20</sup> Можно было бы думать, что многочисленные открытия Эйлера должны были притупить в нем чувство того удовольствия, которое душа испытывает при познании новых истин и которое математик имеет случай вкушать в более чистом виде и, пожалуй, также чаще, чем любой другой ученый. Эйлер же оставался всегда весьма восприимчив к этому удовольствию и он требовал от каждого такого же пыла. Как часто обижала его равнодушная миная, с которой я, по скромности, имел обыкновение сообщать ему мои маленькие открытия!— *Примеч. Н. Фуса (1786).*

<sup>21</sup> Более ранние из этих сочинений были впоследствии собраны и напечатаны отдельно на пользу интересующихся работами Эйлера математиков; вышли два сборника под заглавием «Opuscula analytica».— *Примеч. Н. Фуса (1786).*

<sup>22</sup> Эйлер был справедлив к чужим заслугам, что свойственно не всем великим людям, и даже к заслугам своих противников. Как часто видел я его воздающим с несомненным проявлением удовлетворения искреннюю похвалу заслугам какого-нибудь Даниила Бернулли, Даламбера, Лагранжа и многих других. Каждое новое открытие доставляло ему столь много радости, как если бы он сделал его сам, что свидетельствует о том, что его занимало больше расширение царства познания, чем одобрение мира.— *Дополнение Н. Фуса (1786).*

# РОДОСЛОВНАЯ РОСПИСЬ ПОТОМКОВ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

*Э. Н. АМБУРГЕР*

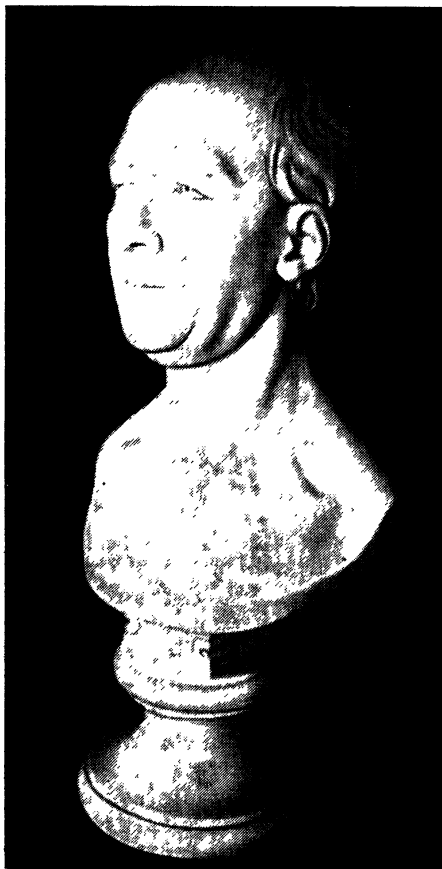
*(Марбург)*

*И. Р. ГЕККЕР, Г. К. МИХАЙЛОВ*

*(Москва)*

1. Генеалогия потомков Леонарда Эйлера издавна привлекала внимание исследователей. Интерес к ней вызывался как выдающейся личностью самого Л. Эйлера, так и видной ролью его семьи в истории Петербургской академии наук на протяжении целого столетия, вплоть до середины XIX в. Ведь с 1769 по 1800 г. конференц-секретарем академии был сын Л. Эйлера академик Иоганн-Альбрехт Эйлер, с 1800 по 1826 г. неперемнным ее секретарем был зять И. А. Эйлера академик Н. И. Фус, а с 1826 по 1855 г.— сын последнего и правнук Л. Эйлера академик П. Н. Фус. Кроме того, генеалогия потомков Л. Эйлера типична для тесных немецко-русских культурных и бытовых связей в России XIX в. с постепенной ассимиляцией немецких элементов в русской среде. Доведенная до наших дней родословная роспись потомков Л. Эйлера представляет собой поэтому и сама по себе уникальный социологический материал для характеристики определенных слоев общества на протяжении двух веков, их динамики и преемственных связей с современностью.

Наряду с потомками Л. Эйлера внимание исследователей привлекали и его предки. Фундаментальное исследование по генеалогии всего рода Эйлеров вплоть до середины нашего века провел пастор д-р Карл Эйлер (1877—1960) [136]. Он проследил истоки рода Эйлеров до XIII в. В те времена в окрестностях древнего германского города Линдау, находящегося на берегу Боденского озера, расположенного на северных отрогах швейцарских Альп у нынешнего стыка границ Швейцарии, Австрии и ФРГ, проживала семья, носившая двойную фамилию с неустановившимся правописанием, которую теперь чаще пишут в форме Euler-Schölpi. Прозвищная часть фамилии Schölpi (восходящая к алеманнскому слову, имеющему значение «кривой» или, в переносном смысле, «шельма») была отброшена лишь прапрадедом Л. Эйлера Гансом-Георгом Эйлером (1573—1663) при переезде его в конце XVI в. в Базель. С тех пор правописание фамилии приобрело устойчивую форму Euler, от которой произошла принятая русифицированная форма Эйлер. (Ближе к немецкому произношению было бы написание Ойлер, как, между прочим, пишут сейчас эту фамилию по-болгарски.) Этимологически фамилия Эйлер связана со средневерхнемецким «ау» (Au=Ouwe), означающим заливной луг. Примечательно, что этот элемент входит в топонимику многих географических названий окрестностей города Линдау, да и в само его название. Таким образом, фамилия Эйлер (Äuler) могла первоначально принадлежать владельцу каких-нибудь лугов или полей, позволяя предположить земледельческое происхождение рода Эйлеров.



*Бюст Л. Эйлера  
работы Ж. Д. Рашетта 1784 г.*

*Установлен в здании Президиума Академии наук в Москве. Авторская копия — в Государственном Эрмитаже*

В родословных таблицах, приложенных к книге К. Эйлера [136], фигурируют свыше 700 лиц, принадлежащих к 14 поколениям, начиная с деда упомянутого Ганса-Георга Эйлера, и носивших фамилию Эйлер в различных странах Европы на протяжении четырех веков. К этому роду принадлежал, в частности, и известный немецко-шведский биохимик, нобелевский лауреат и иностранный член Академии наук СССР Ханс Эйлер-Хельпин<sup>1</sup> (1873—1964). Впрочем, как он, так и сам автор книги К. Эйлер состояли в весьма отдаленном родстве с Л. Эйлером, будучи потомками в пятом колене одного из его четвероюродных братьев<sup>2</sup>. При огромном охвате материала К. Эйлер ограничился в своей книге только лицами, носившими фамилию Эйлер, и исключил из рассмотрения трудно прослеживаемые ответвления по женским линиям. Потомкам Л. Эйлера посвящена в книге отдельная глава с родословным деревом, содержащим имена и, как правило, даты жизни до сотни Эйлеров — прямых потомков великого ученого.

Составители предлагаемой родословной росписи потомков Леонарда Эйлера поставили перед собой задачу не только существенно исправить и дополнить данные К. Эйлера, но и включить в роспись также, по-воз-

<sup>1</sup> Вторая часть фамилии в написании Chelpin была вновь присоединена одним из Эйлеров в 1884 г. при получении им баварского дворянства.

<sup>2</sup> В БСЭ [10] Х. Эйлер-Хельпин ошибочно назван потомком Леонарда Эйлера.

вившее по всем поколениям свыше 1000 человек (в том числе носивших и носящих фамилию Эйлер — 160, а ныне живущих — около 400).

Среди потомков Л. Эйлера были лица, принадлежавшие к разным кругам общества: ученые и преподаватели, военные, инженеры, врачи, чиновники, представители духовенства и торгового мира и т. д. В дореволюционной России они находились на разных ступенях бюрократической лестницы: среди них было три академика, до двух десятков генералов и адмиралов, примерно столько же чиновников «генеральского» ранга и ряд профессоров. Больше половины ныне здравствующих потомков Л. Эйлера проживают в СССР. Среди них мы видим также специалистов различных профессий — ученых и преподавателей, инженеров, техников, врачей, служащих.

Родословная роспись составлялась преимущественно на основании изучения архивных и литературных источников. Большую помощь в сборе сведений о ныне здравствующих потомках Л. Эйлера (и их ближайших предках) оказали некоторые из самих этих лиц, которых удалось разыскать составителям. Среди них необходимо отметить представителей фамилий Геккерев, Гольмдорфов, Кочетковых-Шестаковых, Оболенских, Оттепов, Скалонов, Струве, Фойгтов, Цукале, Чернаев, Шиповых, Эйлеров, Энкелей, которым составители выражают особую благодарность.

Значительную помощь в увязке малоизвестных родословных линий на протяжении XIX в. оказала обширная, насчитывающая несколько сотен тысяч имен картотека по генеалогии фамилий нерусского происхождения в России, принадлежащая одному из составителей (Э. Н. Амбургеру) и собиравшаяся им на протяжении свыше полувека.

Некоторые интересные данные о потомках Л. Эйлера удалось разыскать в давно уже упоминавшихся в печати [112] бумагах Л. Б. Модзалевского, хранящихся теперь в рукописном отделе Пушкинского дома Академии наук СССР; значительная часть этих бумаг восходит еще к одному из основателей Пушкинского дома Б. Л. Модзалевскому. Наиболее интересны в архиве Модзалевского сохранившиеся там выписки (к сожалению, небольшие по объему) из семейных бумаг Коллинсов (включая составленный И. А. Эйлером перечень его детей и записку И. Д. Коллинса о смерти его тестя И. А. Эйлера) и из несохранившейся сводной метрической росписи немецко-реформатской общины Петербурга.

Семья Л. Эйлера и большинство его ближайших потомков и родственников принадлежали именно к немецко-реформатской общине, метрические книги которой, по-видимому, безвозвратно утрачены. Известно, что во второй половине XIX в. жена тогдашнего петербургского реформатского пастора и церковного историка Г. Дальтона (1833—1913) составила на основе записей петербургской реформатской общины о рождениях, конфирмациях, бракосочетаниях и смертях сводную алфавитную метрическую роспись, из которой, очевидно, и были сделаны в начале века краткие извлечения, сохранившиеся в архиве Модзалевского. С середины XIX в. среди потомков Л. Эйлера появляется также и значительное количество лютеран, сведения о которых можно найти в сравнительно полно сохранившихся, хотя и находящихся в большом беспорядке метрических книгах евангелически-лютеранских общин Петербурга, хранящихся в Ленинградском государственном историческом архиве и Центральном го-

сударственном историческом архиве СССР в Ленинграде (где находятся остатки фонда метрических книг обширного Санкт-Петербургского консисториального округа Генеральной евангелическо-лютеранской консистории России). Со второй четверти XIX в. потомки Л. Эйлера начинают понемногу вступать в браки и с представителями чисто русских семей (Елпатьевские, Зубовы, Глуховы, Васильчиковы, Рукины, Родионовы и др.), существенно расширяя тем самым сферу своего распространения в России.

Объем даже известных архивов, которые следовало бы просмотреть для пополнения родословной росписи потомков Л. Эйлера, огромен. К сожалению, систематический просмотр их представляет собой практически невыполнимую работу.

2. В нижеследующей родословной росписи приводятся краткие сведения обо всех известных на сегодня потомках Леонарда Эйлера. Описание для каждого лица в основной росписи содержит следующие элементы: 1) шифр данного лица в росписи; 2) имя и фамилия; 3) шифр родителей; 4) годы жизни; 5) краткие сведения о роде деятельности, чины, звания, ученые степени и т. д.; 6) сведения о безбрачии и бездетности; 7) источники информации; 8) сведения о браке и супругах. Разъясним каждый элемент описания.

1) Шифр каждого лица содержит два числа. Первое из них обозначено римскими цифрами и указывает номер поколения, к которому относится данное лицо. Леонард Эйлер считается в первом поколении, его дети во втором и т. д., вплоть до десятого поколения. Второе число шифра обозначено арабскими цифрами и указывает порядковый номер лица в пределах данного поколения. Порядковый номер определяется старшинством порядкового номера родителей в предыдущем поколении, а в пределах одной семьи — старшинством по рождению. Дети, годы рождения которых или старшинство неизвестны, расположены для каждой семьи после детей с установленными годами рождения.

В ряде случаев, когда очевидно наличие в родословной росписи пробелов, в нее включены в качестве резерва условные номера, оставляемые для последующего их заполнения. Напротив, чтобы не перенумеровывать всю родословную роспись при необходимости внесения в нее дополнений, по-видимому, целесообразно будет вводить и номера с присоединением букв А, В, С и т. д. Кое-где такие вставки были сделаны уже сейчас, когда дополнительная информация была получена после завершения основной работы по составлению родословной росписи. Однако при всем стремлении к предусмотрительности нумерация в IX и X поколениях достаточно условна.

2) Имена и фамилии даются всюду в русской транскрипции. Основное имя, если оно известно, набрано всюду в разрядку. Варианты имен приводятся рядом с отделением их косой чертой, русифицированные варианты имен вынесены при этом вперед. Отчества, как правило, не указываются, так как у каждого из потомков Л. Эйлера имя отца легко может быть установлено из самой росписи. При первом упоминании фамилий иностранного происхождения иностранное написание приводится в круглых скобках. Для женщин всегда дается девичья фамилия. В случае, если имя или фамилия какого-либо лица неизвестны, то вместо них ставится буква N.



3) Шифр родителей приводится в кавычках и указывает того из родителей, кто включен в роспись в предыдущем поколении. Шифр помещается для облегчения прослеживания потомственной преемственности.

4) Годы жизни приводятся в круглых скобках. Сначала указывается дата и место рождения, а затем дата и место смерти. Все даты даны для единообразия по новому стилю<sup>3</sup>. В отдельных случаях, когда стиль, по которому указана дата, неясен, делается помета: (ст.?). При неполной информации о временах рождения и смерти приводятся имеющиеся данные, причем могут быть указаны только даты (годы) рождения или соответственно смерти (снабженные в этих случаях пометами «р» или «ум»); у малолетних детей, дата смерти которых неизвестна, пишется «ум. в детстве» или «ум. в младенчестве»). В тех случаях, когда дата рождения неизвестна, а имеется дата крещения, то указывается последняя с пометой «кр». Неточные даты помечены знаком ~. Даты и месяцы обозначаются, как правило, арабскими цифрами, причем к однозначным датам и номерам месяцев присоединяется спереди нуль (даты, месяцы и годы отделяются при этом друг от друга точками). В случаях, когда известны только месяц и год события, но отсутствует дата, месяц обозначается римскими цифрами и присоединяется к году без точки.

Названия городов и населенных пунктов приведены, как правило, в вариантах, принятых во время описываемых событий, отражая тем самым существовавшее тогда государственное разделение. При названиях мелких населенных пунктов иногда добавляются для ясности указания на их прежнюю административно-территориальную принадлежность. При использовании данных о месте смерти следует иметь в виду, что оно может не совпадать с местом захоронения.

5) Сведения о роде деятельности включают профессию, название оконченного высшего или среднего специального учебного заведения, время вступления в службу, иногда основные должности и места работы (с указанием годов), время выхода в отставку (на пенсию). Сведения эти включаются в роспись выборочно и в значительной степени субъективно. Чины, звания, ученые степени и прочие формальные данные приводятся также выборочно. Обычно указываются последний гражданский чин или воинское звание, высшая ученая степень (ученое звание) с указанием года присвоения. (В случае, когда год какого-либо события при исчислении дат по новому и старому стилю различается, указывается, как правило, точная дата упоминаемого события.) В обозначении чинов и званий широко используются принятые в справочной литературе сокращения, как-то: д. ст. сов. — действительный статский советник, ген.-м. — генерал-майор, д-р физ.-мат. н. — доктор физико-математических наук и т. п. Список некоторых использованных сокращений помещен в приложении.

<sup>3</sup> При необходимости перевода дат к старому стилю, принятому в России до 1918 г., надо помнить, что действовавший тогда в России юлианский календарь отставал от принятого в Западной Европе григорианского календаря в XVIII в. (до 12 марта н.ст. 1800 г.) на 11 дней, в XIX в. (до 13 марта н.ст. 1900 г.) на 12 дней, а в начале XX в. (до 14 февраля н.ст. 1918 г.) на 13 дней. При переводе с нового стиля на старый дат 1800 и 1900 гг. с 1 по 13 марта следует соблюдать осторожность, так как дню 1 марта н.ст. при этом соответствуют 18 и 17 февраля ст.ст., а дням 12 марта 1800 г. и 13 марта 1900 г. н.ст. соответствует отсутствующая в эти годы в новом стиле дата 29 февраля.

6) Сведения о безбрачии («холост», «незамужняя») указываются для лиц старше 18 лет в целях уточнения информации о пресечении данной ветви генеалогического дерева. Сведения о бездетности указываются только при отсутствии более точных данных о браке, так как при наличии таких данных указания о детности (или бездетности) даются после сведений о супруге.

7) Источники информации указываются с помощью обычной отсылки к приложенному в конце статьи списку использованных источников. В них можно получить иногда более подробные сведения об упоминаемых лицах. Номера источников, содержащих портреты соответствующих лиц, помечены сверху индексом «п». Отсутствие отсылок к источникам означает обычно, что информация о данном лице почерпнута из материалов о его родителях.

Список использованных источников состоит из трех частей — собственно библиографии, перечня архивов, в которых имеются соответствующие материалы, и перечня имен частных лиц, сообщивших составителям те или иные сведения.

Пользуясь списком источников, следует иметь в виду, что как он сам, так и отсылки к нему в тексте росписи неполны. К тому же, в отсылках к литературе составители, как правило, не указывали конкретных страниц, к которым отсылаются читатели, и даже отдельных выпусков продолжающихся изданий, так как это неизмеримо увеличило бы ссылочный аппарат. В частности, отсылки к газетам «Новое время» [46] и «Санкт-Петербургский евангелический воскресный листок» [159] подразумевают наличие в этих газетах сообщений о смерти соответствующих лиц (а во второй из них и/или сообщения о бракосочетании). Заинтересованный читатель может, как правило, сам провести необходимый дополнительный поиск в упомянутых источниках или, в крайнем случае, обратиться за справками к составителям. Приложенный список литературы представляет и сам по себе полезный справочный аппарат по истории России XIX в.

8) Сведения о браке и супругах даются с новой строки. Приводится год бракосочетания (со знаком ∞), а затем имя, отчество (если оно известно) и фамилия жены (мужа) с годами жизни. (В отличие от фамилий самих потомков Эйлера фамилии их жен (мужей) напечатаны строчными буквами.) Для облегчения дальнейших генеалогических розысков при фамилиях сохраняются в месте их первого упоминания дворянские титулы, если таковые имеются. Сведения о роде деятельности, чинах и званиях даются здесь иногда менее подробно, чем в случае самих потомков Л. Эйлера. После этого указывается число детей от данного брака и в кавычках их шифр в соответствии с росписью. Иногда оговаривается и наличие приемных детей. Если известен факт отсутствия детей в каком-либо браке, то добавляется помета «бездетны». Аналогично отдельной строкой даются сведения о втором и последующих браках (с обозначением нижним индексом при знаке ∞ номера брака). Ссылки на мужей и жен прямых потомков Л. Эйлера осуществляются в росписи с помощью шифра соответствующего лица с присоединением верхнего индекса «м» и «ж», а в случае повторного брака — этого же индекса с номером брака (так, «II.7<sup>ж2</sup>» — вторая жена Х. Эйлера, имеющего шифр «II.7»). Другие браки упоминаемых в росписи лиц, не имеющие прямого отношения к потомкам

Л. Эйлера, указываются в круглых скобках после остальных сведений об этих лицах. Отсылка к источникам информации присоединяется к сведениям о браке и супругах в тех случаях, когда они отличны от указанных для основного потомка Л. Эйлера (мужа или жены), включенного в роспись с самостоятельным шифром.

Следует всегда иметь в виду, что отсутствие в родословной росписи тех или иных сведений означает, если не оговорено противное, лишь отсутствие у составителей соответствующей информации. Наличие противоречивой информации оговаривается иногда в специальных примечаниях, вынесенных в конец росписи (наличие таких примечаний обозначается звездочкой при шифре основного лица, включенного в роспись). Однако мелкие расхождения в даваемой источниками информации (например, возможные отклонения в указываемых годах на один (или даже два) или отличающиеся на несколько дней расхождения в датах) при этом, как правило, не оговариваются, и приводится та информация, которая кажется составителям по каким-либо причинам более надежной.

Составители будут признательны за все исправления допущенных ими неточностей и дополнения к публикуемым материалам.

Глубокую благодарность составители выражают всем лицам и организациям, оказавшим им помощь в сборе материалов. Это касается как предшественников разных ветвей потомков Л. Эйлера, в том числе и упомянутых выше, так и многих других лиц, проживающих в разных странах Европы. Среди советских и зарубежных организаций, оказавших большую помощь составителям, следует прежде всего упомянуть многочисленные государственные архивы и библиотеки СССР. Составители лишены, к сожалению, возможности перечислить здесь все множество лиц и организаций, любезно оказавших им свою помощь.

## РОДОСЛОВНАЯ РОСПИСЬ ПОТОМКОВ Л. ЭЙЛЕРА

### I ПОКОЛЕНИЕ

И.1. Леонард ЭЙЛЕР (Euler) (15.04.1707 Базель — 18.09.1783 СПб.) сын пастора Пауля Эйлера (кр. 16.02.1670 Базель — 11.03.1745 Базель) и Маргареты Бруккер (Brucker) (кр. 02.01.1678 Базель — 21.11.1761 Берлин) [10, 130; А1, А8, А9]

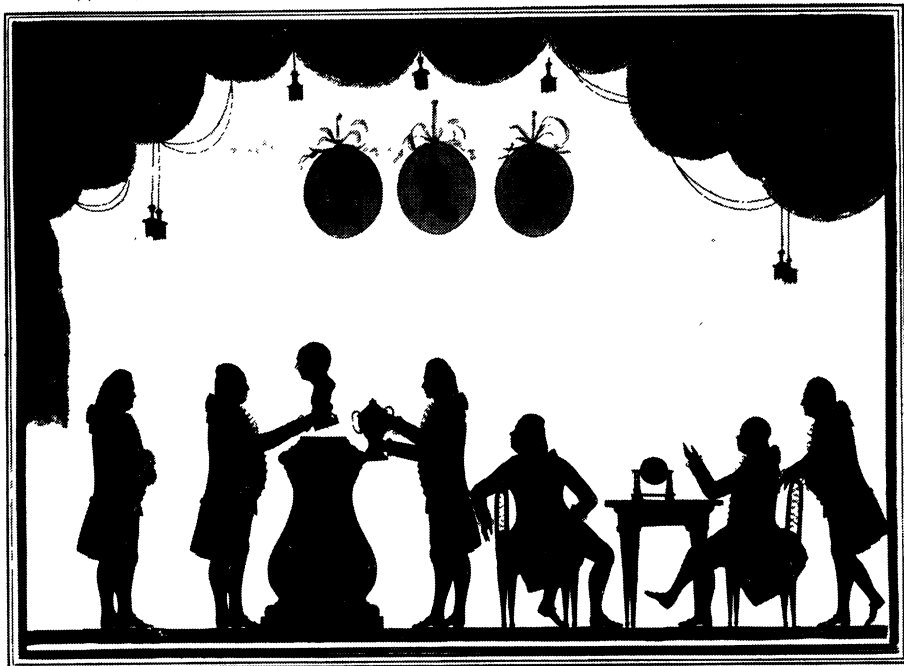
О<sub>1</sub> 07.01.1734 — Катарина Гзелль (Gsell) (16.04.1707—21.11.1773 СПб.) дочь академического живописца Г. Гзелля (1673—1740 СПб.); 13 детей «II.1—13»

О<sub>2</sub> 1776 — Саломея-Абигайль Гзелль (17.07.1723—05.01.1794 СПб.) сводная сестра предыдущей; бездетны

### II ПОКОЛЕНИЕ

#### (дети)

II.1. Иоганн-Альбрехт / Иван ЭЙЛЕР «I.1» (27.11.1734 СПб.—18.09.1800 СПб.) д. чл. Акад. наук в Берлине (1754) и СПб. (1766), в рус. сл. с 1766, конференц-секретарь Акад. наук в СПб. (с 1769), «директор наук» в Сухопутном шляхетном кадет. корпусе (с 1776), ст. сов. (1799) [2<sup>п</sup>, 32<sup>п</sup>, 39, 69, 88, 115, 136<sup>п</sup>, 146, 157, 158; А8, А9, А24, А25]



*Группа академиков устанавливают бюст Леонарда Эйлера  
Слева направо: А. И. Лексель, И. А. Эйлер, Н. И. Фус (держит амфору в руках),  
И. И. Лепехин, П. С. Паллас, Л. Ю. Крафт  
Силуэты Ф. Антинга 1784 г.*

∞ 1760 — Анна-София-Шарлотта (Павловна) Гегемейстер (Hag) (e)meister(04.05.1734 Берлин — 22.11.1805 СПб.) дочь прус. корол. оберкастеляна и наadv. советника; 10 детей «III.1—10»

II.2. Анна-Маргарета ЭЙЛЕР «I.1» (08.06.1736 СПб.— 02.07.1736 СПб.)

II.3. Мария-Гертруда ЭЙЛЕР «I.1» (09.05.1737 СПб.— 01.05.1739 СПб.)

II.4. Анна-Элизабет ЭЙЛЕР «I.1» (05.11.1739 СПб.— 19.11.1739 СПб.)

II.5\*. Карл-Иоганн ЭЙЛЕР «I.1» (15.07.1740 СПб.— 16.03.1790 СПб.) врач, ок. ун-т в Галле, д-р мед. (1762), в рус. сл. с 1766, придворный врач (с 1766), кол. сов. (1779) [32, 39, 69, 115; A1, A24, A25]

∞ 1766 — Анна-Эмилия/Амалия (Андреевна) фон Белль (von Bell) (04.10.1741 Берлин — 22.02.1830 СПб.) дочь прус. наadv. советника, сестра «II.6<sup>M</sup>»; 12 детей «III.11—21» [65]

II.6. Екатерина-Елена ЭЙЛЕР «I.1» (15.11.1741 Берлин — 04.05.1781 Выборг)

∞ 1777 — Карл-Иосиф (Андреевич) фон Белль (von Bell) (01.02.1744 Берлин — 04.09.1830 Выборг) брат «II.5<sup>M</sup>», офицер, в рус. сл. с 1771, оберквартирмейстер, полковник; 5 детей «III.22—26» (∞<sub>2</sub> 1784 — Елена-Кристина Сезман (Sesemann) (1759—1828); 6 детей) [74; A2, A23, A24]

II.7. Х р и с т о ф о р ЭЙЛЕР «I.1» (01.05.1743 Берлин — 03.03.1808 бл. Выборга) артил. офицер, был в прус. сл., в рус. сл. с 1767, нач-к Сестрорецкого оружейного з-да (1778—89), Георг. крест 4-й ст. (1792), ген.-л. (1797), в отст. с 1799 [17, 27, 32, 69, 73, 74, 115; A24, A25]

∞<sub>1</sub> 1776 — Анна Винтерштедт (Winterstaedt) (ум. 25.09.1777 Сестрорецк) надзирательница в Смольн. ин-те (1767—76); 1 дочь «III.27» [111]

∞<sub>2</sub> 1778 — А н н а-Вильгельмина-Кристина (Севериновна) фон Краббе (von Krabbe) (14.10.1755 бл. Дерпта — 03.07.1813 Выборг) племянница нач-ка Рос. артиллерии бар. И. И. Меллер-Закомельского; 12 детей «III.28—38»

II.8 \*. Ш а р л о т т а ЭЙЛЕР «I.1» (12.07.1744 Берлин — 13.02.1780 Хюкельховен, герц. Юлих) [136]

∞ 1766 — бар. Иохан-Якоб ван Делен (van Delen) (01.03.1743 Хюкельховен — 1786) офицер прус. армии, в 1766—70 жил в России, затем в своих имениях в Юлихе близ Голландии; 7 детей «III.39—45» (∞<sub>2</sub> — Мария-Анна Шатте (Schatte)) [125, 150]

II.9. Герман-Фридрих ЭЙЛЕР «I.1» (08.05.1747 Берлин — 12.12.1750 Берлин) [137, 156]

II.10. Эртмут-Луиза ЭЙЛЕР «I.1» (13.04.1749 Берлин — 09.08.1749 Берлин) [137, 156]

II.11. Елена-Элеонора ЭЙЛЕР «I.1» (13.04.1749 Берлин — 11.08.1749 Берлин) [137, 156]

II.12. Август-Фридрих ЭЙЛЕР «I.1» (20.03.1750 Берлин — 10.08.1750 Берлин) [137, 156]

II.13. N. ЭЙЛЕР «I.1» (ум. младенцем)

### III ПОКОЛЕНИЕ

#### (внуки)

III.1. Е к а т е р и н а / Катарина-Паулина-Франциска-София ЭЙЛЕР «II.1» (18.10.1761 Берлин — XII 1809 СПб.) наставница в малолетнем отд. Сухопутного шляхетного кадет. корпуса (с 1790); незамужняя [23, 101]

III.2. И в а н / Иоганн-Леонард-Рудольф ЭЙЛЕР «II.1» (12.11.1762 Берлин — 27.09.1827 СПб.) артил. офицер, сл. с 1776, полк. (1799), в начале 1800-х эконоом при Екатерин. ин-те [17, 39, 65, 93; A24]

∞ 1789 — Мария-Генриетта [-Доротея (?)] Рацин (Racine) (28.09.1768 — 07.02.1841 СПб.) дочь Страсбургского купца, клас. дама в Воспит. доме; 5 детей «IV.1—5» [65; A25]

III.3. Юлиана-Шарлотта-Мария ЭЙЛЕР «II.1» (24.05.1764 Берлин — 16.02.1765 Берлин)

III.4. А л ь б е р т и н а-Бенедикта-Филиппина-Луиза ЭЙЛЕР «II.1» (04.02.1766 Берлин — 06.07.1829 СПб.) [65]

∞ 1784 — Николай (Иванович) Фус (Fuss) (29.01.1755 Базель — 04.01.1826 СПб.) математик, в рус. сл. с 1776, адъютнт (1776), орд. академик высш. математики (1783) и непр. секретарь (с 1800) Акад. наук в СПб., д. ст. сов. (1806); 13 детей «IV.6—18» [2<sup>н</sup>, 10, 37<sup>н</sup>, 39, 65, 69; A5, A8, A24]

III.5. А н н а-Эмилия-Иоганна ЭЙЛЕР «II.1» (10.09.1767 СПб. — 21.03.1831 СПб.) клас. дама в Смольн. ин-те (с 1809); незамужняя [111]

III.6. Е г о р / Георг-Рудольф ЭЙЛЕР «II.1» (12.11.1770 СПб. — 18.06.1831 Архангельск) сл. с 1784 в Мин-ве иностр. дел, секретарь миссии в Гамбурге (1800—09), с 1811 в Мин-ве финансов, чл. Арханг. таможни, кол. сов. (1816); холост [30, 39, 93; A4, A24]



*Иоганн-Альбрехт Эйлер*

*Портрет кисти Э. Хандмана 1756 г.*

III.12. Шарлотта-София-Альбертина ЭЙЛЕР «II.5» (12.04.1769 СПб.— после 1804 Казань) преп. в Смольн. ин-те (1790—92) [111]

∞<sub>1</sub> 1795 — Петр Аллегретти (Allegretti) (Италия — 05.01.1800 СПб.) врач, в рус. сл. с 1786, в Камчатской экспедиции (1786—94), в Царскосельском «оспенном доме» с 1795), штаб-лекарь (1794), ум. от укуса бешеной собаки; 3 детей «IV.34—36» [A1, A24]

∞<sub>2</sub> 1804 — Иван / Иоганн-Якоб Урберг (Urberg) (Швеция — ~ 1810) хирург [68; A24]

III.13 \*. Леонтий / Леонард ЭЙЛЕР «II.5» (03/04.06.1770 СПб.— 22.05.1849 Павловск СПб. губ.) гв. офицер, сл. с 1779, капитан (1791), с 1791 в шт. сл., преп. Сухопутного шляхетного кадет. корпуса (1791—95), переводчик СПб. таможни (с 1812); кол. сов. (1816) [39, 65, 93, 110, 114; A1, A6, A24]

∞ — Христина или Мария Ритмейстер (Rittmeister) (1787—1821); 5 детей «IV. 38—42» [114, 136]

III.14. Анна-Иоганна-Катарина ЭЙЛЕР «II.5» (16.11.1771 СПб.— 1822)

∞ 1793 — бар. Кристофель-Иохан-Вильгельм ван Делен (Bar. van Delen) (~1768—1810) = «III.40»; 2 дочери «IV.43, 44»

III.15 \*. Екатерина ЭЙЛЕР «II.5» (25.11.1772 СПб.— 08.01.1845 СПб.) преп. Александр. уч-ща при Смольн. ин-те (1790—95) [65, 111]

∞ 1795 — Карл-Фридрих (Иванович) Болтенгаген (Boltenhagen) (23.01.

III.7. Христофор / Кристоф-Людвиг ЭЙЛЕР «II.1» (20.07.1772 СПб.— 05.03.1847 Гатчина) отст. подпоручик; холост [A24]

III.8 \*. Анна-Шарлотта-Вильгельмина ЭЙЛЕР «II.1» (26.11.1773 СПб.—20.04.1831 СПб.) [136; A24]

∞<sub>1</sub> 1789 — Якоб Бернулли (Bernoulli) (28.10.1759 Базель — 14.07.1789 СПб.) математик, адъюнкт (1786) и д. чл. (1787) Акад. наук в СПб.; бездетны [2, 10, 126]

∞<sub>2</sub> 1790 — Иоганн-Давид Коллинс (Collins) (18.12.1761 Кёнигсберг— 27.12.1833 СПб.) пастор СПб. нем. реформат. общины (1790—1810), содержатель мужского пансиона в СПб. (1810—30); 14 детей «IV.19—31A» [132, 146; A7, A23].

III.9. Доротея ЭЙЛЕР «II.1» (23.04.1777 СПб.— 26.09.1777 СПб.)

III.10 \*. Павел / Пауль ЭЙЛЕР «II.1» (06.04.1778 СПб.— после 1815 Новгород) гв. офицер, прапорщик, с 1796 в шт. сл., лесничий в Орлов. губ., кол. ас. [4; A5, A24]

∞ 1808 — N. N.; 1 сын «IV.32» (?)

III.11. Леонард-Андрей-Карл ЭЙЛЕР «II.5» (05.04.1768 — 05.04.1769 СПб.)

1768 — 03.07.1831 СПб.) сл. с 1783 по Мин-ву финансов, в отст. 1816—24, дир. Гос. коммерч. банка (с 1824), ст. сов. (1812); 13 детей «IV.45—57» [39, 65, 93; A1, A23, A24]

III.16. **Н а т а л и я** ЭЙЛЕР «II.5» (15.05.1774 СПб.— 18.09.1779 СПб.)

III.17. **Анна-Генриетта-Мария** ЭЙЛЕР «II.5» (14.06.1775 СПб.— 24.03.1860 СПб.); незамужняя [65]

III.17A. **Н. ЭЙЛЕР**, дочь «II.5» (ум. младенцем)

III.18. **Э м и л и я** ЭЙЛЕР «II.5» (07.06.1777 СПб.— 20.12.1781 СПб.) [A25]

III.19. **А н д р е а с** ЭЙЛЕР «II.5» (09.10.1778 СПб.— 21.11.1781 СПб.)

III.20. **Е л и з а в е т а** ЭЙЛЕР «II.5» (24.03.1780 СПб.— 20.02.1852 Казань) клас. дама в Смольн. ин-те (1797—1802) [26, 107, 111; A5]

∞<sub>1</sub> 1805 — **К а р л-Готтлиб** (Амвросиевич) Фойгт (Voigt) (27.06.1762 Нижн. Лаузиц — 05.07.1811 Казань) ок. ун-т в Лейпциге, проф. философии Казан. ун-та (с 1808); 2 детей «IV.58, 59» [39, 41, 107; A5; Л20]

∞<sub>2</sub> 1812 — **Иван/Иоганн-Баптист** Браун (Braun) (25.06.1774 Ортенберг, Бавария — 20.01.1819 Казань) ок. ун-т в Вене, д-р мед. и хирургии (1802), сл. с 1803, проф. анатомии, физиологии и судебной медицины (с 1807) и ректор (1814—17) Казан. ун-та; бездетны [39, 41; A5, A23]

∞<sub>3</sub> 1822 — **Федор / Фридрих-Франц** (Иванович) Эрдман (Erdmann) (15.03.1793 Людвигслуст, Мекленбург-Шверин — 26.11.1862 Казань) востоковед, уч. в Ростоке и Гёттингене, проф. Казан. ун-та (1819—45), дир. уч-щ Новгор. губ. (с 1847), ст. сов. (1832) (∞<sub>3</sub> — **Ольга Петровна** N.; 3 детей) [20, 39, 41, 69; A5, A14]

III.21. **Анна-Катарина-Вильгельмина** ЭЙЛЕР «II.5» (05.10.1781 СПб.— 1782 СПб.) [A25]

III.22. **Анна-Эмилия БЕЛЛЛЬ** «II.6» (01.07.1778 СПб.— 1782 Выборг)

III.23. **Шарлотта-Элеонора БЕЛЛЛЬ** «II.6» (01.07.1778 СПб.— 03.08.1778 СПб.)

III.24. **А н д р е й / Андреас** БЕЛЛЛЬ «II.6» (23.08.1779 СПб.— 02.02.1865 Выборг) офицер, сл. с 1796, подполк. (1812), уволен «за ранами» (1826), полицм. в Горн. кадет. корпусе (1828—34), с 1835 в Артил. деп-те, полк. (1842), в отст. с 1845; холост [17, 39, 90; A2]

III.25. **Анна-Эрнестина-К а р о л и н а** БЕЛЛЛЬ «II.6» (26.04.1781 Выборг — 01.12.1832 Выборг) клас. дама в Смольн. ин-те (1802—06) [111; A23, A24]

III.26. **Н. БЕЛЛЛЬ** «II.6» (ум. младенцем 21.04.1782 Выборг) [A23]

III.27. **Анна-Саломея-Маргарета** ЭЙЛЕР «II.7» (16.09.1777 Сестрорецк — 1777 Сестрорецк)

III.28. **Иоганн-А л е к с а н д р-Кристоф-Леонард** ЭЙЛЕР «II.7» (28.02.1779 Сестрорецк — 27.03.1849 СПб.) артил. офицер, сл. с 1790, дир. Артил. деп-та (с 1833), чл. Воен. совета (с 1840), ген. от артил. (1834), получил по своим и деда заслугам диплом на Рос. дворянство с гербом (1846) [17, 23, 39, 65, 69, 76, 100<sup>II</sup>, 113; A2, A5, A24]

∞ 1804 — **Елизавета Николаевна Гебенер** (Gebener) (01.07.1785 Сестрорецк — 21.02.1844 СПб.), дочь ген.-майора; 9 детей «IV.62—70» [65]

III.29. **А н н а-Б л а н д и н а-Шарлотта-Юлиана** ЭЙЛЕР «II.7» (23.03.1780 Сестрорецк — 29.03.1868 Лужск. у. СПб. губ.) [70]

∞ — **Александр Петрович Бекман** (Böckmann) (16.09.1772—12.01.1851 Лужск. у. СПб. губ.) артил. офицер, подполк. (1811), в отст. полк. с 1814; 5 или 6 детей «IV. 71—75» [17, 70; A2, A23]

III.29A. **Н. ЭЙЛЕР**, дочь «II.7» (05.05.1781 Сестрорецк — 29.07.1781 Сестрорецк) [A25]

III.30. **Е л и з а в е т а-Доротея-Элеонора** Эйлер «II.7» (1782—09.01.1865 Выборг); незамужняя



*Николай Фус*

*Силуэт работы Ф. Антинга 1784 г.*

III.31. Федор / Фридрих-Вильгельм ЭЙЛЕР «II.7» (р. ~1784) артил. офицер, сл. с 1793, нач-к подвижных артил. парков 1-й армии (с 1827), Георг. крест 4-й ст. (1817), ген.-м. (1828), в отст. с 1835; холост [17, 39, 96; A2]

III.32. Иоганн-Николай-Петер / Петр ЭЙЛЕР «II.7» (10.05.1786 Сестрорецк — 1791)

III.33. Иоганн-Карл-Пауль / Павел ЭЙЛЕР «II.7» (10.05.1786 Сестрорецк — 22.11.1840 СПб.) офицер, сл. с 1803, Георг. крест 4-й ст. (1826), ген.-м. (1839) [17, 39, 65, 69; A2]

∞<sub>1</sub> — Мария Федоровна Дребуш (Dröbusch) (ум. 31.01.1819); 2 детей «IV.76, 77»

∞<sub>2</sub> — Христина-Елизавета Григорьевна Энгельгардт (Engelhardt) (ум. после 1860) дочь отст. майора; 2 детей «IV.78, 79».

III.34. Кристоф-Бернгард (Борис)-Константин ЭЙЛЕР «II.7» (12.07.

1788—1863) офицер, сл. с 1805, подполк. (1819), в отст. «за ранами» полк. (1823), городничий в городах Витебской, Минской и Владимирской губ. (с 1827), в отст. с 1854 [17, 39; A2, A16]

∞ — Ксаверия Раймундовна Корвовская; 3 детей «IV.80—82»

III.35. Карл-Альбрехт ЭЙЛЕР «II.7» (21.03.1790 СПб. — 02.04.1790 СПб.) [A25]

III.36. Александр-Катарина-Маргарета-Вильгельмина ЭЙЛЕР «II.7» (19.12.1791 Выборг — 24.12.1842 Динабург) [A23]

∞ 1817 — Федор / Балтазар-Фридрих (Карлович) фон Ререн (von Rehren) (30.04.1788 — 14.04.1851) артил. офицер, сл. с 1806, полк. (1835), в отст. ген.-м. с 1848; 3 детей «IV.83—85» (∞<sub>2</sub> — Роза Иосифовна N.; 2 детей) [17, 90; A2, A23]

III.37. Екатерина / Катарина-Августа-Каролина ЭЙЛЕР «II.7» (27.05.1793 Выборг — 10.06.1871 Выборг); незамужняя [A23]

III.38. Иоганн-Кристиан ЭЙЛЕР «II.7» (1794 — ум. в детстве)

III.39. Бар. Леонард-Альбрехт-Карл ван ДЕЛЕН «II.8» (10.07.1767 СПб. — 27.05.1821 Монс, Бельгия) офицер рус. армии, затем в голланд. и прус. сл., инсп. гидротехн. сооружений в Голландии (1815), чл.-корр. (1809) и д. чл. (1816) Нидерл. акад. наук [125, 151]

∞ 1803 — Класина-Ханна-Вильгельмина Делен (09.10.1767 — 19.05.1826) троюродная сестра своего мужа; бездетны

III.40. Кристофель-Иохан-Вильгельм ДЕЛЕН «II.8» (20.03.1769 СПб. — 03.03.1810 Пернов) офицер, инж.-майор (1805) рус. армии [125, 136; A23]

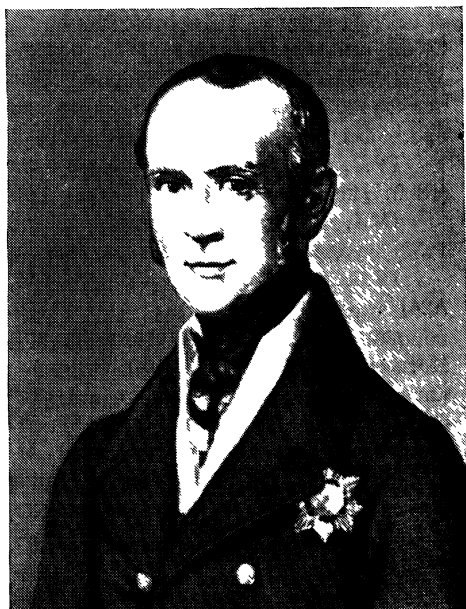
∞ 1793 — Анна-Иоганна-Катарина ЭЙЛЕР (1700—1822) = «III.14»; 2 дочери «IV.43, 44»

III.41. Фредерика-Вильгельмина-Оттонетта ДЕЛЕН «II.8» (1772 Хюкельховен, герц. Юлих — 11.01.1804 Ламбсхейм, там же) [136]





*А. Х. Эйлер (III.28)*  
С портрета из собрания  
б. Военного министерства [100]



*П. Н. Фус (IV.13)*  
С гальванографии 1850-х годов [161]

∞ 1795 — Иоганн-Баптист Эйлер (кр. 20.01.1767 Ламбсхейм — после 1813) офицер в цвейбрюккенской армии, затем в отставке (внук четверюродного брата Л. Эйлера)

III.42. Елизавета-Кристина-Элеонора ДЕЛЕН «II.8» (р. 1774) [125]

∞ — Матиас-Иозеф Кремер (Kremer) окружной секретарь в Эркеленце (бл. Ахена)

III.43. Филиппина ДЕЛЕН «II.8» (1776—1812); незамужняя

III.44 \*. София-Тереза-Шарлотта ДЕЛЕН «II.8» (~1777 — ум. в России (?)) [125, 136]

∞ — Фридрих-Карл Лобеданк (Lobedanck) ротм. рус. кавалерии

III.45. Иохан-Кзспер-Фердинанд ДЕЛЕН «II.8» (02.11.1779 Хюкельховен, герц. Юлих — 02.12.1872 Тил, Нидерланды) ротм. прус. армии, затем бургомистр Доверна (бл. Ахена) [125, 150]

∞ 1829 — Мария-Вильгельмина Делен (14.10.1793 — 17.04.1871 Вамел, Нидерланды) дочь троюродного брата своего мужа; 2 детей «IV.91, 92»

III/IV\*. Н. ЭЙЛЕР (р. ~1795) офицер, переведен из прапорщиков Воронежского пехотного полка корнетом Гродненского гусарского полка (1813), отставлен от службы «за долговременное неприбытие» (1816) [17].

#### IV ПОКОЛЕНИЕ (правнуки)

IV.1. И в а н / Иоганн-Кристоф ЭЙЛЕР «III.2» (12.07.1790 — после 1842) артил. офицер, сл. с 1809, подполк. (1832), нач-к чертежной Артил. деп-та (1831—34), в отст. полк. с 1842; холост [17, 39, 90; A2]

IV.2. Д а р ь я / Доротея-Шарлотта-София ЭЙЛЕР «III.2» (09.12.1791 — 29.04.1816 СПб.) ок. Смольн. ин-т (1809) [111; A24]

∞ — Александр Петрович Дешен (Deschen) (~1784 — после 1848) офицер, полк. (1832), сл. во II (1803—30) и в Павл. (1831—49) кадет. корпусах в СПб., Георг. крест 4-й ст. (1826); 3 детей «V.1—3» [39; A2]

IV.3. Анна-Луиза-Е л и з а в е т а ЭЙЛЕР «III.2» (р. 1793), ок. Смольн. ин-т (1809) [111]

IV.4. Ф е д о р / Фридрих-Кристоф ЭЙЛЕР «III.2» (1796 Оренбург — после 1832) пехотный офицер, в сл. с 1815, шт.-кап. (1824), в отст. с 1827 [17; A2]

IV.5. Доротея-М а р и я ЭЙЛЕР «III.2» (1798 Омск — 14.07.1883 СПб.) [159; A24]

∞ 1820 — Иван / Иоганн-Фридрих Федорович Ортенберг (Orttenberg) (~1794 Могилёв — 08.01.1867 СПб.) офицер, сл. в Пажеском корпусе (1823—56), с 1832 инсп. классов, Георг. крест 4-й ст. (1843), ген.-м. (1847), в отст. ген.-л. с 1856; 6 детей «V.4—9» [34<sup>п</sup>, 39, 65, 69; A2, A5]

IV.6. Анна-С о ф и я ФУС «III.4» (29.05.1785 СПб.— 06.04.1814 СПб.) [147]

∞ 1805 — Иоганн-Генрих Никкельс (Nickels) (21.04.1776 — 14.02.1829) купец I гильдии; 4 детей «V.10—12A» (∞<sub>2</sub> — были дети)

IV.7. Ш а р л о т т а-Маргарита ФУС «III.4» (28.05.1787 СПб.— 19.10.1839 СПб.) [A23]

∞ 1808 — Викентий / Венцеслав-Пий-Иоганн (Иванович) Чернай (Czerнай) (10.06.1782 Шемниц, Венгрия (теперь Банска-Штьявница, ЧССР) — 14.03.1830 СПб.) в рус. сл. с 1808, архитектор СПб. Ком-та городских строений (с 1825), тит. сов. (1825); 9 детей «V.13—21» [65; A8, A23]

IV.8. Доротея-Эмилия ФУС «III.4» (18.10.1788 СПб.— 1791 СПб.)

IV.9. Иоганн-Эрнст ФУС «III.4» (1790 СПб.—10.02. 1791 СПб.)

IV.10. Н а т а л и я ФУС «III.4» (1791 СПб.— 1794 СПб.)

IV.11. Ю л и я / Юлиана-Катарина ФУС «III.4» (1793 СПб.— ум. до 1826)

∞ 1814 — Христиан-Леонард Кьерульф (Kierulff) (25.06.1778 Пернов — 13.04. 1845 Дерпт) купец (∞<sub>2</sub> 1826 — Каролина-Мария Ундритц; были дети) [A19, A23]

IV.12. Д а р ь я / Доротея-Мария ФУС «III.4» (07.10.1796 СПб.— 29.01.1874 СПб.) сл. в нем. еванг.-реформат. общине; незамужняя [65; A23]

IV.13. П а в е л / Пауль-Генрих ФУС «III.4» (01.06.1798 СПб.— 22.01.1855 СПб.) математик, сл. с 1815, адъютант (1818), орд. академик (1826) и непр. секретарь (с 1826) Акад. наук в СПб., д. ст. сов. (1838) [2<sup>п</sup>, 10, 39, 51<sup>п</sup>, 65, 69, 79, 110, 161<sup>п</sup>; A5, A8, A24]

∞ 1821 — Мина / Вильгельмина-Доротея (Васильевна) Гольст (Holst) (19.01.1802—09.03.1897 СПб.); 12 детей «V.23—34» [65]

IV.14. А л е к с а н д р ФУС «III.4» (05.06.1800 СПб.— X 1817 СПб.) ок. Ин-т инж. путей сообщ. в СПб. (1816), прапорщик [65, 89]

IV.15. Иоганн-Ф р и д р и х ФУС «III.4» (1803 СПб.—22.02.1804 СПб.)

IV.16. В а с и л и й / Вильгельм ФУС «III.4» (26.01.1805 СПб.— 05.04.1843 Дерпт) врач, д-р мед. (1832) [45, 68; A2, A5, A24]

∞ 1836 — Матильда Ундритц (Undritz); 2 дочери «V.35, 36»

IV.17. Е г о р / Георг-Альберт ФУС «III.4» (25.12.1806 СПб.— 17.01.1854 Вильна) астроном, ок. Дерпт. ун-т (1829), пом. дир. Пулковской обсерватории (1839—48), затем дир. обсерватории в Вильне, ст. сов. (1843) [24, 39, 69, 79, 116; A5, A8, A19, A24]

∞ 1839 — Молли / Мария (Федоровна) Шмальц (Schmalz) (25.07.1815— 17.02.1900 СПб.) сестра «V.24<sup>М</sup>»; 4 детей «V.37—40» [65]

IV.18. Н и к о л а й ФУС «III.4» (30.01.1810 СПб. — 30.06.1867 СПб.) ок. Дерпт. ун-т (1832), преп. математики и физики в Морск. кадет. корпусе (с 1833) и Ларинск. гимн. (с 1837), ст. сов. (1867); холостой [24, 39, 65, 66, 79, 116; A19]

IV.19. Э д у а р д-Альберт-Кристоф-Людвиг КОЛЛИНС «III.8» (14.07.1791 СПб. — 16.08.1840 СПб.) математик, преп. (1824—30) и дир. (с 1833) Гл. уч-ща св. Петра в СПб., академик (1820), д. ст. сов. (1839) [2<sup>п</sup>, 29, 30, 39, 51<sup>п</sup>, 65, 69, 93, 139<sup>п</sup>, 160<sup>п</sup>, 164; A5, A8, A23]

∞ 1831 — Ю л и я-Катарина (Егоровна) Бервальд (Bärwald) (03.09.1796 Стокгольм — 25.03.1871 СПб.) дочь камер-музыканта; 4 детей «V.41—44»

IV.20. Ш а р л о т т а-Фредерика-Луиза КОЛЛИНС «III.8» (18.02.1793 СПб. — 14.03.1864 СПб.)

∞<sub>1</sub> 1816 — Карл-Фридрих Кильберг (Kylberg) (ум. 1818); 1 дочь «V.45»

∞<sub>2</sub> 1821 — Ф е д о р / Теодор (Иванович) Геккер (Hecker) (17.12.1796 Мариенвердер, Вост. Пруссия — 15. 12.1864 СПб.) сл. с 1824, преп. нем. яз. Гл. уч-ща св. Петра в СПб. (1825—55), в отст. кол. сов. с 1855, получил диплом на Рос. дворянство с гербом (1842); 8 детей «V.46—53» [39, 79, 164; A5, A7]

IV.21. Е л и з а в е т а КОЛЛИНС «III.8»

∞ — Карл-Фридрих-Август Бреме (Brehme) (13.07.1781 Гарц — 1858 Архангельск) пастор, с 1813 в Архангельске; 4 детей «V.54—57» [A23]

IV.22. А н н а КОЛЛИНС «III.8» (29.05.1796—15.09.1874 СПб.) [24]

∞ 11.01.1818 — Ф р и д р и х-Готффрид-Христофор фон Баумгартен (von Baumgarten) (1777 Митава — 1840 Нижегород. губ.) учитель; 1 дочь «V.58»

IV.23. К а р л КОЛЛИНС «III.8» (18.04.1798—19.09.1818)

IV.24. В и л ь г е л ь м КОЛЛИНС «III.8»

IV.25. Г е н р и е т т а КОЛЛИНС «III.8» (ум. после 1859); незамужняя

IV.26. Ф р и д р и х КОЛЛИНС «III.8» (16.02.1806—1848) инженер, ок. Ин-т инж. путей сообщ. в СПб. (1827), подполковник [39, 89; A5]

∞ — Анна / Аннета Федоровна Баумгартен (ум. после 1870)

IV.27. Каролина-Е л е н а КОЛЛИНС «III.8» (ум. после 1852) [A5, A23]

∞ — Павел Соломонович Бруннер (Brunner) (р. ~1790) сын пастора, офицер [148, 154; A23]

IV.28. В и л ь г е л ь м и н а КОЛЛИНС «III.8» (27.01.1810—11.04.1836) [Л12]

IV.29. Г е о р г КОЛЛИНС «III.8» (16.03.1812 СПб. — 15.04.1818)

IV.30. Д а в и д КОЛЛИНС «III.8» (~ 1817 СПб. — после 1860) инженер, ок. Ин-т инж. путей сообщ. в СПб. (1838), капитан (1843), прораб [39, 89, 148; A5]

IV.31. Н. КОЛЛИНС «III.8»

IV.31A. Н. КОЛЛИНС «III.8»

IV.32. Н. ЭЙЛЕР «III.10(?)» (~1820—~IV 1841) офицер Симб. егерск. полка, сл. с 1839, подпоручик (1840); холост [17]

IV.33. [Резерв.]

IV.34. Анна-Эмилия АЛЛЕГРЕТТИ «III.12» (р. 02.06.1796)

IV.35. Карл-Михаэль АЛЛЕГРЕТТИ «III.12» (11.01.1798—1804)

IV.36. Мария-Елизавета АЛЛЕГРЕТТИ «III.12» (р. 07.10.1799)

IV.37. [Резерв.]

IV.38. М а р и я ЭЙЛЕР «III.13» (16.04.1805—07.02.1890 Павловск СПб. губ.) [65]

IV.39. Н а д е ж д а ЭЙЛЕР «III.13» (р. 1808); замужем (?) [A24]

IV.40. Я к о в / Якоб-Петер ЭЙЛЕР «III.13» (19.01.1813—12.11.1882 Могилёв) ок. Казан. ун-т (1834), офицер, с 1862 управл. Могилёв. казен. палаты, д. ст. сов. (1862) [39, 41, 75, 78, 148]

- 1840 — Мария Павловна Эйлер (1819—1884) = «IV.77»; 8 детей «V.63—70»  
IV.41. Н и к о л а й ЭЙЛЕР «III.13» (07.06.1816 Павловск СПб. губ.—03.03.1898 СПб.) офицер инж. войск, сл. с 1833, ок. Гл. инж. уч-ще (1839), инж-ген. (1897), чл. Морск. техн. ком-та [17, 39, 48, 65, 75, 84, 148; А5, А6]
- <sub>1</sub> — Александра Яковлевна ван дер Вейде (van der Weyde) (ум. ~ 1856); 4 детей «V.71—74»
- <sub>2</sub> — София Семеновна Леонович (ум. 20.04.1918); 4 детей «V.75—78».
- IV.42. Л е о н т и й / Леонард ЭЙЛЕР «III.13» (19.05.1821—15.05.1893) морск офицер, сл. с 1839, контр-адм. (1878), в отст. вице-адм. с 1885 [39, 48, 65, 148; А6]
- — бар. София Ивановна Меллер-Закомельская (18.09.1826—05.10.1903 СПб.); 5 детей «V.79—83» [65]
- IV.43. М а т и л ь д а ДЕЛЕН «III.14» и «III.40» (~1800 — 13.08.1802 Нарва) [A23]
- IV.44. М и р а н д а-Женевьева-Флорибелла ДЕЛЕН «III.14» и «III.40» (кр. 25.03.1804 Нарва — 1822 Казань) [107; A23]
- — Федор / Фридрих-Франц (Иванович) Эрдман (1793—1862) = «III.20<sup>мз</sup>»; 1 сын «V.84»
- IV.45. К а р л БОЛТЕНГАГЕН «III.15» (18.05.1796 СПб.— 14.09.1856 СПб.) вильманстр. и спб. купец I гильдии [A13, A23]
- — Иоганна-Фредерика Гамельман (Hamelmann) (18.02.1799 — 20.06.1848) 8 детей «V.85—92»
- IV.46. В и л ь г е л ь м БОЛТЕНГАГЕН «III.15» (24.03.1798 СПб.— 1799 СПб.)  
IV.46А\*. А в г у с т а БОЛТЕНГАГЕН «III.15(?)» (09.02.1800 СПб.— 24.01.1842 СПб.) [A23]
- 1821 — Франц-Леопольд Бауман (Baumann) (1795—27.10.1864) купец
- IV.47. Ф р и д р и х БОЛТЕНГАГЕН «III.15» (16.03.1801 СПб.— 1802 СПб.)  
IV.48. С о ф и я БОЛТЕНГАГЕН «III.15» (р. 18.09.1802 СПб.— ум. в детстве)  
IV.49. А л е к с а н д р БОЛТЕНГАГЕН «III.15» (01.02.1804 СПб.— ум. в детстве)
- IV.50. Г е н р и е т т а БОЛТЕНГАГЕН «III.15» (07.04.1805 СПб.— ум. в детстве)
- IV.51. Г е н р и х БОЛТЕНГАГЕН «III.15» (14.05.1809 СПб.— ум. в детстве)  
IV.52. Л у и з а БОЛТЕНГАГЕН «III.15» (15.10.1810 СПб.— ум. в детстве)  
IV.53. Г е н р и х БОЛТЕНГАГЕН «III.15» (03.10.1813 — после 1837)  
IV.54. Г е н р и е т т а БОЛТЕНГАГЕН «III.15» (26.11.1817 — 1826)  
IV.55—57. Н. БОЛТЕНГАГЕН «III.15» (ум. младенцами)
- IV.58. Карл-Вильгельм-А в г у с т ФОЙГТ «III.20» (16.04.1806 Нарва — 1848) офицер, майор (1844), в погран. страже с 1847; женат (?) [41, 107]
- IV.59. К а р л-Амброзиус-Леонард ФОЙГТ «III.20» (19.04.1808 Нарва — 11.11.1873 СПб.) ок. Казан. ун-т (1826), преп. и проф. рус. словесности и истории литературы Казан. ун-та (1826—52), ректор Харьк. ун-та (1852—62), попечитель Харьк. учебн. округа (1863—66), предс. учен. ком-та Мин-ва нар. проsv. (с 1867), т. сов. (1864) [39, 41, 65, 69, 75, 104<sup>п</sup>, 107; А5, А23]
- 1835 — Надежда Васильевна Глухова (10.11.1810—16.06.1883) дочь ген.-майора; 6 детей «V.94—99» [65]
- IV.60, 61. [Резерв.]
- IV.62. Е л и з а в е т а ЭЙЛЕР «III.28» (22.10.1805 Выборг — 1817)
- IV.63. А л е к с а н д р а ЭЙЛЕР «III.28» (09.07.1807 Киев — 20.01.1870 Женева) воспитанница Екатерин. ин-та, фрейлина императрицы (1826—30) [42, 110; А5]

○ 1830 — Алексей Николаевич Зубов (07.03.1798—15.12.1864 Москва) гв. офицер, ок. Пажеский корпус (1816), в отст. шт.-ротм. (1822), в шт. сл. с 1823, дир. конторы Нижегород. ярмарочного гостиного двора (с 1832), инсп. и чл. совета почтового ведомства (с 1840), камергер (1834), т. сов. (1859); 2 детей «V.101, 102» [11, 39, 42, 50, 75, 110; A5]

IV.64 Н и н а / Милослава-Анна-Катарина ЭЙЛЕР «III.28» (02.10.1808 Киев — ~1875) воспитанница Екатерин. ин-та

○ 1843 — кн. Реваз Иванович Андрон(н)иков (1818—08.02.1878) офицер, ген.-л. (1860), ген.-адъют. (1871), Тифл. губ. предв. дворянства (с 1871); бездетны [39, 80; A2, A21]

IV.65. Леонард-Кристоф-А л е к с а н д р-Владимир-Николай ЭЙЛЕР «III.28» (20.05.1810—27.04.1812 СПб.) [65]

IV.66. Леонард-Кристоф-Александр-Н и к о л а й ЭЙЛЕР «III.28» (23.08.1811 СПб.— 1872) кавал. офицер, ок. Пажеский корпус (1831), подполк. (1848), в отст. полк. с 1855 [17, 90, 108; A2, A7]

○ 1845 — Мария Ярошвицкая (ум. до 1854); бездетны

IV.67. Анна-София-Бландина ЭЙЛЕР «III.28» (20.07.1815—1830)

IV.68. Р о с т и с л а в ЭЙЛЕР «III.28» (16.11.1816—1818)

IV.69. А л е к с а н д р ЭЙЛЕР «III.28» (22.02.1819 Орёл — 01.03.1872 Волокол. у. Моск. губ.) кавал. офицер, ок. Пажеский корпус (1836), полк. (1852), в отст. с 1856 [17, 70, 91, 100, 108, 148; A2, A5, A7]

○ 1850 — Надежда Николаевна Васильчикова (1830—14.12.1876); 3 детей «V.103—105» [70]

IV.70. Е л и з а в е т а-Мария ЭЙЛЕР «III.28» (10.10.1820 Новгород — 31.03.1840 СПб.) воспитанница Смольн. ин-та [70]

IV.71. В а л е р и а н БЕКМАН «III.29» (26.10.1802 СПб.— 14.02.1870 СПб.) инженер, ок. Горн. ин-т в СПб. (1824), раб. на Урале и в Сибири, гл. нач-к Алтайских горн. з-дов и Томский губернатор (1853—56), ген.-м. Корпуса горн. инж. (1851), в отст. с 1857 [39, 65, 75, 77, 81; A5]

○ 1840 — Августа Николаевна фон Нотбек (von Nottbeck) (09.04.1818—18.05.1894 СПб.) дочь врача; бездетны [65]

IV.72. Павел-Леонард-Станислав БЕКМАН «III.29» (р. 17.03.1805 Выборг)

IV.73 \*. А л е к с а н д р-Боярд-Герхард БЕКМАН «III.29» (09.06.1807 Пернов — 29.05.1883 СПб.) офицер, сл. с 1826, полк. (1859), в отст. ген.-м. с 1865, [17, 39, 65; A2, A5, A23]

○ — Р о з а л и я-Катарина Давыдовна Флиттнер (Flittner) (~1827 — ~01.09.1899 СПб.) дочь пастора; 6 или 7 детей «V.106—111» [65, 159]

IV.73A \*. Р о з а л и я БЕКМАН «III.29(?)» (24.11.1809 — 01.09.1826)

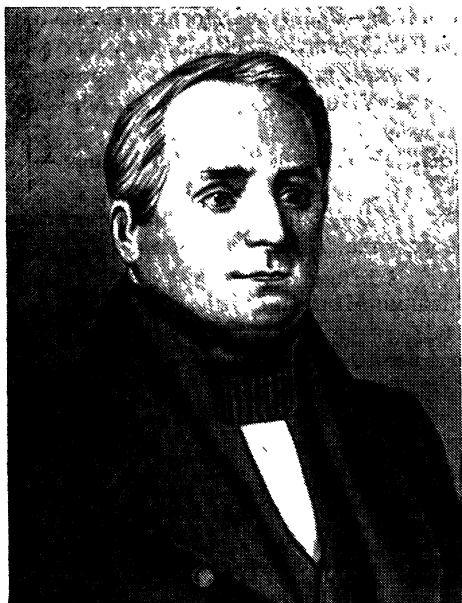
IV.74. Карл-Н и к о л а й-Владимир БЕКМАН «III.29» (08.12.1811 Выборг — 10.05.1831 Лужск. у. СПб. губ.) [65]

IV.75\*. А н н а-Бландина-София-Адельгейд БЕКМАН «III.29» (25.04.1813 Выборг — 14.04.1880 Лужск. у. СПб. губ.) [70]

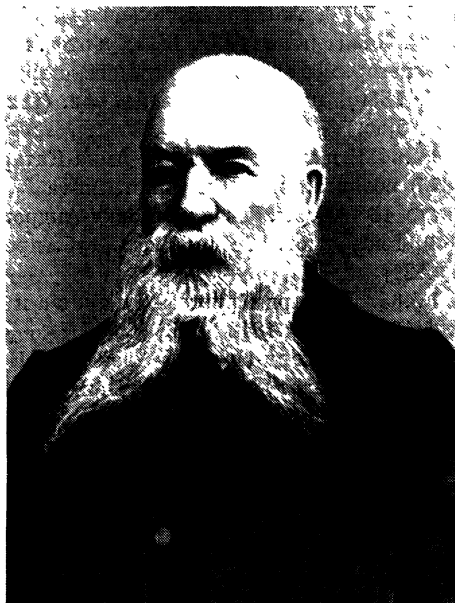
○ 1856 — К о н с т а н т и н-Готлиб Васильевич Фейхтнер (Veichtner) (13.04.1820 СПб.— 31.01.1862) офицер, подполковник [70, 148; A5]

IV.76. Доротея-Мария-А л е к с а н д р а ЭЙЛЕР «III.33» (15.04.1817 Тверь — 1853 Звениг. у. Моск. губ.) [70]

○<sub>1</sub> 1841 — Петр Иванович Тиман (Thiemann) (17.08.1798 — 10.09.1846 СПб.) гв. офицер, затем чин-к IV отд. Собств. е.и.в. канц., д. ст. сов. (1843); 1 дочь «V.112» [39, 65, 71; A5]



*Э. Д. Коллинс (IV.19)*  
С гравюры 1830-х годов [139]



*Г. В. Струеве (V.27<sup>м</sup>)*  
С фотোগрафии из собрания К. Н. Оттена

О<sub>2</sub> — Владимир Александрович Рукин (06.06.1798 Москва — 25.10.1867 Звениг. у. Моск. губ.) гв. артил. офицер, сл. с 1815, шт.-кап.' (1831), в отст. с 1831, в шт. сл. с 1836, раб. в Моск. таможне и Моск. казен. палате, в отст. с 1853, ст. сов. (1851); 2 сына «V.113, 113А» [39, 70; А5]

IV.77. М а р и я-Анна-Доротея ЭЙЛЕР «III.33» (12.02.1819 Могилёв. губ. — 11.07.1884 Могилёв)

О 1840 — Яков Леонтьевич Эйлер (1813—1882) = «IV.40»; 8 детей «V.63—70»

IV.78. Н и к о л а й ЭЙЛЕР «III.33» (03.02.1822 — 20.04.1882 СПб.) артил. офицер, сл. с 1842, Волынский (1866) и Киевский (1866—68) губернатор, в отст. ген.-л. с 1873 [17, 39, 65, 69, 75, 76, 105, 106]

О (гражданский брак) — Луиза Энриковна Фойгт (по сцене Юрьева) (01.04.1839 — 28.03.1900) актриса; 3 детей «V.114—116»

IV.79. Е л и з а в е т а ЭЙЛЕР «III.33» (09.05.1826 Динабург — 07.06.1896 СПб. губ.) фрейлина (1852—80), гофмейстерина [39; А5]

О 1880 — светл. кн. Евгений Александрович Сайн-Витгенштейн-Берлебург (12.10.1825 Тульчин — 18.02.1886 Вена) офицер, затем дипломат, шталмейстер (1880); бездетны [142; А4]

IV.80. И з а б е л л а ЭЙЛЕР «III.34» (~1822 — после 1829)

IV.81\*. П е т р ЭЙЛЕР «III.34» (1827 — 24.12.1880 Симбирск) офицер, ок. Моск. кадет. корпус (1845), мировой посредник в Перм. губ. (1861—68), предс. обл. правл. и пом. воен. губернатора Сырдарьинской, а затем Семиреченской обл. (с 1869), ген.-м. (1870) [8, 14, 17, 39, 69, 76; А2, А10, А20],

О — Лидия Александровна Быховская (ум. после 1881); 2 детей «V.117, 118»

IV.82. Л е о н т и й / Леонард-Франц ЭЙЛЕР «III.34» (04.02.1829 Городок Витеб.

губ.— ~1890) ок. Моск. кадет. корпус (1848), л.-гв. поручик (1860), в отст. шт.-кап. с 1862, акцизн. ревизор Витеб. и Симб. губ. (1862—84), кол. сов. (1875) [17, 39; А5, А22]

∞ — Прасковья Матвеевна Н., чл. совета Симб. женск. об-ва христ. милосердия (1870—93); бездетны

IV.83. Вильгельм-Кристоф-Александр РЕРЕН «III.36» (10.05.1818 Выборг — после 1872) офицер, сл. с 1836, майор (1871), в отст. подполк. с 1872 [А2]

∞ — Бронислава-Францишка Заржецкая, дочь майора; бездетны

IV.84. А л е к с а н д р а / Александрина-Луиза РЕРЕН «Ш.36» (11.04.1820 — 25.01.1891 СПб.) [65; А23]

∞ 1842 — Федор / Теодор-Александр Иванович фон Левенталь (von Löwenthal) (22.09.1802 — 04.02.1895 СПб.) офицер, сл. с 1826, ген.-м. (1862), в отст. ген.-л. с 1876; 6 детей «V.119—124» [17, 39, 65, 76; А2, А5, А7]

IV.85. Ф е д о р / Теодор РЕРЕН «III.36» (06.07.1828 — 15.02.1888 Киев) артил. офицер, сл. с 1844, ген.-м. (1887) [17, 39, 91; А2]

∞ — Вера Николаевна Попова (ум. после 1888); 3 детей «V.125—127»

IV.86—90. [Резерв.]

IV.91. Мария-Луиза-Шарлотта ДЕЛЕН «III.45» (02.02.1831 Доверн бл. Ахена — 11.04.1921 Неймеген, Нидерланды) [125, 150]

∞ 1856 — Питер-Фредерик ван дер Меер ван Кюффелер (van der Meer van Kuffeler) (10.04.1826 Гоуда, Нидерланды — 10.01.1871 Тил, там же); 1 сын «V.128»

IV.92. Бар. Якоб-Ян-Хевдрик ДЕЛЕН «III.45» (01.09.1836 Вамел, Нидерланды — 26.12.1895 там же) землевладелец, бургомистер Вамела и Леивена [125, 150]

∞ 1871 — Алтье / Алида Клемент (Clement) (03.12.1841 Амстердам — 25.01.1910 Терборг, Нидерланды); 1 дочь «V.129»

## V ПОКОЛЕНИЕ

V.1. П е т р ДЕШЕН «IV.2» (~VI 1812 СПб.— после 1835)

V.2. М а р и я ДЕШЕН «IV.2» (~X 1813 СПб.— 1814 СПб.)

V.3. А л е к с а н д р ДЕШЕН «IV.2» (~VII 1815 СПб.— 1816 СПб.)

V.4. Д а р ь я / Доротея ОРТЕНБЕРГ «IV.5» (26.04.1821 Москва — 29.12.1865 СПб.) [159; А5]

∞ — бар. А л е к с а н д р-Фердинанд Егорович Вельсберг (Bar. von Welsberg) (20.05.1810 Ревель — IV 1852 СПб.) писатель

V.5. Е л и з а в е т а ОРТЕНБЕРГ «IV.5» (XII 1822 / I 1823 Москва — ~1838)

V.6. О л ь г а ОРТЕНБЕРГ «IV.5» (17.05.1829 СПб.— 27.10.1862 СПб.) [159; А7]

∞ — Александр Александрович Кулаков (р.~1825) архитектор в Гл. управл. путей сообщ. и гражд. зданий (1847—64), кол. ас. (1862); 1 сын «VI.2» [39; А5]

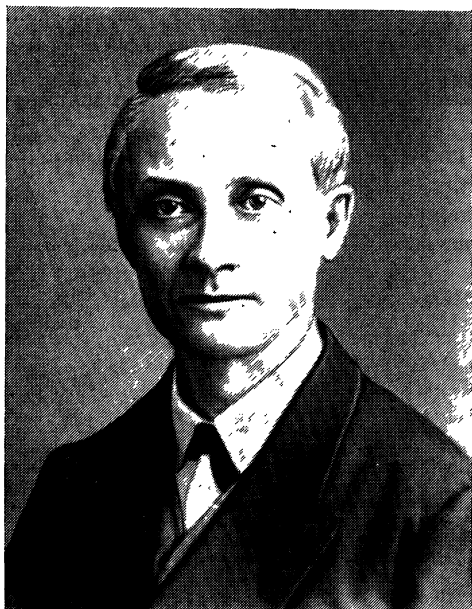
V.7. А л е к с а н д р ОРТЕНБЕРГ «IV.5» (р. 02.02.1831 СПб.) гв. офицер, ок. Пажеский корпус (1851) [108]

V.8. М и х а и л ОРТЕНБЕРГ «IV.5» (р. 25.04.1832 СПб.) офицер, ок. Пажеский корпус (1851) [108]

V.9. Н и к о л а й ОРТЕНБЕРГ «IV.5» (13.10.1833 СПб.— 16.11.1868 СПб.) гв. офицер, ок. Пажеский корпус (1852), сл. там же (1859—63); холост [39, 108, 159; А5]

V.10. Генриетта НИККЕЛЬС «IV.6» (1806— 1808)

V.11. Э м и л и я НИККЕЛЬС «IV.6» (~1810 — после 1850); незамужняя [А8]



А. В. Чернай (V.17)

С фотографии из собрания О. А. Черная

V.15. Фердинанд ЧЕРНАЙ «IV.7» (1814 — 23.08.1851) сл. в Акад. наук (1831—49), письмоводитель при непр. секретаре (с 1836), тит. сов. (1841) [24, 39; A8]

∞ — Мария Дитмер (Dittmer) клас. дама в Харьк. ин-те благор. девиц (1850—53), в 1850-х гг. содержала пансион в Луб. у. Полт. губ.; 2 сына «VI.15, 15A»

V.16. Розалия ЧЕРНАЙ «IV.7» (27.01.1817 — 09.11.1910 Харьков) жила в Харькове; незамужняя

V.17. Александр ЧЕРНАЙ «IV.7» (19.04.1821 Спб. — 18.02.1898 Харьков) зоолог, ок. Гл. пед. ин-т в Спб. (1841), адъюнкт и проф. Харьк. ун-та (1845—73), декан физ.-мат. фак-та (1857—69), д-р естеств. наук (1848), д. ст. сов. (1863) [39, 69, 78, 79, 104<sup>п</sup>, 115; A5, A7; Л14]

∞<sub>1</sub> — Мария Ивановна Квитка (07.11.1829 — 1860) дочь офицера; 2 детей «VI.16, 17»

∞<sub>2</sub> — Александра Витальевна Эсслингер (Esslinger); 1 дочь «VI.18»

V.18. Матильда ЧЕРНАЙ «IV.7» (04.05.1823 — 18.01.1899 Харьков)

V.19. Лев / Лео-Людвиг-Фердинанд ЧЕРНАЙ «IV.7» (~1824 — 16.11.1898 Новгород) преп. нем. яз., сл. с 1844, в Гатчин. Никол. сирот. ин-те (1851—71) и гимн. Человеколюб. об-ва (1871—94), кол. сов. (1871) [3, 39, 65, 72; A2, A5, A7]

∞ — Элиза / Елизавета Богдановна Бергер (Berger) (~1832—11.02.1905 Спб.); 8 детей «VI.19—25» [12, 65, 159]

V.20. Паулина ЧЕРНАЙ «IV.7» (р. 1826)

∞ — Густав Никкельс (ум. после 1859) купец

V.21. Василий / Вильгельм-Пауль ЧЕРНАЙ «IV.7» (р. 09.02.1828 Спб.) ок. предварт. курс Гл. пед. ин-та (1847), сл. с 1847, письмоводитель при непр. секре-

V.12. Александр (Андреевич) НИККЕЛЬС «IV.6» (~1812 — после 1847) ок. Спб. практ. технол. ин-т (1837), имел завод в Орлов. губ. [39; A7]

V.12A. N. НИККЕЛЬС, дочь «IV.6»

V.13. Юлия ЧЕРНАЙ «IV.7» (1810 — 05.06.1886 Спб.)

∞ 1828 — Василий Кондратович Елпатьевский (1799 — 03.02.1864 Спб.) ок. филос.-юрид. фак-т Спб. ун-та кандидатом «с золотой медалью и шпагой» (1823), преп. права в ун-те и др. учебн. заведениях, проф. логики и нравств. филос. Римско-катол. духовн. акад. (1843—59), ст. сов. (1847), в отст. с 1860; 7 детей «VI.4—9» [24, 39; A5, A7]

V.14. Федор / Теодор ЧЕРНАЙ «IV.7» (30.04.1811 Спб. — 10.01.1890 Грюнгоф Курл. губ.) врач, ок. Дерпт. ун-т (1832), раб. в Грюнгофе, кол. сов., в отст. с 1886 [24, 39, 68, 116, 128, 133; A19, A23]

∞<sub>1</sub> 1833 — Эмма Классон (Klassohn) (1814—1853) дочь пастора; 5 детей «VI.10—14»

∞<sub>2</sub> 1855 — Александра Драбинская (11.09.1823 — 15.08.1892 Митава)



таре Акад. наук (1847—55), чин-к телегр. деп-та (1873—84), надв. сов. (1873) [3, 39; А7, А8]

V.22. [Резерв.]

V.23. Николай-Александр ФУС «IV.13» (1822 СПб.— 1822 СПб.)

V.24. Ю л и я-Альбертина ФУС «IV.13» (21.08.1823 СПб.— 10.12.1901 Кенигсберг)

∞ 1842 — Герман (Федорович) Шмальц (Schmalz) (12.08.1807 герц. Саксен-Альтенбург — 06.05.1879 Вост. Пруссия) брат «IV.17<sup>жс</sup>», д-р права (Берлин 1833) и философии (Кёнигсберг 1835), редактор нем. «Санкт-Петербургской газеты» (1839—52), преп. Лесн. и межевого ин-та в СПб. (1839—52), надв. сов. (1850), корол. ландрат в Вост. Пруссии (1854—79); 3 детей «VI.27—29» (∞<sub>1</sub>: 2 дочери) [39, 135; А5, А7]

V.25. Н а т а л и я-Елена-Сузанна ФУС «IV.13» (14.03.1835 — 13.02.1913 СПб.) [159]

∞ 1849 — К а р л-Фридрих-Бенигнус-Готлиб-Христиан-Альберт (Федорович) Бергштроссер (Bergstraesser) (20.03.1808 Висбаден — 1874) учитель, чин-к Мин-ва финансов, управл. Астрахан. соляным правл. (с 1851), предс. Чернигов. казен. палаты (1861—64), в отст. с 1864, д. ст. сов. (1862); 8 детей «VI.30—37» (∞<sub>1</sub> — Мария-Августа Федоровна Кермик (Kermick) (1818—1848); 3 детей) [39, 75, 78, 79, 92; А5, А8, А11, А23]

V.26. Августа-Луиза ФУС «IV.13» (21.12.1826 СПб.— 1827 СПб.)

V.27. П а у л и н а-Шарлотта ФУС «IV.13» (15.08.1828 — осень 1914 Тифлис)

∞ 1850 — Г е н р и х-Вильгельм Васильевич Струве (Struve) (22.07.1822 Дерпт — 10.04.1908 Тифлис) химик, ок. Дерпт. ун-т (1845), в гос. сл. с 1850, чл.-корр. Акад. наук (10.01.1877), д. ст. сов. (1883); 6 детей «VI. 38—43» [2, 39, 116; А19, А21]

V.28. Э д у а р д-Вильгельм ФУС «IV.13» (30.05.1830 — 12.08.1875 Баденвейлер, Баден) сл. с 1835, чин-к IV. отд. Собств. е.и.в. канц. (с 1857), д. ст. сов. (1873) [24, 39, 66, 71, 75, 78; А24]

∞ 1870 — Лидия Алексеевна Даниловская (р. 1849); 1 дочь «VI.44» (∞<sub>2</sub> 1888 — Феодосий Алексеевич Патенко, проф. Харьк. ун-та) [А5]

V.29. Вильгельмина-София ФУС «IV.13» (05. 06.1832 — 1833)

V.30. А л е к с а н д р и н а ФУС «IV.13» (27.01.1834 — 1839)

V.31. Н и к о л а й ФУС «IV.13» (07.03.1835 — 1836)

V.32. О л ь г а-Матильда ФУС «IV.13» (р. 29.04.1837)

∞ 1882 — Э р н с т-Густав Францович Ундритц (Undritz) (21.09.1831 Лифл. губ.— 14.12.1903 Ревель) ок. Дерпт. ун-т (1856), акцизн. чин-к, ст. сов. (1894); 1 дочь «VI.45» (∞<sub>1</sub> — Евгения Берг; были дети) [39, 86, 116; А5, А8, А19]

V.33. П а в е л/Пауль-Андреас ФУС «IV.13» (02.07.1839 — 01.12.1896 СПб.) ок. Дерпт. ун-т (1862), чин-к Гл. об-ва рос. жел. дорог (1873—74), служащий (с 1877) и библиотекарь (с 1883) Акад. наук в СПб., кол. сов. [24, 39, 86, 116; А5, А8, А19]

∞ 1884 — Е л и з а в е т а-Тереза Карловна Францен (Frantzen) (01.11.1851 Рига — после 1916) дочь купца; бездетны [12]

V.34. В л а д и м и р/Вольдемар-Карл ФУС «IV.13» (26.10.1840 СПб.—08.01.1892 СПб.) ок. Александр. лицей (1860), чин-к IV отд. Собств. е.и.в. канц. (с 1860), ст. сов. (1878) [39, 60, 65, 71, 75]

∞ 1864 — Елена Павловна Шаврова (ум. после 1916); 4 детей «VI.46—49» [12]

V.35. В и л ь г е л ь м и н а-Матильда ФУС «IV.16» (р. 01.10.1837)

∞ 1858 — Г е о р г-Эдуард-Петер/Педро Гольдт (Holdt) (21.11.1829 Испания — VII 1881 США) врач, ок. Дерпт. ун-т (1857), д-р мед. (1858), раб. в Тамбове и Риге (1859—68), затем в Вест-Индии и Цинциннати (США), надв. сов. [116, 118, 129; А19]

V.36. Августа-Альбертина-Иоганна-Вильгельмина ФУС «IV.16» (~1839 СПб. — 25.01.1848 Дерпт)

V.37. В и к т о р-Фридрих ФУС «IV.17» (21.11.1839 Пулково — 13.04.1915 СПб.) ок. Дерпт. ун-т (1861), магистр (1866), астроном Морской обсерватории в Кронштадте (1871—1905), в отст. т. сов. с 1905 [6<sup>п</sup>, 39, 116, 120; А5, А6, А19, А24]

∞<sub>1</sub> — Мария Хельвиг (Hellwig) (1844 СПб.—27.10.1874 Кронштадт); 4 детей «VI.51—54»

∞<sub>2</sub> 1879 — Эмилия Федоровна Ульрихс (Ulrichs) (1854 Силезия — ум. после 1898); 1 дочь «VI.55»

V.38. Е г о р/Георг-Фридрих ФУС «IV.17» (29.06.1841 Пулково — 1918) ок. Дерпт. ун-т (1869), сл. с 1869, чин-к канц. СПб. градоначальника, затем Мин-ва финансов (с 1869), ст. сов. [12, 39, 86, 116; А5, А19, А24]

∞<sub>1</sub> 1881 — Е в г е н и я/Эмилия-Доротея Шмальц (1852 Вост. Пруссия — после 1902) = «VI.29»; 4 детей «VI.56—59»

∞<sub>2</sub> (?) — Алида Бострём (Boström)

V.39. В а с и л и й/Вильгельм ФУС «IV.17» (09.04.1843 Пулково — 03.09.1878 Бухарест) архитектор-строитель, уч. в Карлсруэ (1863—67), раб. в России с 1869; холост [117]

V.40. К л а р а-Амалия-Доротея ФУС «IV.17» (28.12.1844 Пулково — ~1914)

∞ 1881 — Рудольф Гугонович Траутфеттер (Trautvetter) (13.04.1846 Киев — 19.12.1910 бл. Вильны) физик, ок. Дерпт. ун-т (1873), ст. наблюдатель и зав. магнитной и метеорологической обсерваторией в Павловске (1877—84), сотрудник Гл. управл. неокладных сборов и казенной продажи питей Мин-ва финансов (1884—1903), д. ст. сов. (1902) [39, 86, 116, 118; А5, А8, А19]

V.41. Э д у а р д КОЛЛИНС «IV.19» (12.01.1832 СПб.— 12.01.1906 СПб.) математик, ок. СПб. ун-т (1853), учитель (с 1858) и инсп. (1873—98) Гл. уч-ща св. Петра, ст. сов. (1869), в отст. с 1898, получил по заслугам отца диплом на Рос. дворянство с гербом [39, 160<sup>п</sup>, 164; А7, А23]

∞ 1859 — Э м и л и я-Маргарита Егоровна Классен (Classen) (24. 08.1835 Архангельск — 14.12.1888 СПб.); 10 детей «VI. 62—70»

V.42. А л е к с а н д р КОЛЛИНС «IV.19» (30.04.1833 СПб.—21.11.1868 СПб.) чиновник, сл. с 1859, кол. ас. (1867) [148]

V.43. Мария-Ю л и я-Шарлотта КОЛЛИНС «IV.19» (17.03.1835 СПб.—07.06.1899)

∞ 1856 — Николай-Вильгельм-Г е н р и х Берендтс (Berenchts) (07.05.1823 — 10.04.1902) СПб. купец (с 1863) I гильдии; 8 детей «VI.71—76» [98; А23]

V.44. О л ь г а-Шарлотта-Фредерика КОЛЛИНС «IV.19» (кр. 09.06.1839—1842)

V.45. Юлия-Шарлотта-Альбертина КИЛЬБЕРГ «IV.20» (01.03.1818 — 09.04.1818 СПб.)

V.46. Э л ь м и р а-Шарлотта-София ГЕККЕР «IV.20» (04.05.1822 СПб.— 10.09.1884 СПб.) [ЛЗ]

∞ 1848 — Фридрих Бреме (1815—1856) = «V.54»; 1 дочь «VI.77»

V.47. Эмилия-Анна-Амалия ГЕККЕР «IV.20» (26.04.1824 СПб.—08.04.1825 СПб.) [ЛЗ]

V.48. Ф е д о р/Иоганн-Теодор-Убальдо ГЕККЕР «IV.20» (28.05.1826 СПб.— 05.09.1827 СПб.) [ЛЗ]

V.49. В а с и л и й/Вильгельм-Леонард-Альберт ГЕККЕР «IV.20» (07.05.1828 СПб.— 03.01.1903 Висбаден) ок. Акад. художеств академиком архитектуры (1857), СПб. гор. архитектор (1874—83), кол. сов. (1876) [16<sup>п</sup>, 31, 39; А5, А7; ЛЗ]

∞ 1867 — Шарлотта-Амалия Эдуардовна Прац (Pratz) (28.11.1845—14.07.1918 Выборг) дочь типографа; 4 детей «IV. 78—81»

V.50. Карл-Пауль-Фридрих ГЕККЕР «IV.20» (01.02.1830 СПб.—12.02.1895 СПб). дипломат, переводчик Азиатского деп-та МИД, в отст. д. ст. сов. с 1884 [39; А4; Л3]

∞ 1857 — Манефа Гавриловна Вышегородцева (ум. после 1916); 3 детей «IV. 82—84»

V.51. Софья-Юлия-Шарлотта ГЕККЕР «IV.20» (14.02.1832 СПб.—15.07.1879 Москва) [Л3]

∞ 1855 — Генрих-Теодор Фохт/Фойгт (Voigt) (06.06.1831 СПб.—1874/1879) вильманстр. и моск. (с 1863) купец I гильдии; 1 сын «VI.85» [97, 138; А5]

V.52. Шарлотта-Елизавета-Елена-Доротея ГЕККЕР «IV.20» (14.03.1834 СПб.—до 1865) [Л3]

∞ 08.01.1854 — Карл-Ульрих-Людвиг/Шарль-Луи (Львович) Бибер (Biber) (1825 Монбейяр, Франция — 20.06.1880 Кронштадт) преп. фр. яз. в гимн.; 1 сын «VI.86» [А5]

V.53. Юлия-Мария-София ГЕККЕР «IV.20» (31.01.1836 СПб.— 11. 01.1837 СПб.) [Л3]

V.54. Фридрих БРЕМЕ «IV.21» (30.06.1815 Архангельск — 10.04.1856 СПб.) купец в Архангельске

∞ 1848 — Эльмира Федоровна Геккер (1822—1884) = «V.46»; 1 дочь «VI.77»

V.55. Августа БРЕМЕ «IV.21»

V.56. Елена БРЕМЕ «IV.21» [А23]

∞ — Н. Кнойпер (Кнеурер) сын учителя Фридриха Кнойпера

V.57. Эмиль БРЕМЕ «IV.21» (~ 1826 Архангельск — ~ 01.07.1896 СПб.) торговец [159]

V.58. Эмилия-Анна-Доротея БАУМГАРТЕН «IV.22» (08.03.1824 СПб.— 09.10.1859 СПб.) [65]

∞ 1846 — Владимир/Вольдемар-Матиас-Эрнст-Август-Фердинанд Иванович фон Гершельман (von Hoerschelmann) (15.04.1821 СПб.— 13.04.1887 СПб.) воен. врач, ок. Дерпт. ун-т (1845), д-р мед. (1852), т. сов.; 8 детей «VI.89—96» [39, 65, 68, 116, 119, 133, 143, 148; А2, А19]

V.59—62. [Резерв.]

V.63. Христина ЭЙЛЕР «IV.40» и «IV.77» (01.08.1841 — 19.10.1932 Финляндия)

∞<sub>1</sub> — Александр Густавович Гебель (Goebel) (1818—1868) гв. офицер, полк. (1855), в отст. с 1859; 1 сын «VI.101» [14, 17, 39]

∞<sub>2</sub> 1877 — Александр Карлович Фойгт (1838—1918) = «V.97»; 3 детей «VI. 102—104»

V.64. Павел ЭЙЛЕР «IV.40» и «IV.77» (20.03.1844 Могилёв — 31.05.1890 Могилёв) артил. офицер, сл. с 1858, ок. Михайл. артил. акад. (1864), шт.-кап. (1867), мировой посредник, в шт. сл. с 1869, управл. Могилёв. отд. крестьян. (с 1883) и дворян. (с 1886) банков, д. ст. сов. (1889) [17, 39, 61, 78; А2, А6, А16]

∞ 1871 — Екатерина Николаевна Александрова (12.07.1853 СПб.— 06.01.1936 Эстония) дочь генерала; 10 детей «VI.105—114»

V.65. Николай ЭЙЛЕР «IV.40» и «IV.77»

V.66. Александр ЭЙЛЕР «IV.40» и «IV.77»

V.67. Александра ЭЙЛЕР «IV.40» и «IV.77» (19.08.1853—11.07.1911 СПб.)

∞ 1870 — Евстафий Николаевич Скалон (21.09.1845—03.07.1902 Берлин) Эстл. губернатор (1894—1902), т. сов. (1899); 2 сына «VI.115, 116» [39, 75, 78, 134]

- V.68. В а р в а р а ЭЙЛЕР «IV.40» и «IV.77»
- V.69. В л а д и м и р ЭЙЛЕР «IV.40» и «IV.77» (11.03.1856—23.06.1878 Сан-Стефано бл. Стамбула) офицер, гв. подпор. (1878) [A2]
- V.70. Л е о н и д ЭЙЛЕР «IV.40» и «IV.77» (1858—1864)
- V.71. В л а д и м и р ЭЙЛЕР «IV.41» (11.05.1846—1910 Гудауты) ок. Александр, лицей (1856), был воспитателем в Лицее, чин-к акцизн. управл., ст. сов. [60]  
 ∞ — Анна Викторовна Курганская (1864— после 1922); 1 сын «VI.117»
- V.72. К о н с т а н т и н ЭЙЛЕР «IV.41» (р. ~ 1848 — ум. ребенком)
- V.73. Н и к о л а й ЭЙЛЕР «IV.41» (02.05.1851—25.01.1880 Варшава) ок. СПб. уч-ще правовед. (1871), тов. прокурора Варшав. окр. суда, надв. сов. (1879) [39, 58, 117]  
 ∞ — Н. Баумгартен; бездетны [A24]
- V.74. А д е л а и д а ЭЙЛЕР «IV.41» (06.08.1856—09.02.1918): незамужняя
- V.75. С о ф и я ЭЙЛЕР «IV.41» (01.03.1864—15.10.1916)  
 ∞ 1891 — Леонид Владимирович Жадвойн (20.05.1857 Киев — 09.04.1904 СПб), артил. офицер, подполковник; 1 сын «VI.118» [12; A2, A5]
- V.76. М и х а и л ЭЙЛЕР «IV.41» (1865—1866)
- V.77. О л ь г а ЭЙЛЕР «IV.41» (24.05.1866—10.?.1925)  
 ∞ 1890 — Александр Александрович Гебель (1865—1918) = «VI.101»; 1 сын «VI.96»
- V.78. П а в е л ЭЙЛЕР «IV.41» (19.07.1867—04.03.1918) кавал. офицер, сл. с 1885, ок. Никол. кавал. уч-ще (1887) и Никол. акад. Генштаба (1893), полк. (1906) • в отст. ген.-м. с 1911, затем сл. с 1915 [12, 91; A2]  
 ∞ — бар. Мария Александровна Стюарт (Stuart) (ум. после 1916) дочь д. ст. сов.; бездетны
- V.79. Н и к о л а й ЭЙЛЕР «IV.42» (1855—1868)
- V.80. С о ф и я ЭЙЛЕР «IV.42» (19.04.1857 СПб.— ~ 1936 Париж)  
 ∞<sub>1</sub> — Николай Дмитриевич Бушен (Buschen) (22.05.1854—25.11.1915 Москва) воен. юрист, ок. Пажецкий корпус (1873) и Воен.-юр. акад. (1881), подполк. (1890), в отст. полк. с 1893, затем шт. юрисконсульт в Москве; 4 детей «VI.120—123» [A2, A6]  
 ∞<sub>2</sub> (?) — Николай Николаевич Чеглоков (?)
- V.81. А л е к с а н д р а ЭЙЛЕР «IV.42» (26.12.1859 СПб. — 11.10.1939 Бауска, Латвия)  
 ∞ 1891 — Василий Николаевич Кочетков (11.03.1862 Полт. губ.— 21.01.1921 Пгр. губ.) врач-педиатр, д-р мед. (1891), ст. ординатор Кроншт. морск. госпиталя, ст. сов.; 5 детей «VI.124—128» (∞<sub>2</sub> — Е. А. Кулагина) [68, 84; A6; J15]
- V.82. Л е о н т и й ЭЙЛЕР «IV.42» (1862—1864)
- V.83. Я к о в ЭЙЛЕР «IV.42» (1866—1868)
- V.84. Ф р и д р и х - Н и к о л а й ЭРДМАН «IV.44» (~ 1822 Казань — 19.02.1843 Казань) студент Казан. ун-та [26, 41]
- V.85. Е л и з а в е т а БОЛТЕНГАГЕН «IV.45» (20.03.1825—30.03.1869 СПб.)
- V.86. Ж е н н и / И о г а н н а БОЛТЕНГАГЕН «IV.45» (14.09.1828—02.11.1901 СПб.) [65]  
 ∞ — Виктор Алексеевич Родионов (10.11.1821—06.11.1906 СПб.) гв. офицер, сл. с 1838, ген.-л. (1881), фл.-адъют. (1866); 6 детей «VI.129—134» [33<sup>н</sup>, 39, 65, 76; A2]
- V.87. Л у и з а БОЛТЕНГАГЕН «IV.45» (1829 — XII 1914 СПб.)  
 ∞ 1866 — Иоганн-Георг Рубек (Rubeck) купец; 2 сына «VI.135, 136» (∞<sub>1</sub> 1858 — Амалия-Мария-Доротея Зеленкова, ур. Берг (1825—1864); были дети)
- V.88. К а р л БОЛТЕНГАГЕН «IV.45» (05.03.1832 СПб. — 01.10.1894) купец [A23]

○ 1858 — Адель Дмитриевна Брандт (Brandt) (07.09.1835 — 06.07.1911) дочь арханг. купца и Софии Амбургер; 9 детей «VI.137—145»

V.89. П а у л и н а БОЛТЕНГАГЕН «IV.45» (1834—10.06.1915 Пгр.) служащая об-ва «Проволока» (~ 1910)

V.90\*. Ф е д о р/Фридрих [-Эдуард (?)] БОЛТЕНГАГЕН «IV.45» (17.08.1837 СПб. — 28.02.1885 СПб.) архитектор, ок. Акад. художеств (1861), сл. с 1871, архитектор Акад. наук, тит. сов. (1881) [39; А5, А8]

○ 1876 — Цецилия Александровна Войводт (Woywodt) (1839—15.10.1909 СПб.); 2 дочери «VI.146, 147»

V.91. Ю л и я БОЛТЕНГАГЕН «IV.45» (1841 — 29.03.1912 СПб.)

V.92. Иоганн-Герман БОЛТЕНГАГЕН «IV.45» (20.01.1842 СПб. — 05.08.1895 СПб.) бухгалтер [65; А5, А23]

○<sub>1</sub> — Александра Степановна Курторга (1847—1869) [65]

○<sub>2</sub> 1871 — М а р и я-Вера-Елизавета Николаевна Интельман (Intelmann) (1854 — после 1916); 7 детей «VI.148—154» [12]

V.93. [Резерв.]

V.94. Н и к о л а й ФОЙГТ «IV.59» (18.04.1836 — 27.04.1888 Павловск СПб. губ.) сл. с 1858, мл. советник МИД, д. ст. сов. (1879) [39, 65, 75; А4]

○ 1864 — Александра Сергеевна Костливцева (ум. 20.03.1909 СПб.) дочь д. ст. сов.; 2 дочери «VI.157, 158» [65]

V.95. В л а д и м и р ФОЙГТ «IV.59» (22.06.1837 — 15.02.1898) ст. ревизор акцизн. управл. в Могилёве и Самаре, ст. сов. (1889); 1 дочь «VI.159» [86]

V.96. С о ф и я ФОЙГТ «IV.59» (р. 22.06.1837)

V.97. А л е к с а н д р ФОЙГТ «IV.59» (27.09.1838 Казань — 29.05. 1918 Пгр.) гв. офицер, поручик, затем в шт. сл., дир. Путиловских з-дов, предс. Пароходного об-ва по Днепру и притокам, сооснователь Об-ва вагонных заводов [А23; Л11]

○ 1877 — Христина Яковлевна Эйлер (1841—1932) = «V.63»; 3 детей «VI.102—104»

V.98. А н а т о л и й ФОЙГТ «IV.59» (02.12.1842 — 29.01.1909 Флоренция) ок. юрид. фак-т Харьк. ун-та (1865), сл. с 1865, чин-к МВД, ст.цензор Рижск. ком-та цензуры иностранной (с 1903), ст. сов. (1903) [57; А5]

○ — Анна Яковлевна Самарская-Быховец, ур. Репнинская (~ 1850— после 1909); бездетны

V.99. Е л и з а в е т а ФОЙГТ «IV.59» [А23]

○ — кн. Петр Александрович Вадбольский (1840—1873) ок. Констант. воен. уч-ще (1860), офицер, в отст. с 1865; бездетны

V.100. [Резерв.]

V.101. О л ь г а ЗУБОВА «IV.63» (р. 1835)

V.102. А л е к с е й ЗУБОВ «IV.63» (06.02.1838 — 04.04.1904 Флоренция) гв. офицер, ок. Пажеский корпус (1856) и геодез. отд. Никол. акад. Генштаба (1859), полк. (1868), в отст. ген.-м. с 1876, в шт. сл. с 1880, Саратов. губернатор (1881—86), сл. в канц. по учреждениям имп. Марии, т. сов. и статс-секретарь (1887) [39, 75, 78, 108; А2, А5, А18]

○ — Мария Николаевна Кокошкина (ум. после 1904) дочь рус. дипломата, д. т. сов., камергера Н. А. Кокошкина (1791—1873); 3 дочери «VI.160—162»

V.103. Н а д е ж д а ЭЙЛЕР «IV.69» (27.01.1852 СПб. — 11.07.1920 Москва)

○ 1872 — Дмитрий Николаевич Шипов (26.05.1851 — 01.01.1920) ок. юрид. фак-т СПб. ун-та (1872), земский деятель, чл. Моск. гор. думы (1909—12) и Гос.совета (1906—09); 9 детей «VI.163—171» [10, 15, 18<sup>п</sup>, 39, 75, 78; Л16]

V.104. С о ф и я ЭЙЛЕР «IV.69» (19.10.1853 СПб. — 1925)

∞ — Сергей Антонович Шипов-Шульц (1834 — 31.07.1910 Волокол. у. Моск. губ.) ок. Лицей (1856), чин-к II отд. Собств. е. и. в. канц. (1856—94), т. сов. (1879); бездетны [38, 39, 60, 75, 78]

V.105. А л е к с а н д р ЭЙЛЕР «IV.69» (05.02.1855 СПб.— 28.03.1920 Москва) юрист, ок. Моск. ун-т (1880), канд. права (1880), сл. с 1881, Волокол. уездный предв. дворянства (1886—94), Новгор. вице-губернатор и затем Подол. губернатор (1894—1911), т. сов. и гофмейстер (1911), сенатор [39, 62, 63, 75, 78, 83; А2, А24]

∞ 1880 — кн. Софья Николаевна Оболенская (03.03.1857 — 24.08.1932); 8 детей «VI.172—179»

V.106. Б л а н д и н а-Амалия-Августина БЕКМАН «IV.73» (31.12.1846 — после 1916) [12]

∞ 1876 — Сергей Михайлович Айканов (25.08.1852 — 09.04.1891 СПб.) чин-к Мин-ва юстиции, ст. сов. (1890) [39, 65]

V.107. В л а д м и р / Вольдемар-Александр-Валериан БЕКМАН «IV.73» (12.06.1848 СПб.— 26.11.1923 Халила, Финляндия) кавал. офицер, сл. с 1866, ок. Никол. акад. Генштаба (1873), ген. от кавал. (1907), врем. воен. ген.-губ. Курляндии (1905—06) и ген.-губ. Финляндии (1908—09), чл. Гос. совета (1909—17) [39, 47, 75, 76; А2, А7]

∞ — Юлия Александровна Тиран (29.08.1851 — после 1916) дочь гв. офицера; 4 детей «VI.181—184»

V.108. А м а л и я-Цецилия-Мария БЕКМАН «IV.73» (29.08.1851 СПб.— после 1873) [159; А5]

∞ 1872 — Павел Моисеевич Чаплин (р. 11.07.1849) артил. офицер, сл. с 1865, полк. (1889); 1 сын «VI.185» [94; А2]

V.108А. А л е к с а н д р БЕКМАН «IV.73» (р. 22.11.1852 СПб.)

V.109. О л ь г а-Розалия-Аделаида БЕКМАН «IV.73» (27.07.1857 СПб.— после 1916) [12; А5]

∞ 1884 — Николай Спиридонович Попандопуло (14.02.1856 Кишинев — 22.08.1898) морск. офицер, капитан 2-го р. (1894); 2 сына «VI.186, 187» [12, 84; А6]

V.110. Е к а т е р и н а-Констанция БЕКМАН «IV.73» (02.12.1862 СПб.— 01.06.1897 СПб.) [65; А5]

V.111. С о ф и я-Елизавета БЕКМАН «IV.73» (07.11.1864 СПб.— 16.12.1867 СПб.) [65; А5]

V.112. М а р и я ТИМАН «IV.76» (13.03.1842 СПб.— 13.12.1847 СПб.) [65]

V.113 \*. Николай РУКИН «IV.76» (16.09.1850 Москва — 05.04.1894) юрист, чл. окр. суда в Митаве (с 1890), кол. ас. (1890) [39, 70; А5]

V.113А \*. А л е к с а н д р РУКИН «IV.76» (06.02.1853 — 20.10.1856) [70; А5]

V.114 \*. А л е к с а н д р ЭЙЛЕР «IV.78» (28.12.1862 — 1921 Пгр.) сл. с 1880, ок. Никол. инж. акад. (1887), ген.-м. (1912), инсп. почт и телеграфов (1899—1917), затем зам. нач.-ка сл. связи Октябр. ж. д. [5<sup>п</sup>, 39, 75, 76, 83; А2, А5, А24]

∞<sub>1</sub> — Ольга Сергеевна Комарова (03.11.1863 — 17.04.1912 СПб.); 6 детей «VI.188—193» [45]

∞<sub>2</sub> — Мария Дмитриевна Чепурина; 1 сын «VI.194»

V.115 \*. М а р и я ЭЙЛЕР «IV.78» (1863—1942)

∞ 1885 — Алексей Михайлович Горяинов (27.01.1858 — 1919 (?)) инженер, эк. Горн. ин-т (1881), дир. Александр. з-да в Екатеринославе [21, 28]

V.116. С о ф и я ЭЙЛЕР «IV.78»

V.117. Л ю д м и л а ЭЙЛЕР «IV.81» (р. 10.02.1866)

V.118. К о н с т а н т и н ЭЙЛЕР «IV.81» (р. 15.08.1868)



*Семейная группа потомков Л. Эйлера на бракосочетании А. К. Фойгта в Могилеве в 1877 г.*

*Сидят (слева направо): Я. Л. Эйлер (IV.40), Х. Я. Эйлер-Фойгт (V.63), А. К. Фойгт (V.97), П. Я. Эйлер (V.64), М. П. Эйлер (IV.77); стоят: В. Я. Эйлер (V.69) (?), Л. Л. Эйлер (IV.42), Е. Н. Скалон (V.67<sup>м</sup>), А. Я. Эйлер-Скалон (V.67), Н. Л. Эйлер (IV.41), В. К. Фойгт (V.95), Е. Н. Эйлер (V.64<sup>ж</sup>) (?); на переднем плане: В. Е. Скалон (VI.116), А. А. Гебель (VI.101), Н. Е. Скалон (VI.115)*

*С фотографии из собрания Г. Энкеля, Швеция*

V.119. А л е к с а н д р (и н) а-Елизавета-Екатерина ЛЕВЕНТАЛЬ «IV.84» (8.07.1843 Динабург — 09.10.1931 Гослар, Германия) ок. Смольн. ин-т (1860); незамужняя [111]

V.120. Ф е д о р/Фридрих-Эдуард ЛЕВЕНТАЛЬ «IV.84» (26.05.1845 Динабург — 02.03.1894 Ялта) кавал. офицер, сл. с 1863, подполк. (1884), в отст. полк. с 1890; холост [65, 90; A2]

V.121. И в а н/Иоганн-Александр ЛЕВЕНТАЛЬ «IV.84» (08.10.1846 СПб. — 01.01.1900 Москва) офицер, сл. с 1865, полк. (1885); холост [42, 91; A2]

V.122. М а р и я-Эмилия ЛЕВЕНТАЛЬ «IV.84» (06.09.1850 СПб. — 24.03.1944 Гослар, Германия) ок. Смольн. ин-т (1867) [111; A5; Л21]

∞ 1883 — Фридрих-Август-Герман Лизер (Lieser) (28.07.1846 Гессен — 28.11.1928 Гослар) прус. офицер, затем бургомистр Дирдорфа (1883—93) и Ункеля (1893—98) (Рейнланд-Пфальц); 1 сын «VI.198»

V.123. Со́фия-Каролина ЛЕВЕНТАЛЬ «IV.84» (20.02.1854 СПб. — 1929 Ашхабад) [12, 111]

О 1873 — Николай Густавович Гольмдорф (Holmdorff) (29.10.1842 — 06.07.1915 СПб.) артил. офицер, сл. с 1863, ок. Михайл. артил. уч-ще (1865), в отст. ген. от артил. с 1905; 4 детей «VI.199—202» [76; A2]

V.124. Ве́ра ЛЕВЕНТАЛЬ «IV.84» (12.08.1856 СПб. — 15.07.1861 СПб.) [159]

V.125. Ни́колай РЕРЕН «IV.85» (р. 14.02.1861 Киев) кавал. офицер, сл. с 1878, шт.-ротм. (1888), в отст. с 1893 [A2]

V.126. Ма́рия РЕРЕН «IV.85» (21.11.1866 — после 1888); замужем

V.127. Со́фия РЕРЕН «IV.85» (21.09.1872 — после 1888); незамужняя

V.128. Иохан-Каспер-Фердинанд ван дер МЕЕР ван КЮФФЕЛЕР «IV.91» (04.11.1857 Вавел, Нидерланды — 12.05.1935 Неймеген, там же); холост

V.129. Ма́рия-Вильгельмина ДЕЛЕН «IV.92» (16.04.1875 Вавел, Нидерланды — 26.02.1956 Гаага) [150]

О 1899 — Адриан ван Рааб ван Канстейн (van Raab van Canstein) (30.07.1866 Термонтерзейл, Нидерланды — 22.09.1944 Тил, там же); бездетны

## VI ПОКОЛЕНИЕ

VI.1. [Резерв.]

VI.2. А лекс андр КУЛАКОВ «V.6» (р. 03.05.1859 СПб.)

VI.3. [Резерв.]

VI.4. И ва н ЕЛПАТЬЕВСКИЙ «V.13» (02.04.1833 — после 1910) ок. СПб. ун-т, чин-к III деп-та Сената (1856—81), ст. сов. (1869) [12, 39, 94]

VI.5. А лекс андра ЕЛПАТЬЕВСКАЯ «V.13» (28.03.1838 — после 1872)

VI.6. Ма́рия ЕЛПАТЬЕВСКАЯ «V.13» (27.01.1840 — до 1864)

VI.6А. Пе́лагия ЕЛПАТЬЕВСКАЯ «V.13» (01.10.1841 — после 1872); незамужняя

VI.7. Ю́лия ЕЛПАТЬЕВСКАЯ «V.13» (01.03.1844 — после 1916) [12]

О 1865 — Андрей Иванович Гусев (~ 1840 Владимир — 20.08.1896 СПб.) кассир Гос. банка (1860—96), кол. сов. (1873); 9 детей «VII.4—5D» [39, 85, 86; A5]

VI.8. Е ле́на ЕЛПАТЬЕВСКАЯ «V.13» (01.01.1849 — после 1916); незамужняя [12]

VI.9. Ко́нстантин ЕЛПАТЬЕВСКИЙ «V.13» (12.09.1854 — 1918) ок. ист. фак-т СПб. ун-та (1875), преп. истории (с 1875) и инсп. (1885—1906) СПб. Василеостр. жен. гимн., автор «Учебника русской истории», д. ст. сов. (1905) [12, 39, 47, 53; A5]

О — Елизавета Львовна/Людвиговна Чернай (ум. 1942 Лгр.) = «VI.22»; 4 детей «VII.6—8»

VI.10. Фе́дор / Теодор-Герман-Эрнст ЧЕРНАЙ «V.14» (22.02.1835 Грюнгоф Курл. губ. — 02.01.1908 Пернов) ок. Дерпт. ун-т (1860), преп. греч. яз. в гимн. в Митаве (1861—82), затем дир. гимн. в Пернове, ст. сов. (1882) [39, 57, 82, 116, 118, 133, 134; A19, A23]

О 1862 — Иоганна Берндт (Berndt) (19.07.1839 — 15.01.1913) дочь органиста; 5 детей «VII.9—13»

VI.11. Пе́тер-Фердинанд-Гуго ЧЕРНАЙ «V.14» (29.01.1839 Грюнгоф — 06.05.1905 Митав) пастор, ок. Дерпт. ун-т (1861) [39, 116, 118; A19, A23]

О 1867 — Ма́рия Августовна Бильтерлинг (Bilterling) (27.01.1844 — 19.02.1925) дочь пастора; 6 детей «VII.14—19»

VI.12. А лекс андр-Фердинанд ЧЕРНАЙ «V.14» (20.11.1841 Грюнгоф — 20.03.1878 Харьков) уч. в Дерпт. ун-те, преп. нем. яз. в гимн. и в Харьк. ун-те (с 1872); холост [116, 118; A19]



VI.13. О л ь г а ЧЕРНАЙ «V.14» (1843 Грюнгоф — 1901 Митава)

VI.14. М а т и л ь д а ЧЕРНАЙ «V.14» (1845 Грюнгоф — 1918 Митава)

VI.15. П а в е л ЧЕРНАЙ «V.15» (20.10.1843 — 19.06.1872 Харьков) врач, ок Харьков. ун-т (1867), сл. с 1871 [68; А5; Л14]

○ 1870 — Александра Ивановна Богданова (1845 Переяслав Полт. губ. — ~ 1917) содержала пансион в Харькове с 1876, с 1888 нач-ца 2-й Харьк. жен. гимн.; 1 сын «VII.20» [13]

VI.15А. В и л ь г е л ь м ЧЕРНАЙ «V.15» (04.01.1849 СПб. — 08.05.1849 СПб.) [А8]

VI.16. Н и к о л а й ЧЕРНАЙ «V.17» (19.06.1849 Харьков — 05.12.1912 Харьков) химик, ок. физ.-хим. отд. физ.-мат. фак-та Харьк. ун-та (1870), маг. химии (1876), преп. и проф. Харьк. технол. ин-та (с 1886), д. ст. сов. (1911) [52<sup>п</sup>, 78, 82, 103<sup>п</sup>, 104; А5, А6; Л14]

○ 1878 — Елена Александровна Эдельберг (Edelberg) (19.04. (ст. ?) 1857 Варшава — 15.12.1929) дочь харьк. коммерсанта, поставщика научных приборов; 5 сыновей «VII.21—25»

VI.17. Е л е н а ЧЕРНАЙ «V.17» (1851—1877)

○ 1873 — Юлий Вильгельмович Эсслингер (р. ~ 1848) учитель, ок. Харьк. ун-т, директор гимназии (с 1879), затем инсп. нар. уч-щ Киев. губ. (с 1897), ст. сов., в отст. в 1899

VI.18. Е в г е н и я ЧЕРНАЙ «V.17» (р. 10.02.1862)

○ 1885 — Александр Львович Чернай (1852—1920) = «VI.20»; 4 детей «VII.26—29»

VI.19. Л е в / Лео-Венцеслав ЧЕРНАЙ «V.19» (р. 10.10.1847 Кронштадт) ок. Гатчин. Никол. сирот. ин-т (1865), офицер, подпор. (1868), в отст. с 1870 [А2]

VI.20. А л е к с а н д р-Мозес ЧЕРНАЙ «V.19» (14.08.1852 Гатчина — 1920) инженер, ок. Ин-т инж. путей сообщ. в СПб. (1877), сл. с 1884, раб. в Харькове, Самаре, Москве, с 1913 нач-к Александр. ж. д., д. ст. сов. (1908) [39, 64, 75, 78, 89; А5]!

○ 1885 — Евгения Александровна Чернай-Эсслингер (р. 1862) = «VI.18» (носила впоследствии фамилию матери Эсслингер); 4 детей «VII.26—29»

VI.21. Н и к о л а й-Виктор ЧЕРНАЙ «V.19» (03.05.1854 Гатчина—03.01. 1925 Нарва) юрист, ок. СПб. ун-т, сл. с 1880, чл. Новгород., Псков. и Ковен. окр. судов (с 1896), д. ст. сов. (1909) [39, 59, 62, 78, 94, 166<sup>п</sup>]

○ — Агния Александровна Кохомская (12.02.1865 — 06.03.1947 ЛитССР) дочь артил. офицера; 8 детей «VII.30—37» [Л13]

VI.22. С о ф ь я ЧЕРНАЙ «V.19» (24.02.1856 Гатчина — 1942 Лгр.) преп. нем. и фр. яз. [12]

VI.23. В л а д и м и р/Вольдемар-Вильгельм ЧЕРНАЙ «V.19» (10.09.1857 Гатчина — 1918 Коканд) юрист, присяжный поверенный

○ — N. N.; 2 сына «VII.38,39»

VI.24. Е л и з а в е т а-Розалия ЧЕРНАЙ «V.19» (21.08.1859 Гатчина — 1942 Лгр.)

○ 1879 — Константин Васильевич Елпатьевский (1854—1918) = «VI.9»; 4 детей «VII.6—8»

VI.24А. К л а р а-Людовика ЧЕРНАЙ «V.19» (30.12.1865 Гатчина — 1942 Лгр.) преп. нем. яз. в жен. гимн. (с 1907) [12, 39; Л6]

VI.25. П а в е л / Пауль-Иоганн-Генрих ЧЕРНАЙ «V.19» (р. 31.05.1868 Гатчина)

VI.26. [Резерв.]

VI.27. Э м м а ШМАЛЬЦ «V.24» (р. 27.12.1844 СПб.)

- VI.28. Ф е л и к с ШМАЛЬЦ «V.24» (ум. после 1902) нем. офицер
- VI.29. Е в г е н и я / Эмилия-Доротея ШМАЛЬЦ «V.24» (1852 Вост. Пруссия — после 1902)
- ∞ 1881 — Егор Егорович Фус (1841—1918) = «V.38»; 4 детей «VI.56—59»
- VI.30. В и л ь г е л ь м и н а-Элеонора-Эмилия БЕРГШТРЕССЕР «V.25» (06.05.1850 Астрахань — 02.02.1928 Кёнигсберг) [A23]
- ∞ 1874 — Отто Штейн (Stein) (14.03.1841 — 16.05.1915 Кёнигсберг)
- VI.31. П а в е л-Карл-Эмиль-Альфред БЕРГШТРЕССЕР «V.25» (15.08.1851 Астрахань — 30.06.1920 Берлин) инж.-архитектор, ок. Ин-т гражд. инж. в СПб. (1878) [7<sup>д</sup>, 12, 15]; A23]
- ∞ 1881 — М а р г а р и т а-Юлия-Катарина Юльевна Бострем (Boström) (1859—1944) дочь купца; 6 детей «VII.45—50»
- VI.32. А в г у с т а-Каролина-Элиза-Франциска БЕРГШТРЕССЕР «V.25» (16.09.1853 СПб. — VIII 1937)
- ∞ 1873 — Август-Эдуард-А л ь ф р е д Оттонович Струве (05.10.1845 Пулково — 17.12.1916 Пгр.) инженер, ок. Горн. ин-т в СПб. (1869), раб. в каменноуг. промышленности и на ж.-д. стр-ве, ст. сов. (1889), в отст. с 1900; 4 детей «VII.51—54» [95, 117; A5]
- VI.33. Н и к о л а й-Генрих-Вильгельм БЕРГШТРЕССЕР «V.25» (24.05.1855 — 1919) морск. офицер, сл. с 1872, контр-адм. (1906), капитан кроншт. порта и командующий либавским портом (1906—41), в отст. вице-адм. с 1911 [12, 48, 84; A6, A23]
- ∞ 1883 — Эмилия Августовна Ланге (Lange) (26.08.1859 СПб. — 22.01.1894 СПб.) дочь архитектора; 6 детей «VII.55—60»
- VI.34. О л ь г а БЕРГШТРЕССЕР «V.25» (1858 — после 1923) учительница; незамужняя [12]
- VI.35. М а к с и м и л и а н БЕРГШТРЕССЕР «V.25» (12.03.1860 — после 1923) ок. СПб. коммерч. уч-ще (1882) сл. в страховых об-вах [12, 55]
- ∞ — Анастасия Исааковна N. (ум. после 1923) сестра милосердия
- VI.36. А р н о л ь д-Георг БЕРГШТРЕССЕР «V.25» (17.09.1863 Чернигов — после 1916) физик, сл. в Павл. обсерватории Акад. наук. (1886—92), на стр-ве ветвей Владикавк. ж. д., кол. сов. [12; A8, A23]
- ∞<sub>1</sub> 1886 — Екатерина Ленер (Lehner) из Вены; 1 дочь «VII.61»
- ∞<sub>2</sub> — 1 сын «VII.62»
- VI.37. К л а р а-Вильгельмина БЕРГШТРЕССЕР «V.25» (01.08.1868 — после 1931) учительница; незамужняя [12]
- VI.38. О т т о н / Отто-Пауль СТРУВЕ «V.27» (13.02.1852 СПб. — 31.07.1912 СПб.) инженер, ок. Ин-т инж. путей сообщ. в СПб. (1875), сл. с 1876, инсп. при Управл. по сооруж. жел. дорог (с 1907), чл. инж. совета МПС (с 1911), д. ст. сов. [12, 46, 78, 89, 159; A4, A5]
- ∞ 1880 — С о ф и я-Берта Николаевна Шпеер (Speyer) (01.06.1853 СПб. — 20.07.1908 бл. СПб.); 4 детей «VII.63—66»
- VI.39. А л е к с а н д р-Вильгельм СТРУВЕ «V.27» (21.04.1853 СПб. — 04.11.1883 Пулково) астроном, морск. офицер, сл. с 1871, лейтенант (1880), воспитатель в Морск. кадет. корпусе; холост (был обручен с Ольгой Карловной Бергштрессер «VI.34») [A6; J5]
- VI.40. М а р и я СТРУВЕ «V.27» (1854 СПб. — 1860 СПб.)
- VI.41. В и л ь г е л ь м и н а СТРУВЕ «V.27» (25.03.1856 — 1943 Акмолин. обл.) учительница; незамужняя [J5]
- VI.42. Е в г е н и я / Иоганна СТРУВЕ «V.27» (13.09.1860 СПб. — весна 1943 Акмолин. обл.) [J5]

∞ 1881 — Фердинанд Карлович Оттен (Otten) (24.08.1850 Эстл. губ. — VIII 1930 Тифлис) провизор, ок. Дерпт. ун-т (1874), маг. фармации (1876), аптекарь в Тифлисе (с 1893), почетн. гражд. Тифлиса; 14 детей «VII.67—80» [102, 116; A19, A21; J5]

VI.43. Е л е н а СТРУВЕ «V.27» (13.02.1864 — 1943 Акмолин. обл.) учительница; незамужняя [J15]

VI.44. Л и д и я ФУС «V.28» (09.11.1874 СПб. — 20.05.1875 СПб.) [65]

VI.45. Пауль-Эммануель-Эрнст УНДРИТЦ «V.32» (р. 13.01.1884 СПб.)

VI.46. Д м и т р и й ФУС «V.34» (08.02.1866 — 1919) кавал. офицер, сл. с 1887, полк. (1911) [91; A2]

∞<sub>1</sub> — Анна Яковлевна Семенова (ум. после 1931) дочь ген.-м.; 2 дочери «VII.82, 83»

∞<sub>2</sub> — Анна Алексеевна Тройницкая

∞<sub>3</sub> — Елизавета Николаевна N. (ум. после 1955 Лгр. обл.); бездетны

VI.47. В е р а ФУС «V.34» (16.08.1869 СПб. — 1941) ок. Смольн. ин-т (1889), писательница [111]

VI.48. П е т р ФУС «V.34» (р. 09.04.1877 СПб.) офицер, сл. с 1895, ок. Михайл. артил. уч-ще (1897), воспитатель Симб. кадет. корпуса, капитан (1910) [39; A2]

∞ — Елизавета Павловна Бурачек (р. 03.12.1877) дочь вице-адм. П. С. Бурачека (05.01.1838 — 10.01.1917); 4 детей «VII.84—87»

VI.49. О л ь г а ФУС «V.34» (р. 24.05.1880 СПб.)

VI.50. [Резерв.]

VI.51. Е л и з а в е т а ФУС «V.37» (11.12.1869 — после 1898)

VI.52. А л е к с а н д р ФУС «V.37» (13.06.1871 — 10.01.1899 Севастополь) морск. офицер, сл. с 1892, мичман (1897); холост [46, 84, 141; A6]

VI.53. Э м м а ФУС «V.37» (р. 18.03.1873)

VI.54. М а р и я-Дорогея ФУС «V.37» (19.10.1874 Кронштадт—1952 Италия) [A5]

∞ — Георгий Эдуардович Тилло (Thillot) (1870 СПб. — 1930) чин-к МВД и МИД, нештатный консул в Сан-Ремо (с 1912), надв. сов.; 3 дочери «VII.91—93» [12, 39; A4, A23]

VI.55. Г е о р г и й ФУС «V.37» (30.11.1879 Кронштадт — после 1917) морск. офицер, сл. с 1897, капитан 2-го р. (1913) [84; A5, A6]

∞ — Ольга Федоровна Масленникова; пасынки: Георгий (р. 1899) и Борис (р. 1901) Масленниковы

VI.56. В и л ь г е л ь м-Герман ФУС «V.38» (р. 20.12.1882 СПб.) врач [141; A19]

VI.57. Е в г е н и я-Клара ФУС «V.38» (р. 01.02.1884) учительница

VI.58. О л ь г а-Алиса ФУС «V.38» (р. 05.01.1885)

VI.59. Николай-Георг ФУС «V.38» (1890—1893)

VI.60, 61. [Резерв.]

VI.62. Э д у а р д-Георг КОЛЛИНС «V.41» (12.11.1860 СПб. — 26.12.1887 СПб.) преп. нем. яз. в реальном уч-ще [141]

∞ 1886 — А д е л ь-Фредерика-Анна Федоровна Мюльбах (Mühlbach) (04.10.1862 СПб. — 1943) дочь фабриканта муз. инструментов (∞<sub>2</sub> — Адольф Натинг (Nathing) дир. Гл. уч-ща св. Петра) [A23]

VI.63. Э л л а / Елена-Дорогея-Юлия КОЛЛИНС «V.41» (17.07.1862 — 28.09.1946 Альберга) [12, 141]

∞ 1888 (—1906) — И о х а н н е-с-Вильгельм Эквист (Öhquist) (18.12.1861 — 15.10.1949) лектор ун-та в Гельсингфорсе, публицист; 2 детей «VII.98, 99» (∞<sub>2</sub> 1907; ∞<sub>3</sub> 1917) [144, 152]

VI.64. Г е о р г-Александр-Роберт КОЛЛИНС «V.41» (19.03.1866 СПб. — 16.11.1922) купец в Харькове, дир. пароходн. об-ва Тегельстен — Петербург [13, 141]

∞ 1897 — С о ф и я-Ольга-Фредерика Эберхардт (Eberhardt) (ум. после 1916)

- VI.65. Э м и л и я-Вильгельмина-Элеонора КОЛЛИНС «V.41» (03.04.1867 — 30.04.1868)
- VI.66. А л е к с а н д р-Вольдемар-Вильгельм КОЛЛИНС «V.41» (28.08.1868 СПб. — 19.08.1945 Эсбо, Финляндия) владелец типографии [12, 141; Л12]  
 ∞ 1897 — А д е л ь-Анна Федоровна Хинце (Hinze) (24.12.1871 СПб. — 02.04.1952 Эсбо) дочь коммерсанта; 4 детей «VII.101—104»
- VI.66А. Ю л и я КОЛЛИНС «V.41» (~1870 — 02.03.1926 Финляндия) [12]
- VI.67. Д о р о т е я КОЛЛИНС «V.41» (01.04.1872 — 07.04.1886 СПб.) [141]
- VI.68. А л ь ф р е д -Юлиус-Андреас КОЛЛИНС «V.41» (26.03.1874 СПб. — 30.03.1881 СПб.) [A5];
- VI.69. В л а д и м и р / Вольдемар-Якоб-Генрих КОЛЛИНС «V.41» (21.04.1876 СПб. — 22.07.1951 Варел, Ольденбург) архитектор в СПб. и Ганновере, уч. в Акад. художеств (СПб.) и Моск. уч-ще живописи, ваяния и зодчества [12, 141, 160]  
 ∞ 1908 — Екатерина Георгиевна Штуцер (Stutzer) (1888—1967) дочь купца; 2 детей «VII.105,106»
- VI.70. М а р ф а / Марта-Матильда-Елизавета КОЛЛИНС «V.41» (08.10.1878 (ст.?) СПб. — 09.07.1956 Хельсинки) учительница [141; A23]
- VI.71. Г е н р и х-Эдуард БЕРЕНДТС «V.43» (04.03.1858 СПб. — 1921 Пгр.) купец I гильдии [98, 141, 160<sup>П</sup>; A23]  
 ∞ 1891 — Елена-М а т и л ь д а Карловна Блехер (Blecher) (ум. 1927); 1 сын «VII.107»
- VI.71А. Юлия-Вильгельмина БЕРЕНДТС «V.43» (28.11.1859 СПб. — 24.11.1862 СПб.)
- VI.72. Э д у а р д-Кристоф БЕРЕНДТС «V.43» (21.12.1860 СПб. — 04.08.1930 Тарту) юрист, ок. СПб. ун-т (1884), проф. Демидовского лицея в Ярославле, СПб. ун-та и Уч-ща правоведения в СПб. (1891—1917), Тартуского ун-та (1920—1930), д-р финанс. права (1895), т. сов. (1914), сенатор (1914) [39, 75, 82, 121, 141, 145<sup>П</sup>; A23]  
 ∞ 09.01.1885 — София Арминовна Финдейзен (Findeisen) (24.10.1863 — после. 1916) дочь пастора; 6 детей «VII.108—113»
- VI.73. А л е к с а н д р-Иоганн БЕРЕНДТС «V.43» (14.09.1863 СПб. — 10.03.1912 Дерпт) богослов, ок. Дерпт. ун-т (1890), маг. богосл. (1895), сл. с 1895, проф. истор. богословия Дерпт. ун-та, ст. сов. (1904); холост [9, 82, 116, 124, 133, 141; A5, A19]
- VI.74. Д о р о т е я-Юлия-Паулина БЕРЕНДТС «V.43» (20.06.1869 — 1917) [12]  
 ∞ 1892 — Н и к о л а й-Франц-Роберт Францович Гесс (Hess) (04.03.1866 СПб. — после 1913) торг. работник
- VI.74А. Фридрих-Вильгельм БЕРЕНДТС «V.43» (17.02.1871 СПб. — ум. в детстве)
- VI.75. А в г у с т-Генрих БЕРЕНДТС «V.43» (06.05.1872 СПб. — 17.10.1924 Таллин) юрист, ок. СПб. ун-т (1896), участник русско-японской войны [12, 141; A2, A23]  
 ∞ 1897 — Лаура Александровна Штейнер (Steiner) (1875—1941) дочь купца; 4 детей «VII.115—118»
- VI.76. В и л ь г е л ь м и н а-Шарлотта-Ольга БЕРЕНДТС «V.43» (29.08.1873 СПб. — 01.09.1951 Гамбург)
- ∞ 1907 — Э р н с т-Фридрих-Александр Александрович Ферман (Fehrmann) (01.03.1872 СПб. — 07.10.1947 бл. Гамбурга) врач, ок. Дерпт. ун-т (1896), воен. и воен.-морск. врач (1896—1911), доц. и проф. Рижск. ун-та (1921—39), д-р мед. (1907); бездетны [12, 68, 116, 123, 133; A5, A23]

VI.77. Е л и з а в е т а / Бетти БРЕМЕ «V.46» и «V.54» (25.12.1849 СПб.— 31.03.1900 Ревель)

○ 1869 — Август-Эдуард-Иоганн Эдуардович фон Нотбек (von Nottbeck) (27.10.1845 Ревель — 02.11.1914 Ревель) чин-к Эстл. контр. палаты (1874), кол. сов. (1896); 6 детей «VII.119—124» [95, 140]

VI.78. Ш а р л о т т а ГЕККЕР «V.49» (18.06.1868 СПб.— 10.02.1951 Хельсинки) [A23; Л3]

○ 1891 — Иван / Иоганн-Эмиль Васильевич Мильк (Mielck) (20.08.1852 — 1909); 4 детей «VII.125—128»

VI.79. Ф е д о р / Теодор-Эдуард-Вольдемар ГЕККЕР «V.49» (23.12.1870 СПб.— 16.03.1940 Лгр.) врач-педиатр, ок. Юрьев. ун-т (1895), д-р мед. (1901), дир. Лавальского приюта, ст. сов. (1911), затем зав. отд. в роддоме им. Видемана в Лгр. [68, 116, 123, 141; A19, Л3]

○ 1897 — М а р г а р и т а-Адель-София Густавовна Гемилиан (Hemilian) (06.07.1873 — 1942 Лгр.) дочь врача; 4 детей «VII.129—132»

VI.80. В а с и л и й / Вильгельм-Эдуард-Карл ГЕККЕР «V.49» (12.02.1872 СПб.— 1934 Лгр.) торг. посредник, купец, товаровед в Лгр. союзе потребительских об-в [12, 141; Л3]

○ 1898 — Амалия Эгбертовна Смелт (Smelt); 3 дочери «VII.133—135» [12]

VI.81. В л а д и м и р ГЕККЕР «V.49» (20.08.1876 СПб.— 24.05.1883 СПб.)

VI.82. Ф е д о р ГЕККЕР «V.50» (02.08.1858 Тавриз — после 1922) сл. с 1889, нач-к архива Мин-ва торг. и пром-сти (с 1900), кол. сов. (1911) [12, 39, 87; A7]

○ — Екатерина Андреевна N.;

VI.83. Е л е н а ГЕККЕР «V.50» (16.03.1860 — после 1916) преп. музыки в Павл. жен. ин-те (с 1907); незамужняя [12, 39]

VI.84. В а с и л и й ГЕККЕР «V.50» (15.12.1861 — после 1913) торг. посредник, инсп. частн. торг. школы Б. В. Шкловского (до 1913), ст. сов. (1907) [12, 39]

○ — Александра Николаевна N.

VI.85. Г е н р и х ФОХТ / ФОЙГТ «V.51» (30.12.1857 — 19.10.1887)

○ — N. Берман; 2 детей «VII.140,141»

VI.86. А л ь ф о н с-Теодор-Шарль БИБЕР «V.52» (09.07.1859 Кронштадт — 31.07.1879 Монбейяр, Франция) студент; холост [A5; Л3]

VI.87,88. [Резерв.]

VI.89. О л ь г а-Генриетта-Александрива ГЕРШЕЛЬМАН «V.58» (05.08.1847 СПб.— 04.03.1875 СПб.) [143, 159; A5, A23]

○ 1868 — Отто-Густав-Герман Гассельблат (Hasselblatt) (05.10.1839 Эстл. губ.— 13.01.1910 СПб.) биржевой маклер в СПб.; 2 детей «VII.144,144A» (○<sub>2</sub> 1876 — Луиза фон Рамбах (von Rambach); были дети) [12, 98]

VI.90. К о н с т а н т и н-Адольф-Фридрих ГЕРШЕЛЬМАН «V.58» (10.03.1849 СПб.— 19.05.1901 Александрополь) офицер, ген.-м. (1900) [39, 143; A2, A5]

○<sub>1</sub> 1879 — М а р и я-Шарлотта-Клементина Робертовна Гершельман (11.09.1846 Монтрё, Швейцария — 26.02.1894) дочь инж.-ген.-л., кузина своего мужа; 4 детей «VII.145—148»

○<sub>2</sub> 1901 — Ядвига Юлиевна Облашевич (09.01.1872 — после 1913) дочь купца; 2 детей «VII.149,150»

VI.91. В л а д и м и р / Вольдемар-Карл-Александр ГЕРШЕЛЬМАН «V.58» (11.09.1850 СПб.— 07.07.1888) морск. офицер, затем театр. интендант [143]

○ 1874 — Нина Васильевна Ильинская-Болтенкова; бездетны

VI.92. И о г а н н е с-Ойген-Роберт ГЕРШЕЛЬМАН «V.58» (16.07.1852 — 13.06.1854)

- VI.93. Александр-Виктор ГЕРШЕЛЬМАН «V.58» (12.06.1854 — 25.06.1854)
- VI.94. Александрина-Эмилия-Мария-Аннетта ГЕРШЕЛЬМАН «V.58» (р. 19.06.1855 СПб.)
- VI.95. Михаил-Эдуард-Николай ГЕРШЕЛЬМАН «V.58» (16.08.1857 СПб.— после 1916) чин-к акцизн. управл. в Тифлисе и Баку, ст. сов. (1916) [39, 143]  
 ○ 1880 — Виктория-Евгения-Александрина Викторовна Гершельман (р. 12.12.1860 Тифлис) дочь инж.-ген.-л., кузина своего мужа; 7 детей «VII.151—157»
- VI.96. Аннетта-Генриетта-Мария ГЕРШЕЛЬМАН «V.58» (15.08.1859 — 24.04.1861)
- VI.97—100. [Резерв.]
- VI.101. Александр ГЕБЕЛЬ «V.63» (22.11.1865 — 20.07.1918 (ст.?) гв. офицер, сл. с 1883, ок. 2-е Воен. Констант. уч-ще, полк. (1907) [12, 39, 91; A2]  
 ○ 1890 — Ольга Николаевна Эйлер (1866—1925) = «V.77»; 1 сын «VI.119»
- VI.102. Надежда ФОЙГТ «V.63» и «V.97» (07.01.1879 Бежица бл. Брянска — 01.08.1950 Хельсинки) [A23; Л20]  
 ○<sub>1</sub> 1899(—1902) — бар. Александр Николаевич Гревениц (Bar. von Gräwenitz) (28.03.1874 Казань — 02.07.1925 Лгр.) гв. офицер, полк. (1914); бездетны (○<sub>2</sub> — Наталия Георгиевна Мин; были дети) [91, 108; A2]  
 ○<sub>2</sub> 1903 — Оскар-Павел Карлович Энкель (Enckell) (02.03.1878 СПб.— 05.02.1960 Хельсинки) офицер, сл. с 1895, ок. Никол. акад. Генштаба (1903), полк. (1912), в финск. армии с 1919, нач-к Генштаба (1919—24), ген.-м. (1919), в отст. ген.-л. с 1924, затем менеджер в пром-сти, участвовал в советско-финских переговорах (1944 и 1948); 1 сын «VII.161» [91, 144, 152<sup>н</sup>; A2]
- VI.103. Мария ФОЙГТ «V.63» и «V.97» (1880 Екатеринослав — 04.02.1942 Тихвин) [Л7, Л11]  
 ○ 1905 — Иван Николаевич Анненков (31.01.1868 Орел — 17.11.1937 Лгр.) гв. офицер, ок. Пажеский корпус (1888), полк. (1908), полицм. Аничкова дворца, позже бухгалтер; 4 дочери «VII.162—165» [12, 39, 91; A2]
- VI.104. Павел ФОЙГТ «V.63» и «V.97» (20.03.1881 СПб.— 17.10.1939 Иркутск) инженер, ок. Горн. ин-т (1907), сл. с 1908, при Монашном дворе (1908—10 и с 1921), затем в Новосибирске и Бодайбо («Главзолото») [12, 81; A5; Л11]
- 1909 — Наталия Николаевна Анненкова (16.01.1890 Орёл — 11.01.1985 Новокузнецк) дочь д. ст. сов. Н. И. Анненкова, сестра «VI.103<sup>М</sup>»; 4 сына «VII.166—169»
- VI.105. Яков ЭЙЛЕР «V.64» (р. 19.03.1872 Могилёв) ок. СПб. ун-т (1894), сл. по Мин-ву финансов (с 1898), чин-к Воронеж. (с 1904) и управл. Енисейск. (с 1914) казен. палаты, д. ст. сов. (1916), в 1930-х гг. сотрудничал в Главсевморпути [39, 54, 56, 75, 86]  
 ○ 1905 — Елизавета Николаевна Кухарская (р. 1884); бездетны
- VI.106. Николай ЭЙЛЕР «V.64» (08.03.1873 Могилёв — 1917 Рига) экономист; бездетен [114]
- VI.107. Леонтий / Леонард ЭЙЛЕР «V.64» (19.10.1874 Могилёв — 14.02.1960 Базель) инженер, ок. Горн. ин-т (1898), сл. с 1898, дир. шахты [81, 114]  
 ○ 1906 — Зинаида Дмитриевна Ефремова (03.09.1832 Севастополь — 21.07.1974 Базель); 1 сын «VII.170»
- VI.108. Павел ЭЙЛЕР «V.64» (12.12.1876 Могилёв — 23.06.1939 Брюссель) инженер, ок. Горн. ин-т (1904) [12, 81, 114]  
 ○ — Ольга Филипповна Н.; бездетны
- VI.109. Екатерина ЭЙЛЕР «V.64» (08.04.1878 — 30.07.1895 Винница)

VI.110. В л а д и м и р ЭЙЛЕР «V.64» (12.12.1879 Могилёв — 15.11.1940 Прага) воен. инженер, сл. с 1898, ок. Никол. инж. акад. (1907), капитан (1916), раб. в Управл. по сооруж. жел. дорог (1908—13), позже в ведомстве путей сообщ. в Чехословакии [49, 114; А2, А5, А24]

∞ 1903 — Екатерина Захаровна Агапеева (02.12.1877 Орлов. губ. — 25.02.1957 Базель) учительница; 2 дочери «VII.171,172»

VI.111. А л е к с а н д р ЭЙЛЕР «V.64» (08.03.1881 Могилёв — 23.03.1906 Мукден) офицер, сл. с 1900, подпор. (1902), участник русско-японской войны [А2]

VI.112. М а р и я ЭЙЛЕР «V.64» (13.06.1882 Могилёв — 04.02.1971 бл. Парижа) ок. Екатеринбург. ин-т «с шифром» [114]

∞ 1903 — Василий Васильевич Скалон (21.01.1879 — 22.10.1921 бл. Владикавказа) юрист, ок. Моск. ун-т, сл. с 1903; 1 сын «VII.173» [12, 39; А2; Л8]

VI.113. Д м и т р и й ЭЙЛЕР «V.64» (23.09.1883 Могилёв — 12.05.1943 Париж) морск. офицер, сл. с 1900, в т.ч. на крейсере «Варяг», Георг. крест 4-й ст. (1904), капитан 2-го р. (1916), в резерве (1917); холост [35<sup>п</sup>, 84; А6]

VI.114. А н д р е й ЭЙЛЕР «V.64» (05.05.1887 — 12.03.1888)

VI.115. Н и к о л а й СКАЛОН «V.67» (23.09.1874 Могилёв — 25.12.1964 Переяславль-Залесский) юрист, ок. СПб. ун-т, сл. с 1893, д. ст. сов. (1913), затем сов. служащий [39, 75; Л8]

∞<sub>1</sub> 1896 — Ольга Петровна Кашнева (1875—1938) художник; 2 детей «VII.174, 175»

∞<sub>2</sub> до 1915 — Евгения Францевна Юргенс (1877 — 08.10.1964 Переяславль-Залесский); бездетны

VI.116. В л а д и м и р СКАЛОН «V.67» (10.12.1872 Могилёв — 12.12.1917 Брест-Литовск) офицер, ок. Пажеский корпус (1892) и Никол. акад. Генштаба (1898), ген.-м. (1916), сл. в управл. ген.-квартирмейстера [49, 91, 108; А2; Л8]

∞ — Анна Львовна Львова (ум. 1952) в конце жизни перс. пенсионер; 2 дочери «VII.176,177» (∞<sub>2</sub> — Григорьев) [12]

VI.117. Н и к о л а й ЭЙЛЕР «V.71» (03.05.1883 — 18.11.1914 в бою на Черном море) морск. офицер, мичман (1910); холост [36<sup>п</sup>, 46<sup>п</sup>, 84; А6]

VI.118. Н и к о л а й ЖАДВОЙН «V.75» (р. 11.03.1893)

VI.119. Д м и т р и й ГЕБЕЛЬ «V.77» и «VI.101» (24.08.1891 — 12.09.1919 Одесса) гв. офицер, ок. Пажеский корпус (1910), капитан [А2; Л21]

∞ 1917 — бар. София Константиновна Врангель (Bar. von Wrangell) (р. 13.12.1891); 2 дочери «VII.179,180» (∞<sub>2</sub> 1929 — Глеб Николаевич Одинцов)

VI.120. Е к а т е р и н а БУШЕН «V.80» (р. 06.09.1879)

VI.121. С о ф и я БУШЕН «V.80» (р. 19.04.1881)

VI.122. О л ь г а БУШЕН «V.80» (р. 17.12.1882)

VI.123. Б о р и с БУШЕН «V.80» (р. 08.01.1885) морск. офицер, сл. с 1903, ст. лейтенант (1916) [84; А6]

VI.123А. С е р г е й БУШЕН «V.80» (?) [Л15]

VI.124. Н и к о л а й КОЧЕТКОВ «V.81» (27.03.1893 Кронштадт — 13.04.1946 Рига) врач-хирург [Л15]

∞<sub>1</sub> 1916 — Александра Павловна Никифорова (ум. 23.07.1953); 3 детей «VII.182—182В»

∞<sub>2</sub> 1938 — Альвина Кришьяновна Зубавс (Zubaws) (р. 29.12.1906) врач-хирург; 2 дочери «VII.183,183А»

VI.125. Т а т ь я н а КОЧЕТКОВА «V.81» (1895—1898)

VI.126. А л е к с а н д р КОЧЕТКОВ «V.81» (26.04.1898 — 23.03.1904)

VI.127. Анастасия КОЧЕТКОВА «V.81» (10.12.1900 Кронштадт — 21.05.1943 Владимир) [Л15]

∞<sub>1</sub> 1919 — Григорий Григорьевич Правдюк (1883—1967) служащий; 1 дочь «VII.184»

∞<sub>2</sub> 1927 — Василий Яковлевич Семенчук (1895—1942) служащий; бездетны

VI.128. Леонид КОЧЕТКОВ «V.81» (1904—1904)

VI.129. Ольга РОДИОНОВА «V.86» (21.05.1851 — после 1905)

VI.130. Алексей РОДИОНОВ «V.86» (26.07.1853 — 1919) гв. казачий офицер, ок. Пажеский корпус (1873), ген.-л. (1911), в отст. ген. от кавал. с 1913, ген. от кавал. (1917) [39, 75, 76, 108; А2]

∞ 1881 — бар. Эмилия-Юлия-Августа Борисовна фон Гойнинген-Гюне (Bar. von Houningen-Huene) (08.12.1857 СПб.— после 1919) дочь ген.-майора; бездетны [12]

VI.131. Николай РОДИОНОВ «V.86» (27.04.1859 — после 1905)

VI.132. Лидия РОДИОНОВА «V.86» (09.03.1861 — после 1916); незамужняя [12]

VI.133. Нина РОДИОНОВА «V.86» (24.01.1863 — после 1905)

VI.134. Виктор РОДИОНОВ «V.86» (30.05.1866 — 08.04.1890 СПб.) [65]

VI.135. Георг-Карл-Виктор РУБЕК «V.87» (р. 25.03.1871 СПб.— после 1916) ок. СПб. коммерч. уч-ще (1889), сл. в Рос. страховом об-ве [12, 55]

∞ — Ольга Федоровна Топелиус

VI.136. Виктор РУБЕК «V.87» (ум. после 1916) [12]

VI.137. Карл-Эдуард БОЛТЕНГАГЕН «V.88» (02.12.1858 — 13.10.1869 Франкфурт-на-Майне)

VI.138. София-Луиза БОЛТЕНГАГЕН «V.88» (07.08.1860 СПб.— 06.03.1892 Альтона бл. Гамбурга)

VI.139. Адель-Паулина БОЛТЕНГАГЕН «V.88» (17.10.1861 СПб.— ~1960 Лгр.) клас. дама в Харьк. ин-те благор. девиц (1890—1905), учительница; незамужняя [А5, А23; Л2]

VI.140. Эмма-Александра БОЛТЕНГАГЕН «V.88» (09.02.1863 СПб.— ~1960 Лгр.) учительница; незамужняя [А23; Л2]

VI.141. Женни-Елизавета БОЛТЕНГАГЕН «V.88» (30.11.1865 СПб.— 06.08.1876 СПб.)

VI.142. Клара-Юлия БОЛТЕНГАГЕН «V.88» (06.09.1866 СПб.— 1930-е гг. Лгр.); незамужняя [А23; Л2]

VI.143. Матильда-Луиза БОЛТЕНГАГЕН «V.88» (24.11.1868 Франкфурт-на-Майне — 01.02.1875 СПб.)

VI.144. Елизавета-Анна БОЛТЕНГАГЕН «V.88» (07.11.1871 СПб.— 30.12.1885)

VI.145. Лев / Лео БОЛТЕНГАГЕН «V.88» (17.04.1875 СПб.— 1944 Харьков) юрист, ок. СПб. ун-т (1896) [12; А23; Л2]

∞<sub>1</sub> 1898(—1912) — Эмма-Алиса-София Эдуардовна Сеземан (05.01.1874 — 1944 с. Богучаны Красноярск. кр.) дочь купца; 1 дочь «VII.191» (∞<sub>2</sub> — Бруно-Вольдемар Петрович Тринклер; бездетны)

∞<sub>2</sub> — София Александровна Баландина (1877 СПб.— 1960 Москва); бездетны

VI.146. Цецилия-Наталья БОЛТЕНГАГЕН «V.90» (р. 03.12.1877 СПб.)

VI.147. Альма-Юлия БОЛТЕНГАГЕН «V.90» (11.05.1879 СПб.— 15.04.1890 СПб.) [65]

VI.148. Мария БОЛТЕНГАГЕН «V.92» (р. 20.05.1872) учительница

VI.149. Карл БОЛТЕНГАГЕН «V.92» (1873—1874)



- VI.150. А л ь ф р е д БОЛТЕНГАГЕН «V.92» (22.09.1874 СПб.— после 1913) сл. в страховом об-ве [12]
- VI.151. И р м а БОЛТЕНГАГЕН «V.92» (1875—1879)
- VI.152. Э л ь з а БОЛТЕНГАГЕН «V.92» (14.12.1877 — после 1916); незамужняя [12]
- VI.153. И р м а БОЛТЕНГАГЕН «V.92» (25.10.1879 СПб.— ~01.03.1880 СПб.)
- VI.154. Б р у н о БОЛТЕНГАГЕН «V.92» (25.04.1881 — после 1916) юрист, ок. СПб. ун-т, присяжный поверенный [12]
- ∞ — Наталия Васильевна Грехова
- VI.155—157. [Резерв.]
- VI.158. М а р и я Ф О Й Г Т «V.94» (11.11.1868 — 10.10.1879 СПб.) [65; А4]
- VI.159\*. М а р и я Ф О Й Г Т «V.95» (р. 15.08.1878)
- VI.160. А л е к с а н д р а ЗУБОВА «V.102» (17.06.1860 — после 1904) [Л23]
- ∞ — гр. Констабиле делла Стаффа (Constabile della Staffa) (1858 — 1932 Пещина)
- VI.161. М а р и я-Стелла ЗУБОВА «V.102» (15.11.1861 Екатеринослав — 06.12.1913) [Л23]
- ∞ — гр. Шарль Николис де Робиллан (de Robillant) (15.01.1861 — 1934 Турин); имели детей
- VI.162. Е к а т е р и н а ЗУБОВА «V.102» (22.05.1865 — после 1904) [Л23]
- ∞ — Алексей Метелев, офицер, полковник (?)
- VI.163. Н и к о л а й ШИПОВ «V.103» (05.07.1873 — 05.07.1893)
- VI.164. Д а р ь я ШИПОВА «V.103» (1875—1879)
- VI.165. А л е к с а н д р ШИПОВ «V.103» (11.09.1876 — 23.06.1918)
- VI.166. Н а д е ж д а ШИПОВА «V.103» (1878—1878)
- VI.167. Н а д е ж д а ШИПОВА «V.103» (18.11.1879 — 1965)
- VI.168. Д м и т р и й ШИПОВ «V.103» (07.08.1882 — 1906) студент, участник революции 1905 г., пропал без вести
- VI.169. С е р г е й ШИПОВ «V.103» (20.07.1885 Моск. губ.— 17.05.1979 Москва) юрист, ок. Моск. ун-т, земский деятель, служащий, историк [15, 39, 94; Л16]
- ∞ 1912 — Вера Сергеевна Петрова (X 1888 Владимир — 30.11.1970 Москва); 3 детей «VII.201—203»
- VI.170. П е т р ШИПОВ «V.103» (р. 10.09.1887) офицер, подполковник (?) [А2; Л16]
- VI.171. П а в е л ШИПОВ «V.103» (10.09.1887 — 15.12.1919) ок. юрид. факт Моск. ун-та (1911), офицер, подполковник, умер от тифа [А2; Л16]
- VI.172. Н а д е ж д а ЭЙЛЕР «V.105» (05.06.1881 — 18.12.1968 Москва) врач, воен. врач в первую мировую войну, раб. в Морозов. дет.б-це, д-р мед.; незамужняя [Л19]
- VI.173. Н и к о л а й ЭЙЛЕР «V.105» (07.05.1882 Новгород — 23.08.1932 Москва) юрист, ок. Моск. ун-т, сл. по Мин-ву финансов (с 1906), затем инж.-экономист в ЦСУ РСФСР [39, 86; Л19]
- ∞<sub>1</sub> 1910 — Вера Валериановна Башкирова (1884—1916); 3 детей «VII.204—206»
- ∞<sub>2</sub> 1917 — Наталия Александровна Мусатова (1887—1923); бездетны
- VI.174. А л е к с а н д р ЭЙЛЕР «V.105» (20.05.1884 — 11.06.1934 София) юрист, ок. Моск. ун-т, сл. с 1907, земский деятель, адвокат, сл. в банке [15, 39, 83; А2; Л19]
- ∞ — Елена Павловна Хрущева (30.03.1889 Харьк. губ. — 03.12.1976 Базель) дочь химика; 4 детей «VII.207—210»
- VI.175. В е р а ЭЙЛЕР «V.105» (15.07.1885—VIII 1964 Базель) медсестра

VI.176. Б о р и с ЭЙЛЕР «V.105» (20.05.1887 Волокол. у. Моск. губ.—10.09.1943) офицер, сл. с 1905, воен. электротехник, шт.-кап., с 1919 в РККА, комбриг, затем полковник [49; А2, А3, А24; Л18]

∞ 1923 — Наталия Николаевна Хомутова (02.06.1886—01.01.1977); 1 дочь «VII.211»

VI.177. С о ф ф и я ЭЙЛЕР «V.105» (07.02.1892—04.11.1975 Москва) филолог, ок. Моск. ин-т иностр. яз., преп. иностр. яз. Моск. ун-та [Л19]

∞ 1917 — Глеб Александрович Мануилов (1897—13.07.1954) гл. зоотехн. в Мин-ве мясо-молочн. пром-сти РСФСР; 2 детей «VII.212, 213»

VI.178. М и х а и л ЭЙЛЕР «V.105» (15.10.1895 Москва— V 1944 Елаьта) экономист, ок. Моск. ун-т, раб. в Госбанке СССР

∞ 1922 — Анна Станиславовна Таргонская (16.10.1895 Ялта — 05.08.1961 Москва) преп. математики, ок. Моск. ун-т; 2 детей «VII.214, 215» (∞<sub>1</sub> — Сорокин; два сына)

VI.179. С е р г е й ЭЙЛЕР «V.105» (14.07.1897—05.10.1966 Москва) артил. офицер, командир батареи РККА, инж.-строитель, ок. Моск. инж.-стр. ин-т (1926), нач. тех. отдела Мин-ва нефт. пром-сти СССР [А2, А3; Л19]

∞ 1921 — Варвара Михайловна Иславина (06.10.1895—17.02.1978); 2 сына «VII.216, 217»

VI.180. [Резерв].

VI.181. К и р а БЕКМАН «V.107» (16.10.1883— после 1908)

VI.182. Н и н а БЕКМАН «V.107» (14.09.1885—19.02.1918) [А23]

∞ 1908— кн. Дмитрий Николаевич Голицын (11.03.1882—1928) морск. офицер, сл. с 1899, капитан 2-го р. (1914), в отст. с 1917 (∞<sub>2</sub> 1919 — Френсис-Симпсон Стевенс) [84; А6]

VI.183. Г е о р г и й БЕКМАН «V.107» (16.10.1887—1910), ок. Пажеский корпус (1907), корнет; холост [А2]

VI.184. Л е в БЕКМАН «V.107» (14.08.1891 — после 1916)

VI.185. Е в г е н и й ЧАПЛИН «V.108» (р. 07.07.1873)

VI.186. Г е о р г и й / Ю р и й ПОПАНДОПУЛО «V.109» (р. 10.10.1887) морск. офицер, сл. с 1905, лейтенант (1911) [12, 84; А6]

∞ 1912 — Надежда Михайловна Кулик (р. ~1891) дочь есаула; 1 сын «VII.221»

VI.187. О л е г ПОПАНДОПУЛО «V.109» (р. 03.05.1896)

VI.188. Е л и з а в е т а ЭЙЛЕР «V.114» (ум. 09.12.1887 СПб.) [65]

VI.189. Н и к о л а й ЭЙЛЕР «V.114» (05.03.1888—13.02.1897 СПб.) [65]

VI.190. А л е к с а н д р ЭЙЛЕР «V.114» (1890—02.12.1890 СПб.) [65]

VI.191. О л ь г а ЭЙЛЕР «V.114» (ум. 24.08.1893 СПб.) [65]

VI.192. А н н а ЭЙЛЕР «V.114» (ум. 03.09.1897 СПб.) [65]

VI.193. М а р и я ЭЙЛЕР «V.114» (09.02.1899—22.03.1899 СПб.) [65]

VI.194. А л е к с а н д р ЭЙЛЕР «V.114» (22.11.1913 СПб.— 09.06.1987 Лгр.) инженер, ок. Лгр. ин-т инж. ж.-д. трансп. (1938), декан фак-та и зав. кафедрой в том же ин-те, профессор [Л17]

∞ 1934 — Римма Александровна Цариковская (р. 15.11.1915 Баку) химик ок. Лгр. ун-т (1937); 2 детей «VII.223, 224»

VI.195—197. [Резерв.]

VI.198. Г е р м а н-Теодор ЛИЗЕР «V.122» (28.04.1884 Дирдорф, Германия — 01.05.1963 Гослар, ФРГ) полковник [Л21]

∞ 1914— Элизабет фон Фридебург (von Friedeburg) (21.06.1892 Раштатт, Германия — 03.11.1970 Динслакен, ФРГ); 2 сына «VII.228, 229»

VI.199. Ф е д о р ГОЛЬМДОРФ «V.123» (03.10.1874— ~1960 Москва) инженер, ок. Ин-т инж. путей сообщ. в СПб. (1900) [89; Л22]

∞ — Наталья фон Шлегель (von Schlegell) (ум. Ташкент); 2 детей «VII.230, 231» VI.200. Н и к о л а й ГОЛЬМДОРФ «V.123» (31.10.1876 СПб. — 07.02.1910 Рига) врач, ок. Воен.- мед. акад., сл. с 1903 [65, 68; Л22]

∞ — Агриппина Георгиевна Семснова (1879 СПб. — 08.03.1962 Ейск) мед-сестра; 2 детей «VII.232, 233» [12]

VI.201. В а л е р и а н ГОЛЬМДОРФ «V.123» (25.09.1882—10.02.1967 Кисловодск) инженер, ок. Ин-т инж. путей сообщ. в СПб. (1912) [12; Л22]

∞ — Мария Болеславовна Шкультецкая (1889—19.05.1958 Кисловодск); 2 детей «VII.234, 235»

VI.202. С о ф и я ГОЛЬМДОРФ «V.123» (29.01.1888—30.03.1983 Кисловодск) [Л22]

∞ — Патрикий Николаевич Мартынов, инженер, ок. Ин-т инж. путей сообщ. в СПб. (1912); бездетны

## VII ПОКОЛЕНИЕ

VII.1—3. [Резерв.]

VII.4. Н и к о л а й ГУСЕВ «VI.7» (р. 02.01.1868 СПб.) ок. СПб. коммерч. уч-ще (1887), бухгалтер СПб. конторы гос. банка (1887—1914), кол. сов. (1912), в отст с 1914; холост [12, 39, 85; А5]

VII.4А. А н д р е й ГУСЕВ «VI.7» (р. ~ 1875) ок. СПб. ун-т (1898), ревизор СПб./Пгр. контр. палаты (1899—1917), кол. сов. (1916) [12, 39, 95]

VII.4В. К о н с т а н т и н ГУСЕВ «VI.7»

VII.4С. И в а н ГУСЕВ «VI.7»

VII.5. М а р и я ГУСЕВА «VI.7» (р. ~ 1866) преп. рус. яз. и истории в жен. гимн (1887—1917) [12; А7]

VII.5А. Е к а т е р и н а ГУСЕВА «VI.7» (ум. после 1916) [12]

VII.5В. Ю л и я ГУСЕВА «VI.7»

VII.5С. А л е к с а н д р а ГУСЕВА «VI.7»

VII.5D. Е л и з а в е т а ГУСЕВА «VI.7»

VII.6. К о н с т а н т и н ЕЛПАТЬЕВСКИЙ «VI.9» (~ 1880—12.02.1899 СПб.) студент СПб. ун-та [45]

VII.6А. Е л и з а в е т а ЕЛПАТЬЕВСКАЯ «VI.9» (23.09.1882—1942 Лгр.) учительница

VII.7 Л е в ЕЛПАТЬЕВСКИЙ «VI.9» (31.01.1894—1942 Лгр.) бухгалтер, кол. ас. (1915) [12, 39, 53]

VII.8. Е в г е н и я ЕЛПАТЬЕВСКАЯ «VI.9» (1898—1971 Лгр.) учительница

VII.9. М а р и я ЧЕРНАЙ «VI.10» (18.12.1863 Митава — 23.04.1935 Пярну) учительница; незамужняя [118]

VII.10. Ф е д о р / Т е о д о р - К а р л - К р и с т о ф ЧЕРНАЙ «VI.10» (17.01.1865 Митава — 03.03.1909 Киев. губ.) ок. Дерпт. ун-т (1890), лесничий в Киев. губ. (с 1894); холост [116, 118; А19]

VII.11. Е л е н а ЧЕРНАЙ «VI.10» (12.10.1866 Митава — 23.07.1893 Пернов) [118]

∞ 1890 — О с к а р - Ф е р д и н а н д А л е к с а н д р о в и ч ф о н Бетлинг (von Boethling) (27.02.1860 Динамюнде — 04.07.1938 Пярну) ок. Дерпт. ун-т (1886), нотариус и гор. секретарь в Пернове; 3 детей «VIII.19—21» [57, 116, 123; А19, А23]

VII.12. И о г а н н а ЧЕРНАЙ «VI.10» (07.09.1876 Митава — 23.05.1960 Бад-Эссен, ФРГ)

∞ 1895 — О с к а р - Ф е р д и н а н д А л е к с а н д р о в и ч Бетлинг (1860—1938) = «VII.11<sup>М</sup>»; бездетны

- VII.13. М а р г о т а-Мария-Шарлотта ЧЕРНАЙ «VI.10» (18.11.1880 Митава — 23.06.1970 Гамбург) преп. нем. яз. в жен. гимн. в Пернове [57, 118]  
 ∞ 1916 — Э р н с т-Август-Вильгельм Фердинандович фон Гершельман (von Hoerschelmann) (02.09.1868 Эстл. губ. — 03.03.1945 Ульцен, Нижн. Саксония) врач-гигиеник, ок. Дерпт. ун-т (1893), раб. в Эстл. губ. и в Эстонии; 2 сына «VIII.22, 23» (∞<sub>1</sub>— Эмми-Элена Гофман (Hoffmann); 5 детей) [68, 116, 119, 127, 129, 143; A19]
- VII.14. Ф е д о р / Теодор-Карл ЧЕРНАЙ «VI.11» (19.09.1868 Вюрцау Курл. губ. — после 1954) врач, ок. Дерпт. ун-т (1896), раб. в Либаве, воен.-морск. врач (1902—1920) [68, 84, 116, 118, 128; A6, A19]  
 ∞ 1909 — Мария Иосифовна Добровольная; 1 сын «VIII.24»
- VII.15. Е л и з а в е т а-Ольга ЧЕРНАЙ «VI.11» (07.11.1869 Вюрцау — 04.09.1946 бл. Дрездена) учительница; незамужняя
- VII.16. А л е к с а н д р и н а-Мария ЧЕРНАЙ «VI.11» (11.03.1871 Вюрцау — 23.11.1940 Берлин)  
 ∞ 1891 — Т е о д о р-Адольф Беккер (Becker) (18.04.1864 Пилльтен Курл. губ. — 14.06.1945 Бромберг) ок. Дерпт. ун-т (1887), пастор и благочинный нем. приходов в Митаве и Риге; 7 детей «VIII. 26—32» [39, 116, 118, 149, 155; A19]
- VII.17. М а т и л ь д а-Иоганна ЧЕРНАЙ «VI.11» (12.05.1872—01.07.1963 окр. Потсдам, ГДР) раб. в гимн. в Митаве; незамужняя
- VII.18. А в г у с т-Генрих ЧЕРНАЙ «VI.11» (15.07.1873 Вюрцау — 02.10.1945 Силезия) ок. Дерпт. ун-т (1898), пастор и благочинный нем. приходов в Либаве и Риге [1, 116, 118, 124; A19, A23]  
 ∞ 1908 — Ирма Христофоровна Гиль (Giel) (ум. 02.06.1954 Гамбург); 4 детей «VIII.33—36»
- VII.19. Г у г о-Юлий Чернай «VI.11» (28.10.1875 Фрауенбург Курл. губ. — 1968 Берлин) глазной врач, ок. Воен.-мед. акад. (1899), раб. в Двинске, Риге, Витебске, Берлине [68, 118, 128, 129; A23]  
 ∞ — Леонтина Калькс (Kalks) (30.03.1876 Рига — 09.09.1940 Калиш); 2 дочери «VIII.37, 38»
- VII.20. А л е к с а н д р ЧЕРНАЙ «VI.15» (07.12.1870 Харьков — после 1917) инженер, ок. Харьк. ун-т (1892) и Ин-т инж. путей сообщ. в СПб. (1896), сл. с 1896, нач.-к службы пути и зам. управл. Ряз.-Урал. ж.д. (с 1913), кол. сов. (1914) [64, 89; A5]  
 ∞ 1897 — Елена Петровна Рубанова (р.~1875); 3 детей «VIII. 39—41»
- VII.21. Н и к о л а й ЧЕРНАЙ «VI.16» (24.05.1880 Харьков — 17.11.1898 Харьков) [Л14]
- VII.22. Б о р и с ЧЕРНАЙ «VI.16» (03.06.1882 Харьков — ~1917) морск. офицер, сл. с 1901, лейтенант (1908); холост [84; A6]
- VII.23. А л е к с а н д р ЧЕРНАЙ «VI.16» (19.12.1883] Харьков — 08.09.1932 Харьков) ок. Лазаревский ин-т вост. яз. (1906), земский деятель в Харьк. губ., затем науч. работник [13, 39; Л14]  
 ∞ 1911— Александра Викторовна Фолькман (03.05.1890 Харьков — 21.09.1978. Харьков) дочь провизора; 2 детей «VIII.42, 43»
- VII.24. Г л е б ЧЕРНАЙ «VI.16» (14.05.1892 Харьков — 1920) [Л14]  
 ∞ — Наталия Александровна Кирьянова (1889— 22.07.1969); 1 сын «VIII.44»
- VII.25. И г о р ь ЧЕРНАЙ «VI.16» (06.07.1895 Харьков — ~1917)
- VII.26. А л е к с а н д р ЧЕРНАЙ «VI.18» и «VI.20» (17.10.1886 Харьков — 1960-е гг. Москва) юрист, уч. в СПб. и Юрьев. ун-тах (1908—15); 1 дочь «VIII.45» [116; Л14]

VII.27\*. Е в г е н и я ЧЕРНАЙ «VI.18» и «VI.20» (~1888 Харьков — 1970 Москва) библиотекарь, библиограф, переводчик, раб. в Гос. биб-ке им. В. И. Ленина (1944—46) [Л6]

∞ до 1914 — Константин Ромодановский [Константин Владимирович Ромодановский (14.06.1889 Самара — 1968) врач (?)]; бездетны

VII.28. Н и к о л а й ЧЕРНАЙ «VI.18» и «VI.20» (~1889 Харьков — 16.01.1966 Москва) юрист, офицер в первую мировую войну, Георг. медаль «за храбрость» и крест 4-й ст. (1914), затем юрисконсульт [A2]

∞ — Екатерина Сергеевна N. (~1894—15.11.1965 Москва); бездетны

VII.29. Н а т а л и я ЧЕРНАЙ «VI.18» и «VI.20» (~1892 Харьков — 1968 Москва) ок. СПб. Высш. жен. (Бестужев.) курсы, служащая

VII.30. Н и к о л а й ЧЕРНАЙ «VI.21» (31.07.1892 Новгород — V 1979 Каунас) ок. Варшав. ун-т, артист, преп. рус. яз. и литературы в литовской школе с 1949 [Л6]

∞<sub>1</sub> — Ольга Кузьминична Арсеньева (24.12.1896 (ст.?) Двинск — 11.07.1938 Литва); 2 детей «VIII.47, 48»

∞<sub>2</sub> 1939 — Зоя Степановна Семенова (1916—1965) дочь священника; 3 сына «VIII.49—51»

VII.31. А г н и я ЧЕРНАЙ «VI.21» (28.03.1894 Новгород — XII 1918 Эстония) учительница, ок. Высш. жен. курсы в Пгр. [59, 116<sup>п</sup>; Л6]

VII.32. Н а д е ж д а ЧЕРНАЙ «VI.21» (15.07.1895—22.09.1897) [Л6]

VII.33. Е л и з а в е т а ЧЕРНАЙ «VI.21» (21.06.1897 Новгород — 25.12.1987 ЛитССР) раб. в сберегательной кассе, пенсионерка [116<sup>п</sup>; Л6]

∞ 1920 — Иван Федорович Петров (01.08.1894 Псков — 04.12.1955 Каунас) бухгалтер, регент в Нарве и Каунасе; 2 дочери «VIII.52, 53»

VII.34. Н а д е ж д а ЧЕРНАЙ «VI.21» (18.02.1900—26.04.1913 Ковно) [166; Л6]

VII.35\*. А л е к с а н д р ЧЕРНАЙ «VI.21» (08.10.1901 Ковно — ~ 1983) священник (с 1925) в Литве, США и ЮАР (в монастыре Алексей) [166<sup>п</sup>; Л6]

∞ 1924 — Татьяна Мироновна N. (ум. 01.10.1943 Векшняй ЛитССР); 4 детей

VII.36. С о ф и я ЧЕРНАЙ «VI.21» (01.03.1903 Ковно — ~1983 Тулуза) [Л6]

∞ — Василий Жгун (Sgun); 1 сын «VIII.54».

VII.37. Л е в ЧЕРНАЙ «VI.21» (20.05.1905 Ковно — 30.04.1983 Каунас) раб. на бумажной фабрике (1932—63) [Л6, Л13]

∞ 1934 — Ксения Васильевна Белокопытова (р. 06.02.1911 Ковно) переплетчица; 1 сын «VIII.55»

VII.38. В я ч е с л а в ЧЕРНАЙ «VI.24» (ум. 1914 на фронте) художник

VII.39. Л е в ЧЕРНАЙ «VI.24.» (р. 27.05.1891) юрист [A2]

VII.40—44. [Резерв.]

VII.45. О л ь г а БЕРГШТРЕССЕР «VI.31» (1882—1889)

VII.46. А л е к с а н д р БЕРГШТРЕССЕР «VI.31» (1883 — после 1922) горн. инженер [12; A23]

∞<sub>1</sub> 1912 — Гертруда Константиновна Мальм (Malm) (ум. 1920 Екатеринбург)

∞<sub>2</sub> 1922 — Ирма Шуберт (Schubert); 5 детей «VIII.64—68»

VII.47. В е р а БЕРГШТРЕССЕР «VI.31» (р. 1884) [A23]

∞<sub>1</sub> 1905 — Юлий Львович Кениг (König) (1869—1928) сахарозаводчик в СПб.

∞<sub>2</sub> 1921 — Борис Роде (Rohde) (р. 1889 СПб.) врач в Берлине

VII.48. М а р г а р и т а БЕРГШТРЕССЕР «VI.31» (р. 1885)

∞ 1912 — Отто Детман (Dettmann) германский подданный

VII.49. А д е л ь БЕРГШТРЕССЕР «VI.31» (1886—1888)

VII.50. Н а т а л и я БЕРГШТРЕССЕР «VI.31» (1887—1901)

- VII.51. Э м и л и я СТРУВЕ «VI.32» (02.09.1874 Скоп. у. Ряз. губ.—~1949) математик, сл. с 1901, науч. работник, ст. науч. сотр. (1938), раб. в Акад. наук СССР с 1922; незамужняя [12, 44; А8]
- VII.52. Г е д в и г а СТРУВЕ «VI.32» (21.09.1875 СПб. — 07.03.1906 СПб.) преп. в англ. школе [65; Л10]
- VII.53. Э л л а СТРУВЕ «VI.32» (30.01.1877 СПб. — 19.02.1942 Лгр.) преп. нем. яз. в Лгр. (1930—41) [Л10]
- ∞<sub>1</sub> 1896 — Вильгельм, Филиппович Стендер (Stender) (1863—1899) штабс-капитан; 2 детей «VIII.75, 76»
- ∞<sub>2</sub> 1909 — Александр Александрович Ферман (Fehrmann) (1865—1924) инж.-химик
- VII.54. В а с и л и й/Вильгельм-Отто-Карл СТРУВЕ «VI.32» (05.12.1878 СПб.—22.05.1942 Лгр.) инженер, ок. физ.-мат. фак-т СПб. ун-та (1901) и Ин-т инж. путей сообщ. в СПб. (1904), раб. на жел. дорогах (1905—29) [А5; Л10];
- ∞<sub>1</sub> 1908 — Елена Васильевна Зайцевская (06.05.1889—16.11.1919 Харьков) дочь артистки Э. Ф. Днепровой; 3 сына «VIII.77—79»
- ∞<sub>2</sub> 1921 — Эльза Карловна Штильмарк (Stillmark) (23.03.1885 Эстл. губ.—24.04.1927 Ростов-на-Дону) преп. нем. яз.; 1 сын «VIII.80»
- ∞<sub>3</sub> — Лидия Яковлевна Баркова (08.01.1894 — IV 1974 Лгр.)
- VII.55. Э м и л и я БЕРГШТРЕССЕР «VI.33» (р. 16.11.1883 Кронштадт) [А5]
- ∞ — Павел Викторович Вилькен (24.07.1879 Кронштадт —1939) морск. офицер, капитан 2-го р. (1912); 3 детей «VIII.81—83» [84; А6]
- VII.56. Е в г е н и я БЕРГШТРЕССЕР «VI.33» (04.01.1885 Кронштадт — после 1916) [А5]
- VII.57. Е л и з а в е т а БЕРГШТРЕССЕР «VI.33» (р. 25.02.1887 Кронштадт) [А5, А23]
- ∞ — N. Пилсудский
- VII.58. В л а д и м и р/Вольдемар БЕРГШТРЕССЕР «VI.33» (21.09.1888 Кронштадт — после 1916) морск. офицер, лейтенант (1912) [84; А5]
- VII.59. М а р и я БЕРГШТРЕССЕР «VI.33» (р. 21.08.1890 Кронштадт) [А5]
- VII.60. П а в е л БЕРГШТРЕССЕР «VI.33» (р. 20.12.1893 Кронштадт) морск. офицер, лейтенант (1916) [84; А5]
- VII.61. И о г а н њ н а БЕРГШТРЕССЕР «VI.36»
- VII.62. Ю р и й БЕРГШТРЕССЕР «VI.36»; женат
- VII.63. А л е к с а н д р-Николай СТРУВЕ «VI.38» (17.07.1881 СПб.—27.04.1942 Лгр.) юрист, ок. СПб. ун-т (1907), чин-к МИД, затем преподаватель, юрисконсульт [12, 39; А4; Л9]
- ∞ — Эвелина/Ева Августовна Зуккау (Suckau) (12.07.1887—10.05.1942 Лгр.) переводчица в н.-иссл. ин-те; 3 детей «VIII.91—93»
- VII.64. Б о р и с СТРУВЕ «VI.38» (13.11.1882 СПб. — 30.03.1890 СПб.) [Л9]
- VII.65. Г е о р г (и й)-Альфред СТРУВЕ «VI.38» (23.05.1884 СПб. — 27.04.1974 Москва) инженер, ок. Ин-т инж. путей сообщ. в СПб. (1910), сл. в Управл. по сооруж. жел. дорог МПС, затем в ВСНХ [Л9]
- ∞ — Анна Николаевна Коган (1890—1944); бездетны
- VII.66. О л ь г а СТРУВЕ «VI.38» (29.06.1894 СПб. — 09.12.1973 Лгр.) инж.-электрик, ок. Лгр. политехн. ин-т, раб. на заводе [Л9]
- ∞ — Александр Никифорович Шемякин (1894—1938) инж.-электрик; бездетны
- VII.67. Е л и з а в е т а ОТТЕН «VI.42» (25.05.1882 Тифлис — 1972 Ташкент) фармацевт, р аб. в Тбилиси (до 1941); незамужняя

VII.68. М а р и я ОТТЕН «VI.42» (1884 Тифлис — 1943 Тбилиси) учительница, ок. Высш. жен. курсы в СПб. (1912)

О — Яков Захарович Карганов (1884 — после 1948 Тбилиси) педагог, юрист, ок. Моск. ун-т; бездетны

VII.69. В л а д и м и р ОТТЕН «VI.42» (1886 Тифлис — 1892 Тифлис)

VII.70. А л е к с а н д р ОТТЕН «VI.42» (02.07.1888 Тифлис — 1942 Тбилиси) химик, ок. Моск. ун-т, канд. хим. н., науч. работник в Тбилиси [43; Л5]

О — Ирина Самсоновна Завриева (24.11.1889 Константинополь — 13.02.1972 Тбилиси) сестра д. чл. Акад. наук СССР К. С. Завриева, учительница, ок. Высш. жен. курсы в СПб.; 2 дочери «VIII.94, 95»

VII.71 О л ь г а ОТТЕН «VI.42» (1889 Тифлис — 1889 Тифлис)

VII.72. Я д в и г а ОТТЕН «VI.42» (02.05.1891 Тифлис — 29.10.1985 Рустави) врач-педиатр, ок. Тбил. мед. ин-т (1934)

О — Виктор Александрович Капеллер (1886 Ставрополь — 1969 Джамбул) художник-прикладник; бездетны

VII.73. В и л ь г е л ь м ОТТЕН «VI.42» (1893 Тифлис — 1920 Сибирь)

VII.74. Н и к о л а й ОТТЕН «VI.42» (25.08.1895 Тифлис — 1937 Тбилиси) инж.-строитель, ок. Груз. политехн. ин-т (1932), раб. в проектн. организациях в Тбилиси [Л5]

О — Наталия Александровна Носова (1893—1975) белошвея; 2 детей «VIII.97, 98»

VII.75. Е в г е н и я ОТТЕН «VI.42» (р. 13.11.1897 Тифлис) медсестра [Л5]

О — Иван Васильевич Марченко (1885 бл. Тифлиса — 1938 Тбилиси) преподаватель, ок. Моск. ун-т (1915), зав. кафедрой рус. яз. и литературы Закавк. коммунист. ун-та; 2 детей «VIII.99, 100»

VII.76. А л и с а ОТТЕН' «VI.42» (р. 05.12.1898 Тифлис) бухгалтер [Л5]

О — Александр Иванович Федоров (1885—1938 Тбилиси) бухгалтер; 2 дочери «VIII.101, 102»

VII.77. Б о р и с ОТТЕН «VI.42» (16.02.1902 Тифлис — 1937 Риддер) инж.-металлург, ок. Лгр. горн. ин-т (1932), дир. металлург. з-да [Л5]

О — Клавдия Ивановна Якимова (1902—1980) врач-терапевт, ок. Моск. мед. ин-т; 2 сына «VIII.103, 104»

VII.78. Ф е р д и н а н д ОТТЕН «VI.42» (р. 13.06.1903 Тифлис) инж.-геолог, ок. Лгр. горн. ин-т (1929), засл. работник Коми АССР [Л5]

О<sub>1</sub> — Лидия Дмитриевна Порфирьева (р. 1910); 2 детей «VIII.105, 106»

О<sub>2</sub> — Галина Александровна Бушкова (1916—1977) врач; бездетны

О<sub>3</sub> — Алла Григорьевна Сильдмяэ (р. 1925)

VII.79. О л ь г а ОТТЕН «VI.42» (28.09.1904 Тифлис — 21.06.1978 Лгр.) воспитательница [Л5]

О — Виктор Николаевич Зеберг (1902 СПб. — 1969 Волжский) инженер по монтажу гидротурбин; 2 дочери «VIII.107, 108»

VI.80. Г е н р и х ОТТЕН «VI.42» (р. 17.04.1908 Тифлис) инженер, ок. Закавк. инж.-мел. ин-т (1932), науч. работник в Тбилиси (1932—41), инженер в Челябинске (1942—75) [Л5]

О 1938 — Надежда Васильевна Филиппова (р. 16.09.1908 Гродно) инж.-гидротехник, ок. Закавк. инж.-мел. ин-т (1932), раб. в Тбилиси и Челябинске; 2 сына «VIII.109, 110»

VII.81. [Резерв.]

VII.82. К с е н и я ФУС «VI.46» (09.08.1892 — после 1907)

VII.83. Е л е н а ФУС «VI.46» (р. 03.03.1897 — 12.09.1917 СПб.) [46]

- VII.84. Александр ФУС «VI.48» (р. 30.06.1902)
- VII.85. Петр ФУС «VI.48» (р. 25.10.1903)
- VII.86. Елизавета ФУС «VI.48» (р. 02.03.1905)
- VII.87. Владимир ФУС «VI.48» (р. 01.07.1907)
- VII.88—90. [Резерв.]
- VII.91. Д а и с ТИЛЛО «VI.54» (1902 СПб. — 02.09.1975 Италия); 2 детей
- VII.92. К а р и н ТИЛЛО «VI.54» (р. 24.02.1905 Гельсингфорс) живет в Италии
- VII.93. М а д л е н ТИЛЛО «VI.54» (07.03.1907 Гельсингфорс — 07.09.1942 Пиза)
- VII.94—97. [Резерв.]
- VII.98. М а р т а ЭКВИСТ «VI.63» (р. 28.12.1889 Гельсингфорс — 29.11.1977 Финляндия) медсестра; незамужняя
- VII.99. Х е л с и н к и Хельсинки) офицер финск. армии, ген.-л. (1936), поч. д-р филос. (1950) [144, 152<sup>II</sup>]  
 ∞ 1922 — Брита Альфтан (Alfthan) (25.06.1901 Выборг — 17.02.1975 Хельсинки);  
 3 детей «VIII.129—131»
- VII.100. [Резерв.]
- VII.101. О л ь г а-Эмилия КОЛЛИНС «VI.66» (05.07.1898 СПб.— 12.10.1944 Вена) [141; A23]  
 ∞ 1921 — А в г у с т-Андреас Цукале (Zukale) (15.08.1896 Австрия — 23.10.1974 Тироль); 6 детей «VIII.133—138»
- VII.102. Э д у а р д КОЛЛИНС «VI.66» (06.06.1900 — 24.10.1919) [141; A23]
- VII.103. А л е к с а н д р КОЛЛИНС «VI.66» (01.05.1903 — 24.01.1922)
- VII.104. Г е о р г КОЛЛИНС «VI.66» (22.07.1915 Пгр.— 16.03.1940 Таммисаари, Финляндия); холост
- VII.105. Э м и л и я КОЛЛИНС «VI.69» (р. 23.11.1909 СПб.) [A23]  
 ∞ — Георг/Юрий Тир (Tier)
- VII.106. В л а д и м и р КОЛЛИНС «VI.69» (р. 19.10.1910 Олила, Финляндия) художник [A23]  
 ∞ — Рената Лукас (Lucas)
- VII.107. Г е н р и х-Карл-Эдуард БЕРЕНДТС «VI.71» (03.08.1892 СПб.—1937) пастор [141]  
 ∞ 1923 — Хедвиг Мальмгрен (Malmgren) (р. 1898) дочь еванг.-лют. епископа Артура Мальмгрена (1860—1949) [119]
- VII.108. Е л и з а в е т а БЕРЕНДТС «VI.72» (21.12.1885 СПб.— после 1941)
- VII.109. Ю л и я-Мария БЕРЕНДТС «VI.72» (28.04.1887 СПб.—02.06.1929 Тарту) [A23]  
 ∞ 1925 — Георг-Отто Штирнгельм (Stjernhjelm) (р. 24.05.1870); 1 сын «VIII.146»
- VII.110. С о ф и я БЕРЕНДТС «VI.72» (р. 31.08.1891 СПб.)
- VII.111. Э д у а р д БЕРЕНДТС «VI.72» (06.12.1894 Ярославль —1919) офицер в первую мировую войну
- VII.112. В и л ь г е л ь м и н а БЕРЕНДТС «VI.72» (р. 03.08.1901 Выборг)  
 ∞ 1929 — Александр Бабакин
- VII.113. И н г е б о р г БЕРЕНДТС «VI.72» (р. 14.11.1904 Ярославль) [A23]  
 ∞ 1933 — Лев/Лео-Отто-Вильгельм Германович Финдейзен (Findeisen) (р. 27.01.1894 Кронштадт) врач, ок Дерпт. ун-т, раб. в Таллине (∞<sub>1</sub> 1925 (—33) — Сягрид Пильбаум (Pielbaum); 2 детей) [123]
- VII.114. [Резерв.]
- VII.115. Э р в и н БЕРЕНДТС «VI.75» (19.08.1898 СПб.—25.10.1919) уч. в Юрьев. ун-те



VII.116. Л а у р а-Юлия БЕРЕНДТС «VI.75» (01.10.1900 СПб.—10.02.1974 Либенбург, Гарц) [121; A23]

○ 1924 — Карл-Август-К у р т [Карлович-] Робертович Вейс (Weiss) (08.01.1898 Ревель — 06.12.1976 Магдебург) уч. в Юрьев. ун-те, книготорговец в Ревеле, Познани и Брауншвейге; 5 детей «VIII. 153—157» [A23]

VII.117. Г е о р г БЕРЕНДТС «VI.75» (20.11.1901 СПб.— 28.04.1945 Кرواتия) художник

○ 1942 — Дагмара Эрнестовна Браше (Brasche) (17.12.1914 СПб.— 09.07.1977) дочь врача; 1 сын «VIII.158» [121]

VII.118. Б р у н о БЕРЕНДТС «VI.75» (15.07.1903 Петергоф — после 1945 Бравилля); трижды женат, бездетен

VII.119. Э д у а р д-Фридрих-Вильгельм-Иоганн НОТБЕК «VI.77» (14.12.1869 Ревель — 05.01.1914 Ревель) врач, ок. Дерпт. ун-т (1895), раб. в Вейсенштейне и Ревеле, кол. сов. [68, 116, 127, 140; A19]

○ 1898 — Иоганна / Ханна Шотт (Schott) (15.08.1875 Вейсенштейн Эстл. губ.— 15.08.1965 Биберах, ФРГ) дочь пастора; 5 детей «VIII.159—163» [121]

VII.120. Б е н н о / Беренд-Фридрих-Карл-Иоганн НОТБЕК «VI.77» (16.02.1871 Ессемги Эстл. губ.— 03.09.1912 Каменское Запорожье) химик, раб. в металлург. об-ве в Донбассе (с 1897) [119, 140]

○ 1900 — А н н а-Елизавета-Иоганна Фрезе (Frese) (16.04.1879 Ревель — 07.06.1965 ФРГ) дочь врача; 3 детей «VIII.164—166» (○<sub>2</sub> — фон Хертель (Hertel))

VII.121. Ф р и ц / Фридрих-Август-Адам-Иоганн НОТБЕК «VI.77». (06.03.1874 Ревель — 24.06.1935 Таллин) акцизн. чиновник

VII.122. Э л ь с б е т а / Елизавета-Эльмира-Иоганна НОТБЕК «VI.77» (03.02.1877 Ревель — 13.06.1953 Лейпциг) [140]

○ 1898 — В и л ь г е л ь м-Георг-Теодор Купфер (Kupffer) (13.04.1863 Митава — 07.05.1945 Лейпциг) ок. Дерпт. ун-т (1886), преподаватель, пастор и благочинный нем. приходов в Курляндии; бездетны [116, 118, 124]

VII.123. В а л ь т е р-Герман-Николай НОТБЕК «VI.77» (28.08.1880 Ревель — 03.03.1883 Ревель)

VII.124. Г е р м а н-Вальтер-Ойген-Иоганн НОТБЕК «VI.77» (16.04.1884 Ревель — 24.06.1941 Гданьск) юрист, ок. Юрьев. ун-т (1909), нотариус, адвокат в Пернове и Ревеле [116, 119, 140]

○ 1911 — Юлия Константиновна Чернова (25.02.1888 Ревель — 13.10.1974 Бавария) дочь адвоката; 3 детей «VIII.170—172» [A23]

VII.125. Н о р а МИЛЬК «VI.78» (06.12.1891 Выборг — 25.08.1982 Хельсинки) преп. музыки

VII.126. И р м а МИЛЬК «VI.78» (17.02.1893 Выборг — 1985 Брюссель)

○ 1922 — Феликс Винанд (Winand) (1893—1983) инженер; бездетны

VII.127. Э г о н МИЛЬК «VI.78» (15.06.1894 Выборг — 08.09.1952 Хельсинки) [ЛЗ]

○ 1926 — Линнеа Рострем (Roström) (02.05.1902 Выборг — 08.11.1972 Хельсинки); 3 детей «VIII.174—174В»

VII.128. А р в и д МИЛЬК «VI.78» (12.04.1897 Выборг — 14.02.1918)

VII.129. И р и н а ГЕККЕР «VI.79» (17.11.1898 СПб. — 13.08.1978 Лгр.) геолог-картограф, ок. Геогр. ин-т (1925), науч. работник

○ 1930 — Александр Александрович Иессен (04.08.1896 СПб.— 01.04.1964 Лгр.) историк, сл. с 1926, археолог, зав. отделом Гос. Эрмитажа, науч. сотр. Ин-та археологии Акад. наук СССР; 1 дочь «VIII.175» [44]

VII.130. Р о м а н / Роберт ГЕККЕР «VI.79» (р. 25.03.1900 СПб.) палеонтолог, ок. Георг. ин-т (1925), сл. с 1918, зав. лаб. Палеонтол. ин-та Акад. наук СССР, проф. Моск. ун-та, д-р биол. н. (1937) [44, 67<sup>н</sup>, 141; ЛЗ]

∞<sub>1</sub> 1926 — Екатерина Львовна Абакумова (17.10.1897 СПб.— 18.09.1950 Москва) палеонтолог, ок. Георг. ин-т (1925), ассистент Моск. ун-та; 2 сына «VIII.176,177»

∞<sub>2</sub> 1955 — Александра Ивановна Осипова (р. 17.04.1914 Павлодар) литолог науч. сотр. Палеонтол. ин-та Акад. наук СССР, д-р геол.-мин. н. (1954); 1 дочь «VIII.178»

VII.131. М а р г а р и т а ГЕККЕР «VI.79» (28.12.1901 СПб.— 1919 Пгр.)

VII.132. С т е л л а ГЕККЕР «VI.79» (р. 18.02.1907 СПб.) лексикограф по рус. и древнерус. яз., ок. Лгр. ун-т (1927) и высш. курсы библиотекведения (1931), науч. сотр. Лгр. отд. Ин-та языкозн. Акад. наук СССР; незамужняя [19; ЛЗ]

VII.133. О л ь г а ГЕККЕР «VI.80» (16.11.1899 СПб.— 1942 Лгр.) историк-искусствовед, ок. Гос. ин-т истории искусств, раб. в Гос. Эрмитаже; незамужняя [44]

VII.134. Д а г м а р а ГЕККЕР «VI.80» (22.02.1902 СПб.— XI 1941 Лгр.) раб в Гос. публ. биб-ке в Лгр. [ЛЗ]

∞ 1923 — Борис Альфредович Роде (29.11.1893 — 1943 Фрунзе); 1 сын «VIII.179»

VII.135. И н г р и д а ГЕККЕР «VI.80» (04.02.1912 СПб.— 26.10.1971 Лениногорск) чертежник-конструктор; незамужняя

VII.136—139. [Резерв.]

VII.140. В л а д и м и р ФОХТ / ФОЙГТ «VI.85» (р. ~1885)

VII.141. Е л е н а ФОХТ / ФОЙГТ «VI.85» (р. ~1885)

VII.142, 143. [Резерв.]

VII.144. О л ь г а-Доротея-Мария ГАССЕЛЬБЛАТ «VI.89» (13.08.1871 СПб.— 05.04.1955 Мекленбург) [A5, A23]

∞ 1903 — Карл-Иоханнес / Г а н с Грюнер (Grüner) (02.09.1872 Курл. губ.— 10.01.1929 Латвия) инж. путей сообщ., ок. Рижск. политехн. ин-т (1900); 3 детей «VIII.188—190»

VII.144А. В о л ь д е м а р ГАССЕЛЬБЛАТ «VI.89» (1874 СПб.— 14.08.1883 СПб.)

VII.145. В л а д и м и р / Вольдемар ГЕРШЕЛЬМАН «VI.90» (01.07.1880 СПб.— 1934 Астрахань) офицер, сл. с 1899, ок. Никол. воен. акад. и Акад. Генштаба, полковник [143; A23]

∞ — Наталья Васильевна Вадковская (04.09.1885 — 26.01.1942 Харьков) дочь камер-юнкера; 4 детей «VIII.191—194»

VII.146. А л е к с а н д р ГЕРШЕЛЬМАН «VI.90» (27.06.1882 Александрополь— 19.02.1890)

VII.147. Е в г е н и й / Ойген ГЕРШЕЛЬМАН «VI.90» (р. 06.07.1884 СПб)

VII.148. К о н с т а н т и н ГЕРШЕЛЬМАН «VI.90» (12.03.1886 Александрополь— 11.05.1906) офицер

VII.149. М а р и я ГЕРШЕЛЬМАН «VI.90» (р. 19.09.1898 Александрополь)

VII.150. Н и к о л а й ГЕРШЕЛЬМАН «VI.90» (р. 15.05.1901 Александрополь)

VII.151. В л а д и м и р / Вольдемар-Виктор ГЕРШЕЛЬМАН «VI.95» (р. 01.01.1884)

VII.152. Б о р и с-Александр ГЕРШЕЛЬМАН «VI.95» (р. 22.12.1883)

VII.153. Е к а т е р и н а / Катарина-Евгения-Ольга ГЕРШЕЛЬМАН «VI.95» (р. 17.05.1886)

VII.154. А л е к с а н д р и н а ГЕРШЕЛЬМАН «VI.95» (08.09.1887—16.05.1888)

VII.155. Е в г е н и я ГЕРШЕЛЬМАН «VI.95» (16.09.1888—24.09.1888)

VII.156. М и х а и л-Виктор ГЕРШЕЛЬМАН «VI.95» (р. 17.11.1890)

- VII.157. В и к т о р и я-Юлия-Ольга ГЕРШЕЛЬМАН «VI.95» (р. 08.08.1895)  
VII.158—160. [Резерв.]
- VII.161. Г е о р г (и й) ЭНКЕЛЬ «VI.102» (23.06.1904 Вильна — 01.01.1984 Карлсхамн, Швеция) юрист, ок. Хельсинк. ун-т (1931), адвокат (1933—39), офицер финск. армии (1939—45), менеджер в шведск. пром. компаниях (1945—69), участвовал в советско-финских переговорах (1940—41 и 1944) [A23; Л20]  
OO<sub>1</sub> 1930(—38)— Гунвар Хьелт (Hjelt) (р. 13.09.1909 Турку, Финляндия); 2 сына «VIII.210, 211» (OO<sub>2</sub> — Шамус Мейджилл (Magill) англ. воен. атташе)  
OO<sub>2</sub> 1939 — Агнес-София Андерсин (Andersin) (10.03.1917 Финляндия — 09.05.1972 Испания); 3 детей «VIII. 212—214»
- VII.162. И р и н а АННЕНКОВА «VI.103» (р. 06.05.1906 СПб.) медсестра, пенс. с 1986 [Л7]  
OO 1932 — Александр Николаевич Шульгин (1888—1966) врач-педиатр, ок. Воен.-мед. акад., сл. с 1913, канд. мед. н. (1950); 2 детей «VIII.215,216»
- VII.163. О л ь г а АННЕНКОВА «VI.103» (р. 26.12.1907 СПб.) секретарь-машинистка, пенс. с 1967 [Л7]  
OO 1930 — Юрий Сергеевич Сазонов (1906 Псков — 17.06.1952 Лгр.) врач-хирург, ок. 2-й Лгр. мед. ин-т (1937); 1 дочь «VIII.217»
- VII.164. К и р а АННЕНКОВА «VI.103» (14.12.1909 СПб.— 04.10.1975 Лгр.) техник-архитектор, пенс. с 1970 [Л7]  
OO<sub>1</sub> 1932 — Виктор Онуфриевич Рихард (1899—1962) инж.-геофизик, капитан 1-го р.; бездетны  
OO<sub>2</sub> 1971 — Даниил Иванович Супруненко (р. 1896) (OO<sub>1</sub> — Жанна-Луиза Фуке)
- VII.165. Е л е н а АННЕНКОВА «VI.103» (11.09.1911 СПб.— 20.12.1981 Лгр.) архивариус [Л7]  
OO 1936 — Владимир Слепченко (ум. ~1942 Лгр.); бездетны
- VII.166. А л е к с а н д р ФОЙГТ «VI.104» (24.03.1910 СПб.— 28.11.1974 Новокузнецк) инж.-металлург, ок. Лгр. политехн. ин-т, раб. на заводах, засл. строитель РСФСР [Л11]  
OO 1931 — Лариса Михайловна Клетцова (р. 28.02.1909); 1 сын «VIII.218»
- VII.167. Ю р и й / Георгий ФОЙГТ «VI.104» (18.09.1911 СПб.— 07.04.1968 Ухта) геолог, уч. в Лгр. горн. ин-те [Л11]  
OO — Ирина Ивановна Кеммет (1921—1982 Ухта); 1 сын «VIII.219»
- VII.168. Д м и т р и й ФОЙГТ «VI.104» (1914 СПб.— V 1945 на фронте) геолог, ок. Лгр. геол.-разв. техникум, на войне нач-к штаба артил. полка, капитан
- VII.169. Б о р и с ФОЙГТ «VI.104» (р. 10.11.1917 СПб.) техник-строитель, ок. Междуреч. горно-стр. техникум, ст. инж. укса на металлург. комбинате, на войне командир танк. взвода [Л11]  
OO<sub>1</sub> — 1 сын «VIII.220»  
OO<sub>2</sub> 1955 — Елизавета Борисовна Дворкина (р. 03.06.1920 Жлобин) экономист, ок. Моск. экон. ин-т; 1 сын «VIII.221»
- VII.170. Я к о в ЭЙЛЕР «VI.107» (08.11.1906 Харьков — 12.06.1981 бл. Берна) инж.-металлург, ок. Льеж. ун-т (1935) [Л4]  
OO<sub>1</sub> 1933 — Дарья Павловна Ковалевская (~1915—02.11.1934 Льеж); 2 сына «VIII.222, 223»  
OO<sub>2</sub> — Агния Павловна Ковалевская (10.08.1913 СПб.— 18.08.1982 Цюрих), 2 детей «VIII.224, 225»  
OO<sub>3</sub> — Анна Шлефли (Schläfli)

- VII.171. Е к а т е р и н а ЭЙЛЕР «VI.110» (р. 27.10.1903 Люблин) врач-терапевт, ок. ун-т в Праге (1928) и Базеле (1950), д-р мед. (1928) [165; Л4]  
 ∞ 1925 (—37) — кн. Сергей Владимирович Оболенский (р. 09.11.1901 Орёл) почетн. проф. Джорджтаун. ун-та, в отст. с 1972; 2 сына «VIII.226, 227» (∞<sub>2</sub> 1946 — Юдифь Григорьевна Егиазарова) [165<sup>П</sup>]
- VII.172. Т а т ь я н а ЭЙЛЕР «VI.110» (27.10.1904 СПб.— 22.06.1983 Калуга) врач, уч. в Гренобле, д-р мед. (1932), хирург и уролог в Калуге [Л1, Л4]  
 ∞<sub>1</sub> — Александр Сергеевич Проскуряков (р. 26.10.1900 СПб.— 1985 Гренобль) инж.-электрик, ок. Гренобл. ун-т  
 ∞<sub>2</sub> — Николай Вонифатьевич Афанасов (15.07.1903—18.10.1944) инж.-сантехник; 1 сын «VIII.228»]
- VII.173. Ю р и й СКАЛОН «VI.112» (ум. 08.06.1905 Яросл. у.) [46]
- VII.174. О л ь г а СКАЛОН «VI.115» (10.03.1897 Вильна — 21.11.1908 СПб.)
- VII.175. С е р г е й СКАЛОН «VI.115» (р. 23.09.1899 Вильна) бухгалтер [Л8]  
 ∞ 1940 — Мария Викентьевна Дорошкевич (р. 13.02.1917); 3 детей (VIII.229—231)
- VII.176. Н а д е ж д а СКАЛОН «VI.116» (р. 14.12.1915 Пгр.— XII 1977 Лгр.) техник-электрик [Л8]  
 ∞ 1936 — Борис Константинович Автонов (1912—1975 Лгр.) служащий; 1 дочь «VIII.232»
- VII.177. Н и н а СКАЛОН «VI.116» (03.02.1918 Пгр.— ум. в младенчестве)
- VII.178. [Резерв.]
- VII.179. Е л е н а ГЕБЕЛЬ «VI.119» (р. ~1917) [Л20]  
 ∞ 1942 — Виктор Сергеевич Спечинский (р. 01.09.1909 Москва)
- VII.180. Н а т а л и я ГЕБЕЛЬ «VI.119» (р. ~1917) [Л20]  
 ∞ — бар. Лев Георгиевич Врангель (Bar. von Wrangell) (р. 01.07.1912)
- VII.181. [Резерв.]
- VII.182. С е р г е й КОЧЕТКОВ «VI.124» (р. 17.02.1919 Пгр.) товаровед [Л15]  
 ∞ 1949 — Тамара Федоровна Соколова (р. 29.03.1924 Твер. губ.); 2 детей «VIII.238, 239»
- VII.182A. М и х а и л КОЧЕТКОВ «VI.124» (р. 14.02.1921 Елгава, Латвия) инженер., преп. электротехники, пенсионер [Л15, Л20]  
 ∞ 1951 — Зента Пуполс (Pupols) (р. 12.07.1924 Бауска, Латвия) служащая; бездетны
- VII.182B. Н а т а л и я КОЧЕТКОВА «VI.124» (17.10.1924 — 15.03.1949 ЛатвССР)
- VII.183. И р е н а КОЧЕТКОВА «VI.124» (р. 17.10.1939 Бауска, Латвия) [Л15, Л20]  
 ∞<sub>1</sub> 1951(—78) — Гастон Карлбергс (Karlbergs) (р. 24.04.1926 Латвия) торг. работник; 2 дочери «VIII.240, 241»  
 ∞<sub>2</sub> 1979 — Конни Андерссон. (Andersson) (р. 10.01.1946 Швеция); 1 дочь «VIII.242»
- VII.183A. М а й я-Татьяна КОЧЕТКОВА «VI.124» (р. 10.01.1941 Бауска ЛатвССР) служащая [Л15, 20]  
 ∞ — Элмар Пуринь (Purin) (р. 08.10.1929 Латвия) инженер; 2 сына «VIII.243 244»
- VII.184. М а р и я Васильевна ПРАВДЮК / СЕМЕНЧУК «VI.127» (р. 28.11.1920 с. Юрьевщино Лгр. обл.) филолог, ок. Лгр. ун-т, преп. рус. яз. и литературы в школе [Л15]

○ 1946 — Анатолий Евгеньевич Шестаков (06.04.1915 Пгр.— 30. 12.1974 Лгр.) радиоинженер; 2 сына «VIII.245, 246»

VII.185—190. [Резерв.]

VII.191. Э м м а-Алиса БОЛТЕНГАГЕН «VI.145» (02.10.1900 СПб.— 17.03.1984 Канск) ок. Лгр. пед ин-т, воспитательница [Л2]

○ — Петр Петрович Смирнов (1899 Тверь — 24.02.1977 Лгр.) инж.-лесовод; 1 сын «VIII.253»

VII.192—200. [Резерв.]

VII.201. В е р а ШИПОВА «VI.169» (12.05.1913 Москва — 22.06.1965 Ивано-Франк. обл.) [Л16]

○ 1936 — Валериан Николаевич Козорезов (р. 16.05.1909) геолог; 3 детей «VIII.263—265»

VII.202. Л и д и я ШИПОВА «VI.169» (р. 09.12.1914 Москва) гидрогеолог, раб. на калийном руднике [Л16]

○ 1945 — Теодозий Иосифович Соболев (20.07.1914 Стебник, Галиция — 25.04.1986 Стебник Львов. обл.) бухгалтер, сов. работник; 1 сын «VIII.266»

VII.203. Д м и т р и й ШИПОВ «VI.169» (р. 24.01.1923 Волокол. у. Моск. губ.) топограф [Л16]

○ 1953 — Валентина Дмитриевна Нефедова (р. 14.03.1928 Ряз. обл.); 1 сын «VIII.267»

VII.204. С о ф и я ЭЙЛЕР «VI.173» (р. 18.12.1911 Волокол. у. Моск. губ.) техник-строитель, нач-к отдела проектн. ин-та [Л19]

○ 1930 — Владимир Михайлович Брунс (р. 14.03.1909) инж.-нефтяник, ок. Моск. инж.-стр. ин-т, дир. проектн. ин-та; 2 детей «VIII.268, 269»

VII.205. Н а т а л и я ЭЙЛЕР «VI.173» (р. 17.12.1913 Кирсанов) архитектор, раб. в проектн. организациях [Л19]

○ 1942 — Андрей Павлович Савко (15.12.1912 Воронеж. губ.— 19.09.1976 Москва) инж.-строитель, ок. Воронеж. инж.-стр. ин-т (1932), нач-к отдела проектн. и н-иссл-ин-та, лауреат Гос. премии; 2 сына «VIII.270, 271»

VII.206. Н и к и т а ЭЙЛЕР «VI.173» (06.07.1916 Новгород — 15.05.1984 Москва) инж.-конструктор на заводе [Л19]

○ 1950 — Нина Кузьминична Пономаренко (р. 28.07.1924 Томск. губ.) учительница; 1 дочь «VIII.272»

VII.207. П а в е л ЭЙЛЕР «VI.174» (р. 18.06.1918 Москва) коммерсант в Цюрихе

○ 1948 — Полина Кудер (Coudert) (25.11.1926 Париж); 2 детей «VIII.273, 274»

VII.208. Т а т ь я н а ЭЙЛЕР «VI.174» (р. 31.07.1920 Варна) [Л4]

○<sub>1</sub> 1946 — Ганс Петер (Peter), ○<sub>2</sub> 1959 — Франко—Кампи (Campi); бездетны

VII.209. М а р и я ЭЙЛЕР «VI.174» (1925—1928)

VII.210. А л е к с а н д р ЭЙЛЕР «VI.174» (р. 12.10.1929 Варна) инж.-строитель, чл. швейцарского парламента [163]

○ 1956 — Рут Шпис (Spies) (р. 30.11.1931 Базель); 1 дочь «VIII.275»

VII.211. А н а с т а с и я ЭЙЛЕР «VI.176» (р. 29.05.1924 Москва) преп. музыки, ок. Моск. консерваторию (1950) [Л8]

○ 1948 — Андрей Владимирович Рачинский (р. 23.03.1919 Москва — 09.09.1986 Москва) доц. Всесоюз. заоч. политехн. ин-та, канд. техн. н. (1959); 2 дочери «VIII.276, 277»

VII.212. К и р и л л МАНУИЛОВ «VI.177» (р. 23.10.1920 Звениг. у. Моск. губ.) геолог, ок. Моск. ун-т (1953), гл. специалист-геолог в проектн. ин-те [Л19]

○ 1949 — Ирина Александровна Пучкина (р. 08.08.1922 Козлов Тамб. губ.) инженер; 3 детей «VIII.278—280»

- VII.213. Софья МАНУИЛОВА «VI.177» (р. 07.08.1922 Москва) техник-геолог в н.-иссл. ин-те
- VII.214. Надежда ЭЙЛЕР «VI.178» (р. 15.12.1923 Москва) инж.-гидрогеолог, ок. Моск. геол.-разв. ин-т (1949) [Л19]
- ∞ 1949 — Владимир Михайлович Барышев (р. 13.06.1913 Ряз. губ.) инж.-конструктор, ок. Ин-т инж. гражд. возд. флота (1940); 2 детей «VIII.281, 282»
- VII.215. Михаил ЭЙЛЕР «VI.178» (15.12.1923 Москва — 23.08.1943 на фронте) танкист [Л19]
- VII.216. Александр ЭЙЛЕР «VI.179» (25.12.1922 Москва — 02.07.1980 Москва) инж.-технолог, ок. Моск. авиац.-технол. ин-т (1952), зав. отделом, гл. специалист проектн. ин-та хим. пром-сти [Л19]
- ∞ 1950 — Нина Кирилловна Севостьянова (р. 14.02.1922 Дмитров) техник-конструктор; 1 дочь «VIII.283»
- VII.217. Николай ЭЙЛЕР «VI.179» (12.05.1927 Москва — 03.01.1972 Москва) радиоинженер, ок. Моск. авиац. ин-т (1954), нач-к лаб. н.-иссл. ин-та [Л19]
- ∞ 1946 — Луиза Максимовна Смирнова (24.10.1926 Москва) инж.-программист; 2 детей «VIII.284, 285»
- VII.218—220. [Резерв.]
- VII.221. Алексей ПОПАНДОПУЛО «VI.186» (р. 28.09.1913)
- VII.222. [Резерв.]
- VII.223. Татьяна ЭЙЛЕР «VI.194» (р. 19.02.1948 Лгр.) инж.-электронщик по вычислит. технике, ок. Лгр. ин-т инж. ж.-д. трансп. (1971), раб. на Октябр. ж.д. [Л17]
- ∞ 1974 — Александр Михайлович Шварц (р. 04.02.1951 Лгр.) инж.-электронщик, ок. Лгр. ин-т инж. ж.-д. трансп. (1971); 2 детей «VIII.291, 292»
- VII.224. Дмитрий ЭЙЛЕР «VI.194» (р. 12.02.1959; Лгр.) врач-терапевт, ок. 2-й Лгр. мед. ин-т (1986) [Л17]
- ∞ 1985 — Елена Евгеньевна Макарова (р. 21.01.1964 Лгр.) врач, ок. 2-й Лгр. мед. ин-т (1986); 1 сын «VIII.293»
- VII.225—227. [Резерв.]
- VII.228. Фридрих ЛИЗЕР «VI.198» (р. 09.08.1915 Гослар, Германия) торг. работник
- ∞ 1951 — Дора Ничке (Nitschke) (р. 25.11.1921 Нойзальц, Германия)
- VII.229. Дитрих ЛИЗЕР «VI.198» (р. 02.10.1917 Германия) подполковник [Л21]
- ∞ 1958 — д-р Эльфрида Шмайсер (Schmeisser) (р. 15.07.1925 Нойхаус, Германия); 1 сын «VIII.298»
- VII.230. Федор ГОЛЬМДОРФ «VI.199» (пропал без вести во время войны)
- VII.231. Нина ГОЛЬМДОРФ «VI.199» (ум. 1951 Москва)
- ∞ — Н. Иванов
- VII.232. Валентина ГОЛЬМДОРФ «VI.200» (~1905—19.06.1917 Черниг. губ.) [46]
- VII.233. Вадим ГОЛЬМДОРФ «VI.200» (16.02.1906 СПб.— 08.03.1982 Ейск) техник путей сообщ., ок. Ашхаб. мех. техн. (1928) [Л22]
- ∞<sub>1</sub> — Ксения Сергеевна Ширшова (ум. V 1971 Москва); 2 сына «VIII.300, 301»
- ∞<sub>2</sub> 1942 — Маргарита Филипповна Субботина (р. 01.04.1921 Омск) врач; 1 дочь «VIII.302»
- VII.234. Ираида ГОЛЬМДОРФ «VI.201» (р. 14.06.1914 Рига) [Л22]
- ∞<sub>1</sub> — Петр Иванович Арбузов (ум. 1952) врач; 3 детей «VIII. 303—305»
- ∞<sub>2</sub> — Василий Васильевич Мирошников (1912—1982 Кисловодск)
- VII.235. Юрий ГОЛЬМДОРФ «VI.201» (р. 1918); женат

VII.236. А р и а д н а ГОЛЬМДОРФ «VI.201» (р. 31.01.1922 Москва) инженер, ок. Сев.-Кавк. горно-металлург. ин-т (1950) [Л22]

○ 1952 — Виктор Васильевич Виноградов (р. 16.01.1924 Михн. р-н Моск. обл.) горн. инженер-электромеханик, ок. Лгр. горн. ин-т (1967); 2 дочери «VIII. 307. 308»

### VIII ПОКОЛЕНИЕ

VIII.1—18. [Резерв.]

VIII.19. О с к а р БЕТЛИНГ «VII.11» (р. 26.07.1891 (ст.?) Пернов) юрист, ок. Юрьев. ун-т (1914) [116]

VIII.20. Е л и з а в е т а БЕТЛИНГ «VII.11» (29.06.1892 Пернов — 17.11.1966 Бад-Эссен, ФРГ)

VIII.21. Е л е н а БЕТЛИНГ «VII.11» (10.07.1893 Пернов — 08.12.1893 Пернов)

VIII.22. Г а н с - О с к а р ГЕРШЕЛЬМАН «VII.13» (р. 28.08.1918 Пернов — 19.12.1943 на фронте) [119; А23]

VIII.23. В о л ь ф г а н г - А д о л ь ф ГЕРШЕЛЬМАН «VII.13» (р. 07.10.1919 Пернов — 06.02.1944 на фронте) [119; А23]

VIII.24. Г о р г (и й) ЧЕРНАЯ «VII.14» (р. 23.02.1911 Владивосток) архитектор, живет в Австралии; женат, 1 дочь «IX.24» [118]

VIII.25. [Резерв.]

VIII.26. Е л е н а - Е л и з а в е т а БЕККЕР «VII.16» (08.11.1899 Митава — 13.10.1918 Митава) учительница [118]

VIII.27. Э р и к а - М а р и я БЕККЕР «VII.16» (р. 09.01.1901 Фрауенбург Курл. губ.) [118, 155]

○ 1933 — П а у л ь - К р и с т о ф Друкe (Drucke) (30.07.1900 (ст.?) Митава — 08.04.1975 Мекленбург) налоговый инспектор; бездетны

VIII.28. Б е р н г а р д - Г у г о БЕККЕР «VII.16» (22.02.1902 Фрауенбург — 26.11.1944 Рейнланд) пастор в Латвии [118, 155]

○ 1931 — Ингеборг Виекберг (Wieckberg) (р. 15.12.1905 Курл. губ.); 2 сына «IX.26, 27»

VIII.29. Х е л ь м у т - Р и х а р д БЕККЕР «VII.16» (11.04.1903 Фрауенбург — 11.01.1940 Дармштадт) врач в Лейпциге и Дармштадте, д-р мед. [118, 155]

○<sub>1</sub> 1934 — Эмми Кутцер (Kutzer) (20.04.1905 Лейпциг — 23.05.1935 Дармштадт); бездетны

○<sub>2</sub> 1939 — Мария Кутцер (р. 24.04.1916 Лейпциг) сестра предыдущей; бездетны

VIII.30. А р н д - А в г у с т БЕККЕР «VII.16» (13.11.1907 Фрауенбург — 06.01.1952 Исфган) врач в Берлине и Исфгане, д-р мед. [118, 155]

○ 1938 — гр. Анастасия Валентиновна Зубова (р. 11.03.1908 СПб.) врач; 1 дочь «IX.28»

VIII.31. В о л ь ф г а н г - К а р л БЕККЕР «VII.16» (р. 01.04.1908 Фрауенбург) пастор, уч. в Риге и Лейпциге [118, 155]

○ 1941 — Ирен Нейман (Neumann) (р. 06.10.1900 Москва); бездетны

VIII.32. Т е о д о р БЕККЕР «VII.16» (01.04.1908 Фрауенбург — 18.11.1935 Рига)

VIII.33. В о л ь ф г а н г - Г у г о ЧЕРНАЯ «VII.18» (05.11.1909 Блиден Курл. губ. — I 1945 Познань) уч. в Дерпте и Кёнигсберге, д-р мед. [118]

○ 1943 — Элизабет Лаабс (Laabs); 1 сын «IX.30» [А23]

VIII.34. Р у т ЧЕРНАЯ «VII.18» (р. 19.03.1911) учительница

VIII.35. И л ь з а ЧЕРНАЯ «VII.18» (21.05.1914 Блиден — 07.11.1984 Гамбург) [А23]

○ 1950 — Ганс Зауерштейн (Sauerstein) д-р мед.; бездетны

- VIII.36. Ю р г е н ЧЕРНАЙ «VII.18» (25.01.1917 Блиден — VIII 1944) [118]  
 ∞ 1942 — Эдит Баренбург (Bahrenburg); 1 дочь «IX.32» (∞<sub>2</sub> — Н. Принц (Printz))
- VIII.37. М а р г а р е т ЧЕРНАЙ «VII.19» (р. 07.10.1906 Двинск)
- VIII.38. И р е н ЧЕРНАЙ «VII.19» (р. 21.11.1908 Двинск)  
 ∞ — Н. Форстман (Forstmann); 1 сын «IX.34» [A23]
- VIII.39. В л а д и м и р ЧЕРНАЙ «VII.20» (р. 23.11.1897 Александр. у. Екате-  
 риносл. губ.)]
- VIII.40. Н а д е ж д а ЧЕРНАЙ «VII.20» (р. 30.04.1899)
- VIII.41. Г е о р г и й ЧЕРНАЙ «VII.20» (р. 06.02.1901 Гомель)
- VIII.42. Е л е н а ЧЕРНАЙ «VII.23» (р. 15.02.1913 Харьков) журналист, ок.  
 Харьк. театр. ин-т (1951) [Л14]  
 ∞ — Федор Иванович Ларин (1911—1969) парт. работник; 2 сына «IX. 38, 39»
- VIII.43. О л е г ЧЕРНАЙ «VII.23» (р. 05.10.1915 Харьков) инж.-технолог, раб.  
 на станкостр. з-де [Л14]  
 ∞ 1938 — Любовь Натановна Вольфовская (р. 24.05.1916 Лохвица Полт. губ.) слу-  
 жащая; 2 детей «IX. 40, 41»
- VIII.44. А н д р е й ЧЕРНАЙ «VII.24» (1918—1941 на Лгр. фронте)
- VIII.45. Н. ЧЕРНАЙ, дочь «VII.26» (ум. ребенком)
- VIII.46. [Резерв.]
- VIII.47. И г о р ь ЧЕРНАЙ «VII.30» (1920 — 03.02.1981) инж.-электрик
- VIII.48. А р и а д н а ЧЕРНАЙ «VII.30» (р. 20.07.1922 Эстония) мед. оптик,  
 служащая [Л6]  
 ∞ 1941 — Вацлав Иозович Косцюшка (Kosciuška) (21.01.1911 Ошмян. у. Вилен.  
 губ.— 11.11.1984 Вильнюс) художник; 2 детей «IX. 44, 45»
- VIII.49. Р о с т и с л а в ЧЕРНАЙ / ЧЕРНАЮС «VII.30» (р. 1941); 2 дочери  
 «IX. 46, 47»
- VIII.50. А л е к с а н д р ЧЕРНАЙ / ЧЕРНАЮС «VI.30» (р. 08.06.1943 ЛитССР)  
 механизатор в совхозе [Л13]  
 ∞ 1966 — Ядвига Каспаравичюте; 3 детей «IX. 48—50»
- VIII.51. Г е о р г и й ЧЕРНАЙ / ЧЕРНАЮС «VII.30» (р. 1944) преп. в проф.-  
 техн. уч-ще; 2 детей «IX.51.52» [Л13]
- VIII.52. Н и н а ПЕТРОВА «VII.33» (р. 06.11.1921 Нарва) экскурсовод в Клай-  
 педе [Л6]  
 ∞ — Геннадий Яковлевич Абрамчик (р. 08.02.1921) преп. химии; 3 детей «IX.  
 53—55»
- VIII.53. В е р а ПЕТРОВА «VII.33» (08.09.1924—23.12.1956)
- VIII.54. А н д р е й ЖГУН «VII.36» (р. ~1930) певец во Франции; женат
- VIII.55. О л е г / Олегас ЧЕРНАЙ/ЧЕРНАЮС «VII.37» (19.04.1937 Каунас—  
 09.11.1987 Каунас) инж.-технолог на бумажной фабрике [Л13]  
 ∞ 1961 — Мария / Марйона Матвеевна Вежелите (р. 23.03.1940 Литва) раб.  
 на фабрике; 2 детей «IX.57, 58»
- VIII.56—63. [Резерв.]
- VIII.64—68. БЕРГШТРЕССЕРЫ, дети «VII.46»
- VIII.69—74. [Резерв.]
- VIII.75. В л а д и м и р СТЕНДЕР «VII.53» (05.08.1897 Владикавказ — 1969  
 Запорожье) инж.-электротехник, ок. Электротехн. ин-т в Пгр., зав. кафедрами во  
 втузах Ленинграда, Алма-Аты, Кемерово, Днепропетровска, д-р техн. н. (1942),  
 профессор (1935), чл.-корр. Акад. наук КазССР (1954) [44; Л10]  
 ∞<sub>1</sub> — Ксения Ивановна Яковлева (1902—1951); бездетны



- ∞<sub>2</sub> — Анна Григорьевна Печерская (р. 1918)  
 VIII.76. Э л л а С Т Е Н Д Е Р «VII.53» (28.04.1899 СПб.— 22.10.1942 Лгр.) [Л10]  
 ∞<sub>1</sub> 1921(—29) — Михаил Михайлович Шириков (08.08.1884 Вологда — 22.09.1934 Гагра) горн. инженер; 1 дочь «IX.80»  
 ∞<sub>2</sub> 1930 — Иван Евгеньевич Яковенко (1899—1942 Лгр.) юрист; 1 дочь «IX.81»  
 VIII.77. А л ь ф р е д С Т Р У В Е «VII.54» (14.04.1910 бл. Харькова — 06.06.1921 Ростов-на-Дону)  
 VIII.78. Е в г е н и й С Т Р У В Е «VII.54» (р. 24.04.1912 Харьков). инж.-строитель, ок. Лгр. ин-т путей сообщ. (1940), пенс. с 1976 [Л10]  
 ∞<sub>1</sub> 1933 — Зоя Сергеевна Угрюмова (24.03.1912 — 14.12.1981); 3 детей «IX.82—84»  
 ∞<sub>2</sub> — Цецилия Ремерт (Römert) (р. 22.12.1935); бездетны  
 VIII.79. П а в е л С Т Р У В Е «VII.54» (29.08.1918 Харьков — 07.04.1942 Лгр.) инж.-электрик-телемеханик, ок. Лгр. электротехн. ин-т (1941); холост  
 VIII.80. В и л ь г е л ь м С Т Р У В Е «VII.54» (18.01.1923 Ростов-на-Дону — 23.11.1983 Таллин) инж.-электрик, пенс. с 1963 [Л10]  
 ∞ 1948 — Нелли Альбертовна Штейн (р. 14.05.1925 Феодосия) швея; 3 детей «IX.85—87»  
 VIII.81. Э л ь з а - Н а т а л и я - З и г ф р и д а В И Л ь К Е Н «VII.55» (р. 17.12.1906)  
 VIII.82. В л а д и м и р В И Л ь К Е Н «VII.55» (р. 10.12.1912)  
 VIII.83. Н а т а л и я В И Л ь К Е Н «VII.55» (р. 23.10.1915)  
 VIII.84—90. [Резерв.]  
 VIII.91. Б о р и с С Т Р У В Е «VII.63» (22.02.1909 СПб.— 11.04.1930 Лгр.); холост [Л9]  
 VIII.92. А л е к с а н д р С Т Р У В Е «VII.63» (р. 04.03.1911 СПб.) инж.-конструктор, пенс. с 1982 [Л9]  
 ∞ — Клавдия Ивановна Захарова (р. 1917); 1 дочь «IX.99»  
 VIII.93. Г е о р г ( и й ) С Т Р У В Е «VII.63» (р. 23.09.1912 СПб.) инж.-электрик [Л9]  
 VIII.94. Т а т ь я н а О Т Т Е Н «VII.70» (15.07.1918 Тифлис — 13.05.1956 Тбилиси) инж.-технолог (химик), раб. в Груз. политехн. ин-те [Л5]  
 ∞ — Владимир Константинович Саникидзе (1931—1984) инж.-механик, канд. техн. н., доцент; 1 дочь «IX.100»  
 VIII.95. М а р и я О Т Т Е Н - З А В Р И Е В А «VII.70» (р. 17.06.1926 Тбилиси) врач [Л5]  
 ∞ — Лаврентий Лаврентьевич Мерманишвили (р. 02.01.1926 Чиатурск. р-н ГрузССР) инж.-электрик, науч. работник; 2 детей «IX.101, 102»  
 VIII.96. [Резерв.]  
 VIII.97. Е л е н а О Т Т Е Н «VII.74» (10.09.1918 Тифлис — 17.08.1933 Тифлис)  
 VIII.98. К о н с т а н т и н О Т Т Е Н «VII.74» (р. 04.03.1926 Тифлис) инж.-строитель. ок. Груз. политехн. ин-т (1959), раб. в проектн. ин-те (с 1964) [Л5]  
 ∞<sub>1</sub> — Алла / Альфреда Валентиновна Рыковская (р. 09.09.1928) инженер; 1 дочь «IX.104»  
 ∞<sub>2</sub> — Мария Михайловна Павловская (р. 10.10.1935) инженер; 2 дочери «IX.105, 106»  
 VIII.99. В л а д и м и р М А Р Ч Е Н К О «VII.75» (р. 20.09.1920 бл. Тифлиса — 1944 бл. Златоуста) инж.-строитель; холост  
 VIII.100. Н а т а л и я М А Р Ч Е Н К О «VII.75» (р. 28.03.1924 бл. Тифлиса) инж.-технолог (химик) [Л5]  
 ∞ — Виссарион Павлович Карачевцев (р. 07.10.1912) инж.-механик, пенс. с 1979 г.; 2 дочери «IX. 107, 108»

VIII.101. М и л и ц а ФЕДОРОВА «VII.76» (р. 25.06.1920 Тифлис) бухгалтер [Л5]  
 ∞ — Якуб Алиевич Гасанов (1906 — 12.04.1976) бригадир грузчиков; 3 детей  
 «IX.109—111»

VIII.102. К и р а ФЕДОРОВА «VII.76» (р. 29.12.1924 Тифлис) бухгалтер [Л5]  
 ∞<sub>1</sub> — 1 дочь «IX.112»

∞<sub>2</sub> — Вениамин Данилов; 1 дочь «IX.113»

VIII.103. Ю р и й ЯКИМОВ «VII.77» (р. 01.06.1932 Риддер) слесарь [Л5]

∞ — Лидия Петровна Ерусланова (р. 1928) инж.-химик; 2 дочери «IX.114, 115»

VIII.104. А л е к с а н д р ЯКИМОВ «VII.77» (р. 17.10.1934 Риддер) инж.-механик [Л5]

∞ — Лариса Ивановна Киреева (р. 05.02.1937) инж.-плановик; 2 сына «IX.116, 117»

VIII.105. В и к т о р ОТТЕН «VII.78» (27.05.1932 Лгр.— 17.08.1964 Памир) канд. хим. н.; холост

VIII.106. Т а т ь я н а ОТТЕН «VII.78» (р. 07.12.1939 Лгр.) врач, канд. мед. н.

∞ — Владимир Арамович Богунц (12.06.1944—28.04.1985) экономист; бездетны

VIII.107. И н н а ЗЕБЕРГ «VII.79» (р. 14.02.1932 Лгр.) инж.-металлург [Л5]

∞<sub>1</sub> — Ричард Воронин; 1 сын «IX.118»

∞<sub>2</sub> — Борис Анатольевич Жучков (р. 21.08.1932) инж.-механик; 1 сын «IX.119»

VIII.108. О л ь г а ЗЕБЕРГ «VII.79» (р. 25.10.1938 Лгр.) инж.-машиностроитель [Л5]

∞ — Михаил Леонидович Бордюг; 1 сын «IX.120»

VIII.109. Б о р и с ОТТЕН «VII.80» (р. 10.03.1940 Тбилиси) инж.-строитель, ок. Челябинск. политехн. ин-т [Л5]

∞ — Елена Леонидовна Краинская (р. 28.02.1949 Нижн. Тагил) инж.-экономист, ок. Челябинск. политехн. ин-т, раб. в н.-иссл. ин-те; 2 детей «IX.121, 122»

VIII.110. В а с и л и й ОТТЕН «VII.80» (р. 27.04.1947 Тбилиси) радиоинженер, ок. Челябинск. политехн. ин-т, раб. в н.-иссл. ин-те [Л5]

∞ — Марианна Ильинична Зеленая (р. 04.10.1946 Лгр.) инж.-программист, ок. Лгр. политехн. ин-т; 2 детей «IX.123, 124»

VIII.111—128. [Резерв.]

VIII.129. Г у с т а в ЭКВИСТ «VII.99» (р. 21.06.1923) редактор в Финляндии

∞ — имеют детей

VIII.130. Х е н р и к-Фердинанд ЭКВИСТ «VII.99» (р. 22.04.1926 Випури) инженер, ок. Выш. техн. школу в Хельсинки (1950), дир.-распорядитель компании [144]

∞ 1951 — Керстин Стен (Steen); 2 детей «IX.144, 144А»

VIII.131. Х а р а л ь д-К р и с т о ф е р ЭКВИСТ «VII.99» (р. 22.04.1926 Випури) служащий

∞ — имеют детей

VIII.132. [Резерв.]

VIII.133. К а р о л и н а-Адель-Анна ЦУКАЛЕ «VII.101» (р. 03.03.1922 Мёдлинг, Австрия)

∞ 1949 — Рудольф Пикль (Pickl) (р. 31.08.1925 Куфштейн, Австрия) электрик; 1 сын «IX.147»

VIII.134. М а р г а р е т-Ольга-Марта ЦУКАЛЕ «VII.101» (03.11.1923 Хельсинки — 22.09.1928 Финляндия)

VIII.135. Э д у а р д-Александр-Андреас ЦУКАЛЕ «VII.101» (р. 12.05.1927 Хельсинки) предприниматель, вице-президент Финско-австрийского объединения в Финляндии, предс. южнофинск. спорт. союза [Л12]

- ∞ — Марита Ингер Кумлин (Kumlin) (р. 20.04.1930) служащая; 1 дочь «IX.148» VIII.136. А л е к с а н д р-Август-Вольдемар ЦУКАЛЕ «VII.101» (р. 16.12.1929 Хельсинки)
- ∞ — Мейли Ялонен (Jalonen); 1 сын «IX.149» VIII.137. А л ь ф р е д-Харальд ЦУКАЛЕ «VII.101» (р. 11.03.1931 Хельсинки)
- ∞<sub>1</sub> — Мирьям Рэнккэ (Rönkkö); 4 детей «IX.150—153»
- ∞<sub>2</sub> — Хилка Рейман (Reiman); 1 сын «IX.154» VIII.138. Гуннель-Марита-Маргарет ЦУКАЛЕ «VII.101» (р. 29.11.1935 Хельсинки — 21.08.1983 Финляндия)
- ∞ — Сеппо Сорьонен (Sorjonen); 1 сын «IX.155» VIII.139. Э л е н ТИР «VII.105» (р. 09.11.1935) [Л12]
- VIII.140. Эдуард-Норберт КОЛЛИНС «VII.106» (р. 11.01.1947) [Л12]
- VIII.141—145. [Резерв.]
- VIII.146. Георг-Эдуард ШТИРНГЕЛЬМ «VII.109» (р. 20.05.1929 Тарту)
- VIII.147—152. [Резерв.]
- VIII.153. Н и л ь с ВЕЙС «VII.116» (17.12.1924 Таллин — 31.10.1944 на фронте во Франции)
- VIII.154. Р о л ь ф ВЕЙС «VII.116» (19.06.1926 Таллин — I 1945 Польша)
- VIII.155. М а н ф р е д ВЕЙС «VII.116» (10.12.1928 Таллин — 03.06.1933 Таллин)
- VIII.156. Р и т а ВЕЙС «VII.116» (р. 07.05.1933 Таллин) [A23]
- ∞ 1957 — Курт Герке (Gercke) торг. работник (ум. 14.08.1978 Брауншвейг); 4 детей «IX.170—173»
- VIII.157. Х о р с т ВЕЙС «VII.116» (р. 16.06.1942 Познань) торговец [A23]
- ∞ 1969 — Ада Себастьян (Sebastian) (р. 07.04.1937); 1 сын «IX.174»
- VIII.158. К а с п а р БЕРЕНДТС «VII.117» (р. 10.10.1942 Берлин) инженер [A23]
- ∞ 1972 — Кристина Гнизер (Gnieser); 2 дочери «IX.175, 176»
- VIII.159. Э д у а р д-Иоганн НОТБЕК «VII.119» (16.10.1900 Вейсенштейн Эстл. губ.— 24.06.1985 бл. Ганновера) адвокат [119, 140]
- ∞ 1926 — Эвелина Викторовна фон Глазенап (von Glasenapp) (р. 26.01.1901 Лифл. губ.); бездетны
- VIII.160. Э л ь з а / Элизабет-Иоганна НОТБЕК «VII.119» (27.11.1901 Вейсенштейн — 02.05.1945 бл. Берлина) служащая [121]
- VIII.161. В а л ь т е р-Иоганн НОТБЕК «VII.119» (17.11.1903 Вейсенштейн — ~30.01.1945 бл. Познани) торговец [140]
- ∞ 1930 — Элизабет Беме (Boehme) (27.10.1907 Дрезден — 15.05.1943 бл. Познани) дочь прокуриста; 1 дочь «IX.177»
- VIII.162. И р е н-Иоганна НОТБЕК «VII.119» (26.04.1905 Вейсенштейн — 02.05.1945 бл. Берлина) воспитательница [121, 140]
- ∞ 1933 — Хайнц Шиллер (Schiller) (15.04.1895 Познань — 08.09.1941 Берлин) нем. морск. офицер
- VIII.163. Ф р и к и / Маргарет-Луиза-Иоганна НОТБЕК «VII.119» (р. 07.02.1913 Ревель) [121, 140]
- ∞ 1940 — Г е р б е р т-Артур фон Гунниус (von Hunnius) (02.04.1896 Эстл. губ.— 21.02.1945 Познань) врач, д-р мед. (1921), раб. в Таллине (∞<sub>1</sub> 1925 — Валли фон Ведель, ур. Лангхайнрих (Langheinrich) [119])
- VIII.164. О т т о-Эдуард-Иоганн НОТБЕК «VII.120» (26.08.1901 Каменское Запорожье — 08.03.1942 Познань) химик, ок. Тарт. ун-т (1927), раб. в Нарве [119, 140]
- ∞<sub>1</sub> 1928 — бар. Сигрид фон Майделль (Bar. von Maydell) (16.03.1907 Лифл. губ — 14.04.1966 Швеция); 1 сын «IX.180» (∞<sub>2</sub> 1933)



*Группа потомков Л. Эйлера в конференц-зале ленинградского здания Академии наук СССР 27 октября 1983 г.*

*В первом ряду (слева направо): А. А. Шестаков (VIII.245), А. А. Эйлер (VI.194), Н. Н. Эйлер (VII.206); во втором ряду: Д. А. Эйлер (VII.221), С. Н. Эйлер (VIII.284), Д. А. Шестаков (VIII.246); в третьем ряду: М. Н. Афанасов (VIII.228), И. Р. Геккер (VIII.176), К. Г. Мануилов (VII.212)*

*С фотографии Г. Зидта, Берлин*

∞<sub>2</sub> 1936 — Гизела фон Харпе (von Harpe) (23.08.1911 Рига — 27.01.1966 Канада)  
дочь химика

VIII.165. А р в и д-Вильгельм-Иоганн НОТБЕК «VII.120» (23.02.1903 Каменское Запорожье — 19.01.1981 Нижн. Саксония) юрист, д-р права, адвокат в Эстони и ФРГ, министр юстиции землн. Саксония (1956—65) [119, 140<sup>п</sup>, 162; А23]

∞ 1930 — Дагмара Павловна Армзен (Armsen) (р. 30.09.1908 Ревель) дочь врача; 2 детей «IX.181, 182»

VIII.166. Э р и к а-Хедвиг-Иоганна НОТБЕК «VII.120» (30.11.1906 Каменское Запорожье — 27.10.1971 ФРГ) [140; А23]

∞ 1933 — Герман-Константин Александрович Штединг (Steding) (02.07.1884 Москва — 11.08.1946 Гарц) инж.-электротехник, уч. в Карлсруэ и Дрездене, раб. в Таллине и Берлине; 4 детей «IX.183—186» (∞<sub>1</sub> и ∞<sub>2</sub> — без детей) [122, 153] VIII.167—169. [Резерв.]

VIII.170. М а р и я НОТБЕК «VII.124» (р. 06.06.1912 Пернов) [140]

∞ 1933 — Вильфрид Рейхман (Reichmann) (10.09.1905 Вост. Пруссия — 10.07.1942 Карибское море) нем. морск. офицер

VIII.171. Ю р г е н-Иоганн НОТБЕК «VII.124» (20.04.1917 (ст.?) Пернов — 28.08.1967 Франкфурт-на-Майне) коммерсант, майор [140]

О<sub>1</sub> 1943(—66) — Мария Рейнебек (Reinebeck) (р. 27.11.1920 Берлин) дочь нем. дипломата, медсестра

О<sub>2</sub> 1966 — Хедвиг Михаэлис (Michaelis) (р. 19.11.1935 Гессен) дочь купца; 2 дочери «IX.191, 192»

VIII.172. К а р и н-Элизабет-Иоганна НОТБЕК «VII.124» (р. 30.09.1926 Таллин) [140; A23]

О 1949 — бар. Эрих фон дер Брюгген (Bar. von der Brügggen) (р. 31.10.1913 Митава) агроном, коммерсант; 2 дочери «IX.193, 194» [122]

VIII.173. [Резерв.]

VIII.174. Х о л г е р МИЛЬК «VII.127» (р. 25.06.1926 Випури) коммерсант

VIII.174А. Р о з м а р и МИЛЬК «VII.127» (р. 16.01.1928 Випури)

О 1952 — К а р л-Вильгельм Хеленелунд (Helenelund) (13.10.1922—01.05.1978 Финляндия) инженер, профессор (с 1953), работы по механике грунтов и геотехнике; 5 детей «IX. 195—195D» [144]

VIII.174В. Э р и к МИЛЬК «VII.127» (р. 18.02.1935 Хельсинки) инж.-механик, ок. Хельсинк. техн. ун-т (1951), коммерч. дир. фирмы

О — Синikka Туоминен (Tuominen) (р. 13.10.1937 Випури) маг. филологии; 2 детей «IX.196, 196А»

VIII.175. Е л е н а ИЕССЕН «VII.129» (р. 23.09.1931 Лгр.) химик, ок. Лгр. пед. ин-т (1954), преп. химии Лгр. ин-та инж. ж.-д. трансп. [Л3]

О 1963 — Николай Иванович Романов (р. 20.04.1932 Вязьма) инж.-механик, ок. Лгр. ин-т ж.-д. трансп. (1965), раб. на Октябр. ж.д.; 2 детей «IX.197, 198»

VIII.176. И в а н ГЕККЕР «VII.130» (р. 04.03.1927 Лгр.) инж.-физик, ок. Моск. энерг. ин-т (1950), науч. сотр. Ин-та общ. физ. АН СССР, канд. техн. н. (1959), ст. науч. сотр. (1971)

О 1953 — Светлана Владимировна Владимирова (р. 26.06.1927 Москва) актриса, ок. Гос. ин-т театр. искусства (1955), преп. сценической речи Театр. уч-ща им. Щукина; 1 дочь «IX.199»

VIII.177. Федор ГЕККЕР «VII.130» (р. 19.01.1930 Лгр.) инж.-механик, ок. Моск. высш. техн. уч-ще (1955), доцент там же, канд. техн. н. (1965)

О 1973 — Татьяна Вениаминовна Ченцова (р. 16.08.1937 Москва) преп. кулинарии в проф.-техн. уч-ще; 2 детей «IX.200, 201»

VIII.178. М а р и я ГЕККЕР «VII.130» (р. 01.12.1954 Москва) палеонтолог, ок. геол. фак-т Моск. ун-та (1977), науч. сотр. Палеонтол. ин-та АН СССР

VIII.179. А л ь ф р е д РОДЕ «VII.134» (07.03.1924 Лгр.— 1943 на Лгр. фронте)

VIII.180—187. [Резерв.]

VIII.188. Д о р о т е я ГРЮНЕР «VII.144» (02.01.1909 Рига — 1945 Бромберг) монахиня

VIII.189. Анна-Мария ГРЮНЕР «VII.144» (17.01.1910 Лифл. губ.— 11.02.1983 Целле, ФРГ)

О 1939 — Пауль Броссе (Brosse) (22.05.1905 Митава — 24.01.1985 Целле, ФРГ) метеоролог; 2 детей «IX.213, 214»

VIII.190. И л ь з а ГРЮНЕР «VII.144» (р. 27.03.1912) [A23]

О 1936 — бар. Эдуард фон Фиркс (Bar. von Fircks) (24.12.1905 Мекленбург — 24.01.1972) врач, д-р мед.; 4 детей «IX.215—218»

VIII.191. К о н с т а н т и н ГЕРШЕЛЬМАН «VII.145» (р. 28.10.1909 СПб.— В 1927 Харьков)

- VIII.192. В л а д и м и р ГЕРШЕЛЬМАН «VII.145» (22.11.1910 СПб.— V 1920 Харьков)
- VIII.193. С о ф и я ГЕРШЕЛЬМАН «VII.145» (08.06.1912 СПб.— 21.03.1942 Харьков)
- VIII.194. М а р и я ГЕРШЕЛЬМАН «VII.145» (р. 17.07.1914 СПб.) с 1950 в США VIII.195—209. [Резерв.]
- VIII.210. Г е р а л ь д-Карл-Оскар ЭНКЕЛЬ «VII.161» (р. 16.04.1931 Хельсинки) экономист, ок. Лунд. ун-т (1957), советник Деп-та сельск. хоз-ва США в Стокгольме, маг. полит. н. [Л20]
- ∞ 1954(—75) — Б р и т т а-Иозефина Андерссон (Andersson) (р. 04.04.1932 Карлсруна, Швеция) служащая; 3 детей «IX.238—240»
- VIII.211. П а т р и к-Георг ЭНКЕЛЬ «VII.161» (р. 04.01.1933 Сортавала, Финляндия) адвокат, ок. Лунд. ун-т (1960) [Л20]
- ∞<sub>1</sub> 1953(—85) — М а р и а н н а-Эбба-Гунвор Кофед-Фернстрём (Kofeed-Fernström) (р. 19.02.1934 Швеция); 4 детей «IX.241—244»
- ∞<sub>2</sub> 1986 — Е в а-Кристина Тигерман (Tigerman) (р. 18.04.1955 Швеция) служащая; 1 сын «IX.245»
- VIII.212. П е р-Г е н р и к ЭНКЕЛЬ «VII.161» (р. 03.03.1940 Эребру, Швеция) зоолог, ок. Лунд. ун-т (1968), раб. там же, маг. зоологии [Л 20]
- ∞<sub>1</sub> 1963—73 — А н и т а-Ирен Габриельссон (Gabrielsson) (р. 27.02.1939 Карлсхамн, Швеция); 2 детей «IX.246, 247»
- ∞<sub>2</sub> 1973 — М о н и к а Линдстам (Lindstam) (р. 10.03.1939 Лунд, Швеция) стюардесса, учительница; 2 детей «IX.248—249»
- VIII.213. М а р и я - Л у и з а ЭНКЕЛЬ «VII.161» (р. 23.06.1942 Хельсинки) филолог, ок. Лунд. ун-т (1970), участвует в работе над швед. акад. словарем в Лунде [Л20]
- ∞ 1966 — Л е н н а р т-Харальд-Стуре Лундквист (Lundquist) (р. 13.02.1938 Карлсруна, Швеция), проф. полит. наук Копенг. ун-та; 2 детей «IX.250, 251»
- VIII.214. Э л е н ЭНКЕЛЬ «VII.161» (р. 08.06.1951 Карлсхамн, Швеция) ок. Лунд. ун-т (1985), служащая; незамужняя
- VIII.215. Л е о н и д ШУЛЬГИН «VII.162» (р. 30.08.1932 Лгр.) инженер, ок. Лгр. политехн. ин-т, раб. на заводе; 2 дочери «IX.253, 254» [Л7]
- VIII.216. Е л е н а ШУЛЬГИНА «VII.162» (р. 17.02.1937 Лгр.) ок Лгр. ун-т (1965), воспитательница [Л7]
- ∞ — Герман Петрович Лонч; 1 дочь «IX.255»
- VIII.217. Т а т ь я н а САЗОНОВА «VII.163» (р. 14.10.1938 Лгр.) инж.-экономист, ок. Лгр. инж.-экон. ин-т (1967), нач.-к планоно-экон. отдела на заводе [Л7]
- ∞ 1966(—69) — Лев Иванович Ткачев (р. 1929 Брян. обл.) инж.-электрик; 1 сын «IX.256»
- VIII.218. В а д и м ФОЙГТ «VII.166» (р. 28.11.1935) инж.-металлург, ок. Сиб. металлург. ин-т в Новокузнецке, раб. на заводе [Л11]
- ∞ — Людмила Ивановна Киршина (р. 26.06.1939); 3 детей «IX.257—259»
- VIII.219. П а в е л ФОЙГТ «VI.167» (р. 04.10.1948 Ухта) инж.-технолог леса, ок. Ухт. индустр. ин-т (1973) [Л11]
- ∞<sub>1</sub> — 2 сына «IX.260, 261»
- ∞<sub>2</sub> — Людмила Петровна Семенова (р. 15.01.1953 Витеб. обл.) техник-лесовод; 1 сын «IX.262»
- VIII.220. Ю р и й ФОЙГТ «VII.169» (р. 29.09.1949 Новокузнецк) ок. Всесоюз. заоч. фин.-экон. ин-т (1979), раб. на металлург. комбинате [Л11]

- 1977 — Римма Васильевна Трофименко (р. 10.07.1954 Мелитополь) инж.-химик-технолог, ок. Лгр. ин-т текст. и легк. пром-сти (1976); 1 дочь «IX.263»  
 VIII.221. Д м и т р и й ФОЙГТ «VII.169» (р. 21.02.1956 Мысы) инж.-металлург, ок. Сиб. металлург. ин-т в Новокузнецке, раб. на металлург. комбинате [Л11]  
 ○ 1982 — Галина Петровна Гейно (р. 20.11.1955 Темиртау) инж.-металлург; 1 дочь «IX.264»  
 VIII.222. П а в е л ЭЙЛЕР «VII.170» (р. 07.10.1934 Льеж) механик, фабрикант электроники [Л4]  
 ○ 1976 — Беатриса Келлер (Keller) (р. 12.09.1946 Швейцария) дочь мастера-жестянщика; 3 детей «IX.265—267»  
 VIII.223. Д м и т р и й ЭЙЛЕР «VII.170» (ум. 1936)  
 VIII.224. К р и с т и н а ЭЙЛЕР «VII.170» (р. 09.09.1938 Эстония) учительница [Л4]  
 ○ 1964 — Гагс Гербер (Gerber) (р. 28.11.1938 Цюрих) архитектор, ок. Вышш. техн. школу в Цюрихе; 2 сына «IX.268, 269»  
 VIII.225. Р о м а н ЭЙЛЕР «VII.170» (р. 09.09.1942 Люксембург) инж.-строитель, ок. Вышш. техн. школу в Винтертуре [Л4]  
 ○ 1968 — Анна Гримм (Grimm) дочь зубного врача, физиотерапевт; 2 детей «IX.270,271»  
 VIII.226. Л е в БОБОЛЕНСКИЙ «VII.171» (р. 05.09.1926 бл. Парижа) инж.-экономист, дир. банка развития ООН [165; Л4]  
 ○<sub>1</sub> 1946 — Елена Ярославна Червинка (Cervinka) (р. 19.04.1922 Оломоуц) дочь полк. рус. армии, затем ген. чехосл. армии; 1 дочь «IX.272»  
 ○<sub>2</sub> 1980 — Лариса Алексеевна Миколайчик (р. 05.11.1950 Нью-Йорк); бездетны  
 VIII.227. В л а д и м и р БОБОЛЕНСКИЙ «VII.171» (р. 12.02.1932 Прага) врач-гинеколог, ок. Базел. ун-т (1958), д-р мед. (1961), приват-доцент (1972) [165<sup>н</sup>; Л4]  
 ○ 1960 — Моника-Мария-Берта Рандлькофер (Randlkofer) [(р. 19.06.1938 Мюнхен); 3 детей «IX.273—275»  
 VIII.228. М и х а и л АФАНАСОВ «VII.172» (р. 01.12.1936 Калуга) геолог, ок. Лгр. горн. ин-т (1959), канд. геол.-мин. н. (1973), раб. в н.-иссл. ин-те [Л1]  
 ○ 1962 — Нина Васильевна Гусева (р. 23.01.1938) геофизик; 1 дочь «IX.276»  
 VIII.229. С в е т л а н а СКАЛОН «VII.175» (р. 08.08.1941 Ковров) лаборант Ин-та хим. физ. Акад. наук СССР [Л8]  
 ○ 1963 — Валерий Михайлович Кулев (р. 10.09.1939) механик; 1 сын «IX.277»  
 VIII.230. Е в г е н и й СКАЛОН «VII.175» (р. 16.11.1943 Ковров) инж.-технолог, ок. Всесоюз. заоч. машиностр. ин-т (1972) [Л8]  
 ○ 1969 — Галина Егоровна Кузнецова (р. 19.02.1949 Москва) работник связи; 1 сын «IX.278»  
 VIII.231. О л ь г а СКАЛОН «VII.175» (р. 03.06.1955 Ковров) работник связи  
 VIII.232. Н а т а л и я АНТОНОВА «VII.176» (1938 Лгр.— 1984) техник  
 VIII.233—237. [Резерв.]  
 VIII.238. О л ь г а КОЧЕТКОВА «VII.182» (р. 12.06.1950) экономист [Л15]  
 ○ — Виктор Липилин; 2 сына «IX.286, 287»  
 VIII.239. М и х а и л КОЧЕТКОВ «VII.182» (р. 06.11.1954 Рига) инж.-строитель, мастер спорта по современному пятиборью [Л15]  
 ○ 1979 — Инесса Петровна Вшивкова (р. 28.05.1955 Ташкент); 1 дочь «IX.288»  
 VIII.240. И н т а КАРЛБЕРГС «VII.183» (р. 29.09.1962 Норчёпинг, Швеция)  
 VIII.241. Л и н д а КАРЛБЕРГС «VII.183» (р. 14.04.1969 Норчёпинг, Швеция)  
 VIII.242. Ж е н и я АНДЕРССОН «VII.183» (р. 01.02.1981 Норчёпинг, Швеция)  
 VIII.243. Мартин-Николаус ПУРИНЬ «VII.183А» (р. 12.06.1967 Стокгольм)

- VIII.244. Петер-Урбан ПУРИНЬ «VII.183A» (р. 02.02.1969 Стокгольм)
- VIII.245. А н а т о л и й ШЕСТАКОВ «VII.184» (р. 09.05.1947 Лгр.) инж.-электрик, ок. Лгр. электротехн. ин-т (1971), нач-к сектора в н.-иссл. ин-те [Л15]  
 ○ 1974 — Людмила Германовна Кононова (р. 03.05.1947 ЛатвССР) инж.-экономист; 1 сын «IX.294»
- VIII.246. Д м и т р и й ШЕСТАКОВ «VII.184» (р. 02.01.1949 Лгр.) юрист, ок. Лгр. ун-т (1971), доцент там же (с 1983), д-р юрид. н. (1986) [Л15]  
 ○ 1971 — Вера Ивановна Сулина (р. 1948 Лгр.) историк; 2 дочери «IX.295,296»  
 VIII.247—252. [Резерв.]
- VIII.253. Л е в БОЛТЕНГАГЕН «VII.191» (р. 29.09.1935 Лгр.) прораб, раб. на разных стройках СССР [Л2]  
 ○<sub>1</sub> — Любовь Георгиевна Попова (р. 24.07.1935); 1 сын «IX.302»  
 ○<sub>2</sub> 1959 — Надежда Архиповна Полянская (р. 01.10.1941 Краснояр. кр.); 1 сын «IX.303»
- VIII.254—262. [Резерв.]
- VIII.263. В а л е р и я КОЗОРЕЗОВА «VII.201» (р. 24.07.1937 Москва) инженер, ок. Моск. автодорожн. ин-т (1965), раб. в ВНИИ мед. приборостр. [Л16]  
 ○<sub>1</sub> 1959 — Владислав Александрович Комиссаров (14.04.1937 Москва — 12.04.1972 Москва); 1 дочь «IX.313»  
 ○<sub>2</sub> 1968 — Дмитрий Георгиевич Попов (р. 19.09.1933 Москва) инженер, ок. Моск. гидромел. ин-т, гл. конструктор ВНИИ мед. приборостр.; 1 сын «IX.314»
- VIII.264. В и к т о р и я КОЗОРЕЗОВА «VII.201» (р. 16.05.1941 Москва) художник-оформитель, ок. Моск. ин-т местн. пром-сти (1965) [Л16]  
 ○ 1972 — Александр Иванович Дьяконов (р. 24.08.1941 Москва) науч. работник; 2 детей «IX.315, 316»
- VIII.265. В л а д и м и р КОЗОРЕЗОВ «VII.201» (р. 16.01.1945 Москва) инженер, ок. Моск. автодорожн. ин-т (1972), руководитель группы в н.-иссл. ин-те [Л16]  
 ○ 1976 — Татьяна Алексеевна Боброва (р. 12.07.1949 Ржев) бухгалтер; 1 сын «IX.317»
- VIII.266. В л а д и м и р СОБОЛЬ «VII.202» (р. 31.08.1946 Стебник Львов. обл.) мастер на калийном руднике [Л16]  
 ○ 1970 — Любовь Петровна Гулык (р. 08.06.1949 Трускавец); 2 детей «IX.318, 319»
- VIII.267. М и х а и л ШИПОВ «VII.203» (р. 14.01.1954 Якутск) раб. на заводе [Л16]  
 ○ 1978 — Маргарита Алексеевна Пьянникова (р. 27.08.1959 Москва); 1 дочь «IX.320»
- VIII.268. А н д р е й БРУНС «VII.204» (р. 21.12.1931 Москва) астрофизик, зав. лаб. Крым. астрофиз. обсерватории Акад. наук СССР, д-р физ.-мат. н. (1984) [Л19]  
 ○ 1955 — Алла Ивановна Овчинникова (р. 17.10.1933 Симферополь) лаборант; 2 детей «IX.321, 322»
- VIII.269. Е л е н а БРУНС «VII.204» (р. 03.06.1945 Москва) инженер по автом. и телемех., ок. Севастоп. приборостр. ин-т, раб. в проектн. ин-те; 2 детей «IX.323,324» [Л19]
- VIII.270. М и х а и л САВКО «VII.205» (р. 17.09.1944 Москва) инж.-механик, ок. Моск. авиац. ин-т (1968), раб. в н.-иссл. ин-те [Л19]  
 ○ 1983 — Людмила Анатольевна Голубкова (р. 25.06.1954 Моск. обл.) техник-станкостроитель; 1 сын «IX.325»
- VIII.271. С е р г е й САВКО «VII.205» (02.01.1954 Москва — 15.09.1984 Москва) инженер, ок. Моск. инж.-стр. ин-т (1977), прораб; холост



- VIII.272. Л ю д м и л а ЭЙЛЕР «VII.206» (р. 27.03.1959 Москва) медсестра, ок. Моск. мед. уч-ще (1982); 1 дочь «IX.326» [Л19]
- VIII.273. Е л е н а ЭЙЛЕР «VII.207» (р. 04.04.1950 Базель) учительница  
○ 1978—Жиль Ботт (Bott) (р. 17.09.1948 Франция); 2 сына «IX.327, 328»
- VIII.274. М и х а и л ЭЙЛЕР «VII.207» (р. 25.01.1956 Базель) журналист; холост
- VIII.275. М а р и н а ЭЙЛЕР «VII.210» (р. 03.11.1959 Базель) врач-ветеринар
- VIII.276. В е р а РАЧИНСКАЯ «VII.211» (р. 22.11.1948 Москва) филолог, ок. Моск. ин-т иностр. яз. (1975), раб. в и.-иссл. ин-те [Л18]
- VIII.277. Н а т а л и я/Тереза РАЧИНСКАЯ «VII.211» (р. 05.03.1960 Москва) художник, служащая
- VIII.278. А н д р е й МАНУИЛОВ «VII.212» (р. 21.02.1950 Москва) инж.-электр. ок. Моск. горн. ин-т (1973), раб. в стр. тресте [Л19]  
○ 1972 — Галина Николаевна Лобова (р. 09.11.1949 Москва) инженер, ок. Моск. инж.-стр. ин-т (1973), раб. в проектн. ин-те; 1 дочь «IX.333»
- VIII.279. М а р и я МАНУИЛОВА «VII.212» (р. 05.07.1952 Москва) инж.-экономист, ок. Моск. нефт. ин-т (1975), раб. в н.-иссл. ин-те [Л19]  
○ 1979 — Евгений Владимирович Титов (р. 17.07.1953) инженер; 2 детей «IX.334, 335»
- VIII.280. К с е н и я МАНУИЛОВА «VII.212» (05.07.1952 Москва — 07.02.1968 Москва)
- VIII.281. О л ь г а БАРЫШЕВА «VII.214» (р. 13.09.1950 Москва) преп. иностр. яз., ок. Моск. ин-т иностр. яз. (1971) [Л19]  
○ 1972 — Андрей Николаевич Полевой (р. 1950) экономист, ок. Моск. ин-т междунар. отношений (1971); 1 дочь «IX.336»
- VIII.282. М и х а и л БАРЫШЕВ «VII.214» (р. 24.10.1953 Москва) инженер, ок. Моск. авиац. ин-т (1975), раб. на авиац. з-де
- VIII.283. Е л е н а ЭЙЛЕР «VII.216» (р. 30.01.1952 Москва) инж.-программист, ок. Моск. инж.-экон. ин-т (1974), раб. в проектн. ин-те [Л19]  
○ 1977 — Виктор Николаевич Баранов (р. 29.01.1953 Москва) инж.-механик; 2 детей «IX.338, 339»
- VIII.284. С е р г е й ЭЙЛЕР «VII.217» (р. 01.08.1947 Москва) инж.-механик, ок. Моск. горн. ин-т (1971), раб. в Госгортехнадзоре [Л19]  
○ 1973 — Наталия Арвидовна Матисон (р. 13.08.1946 Москва); 1 сын «IX.340»
- VIII.285. В а р в а р а ЭЙЛЕР «VII.217» (р. 24.01.1961 Москва) ок. Моск. ин-т иностр. яз. (1983), переводчик-методист в Акад. наук СССР
- VIII.286—290. [Резерв.]
- VIII.291. И г о р ь ШВАРЦ «VII.223» (р. 16.12.1979 Лгр.)
- VIII.292. С е р г е й ШВАРЦ «VII.223» (р. 05.03.1981 Лгр.)
- VIII.293. А л е к с а н д р ЭЙЛЕР «VII.224» (р. 06.12.1986 Лгр.)
- VIII.294—297. [Резерв.]
- VIII.298. Ю р г е н ЛИЗЕР «VII.229» (р. 15.11.1958 Бонн)  
○ — Н. Конрад (Conrad); 1 дочь «IX.354»
- VIII.299. [Резерв.]
- VIII.300. Н. ГОЛЬМДОРФ «VII.233»
- VIII.301. О л е г ГОЛЬМДОРФ «VII.233» (05.06.1930 Коканд — 19.03.1986 Ковдор Мурм. обл.) ок. Горн. техникум, раб. инженером [Л22]  
○ 1950 — Лидия Елизаровна Агапова (р. 21.01.1926 Тамб. губ.) служащая; 2 дочери «IX.356, 357»
- VIII.302. И р и н а ГОЛЬМДОРФ «VII.233» (р. 01.02.1948 Кировск Мурм. обл.) инж.-технолог, ок. Красnod. политехн. ин-т (1973) [Л22]

О — Александр Николаевич Евсеев (р. 12.09.1946 Ейск) инж.-механик, ок. Сев.-Зап. заоч. политехн. ин-т (1972), директор хлебозавода в Ейске; 2<sup>1</sup>детей «IX.358, 359» VIII.303. А л л а АРБУЗОВА «VII.234» (р. 1933 Ростов-на Дону) ок. горн. техникум [Л22]

О — Леонид Николаевич Заболоцкий (р. 08.03.1933); 3 детей «IX.360—362» VIII.304. В а д и м АРБУЗОВ «VII.234» (р. 1935 Пятигорск) горн. инженер, ок. Новочерк. политехн. ин-т

О — Ольга Алексеевна Лакеева (р. 1939)

VIII.305. А р и а д н а АРБУЗОВА «VII.234» (р. 1939 Пятигорск) [Л22]

О<sub>1</sub> — Евгений Трегубенко; 1 дочь «IX.363»

О<sub>2</sub> — Юрий Николаевич Приходько, канд. н.; 1 сын «IX.364»

VIII.306. [Резерв.]

VIII.307. Е л е н а ВИНОГРАДОВА «VII.236» (р. 11.07.1953 Михнево Моск. обл.) товаровед [Л22]

О — Н. Киндяков; 1 дочь «IX.368»

VIII.308. Е к а т е р и н а ВИНОГРАДОВА «VII.236» (р. 10.05.1956 Кисловодск) товаровед; 1 дочь «IX.369» [Л22]

### IX ПОКОЛЕНИЕ

IX.1—23. [Резерв.]

IX.24. П а т р и ц и я ЧЕРНАЙ «VIII.24»

IX.25. [Резерв.]

IX.26. Ф р и т ь о ф БЕККЕР «VIII.28» (р. 22.09.1932 Вентспилс, Латвия) [155]

О — Илза Крузе (Kruse) (р. 04.09.1938 Гольштейн); 5 детей «X.26—30»

IX.27. О л а ф-Бернгард БЕККЕР «VIII.28» (р. 01.04.1934 Латвия) шофер; холост

IX.28. Т а т ь я н а БЕККЕР «VIII.30» (р. 31.12.1942 Берлин) преп. танца в I ариже

IX.29. [Резерв.]

IX.30. Мориц-Юрген ЧЕРНАЙ «VIII.33» (р. 26.04.1944 Познань) [118]

О — Рита Крёгер (Kröger) (р. 09.05.1947); 1 сын «X.34»

IX.31. [Резерв.]

IX.32. Гизела-Гертруда ЧЕРНАЙ «VIII.36» (25.10.1942—26.03.1975)

О — Ульрих Климек (Klimmek); бездетны

IX.33. [Резерв.]

IX.34. В и л ь ф р и д ФОРСТМАН «VIII.37» (р. 11.10.1940)

IX.35—37. [Резерв.]

IX.38. О л е г ЛАРИН «VIII.42» (р. 01.06.1939 Харьков) инженер, ок. Харьк. ин-т. механиз. и электрифик. сельск. хоз-ва (1978) [Л14]

О — Тамара Николаевна Горбатенко (р. 21.12.1948); 2 детей «X.42,43»

IX.39. В а л е р и й ЧЕРНАЙ «VIII.42» (р. 06.09.1941 Харьков) инж.-электрик, ок. Харьк. политехн. ин-т (1971), раб. в н.-иссл. ин-те [Л14]

О 1968 — Евгения Николаевна Бутникова (р. 13.07.1945) ок. Харьк. ин-т радиоэлектроники (1970), науч. работник; 2 сына «X.44,45»

IX.40. А л е к с а н д р ЧЕРНАЙ «VIII.43» (р. 05.12.1941 Александровск Перм. обл.) инженер, ок. Харьк. политехн. ин-т (1966), раб. в н.-иссл. ин-те [Л14]

О<sub>1</sub> 1965 — Виолетта Владимировна Золкина; 1 дочь «X.46»

О<sub>2</sub> 1975 — Людмила Михайловна Ашихмина (р. 27.07.1946) инженер, ок. Харьк. политехн. ин-т (1970), раб. на заводе; 2 детей «X.47,48»

IX.41. Н а т а л ь я ЧЕРНАЙ «VIII.43» (р. 07.09.1949 Харьков) инженер-конструктор, ок. Харьк. политехн. ин-т (1975), раб. на заводе; 1 сын «X.49» [Л14]

IX.42,43. [Резерв.]

IX.44. А у р е л и я КОСЦЮШКА «VIII.48» (р. 20.01.1944 Вильнюс) технолог на заводе

○ — Ионас Казевич Петкявичюс (р. 19.06.1941) инж.-архитектор; 1 сын «X.53»

IX.45. Т а д е у ш/Тадас КОСЦЮШКА «VIII.48» (р. 20.08.1947 Вильнюс) художник-оформитель

○ — Кудра Антоновна N. (р. 1950) журналист; 1 сын «X.54»

IX.46. N. ЧЕРНАЮС, дочь «VIII.49»

IX.47. N. ЧЕРНАЮС, дочь «VIII.49»

IX.48. В а л е н т и н ЧЕРНАЮС «VIII.50» (р. 23.03.1968 ЛитССР)

IX.49. А р т у р ЧЕРНАЮС «VIII.50» (р. 18.04.1973 ЛитССР)

IX.50. И р м а ЧЕРНАЮС «VIII.50» (р. 17.09.1982 ЛитССР)

IX.51. Р о н а л д ЧЕРНАЮС «VIII.51» (р. 1967)

IX.52. И н е с с а ЧЕРНАЮС «VIII.51» (р. 1979)

IX.53. Г е о р г и й АБРАМЧИК «VIII.52» (р. 09.12.1948 Клайпеда) преп. истории в школе [Л13]

○ — Ирина Михайловна Сухопрудская (р. 1951) врач; 2 сына «X.62,63»

IX.54. О л ь г а АБРАМЧИК «VIII.52» (р. 31.08.1952 Клайпеда) инж.-строитель [Л13]

○ — Ромас Чапас (р. 08.03.1954) инж.-строитель; 3 детей «X.64—66»

IX.55. А л е к с а н д р АБРАМЧИК «VIII.52» (р. 18.06.1956 Клайпеда) моряк [Л13]

○ — Лариса Юрьевна Полянская (р. 27.09.1957) технолог; 1 дочь «X.67»

IX.56.—56E. См. примеч. к «VII.35»

IX.57. М а р г а р и т а ЧЕРНАЮС «VIII.55» (р. 21.06.1962 Каунас) инж.-электрик, ок. Каунас. политехн. ин-т

IX.58. А р т у р ЧЕРНАЮС «VIII.55» (р. 13.04.1969 Каунас)

IX.59—79. [Резерв.]

IX.80. И р и н а ШИРИКОВА «VIII.76» (р. 08.04.1922 Пгр.) медсестра [Л10]

○ 1949 — Владимир Александрович Григор (28.10.1907 Проскуров Подол. губ. — 29.11.1976 Лгр.) инж.-электрохимик, доцент; 1 дочь «X.92»

IX.81. Н а т а л ь я ЯКОВЕНКО/СТЕНДЕР «VIII.76» (р. 12.12.1935 Лгр.) инж. электрохимик (удочерена В. В. Стендером «VIII.75»)

○ — Вадим Григорьевич Васильев; два сына «X.93, 94»

IX.82. А л ь ф р е д СТРУВЕ «VIII.78» (1936 — ум. младенцем)

IX.83. Н а т а л и я СТРУВЕ «VIII.78» (р. 03.10.1937 Павлодар) архитектор, ок. Техн. ун-т в Зап. Берлине (1968) [Л10]

○ 1957(—59) — Генрих Пендорф (Penndorf) инж.-машиностроитель; 1 сын «X.95»

IX.84. И р и н а СТРУВЕ «VIII.78» (р. 18.04.1943 Лебенштадт, Германия) учительница

○ 1966(—70) — Норберт Бунге (Bunge); бездетны

IX.85. Е в г е н и й СТРУВЕ «VIII.80» (15.07.1949 — 26.04.1950)

IX.86. Т а т ь я н а СТРУВЕ «VIII.80» (р. 17.03.1951 Орск) инж.-строитель, ок. Таллин. политехн. ин-т (1983) и раб. в Таллине; 1 сын «X.96»

IX.87. Н и н а СТРУВЕ «VIII.80» (р. 14.07.1954 Орск) техник-геолог, ок. техникум и раб. в Таллине [Л10]

○ 1977 — Сергей Дмитриевич Александренков (р. 04.03.1957 Глинк. р-н Смол. обл.) техник; 2 детей «X.97,98»

IX.88—98. [Резерв.]

IX.99. О л ь г а СТРУВЕ «VIII.92» (р. 30.01.1947 Тюмень) режиссёр, ок. Лгр. ин-т культуры (1969) [Л9]

∞ — Владлен Иванович Рылов (10.06.1943 Находка) авиац. техник, капитан; 1 сын «X.109»

IX.100. Т а м а р а САНИКИДЗЕ «VIII.94» (р. 20.04.1956 Тбилиси) ок. физ. фак. Тбил. ун-та, лаборант [Л5]

∞ — Зураб Александрович Шарашенидзе (р. 02.01.1951) ок. физ. фак. Тбил. ун-та, науч. работник; 2 сыновей «X.110, 111»

IX.101. Т а т ь я н а МЕРМАНИШВИЛИ «VIII.95» (р. 19.09.1956 Тбилиси) врач, ок. Тбил. мед. ин-т [Л5]

∞ — Григорий Ираклиевич Чачия (р. 1949) нейрохирург, ок. Тбил. мед. ин-т, канд. мед. н., доцент; 3 детей «X.112—114»

IX.102. А л е к с а н д р МЕРМАНИШВИЛИ «VIII.95» (р. 17.09.1961 Тбилиси) инж.-электрик, ок. Груз. политехн. ин-т, раб. на заводе; холост

IX.103. [Резерв.]

IX.104. Е л е н а ОТТЕН «VIII.98» (р. 14.01.1950 Новоград-Волынский УССР) инж.-теплотехник, ок. Груз. политехн. ин-т [Л5]

∞ — Сергей Павлович Лебедев (р. 19.04.1950) инж.-механик, ок. Груз. политехн. ин-т, раб. на металлург. з-де; 2 детей «X.116, 117»

IX.105. Н а т а л и я ОТТЕН «VIII.98» (р. 06.04.1959 Тбилиси) экономист, ок. Тбил. ун-т [Л5]

∞ — Игорь Юрьевич Таланов (р. 01.05.1957) экономист, ок. Тбил. ун-т; 2 дочери «X.118, 119»

IX.106. М а р и я ОТТЕН «VIII.98» (р. 08.11.1961 Тбилиси) студентка Тбил. акад. художеств [Л5]

∞ — Малхаз Георгиевич Самсонадзе (р. 10.03.1956) худ. редактор, ок. Тбил. акад. художеств; 1 дочь «X.120»

IX.107. М а р и я КАРАЧЕВЦЕВА «VIII.100» (р. 12.04.1953 Москва) ок. Моск. физ.-техн. ин-т (1977), раб. в Акад. наук СССР

∞ — Виктор Григорьевич Коваленко (р. 31.03.1955) ок. Моск. физ.-техн. ин-т (1978), раб. в Акад. наук СССР; бездетны

IX.108. Е в г е н и я КАРАЧЕВЦЕВА «VIII.100» (р. 12.04.1953 Москва) санитар, врач, ок. Лгр. мед. ин-т (1977), зав. лаб. санэпидстанции

∞ — Сергей Павлович Кожушный (р. 03.01.1956) ок. Моск. лесотехн. ин-т, лесничий; бездетны

IX.109. И с к а н д е р/Александр ГАСАНОВ «VIII.101» (р. 25.09.1947 пос. Бахт УзССР) архитектор

∞ — Ирина Александровна Недоводова (р. 01.05.1953); бездетны

IX.110. М е д и н а ГАСАНОВА «VIII.101» (р. 16.12.1950 пос. Бахт УзССР)

IX.111. З а р е м а/Римма ГАСАНОВА «VIII.101» (11.08.1954 пос. Бахт УзССР) [Л5]

∞ — Виктор Хабибулаевич Сулейманов (р. 04.04.1957); 1 дочь «X.123»

IX.112. М а р и н а Александровна ФЕДОРОВА «VIII.102» (р. 05.10.1947) [Л5]

∞ — Харис/Борис Омарович Кулахметов (р. 13.09.1941); 3 детей «X.124—126»

IX.113. В и к т о р и я ДАНИЛОВА «VIII.102» (р. 24.04.1965)

IX.114. С в е т л а н а ЯКИМОВА «VIII.103» (р.08.01.1962 Ташкент)

IX.115. О л ь г а ЯКИМОВА «VIII.103» (р. 16.09.1965 Ташкент)

IX.116. А н д р е й ЯКИМОВ «VIII.104» (р. 19.09.1969 Ташкент)

IX.117. Е в г е н и й ЯКИМОВ «VIII.104» (р. 27.01.1973 Ташкент)

IX.118. А н д р е й ВОРОНИН «VIII.107» (р. 24.09.1953 Лгр.) нач-к цеха в изд-ве; холост

IX.119. А л е к с е й ЖУЧКОВ «VIII.107» (р. 29.07.1963 Лгр.) ок. Лгр. фин.-экон. ин-т, раб. на заводе; холост

IX.120. Д м и т р и й БОРДЮГ «VIII.108» (р. 24.09.1965 Лгр.) студент; холост

IX.121. О л ь г а ОТТЕН «VIII.109» (р. 31.08.1970 Челябинск)

IX.122. А л е к с е й ОТТЕН «VIII.109» (р. 11.04.1974 Челябинск)

IX.123. Н а д е ж д а ОТТЕН «VIII.110» (р. 16.01.1971 Лгр.)

IX.124. К о н с т а н т и н ОТТЕН «VIII.110» (р. 10.08.1973 Лгр.)

IX.125—142. [Резерв.]

IX.143. Н. ЭКВИСТ «VIII.129»

IX.144. Г е о р г ЭКВИСТ «VIII.130» (р. 1955 Финляндия)

IX.144А. Г у д р у н ЭКВИСТ «VIII.130» (р. 1955 Финляндия)

IX.145. Н. ЭКВИСТ «VIII.131»

IX.146. [Резерв.]

IX.147. В а л ь т е р ПИКЛЬ «VIII.133»

IX.148. А н н-Изабелла ЦУКАЛЕ «VIII.135» (р. 23.05.1955) служащая

∞ — Кеййо Юслин (Juslin)

IX.149. Х а р р и ЦУКАЛЕ «VIII.136»

∞ — Сату Няятянен (Näätänen)

IX.150. П е т е р ЦУКАЛЕ «VIII.137» [Л12]

∞ — Арья Сиппонен (Sirponen); 2 дочери «X.163, 164»

IX.151. А р и ЦУКАЛЕ «VIII.137»; женат

IX.152. Ю х а ЦУКАЛЕ «VIII.137»

IX.153. К а й ЦУКАЛЕ «VIII.137»

IX.154. К л а у с ЦУКАЛЕ «VIII.137»

IX.155. Т и м о СОРЬОНЕН «VIII.138»

∞ — Карина Ренстрем (Renström); 2 детей «X.169, 170»

IX.156—169. [Резерв.]

IX.170. Г е р х а р д т ГЕРКЕ «VIII.156» (р. 19.11.1957 Брауншвайг)

IX.171. У л ь р и х ГЕРКЕ «VIII.156» (р. 24.07.1959 Брауншвайг)

∞ — Андреа Шольц (Scholz)

IX.172. К р и с т е л ь ГЕРКЕ «VIII.156» (р. 13.11.1961 Брауншвайг)

∞ — Михаэль Шольц (Scholz)

IX.173. А н р е а с ГЕРКЕ «VIII.156» (р. 19.09.1969 Брауншвайг)

IX.174. Т о р с т е н ВЕЙС «VIII.157» (р. 28.09.1972 Висбаден)

IX.175. К о н с т а н ц а БЕРЕНДТС «VIII.158» (р. 23.12.1980 бл. Мюнхена)

IX.176. К а р о л и н БЕРЕНДТС «VIII.158» (р. 07.06.1982 бл. Мюнхена)

IX.177. К а р и н-Иоганна НОТБЕК «VIII.161» (р. 13.04.1931 Магдебург) мед-сестра в Швеции [140; Л20]

∞ 1956 — Курт-Гарри-Эрик-Валериус Иоханссон (Johansson) (р. 03.02.1930 Стокгольм) столяр; 3 детей «X.189—191»

IX.178, 179. [Резерв.]

IX.180. Д е т л е в-Беренд-Иоганн НОТБЕК «VIII.164» (р. 20.08.1929 Нарва) администратор в Канаде [140]

∞ 1952 — Бирджит Блоом (Bloom) (р. 19.06.1934 Таллин) дочь прокуриса; 2 детей «X.194, 195»

IX.181. Б е н н о-Эдуард-Иоганн НОТБЕК «VIII.165» (р. 11.11.1931 Таллин) юрист в ФРГ, д-р права [140; А23]

∞ 1966 — Доррит Беркхольц (Berkholz) (р. 09.08.1929 Рига) дочь врача; 2 детей «X.196,197»

IX.182. А н г е л и к а-Дагмар-Иоганна НОТБЕК «VIII.165» (р. 17.12.1935 Таллин) [140; A23]

∞ 1962 — Клаус фон Кросиг (von Krosigk) (р. 20.11.1932 окр. Бернбург, Германия) инженер в ФРГ; 3 детей «X.198—200»

IX.183. А л е к с а н д р-Беренд-Иоганн ШТЕДИНГ «VIII.166» (11.12.1934 Таллин — 05.11.1943 Гарц)

IX.184. А н д р е а-Эрика ШТЕДИНГ «VIII.166» (р. 07.04.1936 Таллин) переводчица

∞ 1963 — Гейнц Ритценхофер (Ritzenhofer)

IX.185. М а р и а н н а ШТЕДИНГ «VIII.166» (р. 31.08.1943 Познань) [153]

∞ 1965 — Михель Хофман (Hoffmann); 1 дочь «X.203»

IX.186. П е т е р-Герман ШТЕДИНГ «VIII.166» (р. 22.01.1945 Гарц)

∞— Катрин Кречмар (Kretschmar)

IX.187—190. [Резерв.]

IX.191. Ю л и я НОТБЕК «VIII.171» (20.10.1960 Гессен, ФРГ)

IX.192. Б е т т и н а-Рената-Иоганна НОТБЕК «VIII.171» (23.08.1962 Бад-Хомбург, ФРГ)

IX.193. Габриэль-Беатрикс-Мария фон дер БРЮГГЕН «VIII.172» (р. 03.11.1951 Мюнхен) д-р филос. [A23]

∞ 1979 — Хубертус Рехберг (Rechberg) (р. 12.03.1948 Мюнхен) д-р экон.

IX.194. Венера-Карин-Люси фон дер БРЮГГЕН «VIII.172» (р. 17.06.1955 Кёльн)

∞ 1979 — Ульрих Хольман (Hollman) (р. 31.01.1951 Киль) торговец

IX.195. К р и с т е р ХЕЛЕНЕЛУНД «VIII.174А» (р. 1953) инженер

IX.195А. М и к а э л ХЕЛЕНЕЛУНД «VIII.174А» (р. 1955)

IX. 195В. С и к с т е н ХЕЛЕНЕЛУНД «VIII.174А» (р. 1958)

IX.195С. М а р и н а ХЕЛЕНЕЛУНД «VIII.174А» (р. 1959)

IX.195D. Р и х а р д ХЕЛЕНЕЛУНД «VIII.174А» (р. 1970)

IX.196. Ян-Эрик МИЛЬК «VIII.174В» (р. 15.11.1965 Хельсинки)

IX.196А. Л о т т а МИЛЬК «VIII.174В» (р. 18.08.1972 Хельсинки)

IX.197. А н н а РОМАНОВА «VIII.175» (р. 12.10.1963 Лгр.) ок. Лгр. технол. ин-т (1987)

IX.198. А л е к с е й РОМАНОВ «VIII.175» (р. 05.12.1968 Лгр.)

IX.199. Н а т а л и я ГЕККЕР «VIII.176» (р. 06.01.1954 Москва) журналист, ок. Моск. ун-т (1978), чл. Союза журн. СССР; 1 дочь «X.217»

IX.200. Р о м а н ГЕККЕР «VIII.177» (р. 22.01.1973 Москва)

IX.201. Н а д е ж д а ГЕККЕР «VIII.177» (р. 20.06.1978 Москва)

IX.202—212. [Резерв.]

IX.213. Р о т р а у т БРОССЕ «VIII.189» (р. 19.04.1940 Врешен)

IX.214. Эрнст-Кристиан БРОССЕ «VIII.189» (р. 20.01.1944 Врешен)

IX.215. Ганс-Иохен ФИРКС «VIII.190» (р. 01.05.1937 Рига)

IX.216. Клаус-Дитер ФИРКС «VIII.190» (р. 28.04.1939 Рига)

IX.217. М а р е й л ь ФИРКС «VIII.190» (р. 24.03.1941 Врешен) врач, д-р мед.

IX.218. К р и с т о ф ФИРКС «VIII.190» (р. 20.08.1943 Врешен) инженер,

IX.219—237. [Резерв.]

IX.238. М а д е л е н-Иозефина ЭНКЕЛЬ «VIII.210» (р. 21.02.1958 Стокгольм) служащая [L20]

∞ 1981 — Пер-М а р т и н Саломонсон (Salomonsson) (р. 12.09.1956 Швеция) радиоинженер, фермер; 2 детей «X.256, 257»

IX.239. Шарлотта-И о з е ф и н а ЭНКЕЛЬ «VIII.210» (р. 21.10.1961 Ерфела, Швеция) художница; незамужняя

IX.240. Андрес-Пауль-К р и с т о ф е р ЭНКЕЛЬ «VIII.210» (р. 24.10.1966 Ерфела, Швеция) студент

IX.241. П е т е р-Георг-Хольгер ЭНКЕЛЬ «VIII.211» (р. 12.12.1952 Упсала, Швеция) уч. в Стокгольм. ун-те, служащий в рекламном агенстве [Л20]

∞<sub>1</sub> — Гунилла Дрангель (Drangel); бездетны

∞<sub>2</sub> 1987 — А н н е л и-Шарлотта Нильссон (Nilsson) (р. 03.04.1964 Швеция); 1 дочь «X.260»

IX.242. Гуввор-Айна-Н а д и н ЭНКЕЛЬ «VIII.211» (р. 25.09.1954 Лунд, Швеция) [Л20]

∞ — Рудольф Шаттауер (Schattauer) (р. 28.11.1948 Мюнхен) инженер; 1 сын «X.261»

IX.243. Мария-Кристина ЭНКЕЛЬ «VIII.211» (р. 18.03.1957 Лунд, Швеция) [Л20]

∞ 1982 — Й о н-Хуго Йенссон (Jerpsson) (р. 03.11.1954 Швеция) фермер; 2 детей «X.262,263»

IX.244. Эмма-Карин-Т е р е з а ЭНКЕЛЬ «VIII.211» (р. 31.07.1962 Лунд, Швеция) служащая; незамужняя

IX.245. Т о б и а с-Патрик ЭНКЕЛЬ «VIII.211» (р. 17.09.1986 Карлсхамн, Швеция)

IX.246. Иохан-Хенрик ЭНКЕЛЬ «VIII.212» (р. 17.02.1970 Лунд)

IX.247. А н д р е а-Элизабет ЭНКЕЛЬ «VIII.212» (р. 08.09.1971 Лунд)

IX.248. Т о м а с ЭНКЕЛЬ «VIII.212» (р. 19.12.1972 Лунд)

IX.249. М а р т и н ЭНКЕЛЬ «VIII.212» (р. 02.07.1974 Лунд)

IX.250. Анна-С о ф и я ЛУНДКВИСТ «VIII.213» (р. 16.11.1966 Лунд)

IX.251. Карл-К р и с т о ф е р ЛУНДКВИСТ «VIII.213» (р. 16.01.1970 Лунд)

IX.252. [Резерв.]

IX.253. Е л е н а ШУЛЬГИНА «VIII.215» (р. 1958 Лгр.)

IX.254. И р и н а ШУЛЬГИНА «VIII.215» (р. 1966 Лгр.) медсестра

IX.255. О л ь г а ЛОНЧ «VIII.216» (р. 23.04.1962 Лгр.) ок. Лгр. ин-т точн. мех. и оптики

∞ — Геннадий Александрович Никаноров (р. 1962) военнослужащий

IX.256. А л е к с а н д р ТКАЧЕВ «VIII.217» (р. 19.04.1967 Лгр.) радиомеханик

IX.257. А л е к с а н д р ФОЙГТ «VIII.218» (р. 28.01.1958 Новокузнецк) инж.-строитель, прораб

IX.258. В л а д и с л а в ФОЙГТ «VIII.218» (р. 27.09.1970 Новокузнецк)

IX.259. Т а т ь я н а ФОЙГТ «VIII.218» (р. 26.03.1973 Новокузнецк)

IX.260. Ю р и й ФОЙГТ «VIII.219» (р. 28.10.1970 Ухта)

IX.261. А л е к с е й ФОЙГТ «VIII.219» (р. 11.10.1974 Ухта)

IX.262. Д м и т р и й ФОЙГТ «VIII.219» (р. 14.11.1984 Ухта)

IX.263. С в е т л а н а ФОЙГТ «VIII.220» (р. 19.09.1983 Ст. Оскол)

IX.264. Е к а т е р и н а ФОЙГТ «VIII.221» (р. 20.03.1983 Новокузнецк)

IX.265. Леонард-Эммануэль ЭЙЛЕР «VIII.222» (р. 15.01.1974 Цюрих)

IX.266. Петер-Патрик Эйлер «VIII.222» (р. 15.01.1974 Цюрих)

IX.267. Д м и т р и й ЭЙЛЕР «VIII.222» (р. 22.11.1981 бл. Цюриха)

IX.268. Г а н с ГЕРБЕР «VIII.224» (р. 02.02.1965 Цюрих) химик

IX.269. К р и с т и а н ГЕРБЕР «VIII.224» (р. 07.02.1969 Цюрих)

IX.270. П е т е р ЭЙЛЕР «VIII.225» (р. 25.01.1972 Катманду, Непал)

IX.271. Н и н а ЭЙЛЕР «VIII.225» (р. 07.07.1975 бл. Берна)

- IX.272. А л е к с а н д р а ОБОЛЕНСКАЯ «VIII.226» (р. 27.11.1947 Прага) лингвист, ок. Джорджтаун. ун-т (1968) и пед. курсы Колумб. ун-та (1970) [165; Л4]  
 ○ 1972 — Луис-Фернандо Лореда (Lloreda) (р. 24.08.1945 Богота) адвокат в Колумбии, д-р права; 2 сына «X.292,293»
- IX.273. Е к а т е р и н а/Катарина ОБОЛЕНСКАЯ «VIII.227» (р. 17.07.1961 Кур, Швейцария) медсестра [165<sup>П</sup>]
- IX.274. М и х а и л ОБОЛЕНСКИЙ «VIII.227» (р. 23.05.1962 Базель) антиквар [165<sup>П</sup>]  
 ○ 1985 — Эльза-Маргарет Селкирк (Selkirk) (р. 12.12.1954 Англия) учительница
- IX.275. К о н с т а н т и н ОБОЛЕНСКИЙ «VIII.227» (р. 13.07.1971 Листаль, Швейцария) [165<sup>П</sup>]
- IX.276. Т а т ь я н а АФАНОСОВА «VIII.228» (р. 11.02.1963 Калуга) инженер, ок. Лгр. инж.-стр. ин-т (1985)
- IX.277. А н д р е й КУЛЕВ «VIII.229» (р. 01.01.1966 Москва) студент Моск. ун-та
- IX.278. Ю р и й СКАЛОН «VIII.230» (р. 18.03.1970 Москва)
- IX.279—285. [Резерв.]
- IX.286. А л е к с а н д р ЛИПИЛИН «VIII.238» (р. 02.08.1977 Рига)
- IX.287. В и к т о р ЛИПИЛИН «VIII.238» (р. 20.08.1986 Рига)
- IX.288. Даниэлла КОЧЕТКОВА «VIII.239» (р. 01.07.1984 Рига)
- IX.289—293. [Резерв.]
- IX.294. П е т р ШЕСТАКОВ «VIII.245» (р. 10.02.1975 Лгр.)
- IX.295. С о ф ь я ШЕСТАКОВА «VIII.246» (р. 10.08.1974 Лгр.)
- IX.296. Н а т а л ь я ШЕСТАКОВА «VIII.246» (р. 11.09.1976 Лгр.)
- IX.297—301. [Резерв.]
- IX.302. Г е н н а д и й ПОПОВ «VIII.253» (р. 11.03.1955 Канск) работник службы быта [Л2]  
 ○ — Галина Ивановна Н. (р. 12.05.1959 Канск) техник-строитель; 1 сын «X.323»
- IX.303. И г о р ь БОЛТЕНГАГЕН «VIII.253» (р. 05.09.1960 Красноярск. кр.) физик, ок. Новосибир. ун-т (1982), раб. в Сиб. отд. Акад. наук СССР [Л2]  
 ○ 1980 — Ольга Дмитриевна Маркова (р. 30.12.1959 Новосибирск) техник-модельер; 1 сын «X.324»
- IX.304—312. [Резерв.]
- IX.313. Е л е н а КОМИССАРОВА «VIII.263» (р. 16.05.1960 Москва) инж.-механик, ок. Моск. станкоинстр. ин-т (1986) [Л16]  
 ○ 1980 — Евгений Анатольевич Зиновьев (р. 24.11.1954 Москва) инженер, ок. Моск. станкоинстр. ин-т, раб. в Ин-те пробл. управл. Акад. наук СССР; 1 сын «X.334»
- IX.314. С е р г е й ПОПОВ «VIII.263» (р. 03.04.1971 Москва)
- IX.315. В е р а ДБЯКОНОВА «VIII.264» (р. 18.04.1973 Москва)
- IX.316. Д м и т р и й ДБЯКОНОВ «VIII.264» (р. 14.03.1983 Москва)
- IX.317. Н и к о л а й КОЗОРЕЗОВ «VIII.265» (р. 19.12.1982 Москва)
- IX.318. Р у с л а н а СОБОЛЬ «VIII.266» (р. 10.06.1971 Трускавец Львов. обл.)
- IX.319. С е р г е й СОБОЛЬ «VIII.266» (р. 03.02.1974 Стебник Львов. обл.)
- IX.320. А л и н а ШИПОВА «VIII.267» (р. 26.01.1979 Москва)
- IX.321. Н а т а л и я БРУНС «VIII.268» (р. 04.04.1956 Симферополь) лингвист, филолог, ок. Моск. ун-т (1981), раб. в н.-иссл. ин-те [Л19]  
 ○ 1979 — Николай Евгеньевич Пискунов (р. 24.10.1957 Москва) астроном, ок. Моск. ун-т (1980), раб. в Астросовете Акад. наук СССР, канд. физ.-мат. н.; 2 дочери «X.342, 342А»



IX.322. А л е к с а н д р БРУНС «VIII.268» (р. 26.11.1961 Симферополь) инж.-программист, ок. Севастоп. приборостр. ин-т (1985), радиоинженер в н.-иссл. ин-те [Л119]

○ 1984 — Людмила Станиславовна Линецкая (р. 19.06.1962 Северодонецк) инж.-программист, ок. Севастоп. приборостр. ин-т (1985); 1 дочь «X.343»

IX.323. А л е к с е й Валериевич АХРЕМЕНКО «VIII.269» (р. 20.03.1976 Симферополь)

IX.324. А н а с т а с и я Валериевна АХРЕМЕНКО «VIII.269» (р. 15.03.1978 Симферополь)

IX.325. И в а н САВКО «VIII.270» (р. 10.06.1975 Москва)

IX.326. А н н а Михайловна КОЗОДАЕВА «VIII.272» (р. 07.12.1978 Москва)

IX.327. Жан-Кристоф БОТТ «VIII.273» (р. 31.01.1950 Лозанна)

IX.328. Фредерик-Владимир БОТТ «VIII.273» (р. 28.06.1982 Лозанна)

IX.329—332. [Резерв.]

IX.333. И р и н а МАНУИЛОВА «VIII.278» (р. 01.02.1975 Москва)

IX.334. К о н с т а н т и н ТИТОВ «VIII.279» (р. 16.04.1980 Москва)

IX.335. Е л е н а ТИТОВА «VIII.279» (р. 20.03.1983 Москва)

IX.336. А н н а ПОЛЕВАЯ «VIII.281» (р. 06.08.1973 Москва)

IX.337. [Резерв.]

IX.338. Н и к о л а й БАРАНОВ «VIII.283» (р. 20.01.1979 Москва)

IX.339. А л е к с а н д р а БАРАНОВА «VIII.283» (р. 11.07.1982 Москва)

IX.340. Н и к о л а й ЭЙЛЕР «VIII.284» (р. 10.06.1974 Москва)

IX.341—353. [Резерв.]

IX.354. К р и с т и н а ЛИЗЕР «VIII.298» (р. 1984 ФРГ)

IX.355. [Резерв.]

IX.356. Т а т ь я н а ГОЛЬМДОРФ «VIII.301» (р. 25.12.1951 Стерлитамак) инженер, ок. Лгр. кораблестр. ин-т (1982)

IX.357. А л е к с а н д р а ГОЛЬМДОРФ «VIII.301» (р. 14.04.1960 Пикалёво Лгр. обл.) ок. Петрозав. стр. техникум (1986)

○ 1980 — Николай Аркадьевич Зыков (р. 17.08.1959 Киров. обл.) электрик; 3 сына «X.378—380»

IX.358. Н и к о л а й ЕВСЕЕВ «VIII.302» (р. 1974 Ейск)

IX.359. Н а т а л ь я ЕВСЕЕВА «VIII.302» (р. 1981 Ейск)

IX.360. В и к т о р и я ЗАБОЛОЦКАЯ «VIII.303» (р. 1960 Кисловодск)

○ — Виктор Самойлович Марголин, инженер; 2 детей; «X.383, 384»

IX.361. М а р и я ЗАБОЛОЦКАЯ «VIII.303» (р. 1968 Кисловодск)

IX.362. А л е к с е й ЗАБОЛОЦКИЙ «VIII.303» (р. 1972 Кисловодск)

IX.363. Т а т ь я н а ТРЕГУБЕНКО «VIII.305» (р. 1961 Кисловодск)

○ — N. Атаманюк

IX.364. И л ь я ПРИХОДЬКО «VIII.305» (р. 1970)

IX.365—367. [Резерв.]

IX.368. А н а с т а с и я КИНДЯКОВА «VIII.307» (р. 06.04.1974 Моск. обл.)

IX.369. М а р и я ВИНОГРАДОВА «VIII.308» (р. 17.10.1984 Михнево Моск. обл.)

## X ПОКОЛЕНИЕ

X.1—25. [Резерв.]

X.26. Ф р и ц-Бернгард БЕККЕР «IX.26» (р. 12.01.1959 Гольштейн, ФРГ)

X.27. К л а у с БЕККЕР «IX.26» (р. 08.12.1960 Гольштейн)

- Х.28. В о л ь ф г а н г БЕККЕР «IX.26» (р. 19.11.1962 Гольштейн)  
 Х.29. М а й н г а р д БЕККЕР «IX.26» (р. 15.06.1967 Гольштейн)  
 Х.30. И н г е б о р г БЕККЕР «IX.26» (р. 25.11.1969 Гольштейн)  
 Х.31—33. [Резерв.]  
 Х.34. К р и с т и а н ЧЕРНАЙ «IX.30» (р. 05.09.1982)  
 Х.35—41. [Резерв.]  
 Х.42. Г л е б ЛАРИН «IX.38» (р. 24.01.1967 Харьков)  
 Х.43. Т а м и л а ЛАРИНА «IX.38» (р. 24.07.1977 Харьков)  
 Х.44. Н и к о л а й ЧЕРНАЙ «IX.39» (р. 02.10.1971 Харьков)  
 Х.45. А л е к с а н д р ЧЕРНАЙ «IX.39» (р. 02.11.1973 Харьков)  
 Х.46. И р и н а ЧЕРНАЙ «IX.40» (р. 03.01.1966 Харьков)  
 ○ 1984 — Олег Викторович Корнев (р. 19.09.1962 Харьков) инженер, ок.  
 Харьков. автодорожн. ин-т; 2 детей: Анна (р. 26.05.1985 Брежнев), Владислав  
 (р. 18.01.1987)  
 Х.47. О л е г ЧЕРНАЙ «IX.40» (р. 22.03.1974)  
 Х.48. Е к а т е р и н а ЧЕРНАЙ «IX.40» (р. 23.10.1977)  
 Х.49. А л е к с а н д р Вадимович ЧЕРНАЙ «IX.41» (р. 20.06.1980)  
 Х.50—52 [Резерв.]  
 Х.53. А н д р е й ПЕТКЯВИЧЮС «IX.44» (р. 14.07.1969)  
 Х.54. Т а д а с КОСЦЮШКА «IX.45» (р. 06.08.1979)  
 Х.55—61. [Резерв.]  
 Х.62. И г о р ь АБРАМЧИК «IX.53» (р. 26.05.1980 Клайпеда)  
 Х.63. В а д и м АБРАМЧИК «IX.53» (р. 26.05.1980 Клайпеда)  
 Х.64. А у р е л и я ЧАПАС «IX.54» (р. 18.06.1980 Клайпеда)  
 Х.65. В и к т о р и я ЧАПАС «IX.54» (р. 18.06.1980 Клайпеда)  
 Х.66. Р и м м а ЧАПАС «IX.54» (р. 09.07.1982 Клайпеда)  
 Х.67. А л е к с а н д р а / О л е с я АБРАМЧИК «IX.55» (р. 07.10.1983 Клайпеда)  
 Х.68—91. [Резерв.]  
 Х.92. Л и д и я ГРИГОР «IX.80» (р. 02.01.1951 Лгр.) инж.-электротехник, ок.  
 Лгр. технол. ин-т  
 ○ — Вадим Николаевич Булушев (р. 14.06.1946 Ефремов Тульск. обл.) механик;  
 1 сын: Вадим (р. 21.04.1980 Лгр.)  
 Х.93. Ю р и й ВАСИЛЬЕВ «IX.81» (р. 1959 Киев) инженер; женат  
 Х.94. П а в е л ВАСИЛЬЕВ «IX.81» (р. 1967 Киев)  
 Х.95. О л и в е р ПЕНДОРФ «IX.83А» (р. 31.08.1956 Твистринген, ФРГ) инж.-  
 электронщик, ок. Техн. ун-т в Зап. Берлине (1985)  
 ○ 1934 — Елена Фалькенштейн (Falkenstein) (р. 05.08.1952)  
 Х.96. В и л ь г е л ь м Вильгельмович СТРУВЕ «IX.86» (р. 20.08.1986 Таллин)  
 Х.97. Е в г е н и й АЛЕКСАНДРЕНКОВ «IX.87» (р. 03.02.1978 Таллин)  
 Х.98. М а р и н а АЛЕКСАНДРЕНКОВА «IX.88» (р. 02.07.1981 Таллин)  
 Х.99—108. [Резерв.]  
 Х.109. А л е к с е й РЫЛОВ «IX.99» (р. 05.01.1975 Польша)  
 Х.110. А л е к с а н д р ШАРАШЕНИДЗЕ «IX.100» (р. 05.09.1979 Тбилиси)  
 Х.111. К о н с т а н т и н ШАРАШЕНИДЗЕ «IX.100» (р. 04.01.1983 Тбилиси)  
 Х.112. Н и н а ЧАЧИЯ «IX.101» (р. 21.06.1980 Тбилиси)  
 Х.113. М а р и я ЧАЧИЯ «IX.101» (р. 25.02.1982 Тбилиси)  
 Х.114. Г р и г о р и й ЧАЧИЯ «IX.101» (р. 14.01.1985 Тбилиси)  
 Х.115. [Резерв.]  
 Х.116. Ю л и я ЛЕБЕДЕВА «IX.104» (р. 11.05.1973)  
 Х.117. М а й я ЛЕБЕДЕВА «IX.104» (р. 29.09.1976)

- X.118. Е л е н а ТАЛАНОВА «IX.105» (р. 19.01.1980 Тбилиси)  
 X.119. С т а н и с л а в а ТАЛАНОВА «IX.105» (р. 29.08.1986 Тбилиси)  
 X.120. Т е о н а САМСОНАДЗЕ «IX.106» (р. 02.10.1984 Тбилиси)  
 X.121, 122. [Резерв.]  
 X.123. А л и с а СУЛЕЙМАНОВА «IX.111» (р. 29.06.1980 Ташкент)  
 X.124. Р а у л ь КУЛАХМЕТОВ «IX.112» (р. 16.09.1969)  
 X.125. Ю л и я КУЛАХМЕТОВА «IX.112» (р. 23.01.1973)  
 X.126. А р т у р КУЛАХМЕТОВ «IX.112» (р. 30.07.1985)  
 X.127—162. [Резерв.]  
 X.163. В е р а ЦУКАЛЕ «IX.150»  
 X.164. М и р ь я ЦУКАЛЕ «IX.150»  
 X.165—168. [Резерв.]  
 X.169. Ким-Хенрик СОРЬОНЕН «IX.155»  
 X.170. Т е а СОРЬОНЕН «IX.155»  
 X.171—188. [Резерв.]  
 X.189. Дав-П е т е р ИОХАНССОН «IX.177» (р. 01.02.1957 Иттерселё, Швеция)  
 морск. офицер  
 ○ 1985 — Керстин-Ц е ц л и я-Элизабет Карлссон (р. 16.01.1961 Швеция);  
 3 детей: Т о б и а с-Георг-Эрик-Валериус (р. 17.03.1978 Карлсруна), Э м м а-Сара-  
 Цецилия (р. 09.02.1982 Карлсруна), Дав-Ф р е д е р и к-Валериус (р. 21.04.1984  
 Карлсруна).  
 X.190. А н н-Барбара-Элизабет ИОХАНССОН «IX.177» (р. 14.05.1960 Иттерселё,  
 Швеция) служащая; незамужняя  
 X.191. М о н и к а-Элизабет ИОХАНССОН «IX.177» (р. 15.03.1964 Иттерселё, Шве-  
 ция) служащая; незамужняя  
 X.192, 193 [Резерв.]  
 X.194. К р и с т и а н -Отто-Иоганн НОТБЕК «IX.180» (р. 03.06.1956 Торонто)  
 X.195. Э в е л и н -Гизела-Иоганна НОТБЕК «IX.180» (р. 01.05.1959 Торонто)  
 X.196. Э л и н о р -Кристиана-Иоганна НОТБЕК «IX.181» (р. 21.04.1967 Ганновер)  
 X.197. Бернд-Арвид-Иоганн НОТБЕК «IX.181» (р. 27.05.1969 Ганновер)  
 X.198. Д о н а т а -Ингрид-Иоганна КРОЗИГ «IX.182» (р. 07.05.1963 Вестфалия)  
 X.199. К а р и н -Дагмара-Ульрика КРОЗИГ «IX.182» (р. 29.12.1964 бл. Кёльна)  
 X.200. Б е н и т а -Луиза-Генриетта КРОЗИГ «IX.182» (р. 22.02.1966 бл. Кёльна)  
 X.201, 202. [Резерв.]  
 X.203. А н а с т а с и я ХОФМАН «IX.185» (р. 1965)  
 X.204—216. [Резерв.]  
 X.217. О л ь г а Сергеевна САФОНОВА «IX.199» (р. 08.07.1983 Москва)  
 X.218—255. [Резерв.]  
 X.256. Э р и к а -Карин-Мария ЭНКЕЛЬ «IX.238» (р. 02.05.1982 Швеция)  
 X.257. М а г н у с -Карл ЭНКЕЛЬ «IX.238» (р. 17.03.1984 Швеция)  
 X.258, 259. [Резерв.]  
 X.260. Э л и з а б е т -Мария-Тереза ЭНКЕЛЬ «IX.241» (р. 02.11.1985 Карлсхамн,  
 Швеция)  
 X.261. П е т е р -Фридрих-Оскар ЭНКЕЛЬ «IX.242» (р. 09.09.1982 Мюнхен)  
 X.262. М и х а э л ь -Ола-Патрик ИЕПССОН «IX.243» (р. 17.12.1981 Брэкне-Хоби,  
 Швеция)  
 X.263. М а р и я -Эмма-София ИЕПССОН «IX.243» (р. 01.09.1983 Брэкне-Хоби,  
 Швеция)  
 X.264—291. [Резерв.]  
 X.292. Х о з е ЛОРЕДА «IX.272» (р. 09.06.1974 Богота)

- Х.293. С е р ж ЛОРЕДА «IX.272» (р. 31.10.1976 Богота)  
 Х.294—322. [Резерв.]  
 Х.323. Л е о н и д ПОПОВ «IX.302» (гр. 29.06.1984 Канск)  
 Х.324. М а р к БОЛТЕНГАГЕН «IX.303» (р. 08.05.1981 Новосибирск)  
 Х.325—333. [Резерв.]  
 Х.334. М а к с и м ЗИНОВЬЕВ «IX.313» (р. 14.04.1981 Москва)  
 Х.335—341. [Резерв.]  
 Х.342. С о ф ь я ПИСКУНОВА «IX.321» (р. 08.08.1980 Москва)  
 Х.342А. Е в г е н и я ПИСКУНОВА «IX.321» (р. 08.10.1987 Москва)  
 Х.343. А л е к с а н д р а БРУНС «IX.322» (р. 24.10.1984 Севастополь)  
 Х.344—377. [Резерв.]  
 Х.378. Р о м а н ЗЫКОВ «IX.357» (р. 19.11.1981 Ковдор Мурман. обл.)  
 Х.379. К о н с т а н т и н ЗЫКОВ «IX.357» (р. 09.10.1983 Ковдор Мурман. обл.)  
 Х.380. О л е г ЗЫКОВ «IX.357» (р. 20.06.1987 Ковдор Мурман. обл.)  
 Х.381—382. [Резерв.]  
 Х.383. Б о р и с МАРГОЛИН «IX.360» (р. 1980 Кисловодск)  
 Х.384. И р и н а МАРГОЛИНА «IX.360» (р. 1980 Кисловодск)

#### ПРИМЕЧАНИЯ

Некоторые из приведенных ниже примечаний связаны с противоречивыми данными о годах рождения включенных в родословную роспись лиц. Вполне надежные данные о датах рождения можно получить только по выпискам из метрических книг, которыми мы, как правило, не располагаем. Послужные (формулярные) списки чиновников и офицеров прошлого века, откуда черпались часто сведения о времени рождения их детей, содержат не всегда точные, а в первой половине века иногда заведомо искаженные сведения об их возрасте (возраст сыновей иногда завышался в интересах их более раннего продвижения, а для дочерей соответственно уменьшался). Встречаются ошибки и в роскошно изданных под покровительством вел. кн. Николая Михайловича «Некрополях» [42, 65, 70].

Разительным примером ненадежности вторичных источников документальной информации является хранящееся в государственном архиве [А1] дело о выплате пенсии вдове придворного врача Карла Эйлера «П.5», второго сына Л. Эйлера. Скончавшись в 1790 г. на пятидесятом году жизни, К. Эйлер оставил 48-летнюю вдову с 19-летним сыном и пятью дочерьми в возрасте от 9 до 20 лет. Согласно петровскому морскому указу 1720 г., действовавшему в этом случае, пенсия назначалась вдове (пожизненная или до замужества при ее возрасте свыше 40 лет, а также при бесперспективном для повторного выхода замуж состоянии здоровья, и единовременное пособие при возрасте до 40 лет), сыновьям до достижения ими 10 лет и дочерям соответственно до 15 лет. Таким образом, из детей К. Эйлера на пенсию могли претендовать только две дочери, причем одна из них сроком всего на несколько месяцев. Однако в казенных канцеляриях нашлись сочувствовавшие вдове чиновники. В официальных пенсионных бумагах, содержащих якобы данные из подлинных документов, возраст всех ее дочерей оказался существенно уменьшенным: всем им был приписан возраст от неполных пяти до неполных 12 лет! В результате общая сумма пенсионного обеспечения дочерей была увеличена в 5—6 раз.

Заключив этим примером вступительные замечания, переходим непосредственно к примечаниям по тексту родословной росписи.

П.5. В некоторых источниках [131, 136] в числе дочерей К. Эйлера «П.5» указывается, помимо включенных в роспись, еще Хедвига (~1770 — 25.12.1809 Выборг), вышедшая якобы замуж за офицера Самойло / Самуэля-Гидеона Тандефельта (Tandefelt) (18.05.1733 — 12.09.1787), вступившего в русскую службу в 1759 г. (секунд-майор, 1778). Предположение о существовании Хедвиги Эйлер основано, возможно, на неправильном прочтении записи о смерти дочери Самойло Тандефельта Хедвиги-Элеоноры, вдовы премьер-майора Николая Эйлерта.

III.8. Согласно И. А. Эйлеру [A25] у И. Я. Делена после смерти жены в 1780 г. осталось только шестеро детей.

III.8. Согласно [139] Д. Коллинс, сын разорившегося шотландского купца, имел с Ш. Эйлер 14 детей. По его собственным словам [A24] к сентябрю 1800 г. у него было три сына и три дочери. В связи с этим шестым среди его детей в росписи указан Вильгельм «IV.24».

III.10. П. И. Эйлер был женат на русской [A24], по некоторым сведениям он не имел детей.

III.13. По некоторым сведениям [A24] жена Л. Эйлера «III.13» была русская, Христина [114] или Мария [136] Ритмейстер была, по-видимому, дочерью придворного врача Вильгельма Ивановича Ритмейстера (~1758—1834), уроженца Ангальт-Бернбургского герцогства [65; A5]. Одна из дочерей Л. Эйлера — Мария «IV.38» похоронена в Павловске вместе с сыном В. И. Ритмейстера Павлом (1806—1875) [65; A5].

III.15. Согласно [A24] К. Болтенгаген имел с Е. Эйлер 13 детей, многие из которых скончались в младенчестве. Потомки К. И. Болтенгагена получили в начале XX в. диплом на Рос. дворянство с гербом.

III.44. Сведения о Ф. К. Лобеданке [125, 136] не удалось подтвердить русскими источниками.

III/IV. Согласно [109] это некий Петр Николаевич Эйлер. Судя по всему, в [17] допущена перешедшая в [109] описка, и речь здесь идет не об Эйлере, а о П. Эйлерте [A2].

IV.46A. Августа Болтенгаген согласно [A24] не числится среди детей Карла Болтенгагена «III.15<sup>M</sup>», Возможно, что она не относится к потомкам Л. Эйлера.

IV.73, 73A. Согласно [65] вместе с А. Бекманом похоронена Розалия Бекман (24.11.1809 — 01.09.1826). Либо это его сестра, о которой нет других сведений (и на основании этого она условно внесена в роспись под шифром «IV.73A»), либо жена, у которой в [65] искажены годы жизни.

IV.75. Согласно [70] Анна Александровна Фейхтнер, урожденная Бекман (25.04.1813 — 14.04.1880), похоронена с К. В. Фейхтнером (13.04.1820 — 31.01.1862). Но К. Фейхтнер женился на Аделаиде Бекман, дочери полковника Александра Бекмана, в 1856 г., причем согласно петербургским метрическим книгам [A5] жениху было 36 лет, а невесте 28, т. е. она родилась около 1827 г. С другой стороны, согласно Выборгским метрическим книгам [A23] Анна-Благодина-София-Адельгейд Бекман действительно родилась там в 1813 г.

IV.81. В большинстве источников указана неверная дата смерти П. К. Эйлера: 13.02.1882.

V.90. В архивных документах Ф. К. Болтенгаген именуется только Федором или Фридрихом, но в «Адресе-календаре» [39] значится всюду Эдуардом Карловичем.

V.113. Согласно [70] Н. В. Рукин р. 18.12.1851.

V.113A. Согласно [70] А. В. Рукин р. 06.02.1852.

V.114,115. А. А. и М. А. Эйлерам, первоначально носившим фамилию Шаховских, разрешено носить фамилию Эйлер согласно прошению Н. П. Эйлера «IV.78» с 1882 г. [A5].

VI.159. Марии Фойгт разрешено носить фамилию Фойгт согласно прошению В. К. Фойгта «V.95» с 1887 г. [A5].

VII.27. Согласно сообщению Е. Н. Петровой «VII.33» Е. А. Чернай была замужем за офицером кн. Константином Ромодановским. В Самаре, где жила перед первой мировой войной Е. А. Чернай, учился в гимназии будущий врач Константин Владимирович Ромодановский (1889—1968), окончивший Казанский университет (1912) и работавший впоследствии заведующим кафедрой в Омском медицинском институте (1921—1931). Во время первой мировой и гражданской войн он был на театре военных действий, а затем в 1923 г. женился на З. А. Краснопевцевой.

VII.35. А. Н. Чернай имел 4 детей: VIII.53A. Георгий (р. 02.10.1925) художник; женат, 2 детей (IX.56. Яков; IX.56A. Анна). VIII.53B. Елена (р. 15.04.1928); ∞ 1945 — Джон Ковальский, 1 сын (IX.56B. Леонид, р. 1948, архитектор). VIII.53C. Александр (р. 1930) отст. офицер США, служащий; женат, бездетен. VIII.53D. Сергей (р. 28.08.1938) авиац. офицер США, полковник; женат, 3 детей (IX.56C. Наталия, р. 1968; IX.56D. Виктория, р.1970; IX.56E. Андрей). Все дети А. Н. Черная родились в Литве, а внуки — в США [166].

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

#### І. ЛИТЕРАТУРА <sup>4</sup>

1. Адрес-календарь Курляндской губернии. Митава, 1891—1913 (ПАЗ, 5269\*).
2. Академия наук СССР. Персональный состав: В 2 кн. М.: Наука, 1974. Кн. 1. 1724—1917.
3. Акт 25-летнего юбилея Главного педагогического института. СПб., 1853.
4. *Апухтин В. Р.* Орловское дворянство в Отечественную войну. Орёл, 1913.
5. А. С. Попов в характеристиках и воспоминаниях современников. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1958.
6. *Ахматов В.* Виктор Егорович Фус // Зап. по гидрогр. 1916. Т. 40, вып. 4. С. 671—681.
7. *Барановский Г. В.* Юбилейный сборник сведений о деятельности бывших воспитанников Института гражданских инженеров. СПб., 1893 (ПАЗ, 3527).
8. *Белоголовый Н. А.* Воспоминания. 4-е изд. СПб., 1901. С. 478.
9. Биографический словарь профессоров и преподавателей имп. Юрьевского, б. Дерптского, университета за 100 лет существования, 1802—1902. Юрьев, 1902. Т. 1 (ПАЗ, 3347).
10. Большая Советская Энциклопедия: В 30 т. 3-е изд. М., 1970—1978.
11. *Бутурлин М. Д.* Записки графа М. Д. Бутурлина // Рус. архив. 1898. Кн. 6. С. 303—331.
12. Весь Петербург. СПб., 1894—1914. Весь Петроград. Пгр., 1915—1923 (ПАЗ, 4527). Весь Ленинград. Л., 1924—1935.
13. Весь Харьков. Харьков, 1911—1917 (ПАЗ, 4557).
14. *Воронов П. Н., Бутовский В. Д.* История лейб-гвардии Павловского полка. СПб., 1875 (ПАЗ, 1934).
15. Вся Москва. М., 1875—1917 (ПАЗ, 4128\*).
16. В. Ф. Геккер (Некролог) // Зодчий. 1903. Т. 32, № 2. С. 23—24.
17. Высочайшие приказы о чинах военных. СПб.—Пгр., 1776—1917 (ПАЗ, 1748; имен. указ. для 1816—1834, 1836—1848 и 1860 гг.).
18. Галерея государственных, общественных и торгово-промышленных деятелей России. СПб., 1909 (ПАЗ, 21)
19. *Геккер С. Ф., Рогожникова Р. П.* Ленинградские лексикографы во время войны // Рус. речь. 1985. № 3. С. 19—27.
20. *Голицын П. П.* Список дворянских родов Новгородской губернии. Новгород, 1910 (ПАЗ, 4251).
21. Дворянское сословие Тульской губернии. Тула, 1905. Т. 9 (ПАЗ, 4704).
22. *Жебылев Н. Г.* Исторический очерк деятельности Харьковского института благородных девиц за 100 лет его существования. Харьков, 1912.
23. *Жиркевич И. С.* Записки // Рус. старина. 1874. Т. 9—12.
24. Историческая записка 75-летия СПб. второй гимназии: В 2 ч. СПб., 1880—1894.
25. Историческое обозрение 2-го кадетского корпуса. СПб., 1862 (ПАЗ, 2305).
26. Казанский некрополь // Агафонов Н. Я. Казань и казанцы, 1. Казань, 1906. С. 58—113 (ПАЗ, 3912).
27. Камер-фурьерский церемониальный журнал, 1785—1802. СПб., 1885—1902 (ПАЗ, 1034\*).
28. *Карнаузов М. М.* Рудный мартемовский процесс братьев Горяиновых // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1952. № 10. С. 1507—1511.

<sup>4</sup> Значительное количество использованных при составлении росписи литературных источников включено, иногда с развернутыми описаниями, в изданный под редакцией П. А. Зайончковского (1904—1983) библиографический указатель «Справочники по истории дореволюционной России» [99]. В списке литературы при изданиях, описанных в указателе П. А. Зайончковского, приведены в скобках номера, под которыми они значатся в этом указателе (с присоединением букв ПАЗ). При ссылках на продолжающиеся издания, названия которых менялись с течением времени, в списке литературы указаны только один или два наиболее ходовых варианта названия; если более подробные сведения об изменении названий имеются в указателе П. А. Зайончковского, то соответствующий номер описания снабжен звездочкой.

29. *Киро С. Н.* Академик Э. Д. Коллинс // *Вопр. истории естествозн. и техн.* 1970. № 2(31). С. 81—87.
30. [*Коллинс Э.*] Из бумаг одного из преподавателей императора Александра II. Пгр., 1917.
31. *Кондаков С. Н.* Юбилейный справочник имп. Академии художеств, 1764—1914. СПб., б. г. Ч. 2 (ПАЗ, 3593).
32. *Копелевич Ю. Х.* Материалы к биографии Леонарда Эйлера // *Ист.-мат. исслед.* 1957. Вып. 10. С. 9—65.
33. *Краснов П. Н.* Атаманская памятка. СПб., 1900 (ПАЗ, 1959).
34. *Левшин Д. М.* Пажеский е. и. в. корпус за сто лет, 1802—1902: В 2 т. СПб., 1902 (ПАЗ, 2276).
35. *Летопись войны с Японией.* СПб., 1904—1905. № 1—84.
36. *Летопись войны 1914—15—16—17 гг.* СПб., 1914—1917. № 1—132.
37. *Лысенко В. И.* Николай Иванович Фусс, 1755—1826. М.: Наука, 1975.
38. *Майков П. М.* Второе отделение Собственной е. и. в. канцелярии, 1826—1882: Ист. очерк. СПб., 1906.
39. *Месяцеслов с росписью чиновных особ.* СПб., 1769—1842. Адрес-календарь. Общая роспись начальствующих и прочих должностных лиц. СПб., 1843—1916 (ПАЗ, 884 \*).
40. *Милорадович Г. А.* Список лиц свиты их величеств. Киев, 1886 (ПАЗ, 1831).
41. *Михайловский А. И.* Преподаватели, учившиеся и служившие в имп. Казанском университете. Казань, 1901. Ч. 1 (ПАЗ, 3358).
42. *Московский некрополь: В 3 т.* СПб., 1907—1908 (ПАЗ, 4196).
43. *Научные работники Грузии.* Тифлис, 1929.
44. *Научные работники Ленинграда.* Л.: Изд-во АН СССР, 1934.
45. *Нистрем К.* Книга адресов С. Петербурга на 1837 г. СПб., 1837 (ПАЗ, 4514).
46. *Новое время.* СПб., 1868—1917 (газета).
47. *Новый энциклопедический словарь / Ф. А. Брокгауз, И. А. Ефрон.* СПб.—Пгр., 1910—1916. Т. 1—29 (А—О).
48. *Общий морской список: В 13 ч.* СПб., 1885—1907 (ПАЗ, 2431).
49. *Общий список офицерским чинам русской армии.* СПб., 1908—1910 (ПАЗ, 1757).
50. *Оже И.* Из записок Ипполита Оже // *Рус. архив.* 1877. Кн. 1. С. 257—258.
51. *Ожигова Е. П.* Математика в Петербургской Академии наук в конце XVIII — первой половине XIX века. Л.: Наука, 1980.
52. *Осинов И. П.* Памяти Н. А. Черная // *Тр. Об-ва физ.-хим. наук при Харьк. ун-те.* 1914. Т. 40. С. 65—71.
53. *Памятная книжка Ведомства учреждений имп. Марии.* СПб.—Пгр., 1870—1916 (ПАЗ, 1236).
54. *Памятная книжка Воронежской губернии.* Воронеж, 1899—1916 (ПАЗ, 3825 \*).
55. *Памятная книжка воспитанников имп. СПб. коммерческого училища, окончивших курс в 1850—1913 гг.* СПб., 1913 (ПАЗ, 4553).
56. *Памятная книжка Енисейской губернии.* Красноярск, 1909—1915 (ПАЗ, 5061 \*).
57. *Памятная книжка и адрес-календарь Лифляндской губернии.* Рига, 1889—1916 (ПАЗ, 5275 \*).
58. *Памятная книжка имп. Училища правоведения.* СПб.—Пгр., 1850—1916 (ПАЗ, 3465).
59. *Памятная книжка Ковенской губернии.* Ковно, 1869—1915 (ПАЗ, 3997 \*).
60. *Памятная книжка лицейстов, 1811—1911.* СПб., 1911 (ПАЗ, 3459 \*).
61. *Памятная книжка Могилёвской губернии.* Могилёв 1890 (ПАЗ, 4064 \*).
62. *Памятная книжка Новгородской губернии.* Новгород, 1873—1916 (ПАЗ, 4242).
63. *Памятная книжка Подольской губернии.* Каменец-Подольск, 1909—1911 (ПАЗ, 4383 \*).
64. *Памятная книжка Самарской губернии.* Самара, 1894—1916 (ПАЗ, 4469 \*).
65. *Петербургский некрополь: В 4 т.* СПб., 1912—1913 (ПАЗ, 4571).
66. *50-летие С.-Петербургской Ларинской гимназии, 1836—1886.* СПб., 1886 (ПАЗ, 4547).
67. *Роман Федорович Геккер // Geol. fören. Stockholm förhandl.* 1980. Bd. 102. S. 234.
68. *Российский медицинский список.* СПб.—Пгр., 1809—1916 (ПАЗ, 1318).
69. *Русский биографический словарь: В 25 т.* СПб.—Пгр., 1896—1918 (ПАЗ, 4).
70. *Русский провинциальный некрополь.* М., 1914. Т. 1 (ПАЗ, 28).
71. *Селезнев И.* Пятидесятилетие IV отделения Собственной е. и. в. канцелярии, 1828—1878: Хроника ведомства учреждений имп. Марии. СПб., 1878 (ПАЗ, 1233).

72. Семидесятипятилетие гимназии имп. Человеколюбивого общества, 1820—1895. СПб., 1898 (ПАЗ, 4546).
73. *Скальковский А. А.* Астроном Эйлер в Сечи запорожской в 1770 г.// Киев. старина. 1891. Т. 35. С. 117—119.
74. Список воинскому департаменту. СПб., 1769—1796 (ПАЗ, 1749 \*).
75. Список высшим чинам государственного, губернского и епархиального управления. СПб.—Пгр., 1832—1916.
76. Список генералам по старшинству. СПб.—Пгр., 1838—1916 (ПАЗ, 1766).
77. Список генералам, штаб и обер-офицерам Корпуса горных инженеров. СПб., 1835—1866. Список горным инженерам. СПб.—Пгр., 1870—1915 (ПАЗ, 1402 \*).
78. Список гражданским чинам первых трех классов и четвертого класса. СПб.—Пгр., 1858—1916 (ПАЗ, 1085—1087 \*).
79. Список гражданским чинам первых четырех классов и пятого—восьмого классов. СПб., 1842—1858 (ПАЗ, 1072—1075, 1081—1083 \*).
80. [Список Кавказских деятелей на гражданском и военном поприщах]// Акты Кавк. археогр. комиссии. 1885. Т. 10. С. XII—XXXV.
81. Список лиц, окончивших курс в Горном институте. СПб., 1899 и 1908 (ПАЗ, 3497, 3498).
82. Список лиц, служащих по ведомству Министерства народного просвещения. СПб.—Пгр., 1868—1917 (ПАЗ, 1345).
83. Список лицам, служащим по ведомству Министерства внутренних дел. СПб., 1860—1891. Список лиц, служащих ... СПб., 1892—1914 (ПАЗ, 1297 \*).
84. Список лицам, состоящим в морском ведомстве ... СПб., 1878—1910. Список личного состава судов флота ... СПб.—Пгр., 1911—1916 (ПАЗ, 2445 \*).
85. Список личного состава Государственного банка. СПб.—Пгр., 1893—1916.
86. Список личного состава Министерства финансов. СПб.—Пгр., 1903—1917. Общий состав Министерства финансов. СПб., 1862—1902 (ПАЗ, 1379).
87. Список личного состава центральных учреждений Министерства торговли и промышленности. СПб., 1910—1912 (ПАЗ, 1407).
88. Список находящимся в статской службе чинам первых восьми классов. СПб., 1773—1796 (ПАЗ, 1044 \*).
89. Список окончивших курс в Институте инженеров путей сообщения, 1810—1910. СПб., 1910 (ПАЗ, 3536).
90. Список подполковникам по старшинству. СПб., 1838—1914 (ПАЗ, 1775).
91. Список полковникам по старшинству. СПб.—Пгр., 1838—1916 (ПАЗ, 1774).
92. Список потомственным дворянам Астраханской губернии. Астрахань, 1910 (ПАЗ, 3705).
93. Список состоящим в гражданской службе чинам [I—VII классов]. СПб., 1798—1817. Список чинам, в гражданской службе состоящим [I—VI классов]. СПб., 1818—1841 (ПАЗ, 1067—1070).
94. Список чинам ведомства Министерства юстиции. СПб.—Пгр., 1874—1916. Список чинам Правительствующего сената и Министерства юстиции. СПб., 1842—1873 (ПАЗ, 1479 \*).
95. Список чинам Государственного контроля. СПб.—Пгр., 1872—1915 (ПАЗ, 1551).
96. Список штаб-офицерам по старшинству. СПб., 1799—1829 (ПАЗ, 1778).
97. Справочная книга о лицах, получивших купеческие свидетельства в Москве. М., 1869—1917 (ПАЗ, 4188 \*).
98. Справочная книга о лицах С.-Петербургского / Петроградского купечества. СПб.—Пгр., 1815—1916 (ПАЗ, 4569 \*).
99. Справочники по истории дореволюционной России. Библиогр. указ. / Под общ. ред. П. А. Зайончковского. 2-е изд. М.: Книга, 1978.
100. Столетие военного министерства, 1802—1902. СПб., 1907—1909. Т. 3. Отд. 4—5.
101. *Гитов Н. А.* Малолетнее отделение 1-го Кадетского корпуса в 1808 г.// Рус. старина. 1870. Т. 1. С. 419—422.
102. *Ткецелашвили И. С.* Материалы для истории фармации в России. Биографический словарь фармацевтов, получивших степень магистра фармации, 1845—1901. Вып. 1. М., 1901.
103. *Федоров А. С.* Н. А. Чернай (биографический очерк) // Журн. Рус. физ.-хим. об-ва. Ч. хим. 1914. Т. 46, вып. 1, отд. 1. С. 1—7.
104. Физико-математический факультет Харьковского университета за первые 100 лет существования, 1805—1905. Историко-филологический факультет ..., 1805—1905. Харьков, 1908 (ПАЗ, 3378, 3390).



105. *Фирсов Н. Н.* Силуэты времени реформ (воспоминания шестидесятника) // Ист. вестн. 1910. Т. 119. С. 489—492.
106. *Фирсов Н. Н.* (Рускин Л.) Воспоминания о велик. кн. Михаиле Николаевиче // Ист. вестн. 1910. Т. 122. С. 867—868.
107. *Фойгт К.* Биографический очерк // Владимиров В. В. Историческая записка о 1-й Казанской гимназии. Казань, 1868. Ч. 3. Прил. с. 23—35.
108. *Фрейман О. Р.* Пажи за 183 года (1711—1894). Биографии бывших пажей: В 10 вып. Фридрихсгамн, 1894—1897.
109. *Цегановецкий В. П.* История 18 драгунского Клястицкого полка. Варшава, 1886 (ПАЗ, 2152).
110. *Черейский Л. А.* Пушкин и его окружение. Л.: Наука, 1975.
111. *Черепнин Н. П.* Имп. воспитательное общество благородных девиц: Исторический очерк, 1764—1914: В 3 т. Пгр., 1915. Т. 3 (ПАЗ, 4555).
112. *Чернов С. Н.* Леонард Эйлер и Академия наук // Леонард Эйлер. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935. С. 163—238.
113. *Эйлер [А. Х.]* Записки // Рус. архив. 1880. Кн. 2. С. 333—399.
114. *Эйлер Л. П.* Родословная таблица потомков Л. Эйлера. Рукопись, 1949. (Копия любезно предоставлена В. С. Оболенским.)
115. Энциклопедический словарь / Ф. А. Брокгауз, И. А. Ефрон: В 42 т. с доп. СПб., 1891—1907.
116. Album academicum der K. Universität Dorpat / Bearb. A. Hasselblatt, G. Otto. Dorpat, 1889; Album academicum Universitatis Tartuensis, 1889—1918. Tartu, 1986. Т. 1.
117. Album academicum der weil. drei Corporationen: Baltica in Zürich, Livonia in Carlsruhe, Baltica in Carlsruhe / Zgst. H. Stavenhagen. Jurjew (Dorpat), 1900.
118. Album Curonorum, 1808—1932 / Bearb. W. Räder. Riga, 1932; Nachtrag. S. 1., 1954, 1986.
119. Album Estonorum. 4. Aufl. Tallinn, 1939; Nachtrag. S. 1., 1976.
120. Album Fratrum Rigensium, 1823—1939 / Bearb. O. Hentzelt. Hamburg-Hamm, 1963; Nachtrag. Hamburg-Hamm, 1965.
121. Album der Howenschen und Elisen-Schule. Reval, 1930.
122. Album der Landsleute der Fraternitas Baltica / Bearb. W. Fahrbach. 3. Aufl. Aschaffenburg, 1961.
123. Album Neobaltorum, 1879—1956 / Bearb. B. Lingen, G. Rieder. Otterndorf, 1956.
124. Album des Theologischen Vereins zu Dorpat — Jurjew. Dorpat — Jurjew, 1905; Nachtrag. Dorpat, 1929.
125. *Anspach J.* Het geslacht van Delen // Nederl. Heraut. 1889. Bd. 5. S. 120—270.
126. *Bernoulli-Sutter R.* Die Familie Bernoulli. Basel, 1972.
127. *Brennsohn I.* Die Aerzte Estlands. Riga, 1922.
128. *Brennsohn I.* Die Aerzte Kurlands. 2te Aufl. Riga, 1929.
129. *Brennsohn I.* Die Aerzte Livlands. Riga, 1905.
130. *Burckhardt J. J.* Euleriana — Verzeichnis des Schrifttums über Leonhard Euler // Leonhard Euler, 1707—1783. Basel, 1983. S. 511—552.
131. *Carpelan T.* Ättartavlor för de på Finlands riddarhus inskrivna ätterna: In 3 Bd. Helsingfors. 1954—1965.
132. *Dalton H.* Geschichte der reformirten Kirche in Russland. Gotha, 1865.
133. Deutschbaltisches biographisches Lexikon, 1710—1960. Köln; Wien, 1970.
134. Eesti biograafilise leksikoni täiendusköide. Tartu, 1940.
135. *Eichhorn C.* Die Geschichte der «St.Petersburger Zeitung», 1727—1902. SPb., 1902.
136. *Euler K.* Das Geschlecht Euler-Schölpi: Geschichte einer alten Familie. Giessen, 1955.
137. *Euler L.* Descriptio commercii epistolici // Opera omnia IVA-1. Basel, 1975.
138. *Fechner A. W.* Chronik der evangelischen Gemeinden in Moskau: In 2 Bd. Moskau, 1876.
139. *Fuss P. H.* [Éloge de E. Collins] // Rec. act. séance publ. Acad. sci. SPb. 29 Déc. 1840. SPb., 1841. P. 4—12. Нем. пер. в кн.: *Collins E.* Schulreden. SPb., 1862. S. 49—57.
140. Genealogisches Handbuch der adeligen Häuser. Adelige Häuser B/Hbearb. W. von Hueck. Limburg a. d. Lahn, 1968. Bd. 8.
141. *Held H.* Verzeichnis der Schüler und Schülerinnen der Schulen zu St.Petri, 1862—1912. SPb., 1913.
412. *Hiort-Lorenzen H. R.* Livre d'or des souverains. Paris 1908

143. *Hoerschelmann L.* Stammbaum des Geschlechtes Hoerschelmann von Eppichnellen (Thüringen), 1610—1926. S. 1., 1926.
144. Kuka kukin on: Who's who in Finland. Helsinki, 1960 ff.; Kuka kukin oli: Who was who in Finland. Helsinki, 1961.
145. *Leesment L.* Kõige mitmekülgsemast Tartu juuraprofessorist // Вопр. истории Тарт. ун-та. 1977. Вып. 4. С. 97—103.
146. *Muralt E.* Chronik der vereinigten französischen und teutschen reformirten Gemeinde in St.Petersburg. Dorpat, 1842.
147. *Muralt J.* Leichenrede bey der Beerdigung Fr. Anna Sophia Nichels, geb. Fuss. SPb., 1814.
148. Namens-Verzeichniss der Schüler und Schülerinnen der Deutschen Hauptschule St.Petri. SPb., 1862.
149. *Neander W.* Lexikon deutschbaltischer Theologen. Hannover-Döhren, 1967.
150. *Nederland's adelsboek.* 's-Gravenhage, 1941 ff.
151. *Nieuw Nederland's biographisch woordenboek.* Leiden, 1912. Bd. 2.
152. *Otavan iso tietosanakirja: Encyclopaedia Fennica: In 10 vol.* Helsinki, 1960—1965.
153. *Paulsen K. J.* Die baltische Familiengruppe der Berg, Gebauer, Luther, Paulsen, Steding // Deutsches Familienarchiv. 1959. Bd. 13. S. 1—115, 303—304.
154. *Quistorp B.* Die Kaiserliche Russisch-Deutsche Legion. Berlin, 1860.
155. *Seeberg-Elverfeldt R.* Die kurländische Literatenfamilie Becker // Balt. Ahnen- und Stammtafeln. 1975. Bd. 20. S. 32—51.
156. *Siedt G.* Bemerkungen zu einem Gutachten Eulers für das Französische Weisenhaus in Berlin // Abh. Akad. Wiss. DDR. Abt. Math. etc. 1985. N 1. S. 150—151.
157. *Staeckel P.* Johann Albrecht Euler // Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zürich. 1910. Bd. 55. S. 63—90.
158. *Stieda W.* Johann Albrecht Euler in seinen Briefen, 1766—1790 // Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Phil.-hist. Kl. 1932. Bd. 84, H. 1. S. 1—43.
159. *St.Petersburger/Petrograder evangelisches Sonntagsblatt.* SPb., 1858—1915 (воскресная газета).
160. *Die St.Petri-Gemeinde, 1710—1910.* SPb., 1910.
161. *Struve O.* Éloge de P. H. Fuss // C. r. Acad. sci. SPb. 1856. P. 89—122.
162. *Wer ist wer?* Berlin etc., 1958 ff.
163. *Who's who in Switzerland.* Geneva, 1980 ff.
164. *Zur Geschichte der St.Petri-Schule in St.Petersburg: Friesendorff E.* Geschichte der St.Petri-Schule, 1862—1887; *Iversen J.* Das Lehrpersonal der St.Petri-Schule von ihrem ersten Beginn bis zur Gegenwart (1710—1887) mit biographischen Notizen. SPb., 1887.
165. *Ferrand J.* Les familles princières de l'ancien Empire de Russie, en émigration. Paris, 1978. Vol. 1. P. 41—82; Tiré à part. Les princes Obolensky: 30<sup>e</sup>—34<sup>e</sup> générations. Paris, 1982. 107 p.
166. *Алексей (Чернай).* Жизненный путь русского священника. Сан-Франциско: Глобус, 1981.

## II. АРХИВЫ

- A1. Центральный государственный архив древних актов СССР (Москва)
- A2. Центральный государственный военно-исторический архив СССР (Москва)
- A3. Центральный государственный архив Советской Армии (Москва)
- A4. Архив внешней политики России МИД СССР (Москва)
- A5. Центральный государственный исторический архив СССР (Ленинград)
- A6. Центральный государственный архив Военно-Морского Флота СССР (Ленинград)
- A7. Ленинградский государственный исторический архив (Ленинград)
- A8. Архив Академии наук СССР (Ленинград)
- A9. Архив Академии наук ГДР (Берлин)
- A10. Центральный государственный архив Казахской ССР (Алма-Ата)
- A11. Государственный архив Астраханской области (Астрахань)
- A12. Центральный государственный архив Литовской ССР (Вильнюс)
- A13. Ленинградский областной государственный архив (Выборг)
- A14. Центральный государственный архив Татарской АССР (Казань)
- A15. Центральный государственный исторический архив УССР (Киев)
- A16. Центральный государственный исторический архив БССР (Минск)
- A17. Центральный государственный архив Латвийской ССР (Рига)
- A18. Государственный архив Саратовской области (Саратов)

- A19. Центральный государственный исторический архив ЭССР (Тарту)  
 A20. Центральный государственный архив Узбекской ССР (Ташкент)  
 A21. Центральный государственный исторический архив Грузинской ССР (Тбилиси)  
 A22. Государственный архив Ульяновской области (Ульяновск)  
 A23. Архив Э. Н. Амбургера (частное собрание, Хойхельхайм, ФРГ)  
 A24. Архив Л. Б. Модзалевского (Рукописный отдел Пушкинского дома АН СССР, Ленинград)  
 A25. Письма И.-А. Эйлера С. Формею (Рукописный отдел Германской государственной библиотеки в Берлине/Deutsche Staatsbibliothek)

### III. ЛИЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

- Л1. Афанасовы Т. В. (VII.172) и М. Н. (VIII. 228)  
 Л2. Болтенгаены Л. П. (VIII.253) и И. Л. (IX.303)  
 Л3. Геккеры Р. Ф. (VII.130) и С. Ф. (VII.132)  
 Л4. Оболенский В. С./Obolensky W. (VIII.227)  
 Л5. Оттены Ф. Ф. (VII.78), Г. Ф. (VII.80) и К. Н. (VIII.98)  
 Л6. Петрова Е. Н. (VII.33)  
 Л7. Сазонова О. И. (VII.163), Ткачева Т. Ю. (VIII.217)  
 Л8. Скалоны С. Н. (VII.175) и Е. С. (VIII.230)  
 Л9. Струве А. А. (VIII.92) и Г. А. (VIII.93)  
 Л10. Струве Е. В. (VIII.78), Александренкова Н. В. (IX.87), Григор П. М. (IX.80)  
 Л11. Фойгты Б. П. (VII.169) и П. Ю. (VIII.219)  
 Л12. Цукале Э./Zukale E. (VIII.135)  
 Л13. Чернай А. Н. (VIII.50) и О. Л. (VIII.55), Косцюшка А. Н. (VIII.48)  
 Л14. Чернай О. А. (VIII.43)  
 Л15. Шестакова М. В. (VII.184)  
 Л16. Шипов Д. С. (VII.203), Комиссарова В. В. (VIII.263)  
 Л17. Эйлер А. А. (VI.194)  
 Л18. Эйлер А. Б. (VII.211)  
 Л19. Эйлер Н. Н. (VII.206)  
 Л20. Энкель Г. Г./Enckell G. (VIII.210)  
 Л21. Швендеман Э./Schwendemann E. (Frankfurt/Main)  
 Л22. Зыкова А. О. (IX.357)  
 Л23. Шаховской Д. М./Schachovskoy D. (Paris)

### НЕКОТОРЫЕ ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ В РОСПИСИ СОКРАЩЕНИЯ

#### *I. Чины (с указанием класса по табели о рангах), титулы и звания*

бар.— барон/несса  
 вице-адм.— вице-адмирал (III кл.)  
 ген.— генерал (II кл.)  
 ген.-адъют.—генерал-адъютант  
 ген.-л.— генерал-лейтенант (III кл.)  
 ген.-м.— генерал-майор (IV кл.)  
 гр.— граф/финя  
 губ. секр.— губернский секретарь  
 (XII кл.)  
 д. ст. сов.— действительный статский  
 советник (IV кл.)  
 д. т. сов.— действительный тайный со-  
 ветник (II кл.)  
 е. и. в.— его императорского величества  
 кн.— князь, княгиня  
 кол. ас.— коллежский асессор (VIII кл.)  
 кол. секр.— коллежский секретарь  
 (X кл.)

кол. сов.— коллежский советник (VI кл.)  
 контр-адм.— контр-адмирал (IV кл.)  
 надов. сов.— надворный советник  
 (VII кл.)  
 подполк.— подполковник (VI кл.)  
 подпор.— подпоручик (XII кл.)  
 полк.— полковник (VII кл.)  
 ротм.— ротмистр (VIII—IX кл.)  
 светл. кн.— светлейший князь  
 ст. сов.— статский советник (V кл.)  
 т. сов.— тайный советник (III кл.)  
 тит. сов.— титулярный советник (IX кл.)  
 фл.-адъют.— флигель-адъютант  
 шт.-кап.— штабс-капитан (IX—X кл.)  
 шт.-ротм.— штабс-ротмистр (IX—X кл.)

#### *II. Прочие сокращения*

биб-ка — библиотека  
 бл.— близ  
 врем.— временный  
 гв.— гвардия/дейский

ген.-губ. — генерал-губернатор	об-во — общество
герц. — герцогство	обл. — область/тной
гимн. — гимназия	ок. — окончил/ла
гл. — главный	окр. — округ, окружной
губ. — губерния/нский	орд. — ординарный
д. чл. — действительный член	отд. — отделение
деп-т — департамент	отст. — отставка/вной
дир. — директор	пенс. — пенсионер
доц. — доцент	правл. — правление
д-р — доктор	предв. — предводитель
зав. — заведующий	предс. — председатель
з-д — завод	преп. — преподаватель
инж. — инженер/ный	пром-сть — промышленность
инсп. — инспектор	проф. — профессор, профессиональный
ин-т — институт	р. — ранг
кавал. — кавалерия/рийский	раб. — работал/ла
кадет. — кадетский	сл. — служба, служил/ла
казен. — казенный	ст. — старший, степень
канд. — кандидат	стр. — строительный
канц. — канцелярия	стр-во — строительство
ком-т — комитет	тов. — товарищ
контр. — контрольный	у. — уезд
кр. — край, крещен/на	ун-т — университет
л. гв. — лейб-гвардия	управл. — управление/ляющий
маг. — магистр	ур. — урожденная
МВД — Министерство внутренних дел	уч. — учился/лась
МИД — Министерство иностранных дел	уч-ще — училище
Мин-во — Министерство	фак-т — факультет
мл. — младший	чин-к — чиновник
МПС — Министерство путей сообщения	чл. — член
нач-к, нач-ца — начальник/ница	чл.-корр. — член-корреспондент
непр. — неперенный	шт. — штатский
н.-иссл. — научно-исследовательский	

### УКАЗАТЕЛЬ СОВРЕМЕННЫХ НАЗВАНИЙ НЕКОТОРЫХ ГОРОДОВ И НАСЕЛЕННЫХ ПУНККТОВ, УПОМИНАЕМЫХ В РОСПИСИ

Акмолинск — Целиноград КазССР	Каменское Запорожье — Днепродзержинск УССР
Александрополь — Ленинакан АрмССР	Кёнигсберг — Калининград
Брест-Литовск — Брест	Ковно — Каунас ЛитССР
Бромберг (Пруссия) — Быдгощ (ПНР)	Козлов Тамб. губ. — Мичуринск
Вейсенштейн Эстл. губ. — Пайде ЭстССР	Либава Курл. губ. — Лиепая ЛатССР
Вильна — Вильнюс	Мариенвердер (Вост. Пруссия) — Квидзын (ПНР)
Вицдава Курл. губ. — Вентспилс ЛатвССР	Митава Курл. губ. — Елгава ЛатвССР
Випури (Финляндия) — Выборг	Переяслав Полт. губ. — Переяслав-Хмельницкий УССР
Владикавказ — Орджоникидзе	Пернов Лифл. губ. — Пернау — Пярну ЭстССР
Врешен (Пруссия) — Вжесня (ПНР)	Проскуров Подол. губ. — Хмельницкий УССР
Вюрцау Курл. губ. — Вирцава ЛатвССР	Ревель Эстл. губ. — Таллин
Гельсингфорс — Хельсинки	Риддер — Лениногорск КазССР
Грюнгоф Курл. губ. — Зелениеки ЛатвССР	Самара — Куйбышев
Дерпт — Юрьев — Тарту ЭстССР	Симбирск — Ульяновск
Двинск Витеб. губ. — Даугавпилс ЛатвССР	Тверь — Калинин
Динабург Витеб. губ. — Двинск — Даугавпилс ЛатвССР	Тифлис — Тбилиси
Динамюнде Лифл. губ. — Усть-Двинск — Даугавгрива ЛатвССР	Фрауенбург Курл. губ. — Салдус ЛатвССР
Екатеринбург — Свердловск	
Екатеринослав — Днепродзержинск	

## УКАЗАТЕЛЬ ФАМИЛИЙ К РОДОСЛОВНОЙ РОСПИСИ

- Абакумова VII.130  
 Абрамчики VII.52; IX.53—55; X.62, 63, 67  
 Агапеева VI.110  
 Агапова VIII.304  
 Айканов V.106  
 Александренковы IX.87; X.97, 98  
 Александрова V.64  
 Аллегретти III.12; IV.34—36  
 Альфтан VII.99  
 Амбургер V.88  
 Андерсия VII.161  
 Андерссоны VII.183; VIII.210, 242  
 Андронников IV.64  
 Анненковы VI.103, 104; VII.162—165  
 Антоновы VII.176; VIII.232  
 Арбузовы VII.234; VIII.303—305  
 Армзен VIII.165  
 Арсеньева VII.30  
 Атаманюк IX.363  
 Афанасовы VII.172; VIII.228; IX.276  
 Ахременко IX.323, 324  
 Ашихмина IX.40  
 Бабакин VII.112  
 Баладина VI.145  
 Барановы VIII.283; IX.338, 339  
 Баренбург VIII.36  
 Баркова VII.54  
 Барышевы VII.214; VIII.281, 282  
 Бауман IV.46A  
 Баумгартены IV.22, 26; V.58, 73  
 Башкирова VI.173  
 Бекеры VII.16; VIII.26—32; IX.26—28; X.26—30  
 Бекманы III.29; IV.71—75; V.106—111; VI.181—184  
 Белокопытова VII.37  
 Белли II.5, 6; III.22—26  
 Беме VIII.161  
 Бервальд IV.19  
 Берг V.87  
 Бергер V.19  
 Бергштрессеры V.25; VI.30—37, 39; VII.45—50, 55—62; VIII.64—68  
 Берендты V.43; VI.71—76; VII.107—118; VIII.158; IX.175, 176  
 Беркхольц IX.181  
 Берман VI.85  
 Берндт VI.10  
 Бернулли III.8  
 Бетлинги VII.11, 12; VIII.19—21  
 Биберы V.52; VI.86  
 Бильтерлинг VI.11  
 Блехер VI.70  
 Блоом IX.180  
 Боброва VIII.265  
 Богданова VI.15  
 Богунц VIII.106  
 Болтенгагены III.15; IV.45—57; V.85—92; VI.137—154; VII.191; VIII.253; IX.303; X.324  
 Бордюги VIII.108; IX.120  
 Бостремы V.38; VI.31  
 Ботты VIII.273; IX.327, 328  
 Брандт V.88  
 Браун III.20  
 Браше VII.117  
 Бреме IV.21; V.46, 54—57; VI.77  
 Броссе VIII.189; IX.213, 214  
 Бруккер I.1  
 Бруннер IV.27  
 Брунсы VII.204; VIII.268, 269; IX.321, 322; X.343  
 Брюггены VIII.172; IX.193, 194  
 Булушевы X.92  
 Бунге IX.84  
 Бурачек VI.48  
 Бушены V.80; VI.120—123A  
 Бушкова VII.78  
 Быховская IV.81  
 Вадбольский V.99  
 Вадковская VII.145  
 Васильевы IX.81; X.93, 94  
 Васильчикова IV.69  
 Вежелите VIII.55  
 Вейде IV.41  
 Вейсы VII.116; VIII.154—157; IX.174  
 Вельсберг V.4  
 Викберг VIII.28  
 Вилькены VII.55; VIII.81—83  
 Винанд VII.126  
 Виноградовы VII.236; VIII.307, 308; IX.369  
 Винтерштедт II.7  
 Владимирова VIII.176  
 Войводт V.90  
 Вольфовская VIII.43  
 Воронины VIII.107; IX.118  
 Врангели VI.119; VII.180  
 Вшивкова VIII.239  
 Вышегородцева V.50  
 Габриельссон VIII.212  
 Гаемейстер II.1  
 Гамельман IV.45  
 Гасановы VIII.101; IX.109—111  
 Гассельблаты VI.89; VII.144  
 Гебели V.63; VI.101, 119; VII.179, 180  
 Гебенер III.28  
 Гейно VIII.221  
 Геккеры IV.20; V.46—54; VI.78—84; VII.129—135; VIII.176—178; IX.199—201  
 Гемилиан VI.79  
 Герберы VIII.224; IX.268, 269  
 Герке VIII.156; IX.170—173  
 Гершельманы V.58; VI.89—96; VII.13, 145—157; VIII.22, 23, 191—194  
 Гесс VI.74  
 Гзелль I.1  
 Гиль VII.18  
 Глазенап VIII.159  
 Глухова IV.59  
 Гнизер VIII.158

- Гойнинген-Гюне VI.130  
 Голицын VI.182  
 Голубкова VIII.270  
 Гольдт V.35  
 Гольмдорф V.123; VI.197—200; VII.230—236; VIII.300—303; IX.356, 357  
 Гольст IV.13  
 Горбатенко IX.38  
 Горяинов V.115  
 Гревениц VI.102  
 Грехова VI.154  
 Григоры IX.80; X.92  
 Григорьев VI.116  
 Гримм VIII.225  
 Грюнеры VII.144; VIII.188—190  
 Гулык VIII.266  
 Гунниус VIII.163  
 Гусевы VI.7; VII.4—5; VIII.228  
 Даниловская V.28  
 Даниловы VIII.102; IX.113  
 Дворкина VII.169  
 Делены II.8; III.14, 39—45; IV.43, 44, 91, 92; V.129  
 Детман VII.48  
 Дешены IV.2; V.1—3  
 Дитмер V.15  
 Днепрова VII.54  
 Добровольная VII.14  
 Дорошкевич VII.175  
 Драбинская V.14  
 Дребуш III.33  
 Друке VIII.27  
 Дьяконовы VIII.264; IX.315, 316  
 Евсеевы VIII.302; IX.358, 359  
 Егiazарова VII.171  
 Елпатьевские V.13; VI.3—9; VII.6—8  
 Ерусланова VIII.103  
 Ефремова VI.107  
 Жадвойны V.75; VI.118  
 Жгуны VII.36; VIII.54  
 Жучковы VIII.107; IX.119  
 Заболотские VIII.303; IX.360—362  
 Завриевы VII.70; VIII.95  
 Зайцевская VII.54  
 Заржецкая IV.83  
 Зауерштейн VIII.35  
 Захарова VIII.92  
 Зеберги VII.79; VIII.107, 108  
 Зеленая VIII.110  
 Зеленкова V.87  
 Зиновьевы IX.313; X.334  
 Золкина IX.40  
 Зубавс VI.124  
 Зубовы IV.63. V.101, 102; VI.160—162; VIII.30  
 Зуккау VII.63  
 Зыковы IX.357; X.378—380  
 Иепсоны IX.243; X.262, 263  
 Иессены VII.129; VIII.175  
 Ильинская-Болтенкова VI.91  
 Интельман V.92  
 Иоханссоны IX.177; X.189—191  
 Иславина VI.179  
 Калькс VII.19  
 Капеллер VII.72  
 Карачевцевы VIII.100; IX.107, 108  
 Карганов VII.68  
 Карлбергы VII.183; VIII.240, 241  
 Карлссоны X.189  
 Каспаравичюте VIII.50  
 Кашнева VI.115  
 Квитка V.17  
 Келлер VIII.222  
 Кеммет VII.167  
 Кениг VII.47  
 Кермик V.25  
 Киерульф IV.11  
 Кильберги IV.20; V.45  
 Кицьяковы VIII.307; IX.368  
 Киреева VIII.104  
 Киршина VIII.218  
 Кирьянова VII.24  
 Классен V.41  
 Классон V.14  
 Клемент IV.92  
 Клечетова VII.166  
 Климмек IX.32  
 Кнойпер V.56  
 Ковалевские VII.170  
 Коваленко IX.107  
 Коган VII.65  
 Кожушный IX.108  
 Козодаева IX.326  
 Козорезовы VII.201; VIII.263—265; IX.317  
 Кокошкина V.102  
 Коллинсы III.8; IV.19—31A; V.41—44; VI.62—70; VII.101—106; VIII.140  
 Комарова V.114  
 Комиссаровы VIII.263; IX.313  
 Кононова VIII.245  
 Констabile дела Стаффа VI.160  
 Корвовская III.34  
 Корневы X.46  
 Костливцева V.94  
 Косцюшки VIII.48; IX.44, 45; X.54  
 Кохомская VI.21  
 Кочетковы V.81; VI.124—128; VII.182—183A; VIII.238, 239; IX.288  
 Краббе II.7  
 Кремер III.42  
 Кречмер IX.186  
 Крозиги IX.182; X.198—200  
 Крузе IX.26  
 Крюгер IX.30  
 Кудер VII.207  
 Кузнецова VIII.230  
 Кулагина V.81  
 Кулаковы V.6; VI.2  
 Кулахметовы IX.112; X.124—126  
 Кулевы VIII.229; IX.277  
 Кулик VI.186  
 Кумлин VIII.135  
 Купфер VII.122  
 Курганская V.71  
 Куторга V.92

- Кутцеры VIII.29  
 Кухарская VI.105  
 Лаабс VIII.33  
 Ланге VI.33  
 Ларины VIII.42; IX.38, 39; X.42, 43  
 Лебеды IX.104; X.116, 117  
 Левентали IV.84; V.119—124A  
 Ленер VI.36  
 Леонович IV.81  
 Лизеры V.122; VI.198; VII.228, 229; VIII.298; IX.354  
 Линдстам VIII.212  
 Линецкая IX.322  
 Липилины VIII.238; IX.286, 287  
 Лобеданк III.44  
 Лобова VIII.278  
 Лончи VIII.216; IX.255  
 Лорда IX.272; X.292, 293  
 Лукас VII.106  
 Лундквисты VIII.213; IX.250, 251  
 Львова VI.116  
 Майделль VIII.164  
 Макарова VII.224  
 Мальм VII.46  
 Мальмгрен VII.107  
 Мануиловы VI.177; VII.212, 213; VIII.278—280; IX.333  
 Марголины IX.360; X.382, 383  
 Маркова IX.303  
 Мартынов VI.202  
 Марченко VII.75; VIII.99, 100  
 Масленниковы VI.55  
 Матисон VIII.284  
 Мейджилл VII.161  
 Меер ван Кюффелеры IV.91; V.128  
 Меллер-Закомельские II.7; IV.42  
 Мерманишвили VIII.95; IX.101, 102  
 Метелев VI.162  
 Миколайчик VIII.226  
 Мильки VI.78; VII.125—128; VIII.174—174B; IX.196, 196A  
 Мин VI.102  
 Михаэлис VIII.171  
 Мусатова VI.173  
 Мюльбах V.62  
 Недоводова IX.109  
 Нейман VIII.31  
 Нефедова VII.203  
 Никаноров IX.255  
 Никифорова VI.124  
 Никкельсы IV.6; V.10—12A, 20  
 Нильссон IX.241  
 Ничке VII.228  
 Носова VII.74  
 Нотбеки IV.71; VI.77; VII.119—124; VIII.159—172; IX.177, 180—182, 191, 192; X.194—197  
 Нятянен IX.149  
 Облашевич VI.90  
 Оболенские V.105; VII.171; VIII.226, 227; IX.272—275  
 Овчинникова VIII.268  
 Одинцов VI.119  
 Окраинская VIII.109  
 Ортенберги IV.5; V.4—9  
 Осипова VII.130  
 Оттены VI.42; VII.67—80; VIII.94—98, 105, 106, 109, 110; IX.104—106, 121—124  
 Павловская VIII.98  
 Патенко V.28  
 Пендорфы IX.83; X.95  
 Петер VII.208  
 Петквичусы IX.44; X.53  
 Петровы VI.169; VII.33; VIII.52, 53  
 Печерская VIII.75  
 Пикли VIII.133; IX.147  
 Пилсудский VII.57  
 Пильбаум VII.133  
 Пискуновы IX.321; X.342, 342A  
 Полевые VIII.281; IX.336  
 Полянские VIII.253; IX.55  
 Пономаренко VII.206  
 Попандопуло V.109; VI.186, 187; VII.221  
 Поповы IV.85; VIII.253, 263; IX.302, 314; X.323  
 Порфирьева VII.78  
 Правдок VI.127; VII.184  
 Прац V.49  
 Приходько VIII.305; IX.364, 365  
 Проскуряков VII.172  
 Пуполс VII.182A  
 Пурини VII.183A; VIII.243, 244  
 Пучкина VII.212  
 Пьянникова VIII.267  
 Рааб ван Канстейн V.129  
 Рамбах VI.89  
 Рандлькофер VIII.227  
 Рацин III.2  
 Рачинские VII.211; VIII.276, 277  
 Рейман VIII.137  
 Рейнебек VIII.171  
 Рейхман VIII.170  
 Ремерт VIII.78  
 Ренстрем IX.155  
 Репнинская V.98  
 Ререны III.35; IV.83—85; V.125—127  
 Рехберг IX.193  
 Ритмейстер III.13  
 Ритценхофер IX.184  
 Рихард VII.164  
 Робиллан VI.161  
 Роде VII.47, 134; VIII.179  
 Родионовы V.86; VI.129—134  
 Романовы VIII.175; IX.197, 198  
 Ромодановский К. VII.27  
 Рострем VII.127  
 Рубанова VII.20  
 Рубеки V.87; VI.135, 136  
 Рукины IV.76; V.113, 113A  
 Рыковская VIII.98  
 Рыловы IX.99; X.109  
 Рэнккэ VIII.137  
 Савко VII.205; VIII.270, 271; IX.325

- Сазоновы VII.163; VIII.217  
 Сайн-Витгенштейн-Берлебург IV.79  
 Саломонсоны IX.238; X.256, 257  
 Самарская-Быхоец V.98  
 Самсонадзе IX.106; X.119  
 Саникидзе VIII.94; IX.100  
 Сафонова X.217  
 Себастьян VIII.157  
 Севостьянова VII.216  
 Сеземаны II.6; VI.145  
 Семеновы VI.46, 200; VII.30; VIII.219  
 Семенчуки VI.127; VII.184  
 Сильдмяз VII.78  
 Сишпонеи IX.150  
 Скалоны V.67; VI.112, 115, 116; VII.173—177; VIII.229—231; IX.278  
 Слепченко VII.165  
 Смелыт VI.80  
 Смирновы VII.191, 217  
 Соболи VII.202; VIII.266; IX.318, 319  
 Соколова VII.182  
 Сорокин VI.178  
 Сорьонены VIII.138; IX.155; X.169, 170  
 Спечинский VII.179  
 Стевец VI.182  
 Стен VIII.130  
 Стендеры VII.53; VIII.75, 76; IX.81  
 Струве V.27; VI.32, 38—43; VII.51—54, 63—66; VIII.77—80, 91—93; IX.82—87, 99; X.96  
 Стурт V.78  
 Субботина VII.232  
 Сулеймановы IX.111; X.123  
 Сулина VIII.246  
 Супруненко VII.164  
 Сухопрудская IX.53  
 Талановы IX.105; X.118  
 Таргонская VI.178  
 Тигерман VIII.211  
 Тилло VI.54; VII.91—93  
 Тиманы IV.76; V.112  
 Тиры VII.105; VIII.139  
 Тиран V.107  
 Титовы VIII.279; IX.334, 335  
 Ткачевы VIII.217; IX.256  
 Топелиус IV.135  
 Траутфеттер V.40  
 Трегубенко VIII.305; IX.363  
 Тринклер VI.145  
 Тройницкая VI.46  
 Трофименко VIII.220  
 Туоминен VIII.174В  
 Угрюмова VIII.78  
 Ульрихс V.37  
 Ундриццы IV.11, 16, V.32; VI.45  
 Урберг III.12  
 Фалькенштейн X.95  
 Федоровы VII.76; VIII.101, 102; IX.112  
 Фейхтнер IV.75  
 Ферманы VI.76; VII.53  
 Фернстром VIII.211  
 Филиппова VII.80  
 Финдейзены VI.72; VII.113  
 Фирксы VIII.190; IX.215—218  
 Флитгнер IV.73  
 Фойгты III.20; IV.58, 59, 78; V.94—99; VI.102—104, 158, 159; VII.166—169; VIII.218—224; IX.257—264  
 Фолькман VII.23  
 Форстманы VIII.38; IX.34  
 Фохты (Фойгты) V.51; VI.85; VII.140, 141  
 Францен V.33  
 Фрезе VII.120  
 Фридебург VI.198  
 Фуке VII.164  
 Фусы III.4; IV.6—18; V.23—40; VI.44, 46—59; VII.82—87  
 Харпе VIII.164  
 Хеленелунды VIII.174А; IX.195—195D  
 Хельвиг V.37  
 Хинце VI.66  
 Хольман IX.194  
 Хомутова VI.176  
 Хофманы IX.185; X.203  
 Хрущева VI.174  
 Хьелт VII.161  
 Цариковская VI.194  
 Цукале VII.101; VIII.133—138; IX.148—154; X.163, 164  
 Чапасы IX.54; X.64—66  
 Чаплины V.108; VI.185  
 Чачия IX.101; X.112—114  
 Челлоков V.80  
 Ченцова VIII.177  
 Чепурина V.114  
 Червинка VIII.226  
 Чернаи IV.7; V.13—21; VI.10—25; VII.9—39; VIII.24, 33—51, 55; IX.24, 30—32, 39—41; X.34, 44—49  
 Черноясы IX.46—52, 57, 58  
 Чернова VII.124  
 Шаврова V.34  
 Шарашенидзе IX.100; X.110, 111  
 Шаттауеры IX.242; X.261  
 Шатте II.8  
 Шварцы VII.223; VIII.291, 292  
 Шемякин VII.66  
 Шестаковы VII.184; VIII.245, 246; IX.294—296  
 Шиллер VIII.162  
 Шиповы V.103; VI.163—171; VII.201—203; VIII.267; IX.320  
 Шипов-Шульц V.104  
 Шириковы VIII.76; IX.80  
 Ширшова VII.232  
 Шкультецкая VI.201  
 Шлегель VI.199  
 Шлефли VII.170  
 Шмайсер VII.229  
 Шмальцы IV.17; V.24; 38; VI.27—29  
 Шольцы IX.171, 172  
 Шотт VII.119  
 Шпеер VI.38  
 Шпис VII.210  
 Штедингги VIII.166; IX.183—186



- Штейны VI.30; VIII.80  
Штейнер VI.75  
Штильмарк VII.54  
Штирнгельмы VII.109; VIII.146  
Штупер VI.69  
Шуберт VII.46  
Шульгины VII.162; VIII.215, 216; IX.  
253, 254  
Эберхардт VI.64  
Эдельберг VI.16  
Эйлеры I.1; II.1—13; III.1—21, 27—38,  
41; IV.1—5, 32, 38—42, 62—70, 76—  
82; V.63—83, 103—105, 114—118; VI.  
105—114, 117, 172—179, 188—194; VII.  
170—172, 204—211, 214—217, 223, 224;  
VIII.222—225, 272—275, 283—285, 293;  
IX.265—267, 270, 271, 340  
Эквисты VI.63; VII.98, 99; VIII.129—131;  
IX.143—145  
Энгельгардт III.33  
Энкели VI.102; VII.161; VIII.210—214;  
IX.238—249; X.256, 257, 260, 261  
Эрдманы III.20; IV.44; V.84  
Эсслингеры V.17; VI.17  
Юргенс VI.115  
Юслин IX.148  
Якимовы VII.77; VIII.103, 104; IX.114—  
117  
Яковенко VIII.76; IX.81  
Яковлева VIII.75  
Ялонен VIII.136  
Ярошвицкая IV.66

# СЕМЬЯ И ПОТОМКИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

*И. Р. ГЕККЕР, А. А. ЭЙЛЕР*

## ВВЕДЕНИЕ

Целью предлагаемой статьи является краткое изложение известных на сегодня материалов о семье и потомках Леонарда Эйлера.

Фундаментальный труд по генеалогии всех Эйлеров был издан в 1955 г. К. Эйлером под названием «Род Эйлеров—Шёльпи (история одной старой семьи)» [1]. В книге приведены сведения о представителях разных ветвей рода Эйлеров, проживавших и проживающих теперь в Швейцарии, СССР, ФРГ, Швеции, Франции, Англии и других странах. Истоки рода прослежены до 1287 г. Русской линии рода Л. Эйлера посвящена одна из десяти глав книги (45 страниц из 320) с родословным деревом, содержащим имена и даты жизни до сотни прямых потомков великого ученого. Приведены и краткие биографические сведения о некоторых из них. Однако автор интересовался только потомками, сохранившими фамилию Эйлер, оставив в стороне потомков, ответвившихся по женским линиям и носящих другие фамилии.

Попытки написания истории рода Эйлеров предпринимались и ранее. Так, Ф. Бурхардт опубликовал в 1908 г. исследование «К генеалогии фамилии Эйлеров в Базеле» [2]. Сведения о происхождении и семье Л. Эйлера содержатся в его автобиографии, продиктованной в 1767 г., и в статьях о нем и его трех сыновьях, опубликованных в вышедшем в Базеле в 1780 г. биографическом справочнике (русский перевод см. в [3]). Правнук Л. Эйлера русский генерал-лейтенант Н. П. Эйлер интересовался историей своей семьи и во время командировки в Германию в 1864 г. изучал имеющиеся там материалы. Написание задуманного очерка о семье прервала его смерть. В 1880 г. были опубликованы содержательные записки внука Л. Эйлера генерала от артиллерии А. Х. Эйлера [4]. По имеющимся сведениям [5, с. 238] советский историк Л. Б. Модзалевский готовил в 30-х годах очерк социальной истории рода Эйлеров в России, однако эта работа не была завершена.

Авторы данной статьи, являющиеся потомками двух сыновей Леонарда Эйлера — Иоганна-Альбрехта и Христофора — использовали как опубликованные, так и архивные материалы, позволившие значительно дополнить и уточнить известную ранее историю русской ветви рода Эйлера. При этом авторы стремились дать сведения о потомках Л. Эйлера как по мужским, так и женским линиям. Ценным пособием в этой работе послужила родословная роспись потомков Л. Эйлера, публикуемая в этом юбилейном сборнике [6], к которой приложена и обширная библиография. К сожалению, написание статьи предшествовало завершению работы над родословной росписью, в связи с чем не все материалы росписи смогли быть в ней использованы.

Отметим, что прямые мужские потомки старшего сына Л. Эйлера — Иоганна-Альбрехта, сохраняющие фамилию Эйлер, пресеклись в начале XIX в. на уровне правнуков, а потомки второго сына Карла — в России в середине XX в. (имеется несколько представителей в Швейцарии). Потомки же младшего сына Христофора имеют мужских представителей в разных поколениях как в СССР, так и в Швейцарии.

Очевидно, что упомянуть в статье в равной мере всех потомков Л. Эйлера, которые проживали и проживают в России за весь интересующий нас двухвековой период, практически невозможно. Известны подробные биографии и портреты одних, краткие сведения о других, только имена третьих. Во многих случаях вообще не удалось установить всех потомков, идущих по женским линиям, так как в связи с неоднократными изменениями фамилий при выходе замуж следы их быстро терялись. Общее число известных хотя бы по имени потомков Л. Эйлера в настоящее время составляет около тысячи. Здесь рассказано только о некоторых и прежде всего о тех, о которых сохранилась более содержательная информация, — часто это соответствует их большей творческой активности. За дальнейшими подробностями читатель может обратиться к библиографии, указанной в родословной росписи [6].

История рода Эйлеров в России частично отражает саму русскую историю. Среди потомков Л. Эйлера были ученые, из них три математика — члена Петербургской академии наук (И.-А. Эйлер «II.1»<sup>1</sup>, П. Н. Фус «IV.13», Э. Д. Коллинс «IV.19»), профессора и доктора наук (историк литературы К. К. Фойгт «IV.59», зоолог А. В. Чернай «V.17», химик Н. А. Чернай «VI.16», юрист Э. Н. Берендтс «VI.72», палеонтолог Р. Ф. Геккер «VII.130» и др.), астрономы Е. Н. Фус «IV.17» и В. Е. Фус «V.37», историк К. В. Елпатьевский «VI.9», академик архитектуры В. Ф. Геккер «V.49», дипломаты Е. И. Эйлер «III.6» и К. Ф. Геккер «V.50»; имелось значительное число врачей, учителей, инженеров, геологов, горных инженеров и т. д. Потомки Л. Эйлера работали и продолжают работать в Академии наук. Многие служили в армии и на флоте, среди них было девять генералов и один адмирал, носивших фамилию Эйлер. Женщины рода Эйлеров в дореволюционный период обычно занимались домашним хозяйством и воспитывали детей. Двое состояли фрейлинами царского двора, несколько работали учительницами и служащими. После Великой Октябрьской революции появились женщины врачи, геологи, инженеры, филологи, переводчики и т. д.

## 1. ПРЕДКИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Сведения о предках Л. Эйлера наиболее полно собраны в уже упомянутой монографии К. Эйлера [1]. Корни родословного дерева Эйлеров уходят в глубокую старину — в XIII в. в германский город Линдау на берегу Боденского озера, расположенного на северных отрогах швейцарских Альп у нынешнего стыка границ Швейцарии, Австрии и ФРГ. Еще в XIII в. в Линдау, с его традиционным зданием городской ратуши и готическими храмами, окруженном лугами, полями и виноградниками, пе-

<sup>1</sup> Здесь и ниже в кавычках приводятся номерные шифры потомков Л. Эйлера в родословной росписи [6].

ремежаемыми деревнями, жили носители фамилии Эйлер-Шельпи. Только с переездом одного из представителей семьи в XVI в. в швейцарский город Базель название фамилии приобрело устойчивую форму Эйлер (Euler).

Среди земледельцев с большими или меньшими наделами вблизи Линдау находились первые обладатели фамилии Эйлер, имевшей тогда различные написания: XIV—XV вв. — Öwler, Äweler; XVI в. — Öwbler, Ewbler, Ouwler, Ouwbler и, наконец, Euler. От этой окончательной формы и произошло русифицированное написание фамилии «Эйлер». Одна из возможных версий происхождения фамилии идет от слова «ау» (Au), что означает луг или увлажненное поле. Следует отметить, что на «ау» оканчиваются названия Линдау и других близлежащих городов. Таким образом, фамилия Äweler могла означать владельца небольшого луга или поля (Äule), т. е. говорит о земледельческом происхождении предков Эйлера. Другая, менее надежная версия производит фамилию Эйлер от латинского слова «улла» (ulla) — горшок, преобразованного по-немецки в «аул» (Aul). Латинское слово горшечник (ullarius) могло превратиться последовательно в немецкие Aulner, Auler, Uller, Üllner, Iller и, наконец, в Euler. Вторая часть фамилии — Шельпи — имеет еще более древние корни. В буквальном смысле слово Шельпин (Schelplin) означает кривой или косяк, а в переносном — маленькая шельма, шельмочка, т. е. носит характер прозвища. В разные времена и эта часть фамилии имела различные написания: XIII в. — Schelbelin; XV в. — Schölpi, Schulpi, Schilpi, Schölpin, Schulpin, Schelpi; XVI в. — Schelppe, Schelpi, Schölbi, Schulpe. В наиболее старом сохранившемся документе 1287 г. говорится о некоем судебном исполнителе Шельбелине.

Горожанином Линдау, вышедшем из семьи землевладельцев, стал в 1583 г. Ганс Эйлер-Шельпин (1510—1568), человек практической хватки. Он имел дом с двором, поле, фруктовый сад и виноградник. После покупки им в 1535 г. дворянского имения Эделин в Шахене его стали называть Шельпин фон Шахен. Жена его Барбара Кес была из семьи, известной с 1400 г. Их сын Иорг (Георг) Эйлер (1532—1598), называемый также Шельпин, в 1555 г. женился на Катарине Шнель (1534—1584) представительнице фамилии, имевшей герб с изображением единорога на голубом поле. Это изображение позднее войдет в герб Эйлеров. Иорг также относился к избранным горожанам Линдау. Он принадлежал к евангелической церкви.

Базельскую линию рода Эйлеров открывает представитель третьего поколения Ганс-Георг (Иорг) Эйлер (1573—1663). В 1594 г. этот прапрадед Л. Эйлера в 20-летнем возрасте переехал в Базель — город, имевший многосторонние политические и хозяйственные связи с Линдау и находящийся примерно в 200 км ниже его по Рейну (он вырос из римского военного поселения Базилия, впервые упомянутого в 372 г. до н. э.). По приезде в Базель Ганс-Георг Эйлер приобрел ручной станок и стал ремесленником-гребенщиком. В том же 1594 г. он женился на Урсуле Рингсевант (1573—1611) — дочери базельского щеточника, от которой имел девятых детей. После ее смерти он женился вторично на Еве Рекк, от которой у него было еще шестеро детей. Его сын от первого брака — прадед Л. Эйлера — Павел I Эйлер (1600—1673), как и его братья, наследовал профессию отца. В 1623 г. он женился на Анне Хох (1606—1673), от кото-

рой имел восьмерых детей. Один из них — дед Л. Эйлера — Павел II Эйлер (р. 1635) сохранил специальность отца и деда. В 1669 г. он женился на Анне-Марии Гаснер (1642—1712), от которой имел одного сына.

В прежние времена отличительными знаками в виде гербов обладали не только дворяне, но и люди из более простых сословий. Первым Эйлером, изготовившим себе герб, был племянник Павла II, также Павел Эйлер (1654—1731), бывший многие годы пастором и советником консистории в Цвейбрюккене (теперь в земле Рейнланд-Пфальц) [1]. Его герб представлял собой щит, где на лазоревом (голубом) фоне была изображена стоящая на задних ногах косуля. Сова с распушенными крыльями помещалась на нашламнике, а намет был справа золотой и лазоревый, слева — золотой и червлёный (темно-красный). Необходимо указать, что в различных линиях Эйлеров, разбросанных по различным странам, гербы сильно отличались друг от друга. Так, у одних изображалась прыгающая косуля на лазоревом фоне и косуля на шлеме; у других — две косули и сова — символы продолжения рода и мудрости. Не случайно слова косуля (Eillun) и сова (Eilchen) на средневерхненемецком языке созвучны с фамилией Эйлер. Гербы изображались на вещах и, в частности, на печатах, которыми запечатывали письма.

Леонард Эйлер первоначально использовал в виде изображения на печати для писем латинские свои инициалы в прямом и зеркальном виде на щите, увенчанном короной (1727—1729) или раковиной (1755—1759), а затем изображение сказочного животного, напоминающего лошадь и стоящего на задних лапах (1755—1765) [7]. «Животное» имело бороду, стоячую гриву, худощавое тело и обрубленный хвост. Сверху щита находился шлем и аналогичное сказочное животное. На гербах его потомков (возможно, и Леонарда Эйлера в последние годы его жизни) появляется стоящий на задних лапах светлый или черный единорог на голубом фоне (единорог — мифическое животное в виде лошади с прямым рогом). Так, на погребальном щите (1780) дочери Эйлера Шарлотты ван Делен единорог изображен на одной из половин щита и в виде держателя щита [1]. Далее на гербе, полученном в 1846 г. внуком Леонарда Эйлера, генералом А. Х. Эйлером, черный единорог изображен на одной четверти щита (на остальных четвертях даны артиллерийские атрибуты) и в виде держателей.

Сын Павла II — Павел III Эйлер (16.02.1670—11.03.1745) [8], отец Л. Эйлера — не пошел по стопам предков-ремесленников и в 1688 г. поступил на теологический факультет основанного в 1460 г. Базельского университета, который и окончил в 1700 г. Здесь он также посещал лекции знаменитого математика Якоба Бернулли. В 1701 г. Павел Эйлер стал пастором в приюте для сирот и в церкви св. Якоба «на Бирсе». Наконец, в 1708 г. он получил скромный приход в деревне Ризн в 5 км под Базелем, где и прослужил до смерти. В 1706 г. Павел Эйлер женился на дочери госпитального пастора Маргарите Бруккер (1677—1761), происходившей из рода священников и ученых. У них было четверо детей — сыновья Леонард, Иоганн-Генрих и дочери Анна-Мария, Мария-Магдалена. Семья жила в нелегких материальных и жилищных условиях. В доме было всего две комнаты. Для обеспечения семьи пастор Эйлер вел еще занятия в детской духовной школе.

В 1731 г. старшая сестра Л. Эйлера Анна-Мария (19.08.1708—29.05.1778) вышла замуж за мюнстерского органиста Христиана Генгенбаха

*Личные печати Л. Эйлера*  
 1727—1729 гг. (а),  
 1755—1759 гг. (б)  
 и 1755—1765 гг. (в)

*Фотографии В. С. Оболенского,*  
*Базель*



(1706—1770), а младшая сестра Мария-Магдалена (11.11.1711—30.07.1799)— за пастора Иоганна-Якоба Нёрбеля (ум. 1758).

Младший брат Леонарда Иоганн-Генрих (07.12.1719—08.09.1750) был художником. В 1735—1740 гг. он учился в Петербурге у тестя Л. Эйлера художника Георга Гзелля, а затем вместе со старшим братом переехал в 1741 г. в Берлин и некоторое время там жил. Не найдя подходящей работы, он вернулся в Базель, где в 1746 г. женился на Катарине Имхоф, которая умерла при родах первого ребенка. В 1750 г. он женился вторично — на Анне-Марии Хугельшоппер, умершей через три месяца после смерти мужа в том же 1750 г.

## 2. ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР И ЕГО СЕМЬЯ

Великий математик Леонард Эйлер родился в Базеле 15 апреля 1707 г. Им было дано ему в честь крестного отца тайного советника Леонарда Решпингера. Впрочем, имя Леонард было распространённым в Базеле, поскольку одной из наиболее почитаемых была церковь св. Леонарда. Детство будущего ученого прошло в селении Риэн вблизи города. Затем он учился в базельской латинской гимназии, проживая в городе у бабушки с материнской стороны. В 1720 г. он поступил в Базельский университет, став там в 1722 г. бакалавром философии и в 1724 г. — магистром искусств. Получая хорошее гуманитарное образование, Леонард обращал основное внимание на изучение математики. Математической подготовкой его руководил Иоганн Бернулли, занявший кафедру в 1705 г. своего рано умершего брата Якоба. После ряда попыток Л. Эйлер не нашел в маленькой Швейцарии подходящей работы и в возрасте 20 лет приехал в Россию по приглашению только что образованной в 1725 г. Санкт-Петербургской академии наук. Его приезду содействовали прибывшие ранее в Петербург его друзья — братья Николай (1695—1726) и Даниил (1700—1782) Бернулли. С последним он жил в Петербурге в течение шести лет на одной квартире.

В России в 1727 г. началась блестящая научная деятельность Леонарда Эйлера. Он стал основателем петербургской ветви рода Эйлеров, тем



б



в

самым завершая базельский период фамильной истории. По мере научных успехов Эйлера возрастали и его заработки: 1727 г. — адъюнкт кафедры высшей математики (300 руб. в год плюс квартира, дрова и свечи); 1731 г. — профессор теоретической и экспериментальной физики (академик) (600 руб. в год плюс 60 руб. на квартиру, дрова и свечи); 1733 г. — профессор высшей математики (1735 г. — 860 руб., 1741 — 1200 руб. в год). По тем временам это были весьма солидные оклады.

7 января 1734 г. Л. Эйлер женился на Катарине Гзелль (1707—1773) — дочери академического живописца Георга Гзелля (ум. 1740), также швейцарца, приглашенного в 1717 г. Петром I из Амстердама. Мать Катаринны Гзелль Мария-Гертруда де Лоен была второй женой Г. Гзелля. Последний преподавал в 30-е годы рисование в школе живописи при Академии наук вместе со своей третьей женой художницей Марией Граф (1678—1744). Перед свадьбой Эйлер приобрел на 10-й линии Васильевского острова, между Большим проспектом и Невой (недалеко от здания Академии наук), земельный участок площадью в 1200 кв. м, где был построен просторный деревянный дом на кирпичном фундаменте.

Первым в семье Леонарда Эйлера родился сын Иоганн-Альбрехт, затем три девочки, умершие в младенческом возрасте, и позднее второй сын Карл, после уже в Берлине появились на свет другие дети. Всего у Л. Эйлера было 13 детей, из которых 8 умерли младенцами. Третий сын Христофор и две вышедшие замуж впоследствии дочери родились в Берлине.

Эйлер был хорошим семьянином. Отношения в семье были самые патриархальные, уклад жизни был похож на уклад его детства в семье отца-пастора. Эйлер отдавал почти все свое время научному творчеству и другим работам, но часть его уделял занятиям с детьми и потом с внуками, обучая их, в частности, математике, постоянно заботился о продвижении

близких. На его иждивении нередко находились также родственники его и жены. Эйлер был добродушен и умеренно религиозен. Обыкновенно он был естественно веселым, любил добродушно пошутить. Беседы с ним были приятны и поучительны. При всем том он легко раздражался, однако гнев у него проходил так же быстро, как и появлялся, и он ни на кого долго не досадовал. Будучи потомком многих поколений ремесленников, Эйлер сохранял черты немецко-швейцарского бюргера с его расчетливостью и бережливостью. Помимо математики и физики, он живо интересовался и другими естественными науками, хорошо знал писателей древнего мира, историю всех времен и народов. Новой же художественной литературе и театру внимания не уделял, признавал только театр марионеток. Очень любил музыку, слушал ее во время отдыха. Был страстным курильщиком. Помимо немецкого языка, сохранив на всю жизнь швейцарский диалект, он владел французским, латинским и другими «древними, восточными и европейскими языками», достаточно свободно говорил и писал по-русски.

Об успешной и активной научной деятельности Л. Эйлера говорить не приходится, ей посвящены специальные исследования. Все шло хорошо, однако в 1738 г. в возрасте 31 года при напряженной работе он потерял в результате внесенной инфекции правый глаз.

Во время «биرونщины» и непосредственно после нее в России была тяжелая и неустойчивая политическая обстановка. Академия наук влачила жалкое финансовое состояние и были даже перебои с выплатой жалования. Положение еще более усложнилось, когда после смерти императрицы Анны Иоанновны императором был провозглашен младенец Иоанн VI и регентами — его родители Анна Леопольдовна и немецкий принц Карл-Генрих, а влиятельным лицом при них Миних. Русская в своей основной массе гвардия высказывала недовольство засилием при дворе иностранцев; в столице было неспокойно. В этих условиях Леонард Эйлер принял предложение взошедшего на престол 31 мая 1740 г. прусского короля Фридриха II, который стремился реорганизовать работу прозябавшей до этого времени Берлинской академии (Общество наук в Берлине было создано в 1700 г. Г. В. Лейбницем). Естественно, Эйлер не мог предвидеть переворота, который вскоре произошел в России, и прихода к власти дочери Петра I Елизаветы, что изменило обстановку в стране и, в частности, в Академии наук. В Берлин Эйлер переехал в 1741 г. с семьей в 10 человек, включая его самого, жену, двух сыновей, свояченицу с четырьмя племянниками (сестру его жены Анну Гзелль, вышедшую замуж в 1720 г. за Людвига Вермелена) и своего брата-художника Иоганна-Генриха. Переезд семьи и прислуги оплатил король. В Берлине Эйлер был назначен директором математического класса Академии и ему было установлено жалование в 1600 талеров в год, эквивалентное 1200 руб., получаемым им до того в Петербурге.

В 1742 г. Эйлер купил в Берлине за 2000 талеров трехэтажный дом с семью окнами по фасаду и подвалами. Дом этот сохранился в перестроенном виде до сих пор (Беренштрассе, д. 21/22; неподалеку от нынешнего здания Комической оперы) и в 1907 г. на нем была установлена мемориальная доска. Кроме того, в 1755 г. Эйлер приобрел под Берлином в Шарлоттенбурге небольшое имение за 6000 талеров с красивым домом, большим садом, пахотной землей и лугами, где держал 6 лошадей и 10 ко-



ров. Там жили его дети с гувернером, а хозяйкой была его мать, переехавшая в 1745 г. после смерти мужа. Дом был свободен от воинского постоя (в Петербурге в доме Эйлера на постое находились 8 солдат). Во время Семилетней войны (1756—1763) в 1760 г. имение Эйлера было разграблено саксонскими солдатами, находившимися под командой русских офицеров. Однако понесенные убытки были вскоре щедро возмещены Россией и ему была выплачена компенсация в 4000 талеров. В 1763 г. после смерти матери (1761) и в предвидении отъезда из Берлина Эйлер свою усадьбу продал. Пансионеры, приезжавшие к нему для обучения из России, Франции и Швейцарии, проживали в его берлинском доме. Все годы пребывания в Берлине (1741—1766) Л. Эйлер был почетным членом Петербургской академии наук, получая солидную пенсию в 200 руб. в год (270 талеров). Он регулярно посылал в Петербург свои работы для публикации, редактировал присылаемые статьи, обучал адъюнктов Академии — С. К. Котельникова, С. Я. Румовского (будущего вице-президента Академии) и М. Софронова, приобретал для Академии литературу и оборудование, подыскивал кандидатов на вакансии в Петербурге. В 1743—1744 гг. некоторое время у него учился граф Кирилл Григорьевич Разумовский (брат фаворита Елизаветы Петровны — Алексея Разумовского), назначенный в 1745 г. в возрасте 18 лет президентом Петербургской академии наук.

В берлинский период жизни Эйлеру не раз предлагали вернуться в Петербург. Эйлер некоторое время колебался — это была бы третья перемена постоянного местожительства. Но в 1766 г. в связи с резким ухудшением взаимоотношений с Фридрихом II Эйлер принял предложение русского правительства и со всей семьей из 16 домочадцев, включая слуг, вернулся в Петербург (дорожные расходы были оплачены Екатериной II). Отъезд из Пруссии, о котором он начал подумывать еще в 1762 г., был облегчен тем обстоятельством, что Эйлер сохранял за собой и своей семьей базельское гражданство (жена и дети получили базельское гражданство в 1752 г.) и еще тем, что королю Фридриху II, незадолго перед тем проигравшему Семилетнюю войну с коалицией, в которую входила и Россия, было неудобно вступать в какой бы то ни было конфликт с русским правительством. Несколько задержался в Пруссии младший сын Христофор, служивший армейским офицером, но вскоре и он получил разрешение переехать в Петербург.

В Петербурге Леонард Эйлер был принят с большим почетом: вскоре после приезда он имел продолжительную аудиенцию у Екатерины II, с которой обсуждал вопросы, касавшиеся деятельности Петербургской академии. Ему было назначено жалование в 3000 руб. в год. Все его сыновья были хорошо устроены в соответствии с их специальностями, о чем будет сказано далее. Эйлер также получил 8000 руб. на приобретение большого каменного двухэтажного дома с 13 окнами по фасаду, выходящему на Неву (дом, в порядке исключения, был освобожден от постоя солдат). В перестроенном виде (добавлен третий этаж и продлен фасад) дом сохранился до наших дней (набережная Лейтенанта Шмидта, д. 15). На нем по случаю 250-летия со дня рождения Л. Эйлера 15 апреля 1957 г. была установлена беломраморная мемориальная доска (скульптор Ю. Г. Ключеге). В 1983 г. в доме был произведен капитальный ремонт и в нем расположилась средняя школа с филологическим уклоном. В ма-

тематическом кабинете школы имеется стенд, посвященный жизни и научной деятельности Л. Эйлера.

В 1767 г. шестидесятилетний Эйлер почти полностью потерял зрение и на оставшийся второй глаз — левый. Произведенная в 1771 г. известным окулистом Ж. Б. Венцелем операция по снятию катаракты с левого глаза восстановила зрение, которое, однако, вскоре было вновь потеряно по причине отсутствия антисептиков, а также вследствие того, что Эйлер преждевременно приступил к активной работе. После этого Эйлер уже не мог различать людей по внешнему облику и самостоятельно читать литературу. Он мог только писать большими буквами мелом на черной доске, расположенной на большом столе. Его помощники И.-А. Эйлер, Н. И. Фус и М. Е. Головин переписывали с доски в тетради. В 1772 г. район Петербурга между 7-й и 21-й линиями Васильевского острова охватил большой пожар, сгорело свыше 550 домов, включая и дом Эйлера. Погибло его имущество, большая часть библиотеки и некоторые рукописи. Однако основная часть рукописей была спасена. Русское правительство помогло Эйлеру, отпустив 6000 руб. на постройку нового дома.

В 1773 г. после 40 лет супружеской жизни умерла жена Эйлера. Через три года вдовства в 1776 г. в возрасте 69 лет он женился вторично, считая, что дому нужна хозяйка, которой может быть только жена. Второй его женой стала сводная сестра первой Саломея-Абигайль Гзелль (1723—1794), которую знал с давних пор. Ее матерью была уже упомянутая художница Мария Граф. В 1780—1781 гг. умерли обе дочери Эйлера, бывшие замужем и создавшие свои семьи. К 1778 г. у Эйлера несколько ослаб слух. В сентябре 1783 г. он стал чувствовать приступы головокружений. Умер Эйлер 18 сентября 1783 г. на 77-м году жизни и был похоронен на Смоленском евангелически-лютеранском кладбище, расположенном на Васильевском острове. На могиле была установлена каменная надгробная плита с надписью на немецком языке: «Здесь покоятся бренные останки мудрого справедливого знаменитого Леонарда Эйлера, родившегося в Базеле 4 апреля 1707 года и умершего 7 сентября 1783 года». Через несколько десятков лет в 1830 г. при похоронах его невестки (жены Карла Эйлера — Эмили) эта плита была обнаружена заросшей и слабо различимой. И только в 1837 г. на могиле Эйлера был установлен массивный памятник в виде саркофага из розового полированного финляндского гранита с надписью на латинском языке «Леонарду Эйлеру — Петербургская академия. Родился в Базеле 4/15 апреля 1707. Умер в Петербурге 7/18 сентября 1783». В 1957 г. в связи с предстоящими празднованиями по случаю 250-летия со дня рождения Эйлера его останки вместе с памятником были перенесены на Лазаревское кладбище Александро-Невской лавры (Ленинградский некрополь) и помещены недалеко от могилы первого русского академика М. В. Ломоносова.

Л. Эйлер не отличался любовью к путешествиям. Переехав в 1727 г. из Базеля в Петербург, он никогда более не посещал своей родины, хотя до конца жизни сохранил свое швейцарское подданство. Он выезжал на дачу под Петербург (Дудергоф) и в свое поместье под Берлином. В 1748 г. совершил поездку из Берлина во Франкфурт-на-Майне вместе с женой и старшим сыном для встречи матери, переехавшей к нему после смерти отца; в 1761 г. вместе с сыном Карлом был в Галле, где нанес визит профессору И. А. Сегнеру.

В семье Л. Эйлера родилось 45 внуков, из которых ко дню его смерти оставалось 26. Сыновья его Иоганн-Альбрехт и Карл с семьями проживали после возвращения в Петербург вместе с ним в доме на берегу Невы. Христофор, как военный, жил по месту своей службы — сначала в Сестрорецке, а затем в Выборге. После смерти Л. Эйлера его вдова получала пенсию в 1000 руб. в год, а Иоганн-Альбрехт — 200 руб. Вскоре дом и библиотека были проданы. Академик И.-А. Эйлер, являющийся с 1769 г. конференц-секретарем Академии наук, переселился в расположенный поблизости дом Академии на берегу Невы на углу 7-й линии. Врач Карл купил в 1785 г. небольшой каменный дом на Среднем проспекте (д. 25), просуществовавший по крайней мере до 1957 г. (теперь на его месте построен новый дом).

Л. Эйлер был среднего роста, крепкого телосложения, широкоплеч, с тяжелой походкой, светлоглаз, редко болел (кроме болезни глаз). До самой смерти сохранял феноменальную память, позволявшую делать сложнейшие вычисления в уме, сверхчеловеческую трудоспособность, умение быстро сосредоточиваться, твердую волю. Говорили, что он мог работать с кошкой на спине и в окружении своих внуков.

### 3. ДЕТИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Старший сын Леонарда Эйлера — академик-математик Иоганн-Альбрехт (1734—1800) «П.1» был его ближайшим помощником, секретарем и учеником. Родившись в Петербурге, он в возрасте семи лет вместе с родителями переехал в Берлин. Успешно изучал в гимназии гуманитарные науки, а у отца — математические дисциплины: арифметику, геометрию, тригонометрию, алгебру, математический анализ, физику и астрономию. В 1749 г. он вместе с отцом участвовал в нивелировке при прокладе Фирнова канала между Одером и Хафелем. В 1754 г. в возрасте 20 лет Иоганн-Альбрехт был избран членом Берлинской академии наук (с жалованием в 200 талеров в год, а с 1764 г. — 400 талеров). В 1754 г. он был назначен инспектором Берлинской астрономической обсерватории; наблюдал и описал появлявшуюся в 1758 г. комету Галлея. По возвращении в 1766 г. в Россию стал профессором физики (академиком) Петербургской академии наук, что соответствовало положению директора Физического кабинета (1766—1769); ему был положен оклад в 1000 руб. в год. Основные работы (свыше 70 публикаций) И.-А. Эйлера посвящены различным вопросам математики, механики, физики, небесной механики и астрономии. Будучи математиком, вопросами физики он занимался как теоретик; провел исследования по теории электричества, гидростатике, расчету оптических систем, теории движения Луны, планет и комет. Семь работ, выполненных, как и многие другие, под непосредственным руководством отца, были премированы Петербургской, Парижской и другими академиями наук. Ввиду невозможности отделить научные работы Иоганна-Альбрехта от работ Леонарда Эйлера, все они включены в «Полное собрание сочинений» последнего (L. Euleri Opera omnia).

В 1769 г. И.-А. Эйлер стал конференц-секретарем Петербургской Академии наук, проработав в этой должности свыше 30 лет, вплоть до своей смерти. В эти годы он почти прекратил научную работу, однако

вел регулярные метеорологические наблюдения, имеющие значение для систематического изучения климата России. Он возглавлял академические издания, писал обзоры, участвовал в составлении лунных таблиц, вел обширную академическую переписку (за 15 лет 1000 писем) с иностранными учеными, вместе с отцом и четырьмя академиками в 1766—1774 гг. был членом хозяйственной комиссии по управлению Петербургской академией наук. Он был также постоянным секретарем Вольного экономического (научного) общества и с 1776 г. инспектором (директором по учебной части) Сухопутного шляхетного кадетского корпуса. Был также членом Мюнхенской (1762), Стокгольмской (1771), Флиссингенской (1775) и других академий наук. Имел чин статского советника и орден св. Владимира 4-й степени, дающий право на получение русского потомственного дворянства. По отзывам современников, свои обязанности И.-А. Эйлер выполнял с величайшей добросовестностью, умением и справедливостью; отличался гостеприимством, привлекательностью и благожелательностью к людям; имел много друзей. В 1760 г. он женился на дочери прусского королевского советника и оберкастеляна Анне-Шарлотте-Софии фон Гагемейстер (1734—1805), от которой имел десятирех детей.

Второй сын Леонарда Эйлера Карл (1740—1790) «II.5» был врачом. Годовалым ребенком родители перевезли его с собой в Берлин. Там он учился в школе и у частных учителей, а также у своего отца — началам философии и математики. Слушал лекции по ботанике, анатомии и физиологии. В 1756 г. участвовал в ботанической и минералогической экспедиции по Германии, а в 1760 г. — по Бельгии. Окончив университет в Галле, в 1762 г. стал доктором медицины, а в 1763 г. начал работать врачом французской общины в Берлине. Вернувшись с отцом в Петербург, Карл Эйлер был назначен придворным врачом (лейб-медиком) Екатерины II («императорским архиатером») и членом Медицинской конторы, а с 1772 г. стал также врачом («ординарный медик») Академии наук. В 1779 г. он получил чин коллежского советника. Современники отмечали его ученость, добросовестность и опыт. Надо, впрочем, отметить, что награжденное премией Парижской академии наук (1760) исследование К. Эйлера о движении планет выполнено, безусловно, при непосредственном участии отца.

В 1766 г. (за 10 дней до отъезда из Берлина) К. Эйлер женился на дочери прусского королевского советника Анне-Эмили (Амалии) фон Белль (1741—1830), от которой имел 11 детей. Вместе с женой он похоронен на Смоленском лютеранском кладбище (в могиле отца) [9].

Старшая дочь Л. Эйлера Екатерина-Елена (1741—1781) «II.6» родилась в Берлине. В 1777 г. она вышла замуж за премьер-майора русской службы Карла-Иосифа Белля (1744—1830). Ее муж, первоначально бывший прусским офицером, переехал в 1771 г. в Россию и стал в 1780 г. оберквартирмейстером. Позднее он получил чин полковника и русское дворянство.

Младший сын Л. Эйлера Христофор (1743—1808) «II.7» родился в Берлине. После обучения в школе, а также у отца и старшего брата он посвятил себя артиллерии. Во время Семилетней войны служил офицером в прусской армии, имел чин обер-лейтенанта, участвовал в походах. Фридрих II сперва воспрепятствовал его отъезду в Россию вместе с отцом (как уроженца Пруссии) и посадил его даже за повторное хода-

тайство в крепость Кюстрин, но вмешательство Екатерины II позволило ему приехать в Петербург в 1767 г. Здесь он получил очередной чин. В 1769 г. был командирован Академией наук в Орскую крепость на Урал для наблюдения прохождения Венеры через диск Солнца, произвел также ряд астрономических наблюдений в Яицком городке, Запорожской Сечи, Кременчуге, Самаре, Глухове, Оренбурге, Черкасске, Таганроге и др. Он опубликовал несколько работ по астрономии. Затем Х. Эйлер участвовал в русско-турецкой войне 1770—1772 гг., отличился и получил орден. В 1778 г. в чине майора артиллерии был назначен командиром строящегося Сестрорецкого оружейного завода. По окончании всех работ по строительству завода в 1789 г. Екатерина II произвела его в генерал-майоры артиллерии и назначила начальником артиллерии в армию, действовавшую против шведов. По заключении в 1790 г. мира со Швецией он остался начальником артиллерии, расположенной в Финляндии и во всех пограничных крепостях. Проживал в Выборге. В 1783 г. во время большого пожара благодаря его находчивости удалось спасти от взрыва пороховые погреба (с 11 000 пудов пороха) и крепость с гарнизоном и жителями. В 1794 г. он был переведен по службе в Петербург, где в 1799 г. вышел в отставку в чине генерал-лейтенанта. Сначала Х. Эйлер жил в купленном имении Козлов-Берег в Минской губернии, а после его продажи в 1803 г. приобрел в Выборге дом и в 10 верстах от города мызу Ракалайоки, где и умер в 1808 г.

В 1776 г. Х. Эйлер женился на Анне Винтерштедт, которая умерла в 1777 г. после первых родов. Вторым браком он сочетался в 1778 г. с Анной Сергеевной фон Краббе (1755—1813) — дочерью эстляндского дворянина, приходившейся племянницей начальнику русской артиллерии генерал-аншефу барону И. И. Меллер-Закомельскому. У них было 11 детей.

Младшая дочь Л. Эйлера Шарлотта (1744—1780) «II.8» родилась в Берлине. После переезда с отцом в Россию в том же 1766 она вышла замуж за бывшего офицера прусской армии барона Якоба ван Делена (1743—1786), который сватался к ней еще в Берлине в 1763 г. Однако, будучи корнетом, он не смог получить тогда разрешение на брак от Фридриха II, который запрещал вступать в брак младшим офицерам (прапорщикам и корнетам). Ван Делен имел поместья вблизи Ахена на реке Рур, притоке Мааса. Туда Шарлотта и уехала из Петербурга в 1770 г. вместе с мужем и двумя сыновьями. Остаток жизни она провела в имении мужа и была похоронена в маленькой церкви в Хюкельхофене. Она оказалась единственным ребенком Леонарда Эйлера, уехавшим из России.

Следует добавить, что все три сына Л. Эйлера приняли русское подданство.

#### 4. ВНУКИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Большинство из 45 внуков Л. Эйлера родились при его жизни, многие жили в одном доме с ним и с несколькими из них он занимался математикой.

Среди десятирех детей И.-А. Эйлера было четверо сыновей. Старший из них Иоганн-Леонард (1762—1827) «III.2» был полковником артиллерии русской армии; одно время служил экономом в Екатерининском институте в Петербурге. У него в свою очередь было два сына — полков-

ник Иван Эйлер (1790 — после 1842) «IV.1» и штабс-капитан Федор Эйлер (1796 — после 1832) «IV.4», оба умерли, по-видимому, холостыми.

Второй сын И.-А. Эйлера Егор (Георг) (1770—1831) «III.6» служил с 1784 по 1811 г. в Министерстве иностранных дел архивариусом, переводчиком и секретарем посольства в Берлине и Гамбурге, также был в Копенгагене, Альтоне и Любеке. Он принимал участие в миссии М. И. Кутузова в Константинополе. В 1812 г. стал членом архангельской таможенной департамента внешней торговли Министерства финансов. Он умер бездетным в Архангельске от холеры.

Третий сын Христофор (1772—1847) «III.7», подпоручик в отставке, был холост. Младший сын Павел Эйлер (1778 — после 1815) «III.10», отставной прапорщик гвардии, пошел по лесному ведомству (1800 г. — форстмейстер в Орле, 1814 г. — коллежский ассессор в Карачаевском уезде Орловской губернии). О семье его известно только, что жена была русская.

Старшая дочь Иоганна-Альбрехта Эйлера Екатерина Ивановна, в семье ее звали Тринеттой (1761—1809) «III.1», была классной дамой (гувернанткой) в малолетнем отделении первого кадетского корпуса в Петербурге, а ее сестра — Анна Ивановна (Эмилия) (1767—1831) «III.5» — классной дамой в Смольном институте. Обе замуж не выходили.

Две другие дочери Иоганна-Альбрехта — Альбертина и Шарлотта, названная в честь матери, вышли замуж за ученых. Альбертина Эйлер (1766—1829) «III.4» родилась в Берлине и в том же году была перевезена в Петербург. В 1784 г. она вышла замуж за Николая Ивановича Фуса (1755—1826), приглашенного в 1773 г. из Базеля в помощь Леонарду Эйлеру. Став в 1783 г. академиком по математике, он в 1800—1826 гг. был непререкаемым секретарем Петербургской академии наук. Со времени приезда в Россию Фус жил в течение 10 лет в доме Эйлера и помог подготовить ему к публикации около 300 статей. Сам Н. И. Фус — автор свыше 50 работ по астрономии, геометрии (включая сферическую геометрию), суммированию рядов, теории дифференциальных уравнений, механике и фортификации. Получив русское подданство в 1799 г., он имел гражданский чин действительного статского советника, соответствующий согласно «Табели о рангах» армейскому чину генерал-майора. Фус был, как и его жена, похоронен на Смоленском лютеранском кладбище.

Шарлотта Эйлер (1773—1831) «III.8» родилась в Петербурге и в 1789 г. вышла замуж за приехавшего в Петербург в 1786 г. молодого академикоматематика Якоба II Бернулли (1759—1789), приходившегося племянником знаменитому Даниилу Бернулли, работавшему в 1725—1733 гг. в Петербурге. Замужество Шарлотты оказалось весьма непродолжительным, поскольку ее муж, купаясь в Невке, утонул в том же 1789 г. Вскоре после его смерти Шарлотта вторично вышла замуж за содержавшего позднее частный пансион пастора реформатской церкви в Петербурге Иоганна-Давида Коллинса (1761—1833), шотландца по происхождению, приехавшего из Пруссии.

Среди 11 детей врача Карла Эйлера вырос только один сын — Леонтий (1770—1849) «III.13». Он поступил в 1779 г. сержантом в лейб-гвардии Преображенский полк и вышел в 1791 г. в отставку в чине капитана. Далее служил учителем в Сухопутном кадетском корпусе, бухгалтером в государственном банке Павловского городского правления и инспекто-

ром в Рижской таможене. В 1811—1812 гг. Л. К. Эйлер состоял надзирателем по хозяйственной части в Царскосельском лицее (упоминается в «национальных песнях» лицеистов 1-го курса, обучавшихся вместе с А. С. Пушкиным); позднее служил переводчиком на Петербургской таможене. Пользовался репутацией честнейшего человека.

Дочь Карла Эйлера Анна (1770—1822) «III.14» вышла замуж в 1793 г. за майора русской армии барона Вильгельма ван Делена (ок. 1768—1810). Ее сестра Елизавета (1780—1852) «III.20» была замужем за профессором философии Казанского университета Карлом Амвросиевичем Фойгтом (1762—1811), а после его смерти — за профессором того же университета И. О. Брауном (1774—1819) и затем за профессором Ф. И. Эрдманом (1793—1862).

Екатерина Карловна Эйлер (1772—1845) «III.15» была замужем за директором коммерческого банка статским советником Карлом-Фридрихом Болтенгагеном (1768—1831). Их потомство дошло до наших дней. Отметим, что Екатерина Эйлер-Болтенгаген является дочерью именно Карла, а не Иоганна-Альбрехта, как это иногда считалось. Этим снимаются некоторые противоречия, возникавшие в датах жизни детей И.-А. Эйлера.

Среди детей Екатерины-Елены Эйлер-Белль был только один сын — Андрей Белль (1779—1865) «III.24», ставший полковником артиллерии.

Наиболее известным среди детей Христофора Эйлера был старший сын Александр Эйлер (1779—1849) «III.28», генерал от артиллерии. Начальное математическое образование он получил от отца. Далее учился в петербургском пансионе Ведемейера; математику изучал у Н. И. Фуса. В военной службе числился с 1790 г. сержантом. Участвовал в войне в Финляндии, будучи адъютантом своего отца. В 1791 г. учился в гимназии в Выборге, в 1794—1796 гг. служил во 2-м канонерском полку и в гребной (галерной) артиллерии Балтийского флота, а позднее в лейб-гвардии артиллерийском батальоне. С тем же гвардейским батальоном участвовал в австрийском походе против французов (за отличие под Аустерлицем награжден орденом св. Анны 3-й ст.). В кампанию 1807 г. участвовал с батальоном во многих сражениях в Пруссии, в том числе под Гутенштадтом, при Гейльсберге и под Фридрихсдорфом (орден св. Владимира 4-й ст. с бантом). С 1810 г. командир гвардейского артиллерийского батальона (бригады), а также всех артиллерийских рот, расположенных в Петербурге, Москве, Смоленске и Архангельске, и Петербургского, Брянского и Охтенского пороховых заводов. В Отечественную войну 1812 г. был с батальоном в походе в Вильне, Дриссе, Двинске, Можайске и Тарутине. Во время Бородинского сражения был начальником артиллерийского резерва М. И. Кутузова в составе 30 рот (360 орудий). За мужество, храбрость и распорядительность получил орден св. Владимира 3-й ст., а в декабре 1812 г. стал генерал-майором. Далее участвовал в боях под Ельней, Красным, Вильно, на реке Березине. В заграничном походе продолжать командовать гвардейской артиллерией. Участвовал в Лейпцигском сражении (орден св. Анны 2-й ст. с бриллиантами). В Базеле был торжественно принят как внук великого Леонарда Эйлера. С 1826 г. генерал-лейтенант, с 1831 г. член совета главного штаба по военным поселениям, с 1833 г. вице-директор и с 1834 г. директор артиллерийского департамента Военного министерства, генерал от артилле-

рии, с 1840 г. член Военного совета Министерства. Кроме того, А. Х. Эйлер был членом ряда комитетов и комиссий: по мастерским работам, по лафетам, по приему металлов и т. п. Он обладал, по словам современников, ясным и быстрым умом, отличался распорядительностью, знанием дела и большим опытом, был усерден к службе, правдив, пользовался уважением со стороны начальников, заботился о хорошем питании и устройстве солдат.

В 1804 г. А. Х. Эйлер женился в Киеве на своей двоюродной сестре Елизавете Николаевне Гебенер (1785—1844), дочери командира Охтенского порохового завода генерал-майора Николая Андреевича Гебенера и Елизаветы Сергеевны Краббе (старшей сестры его матери).

Второй сын Христофора Эйлера Федор (1784 — после 1835) «III.31» был генерал-майором, служил в артиллерии. Их младший брат Павел (1786—1840) «III.33» в 1803 г. окончил Первый кадетский корпус, военную службу начал прапорщиком в Рязанском пехотном полку. В 1805 г. участвовал в военной экспедиции по Балтийскому морю до острова Рюген, далее был в походе по шведской Померании до р. Везер. В 1806 г. сражался с французами у рек Буг и Нарев, в 1807 г. — на переправе через р. Кальтфлюс, участвовал в сражениях под Прейсиш-Эйлау, при Шарпике и под городами Гейльсберг и Фридланд (орден св. Анны 4-й ст.). В 1808 г. находился в шведской Померании при осаде и взятии крепости Свеаборг, в 1809 г. участвовал в изгнании неприятеля с Аландских островов. Во время Отечественной войны 1812 г. сражался при Гедианове, Бородине (за отличие произведен в капитаны), а также при Тарутине, под Малоярославцем, при Вязьме и Красном. В 1813 г. воевал в герцогстве Варшавском, участвовал в боях под Калишем, в Саксонии, под Люцином (орден св. Владимира 4-й ст. с бантом), в Чехии под Гессельбахом, при крепости Конштейн и при Гросс-Котте, в сражении при Кульме (произведен за отличие в майоры), под Эльзином, Эстенбеймом и Лейпцигом (орден св. Анны 2-й ст.). В 1814 г. был во Франции. В 1815 г. принимал участие во вторичном походе во Францию через Галицию, Австрию, Моравию и Баварию до г. Вертю. С 1817 г. батальонный командир, а с 1823 г. командир Елецкого пехотного полка (1823 г. — орден св. Георгия 4-й ст.). В 1827 г. П. Х. Эйлер по болезни ушел в отставку с чином полковника и мундиром. Однако через три года в 1830 г. вновь поступил на службу — в корпус жандармов. В 1839 г. был произведен в генерал-майоры по кавалерии с причислением к Министерству внутренних дел.

Четвертый сын Христофора Эйлера Константин (1788—1863) «III.34» служил офицером в егерских полках, принимал участие в военных походах, был награжден золотой шпагой с надписью «за храбрость» и медалью за взятие Парижа в 1814 г. В 1823 г. уволился от военной службы по прошению «за ранами» с чином полковника. После этого работал городничим в ряде городов Витебской и Минской губерний, а в конце 1840 г. ушел в отставку.

Из четырех дочерей Христофора две остались незамужними, а две — Бланина (1780—1868) «III.29» и Александра (1789—1843) «III.35» — были замужем за полковниками артиллерии, первая за Александром Петровичем Бекманом (1772—1851), а вторая за Федором Карловичем Ререном (1788—1851).

О детях Шарлотты Эйлер и Якоба ван Делена известно следующее.



Их старший сын Леонард-Альбрехт-Карл (1767—1821) «III.39» сначала был адъютантом у своего дяди Христофора, а затем в 1794 г. перешел на голландскую службу. Далее работал главным инженером по мостам и дорогам в Вестфалии; в 1814 г. был майором прусской армии. В 1825 г. он снова на голландской службе: окружной инспектор по гидростроительству. Был членом-корреспондентом (с 1809) и действительным членом (с 1816) Нидерландской академии наук. В 1803 г. он женился на своей кузине Класине ван Делен.

Второй сын Шарлотты — Иохан-Кристофель-Вильгельм ван Делен (1768—1810) «III.40» был инженер-майором русской службы.

Младший сын — Иохан-Каспер-Фердинанд Делен (1779—1872) «III.45» сначала был ротмистром, затем вышел в отставку и стал бургомистром в Голландии.

Одна из дочерей Шарлотты — София (р. 1777) «III.44» вышла замуж за ротмистра русской кавалерии Фридриха-Карла Лобеданка и переехала в Россию.

#### 5. ПРАВНУКИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Переходя к правнукам и более отдаленным потомкам Леонарда Эйлера, мы сначала расскажем о потомках по мужским линиям, сохранивших до наших дней фамилию своего великого предка. Как уже говорилось в предыдущем разделе, нет сведений о потомстве внуков Иоганна-Альбрехта Эйлера. Однако до настоящего времени дошли представители женских линий, начинающихся с его дочерей Альбертины «III.4» и Шарлотты «III.8», о которых будет сказано далее отдельно. Здесь же пойдет речь только о внуках Карла и Христофора Эйлеров, потомки которых до сих пор носят фамилию Эйлер. Не имея возможности подробно рассказать обо всех, ограничимся теми, о которых имеются более полные сведения. Об остальных кое-что можно узнать из родословной росписи [6] и приведенной там литературы.

Сын Леонтия Карловича Эйлера Яков Леонтьевич (1813—1882) «IV.40» является родоначальником значительной части современных Эйлеров. Он окончил в 1834 г. Казанский университет, был офицером, затем управляющим Могилёвской казенной палаты, действительным статским советником (1862).

Николай Леонтьевич Эйлер (1816—1898) «IV.41» по окончании в 1839 г. Николаевского инженерного училища занимался строительством морских военных сооружений в Николаеве, Кронштадте и Ревеле. Заведовал всеми работами по заграждению северного и южного кронштадских фарватеров во время Крымской войны 1853—1856 гг. В 1857 г. был командирован в Англию и Францию для изучения портовых сооружений. Затем был начальником строительной части Кронштадского порта. С 1877 г. он член строительного отделения Морского технического комитета. Председательствовал в комиссии по вопросу исправления русла Волги у Саратова в 1881 г. В 1882—1883 гг. осматривал строительство маяков Каспийского и Балтийского морей. С 1883 г. генерал-лейтенант. В 1886 г. участвовал в постройке кораблей на Черном море и сооружении Алексеевских доков в Севастополе. С 1886 г. член Морского строительного комитета, а с 1889 г. его председатель; с 1892 г. почетный член Мор-

ского комитета. В 1897 г. ушел в отставку инженер-генералом. Был директором пароходного общества.

Леонтий Леонтьевич Эйлер (1821—1893) «IV.42» окончил в 1839 г. Морской корпус гардемаринном. Плавал на различных кораблях, в том числе на фрегате «Паллада», по Балтийскому морю и Финскому заливу, совершил экспедицию в Англию и Голландию. Командовал винтовой лодкой «Дождь» (1855). Участвовал в защите Кронштадта от англо-французского флота во время Крымской войны 1853—1856 гг. В 1857 г. наблюдал в Англии за постройкой императорской яхты «Стрельна». С 1858 по 1884 г. командир этой яхты и паровой яхты «Александрия». Состоял в гвардейском экипаже с 1848 г. и с 1878 по 1884 г. временно им командовал. В 1885 г. вышел в отставку вице-адмиралом.

Старшая дочь Александра Христофоровича Эйлера — Александра (1807—1870) «IV.63», окончив в 1825 г. петербургский Екатерининский институт, с 1826 г. была фрейлиной императрицы Александры Федоровны. В 1830 г. вышла замуж за Алексея Николаевича Зубова (1798—1864), отставного штабс-ротмистра лейб-гвардии Гусарского полка, позднее директора Нижегородской ярмарки, тайного советника. Они оба входили в окружение А. С. Пушкина. Зубову посвящено стихотворение А. С. Пушкина «Пройдет любовь, умрут желанья» (1817), он упомянут в стихотворении «Сабуров, ты оклеветал» (1824). А. А. Эйлер встречалась с А. С. Пушкиным на вечерах у А. О. Россет-Смирновой и у Карамзиных.

Нина Александровна Эйлер (1808—1875) «IV.64» окончила вместе с сестрой Екатерининский институт в 1825 г. В 1843 г. она вышла замуж за штабс-капитана лейб-гвардии Финляндского полка князя Реваза Ивановича Андронникова (1818—1878), который позднее стал генерал-лейтенантом и генерал-адъютантом.

Сын А. Х. Эйлера Николай Александрович (1811—1872) «IV.66» учился в Пажеском корпусе (1820—1831), затем служил корнетом в Оренбургском уланском полку. В 1855 г. был уволен в отставку по болезни в чине полковника. Его младший брат Александр Александрович (1819—1872) «IV.69» в 1836 г. из камер-пажей был выпущен прапорщиком в лейб-гвардии Драгунский полк с прикомандированием к Артиллерийскому училищу. Состоял с 1855 г. при военном министре офицером для особых поручений. Уволен полковником в отставку в 1856 г. Жил в Петербурге и Москве. Был женат на Надежде Николаевне Васильчиковой (1830—1876) — дочери штабс-капитана Н. В. Васильчикова (ум. 1849) и княжны М. В. Шаховской (1798—1837).

Единственный сын Павла Христофоровича Николай Павлович (1822—1882) «IV.78» окончил кадетский корпус, затем Михайловское артиллерийское училище и в 1844 г. его офицерские классы (позднее из них была образована Михайловская артиллерийская академия). Он обладал хорошими знаниями, большими способностями и преданностью делу. Во время Крымской войны 1853—1856 гг. командовал резервной батареей гвардейской конной артиллерии, а затем 1-й легкой батареей гвардейской конной артиллерии. Командуя батареей, заботился о широком распространении грамотности среди солдат. Для лучшего обучения подчиненных артиллерийскому делу знакомил их с основами фортификации, завел много моделей, рисунков, чертежей и инструментов. Благодаря

его заботам батарея стала одной из лучших обученных артиллерийских частей. В 1862 г. был назначен членом комиссии (при штабе гвардейского корпуса) для определения размера и порядка довольствования всеми предметами снабжения артиллерийских частей. В 1864 г. назначался в экзаменационную комиссию для присутствия на экзаменах воспитанников военных училищ. В том же году был назначен флигель-адъютантом с увольнением от командования батареями и зачислением по гвардейской конной артиллерии. Был командирован в Германию и Францию для ознакомления с нарезной артиллерией, а затем на Кавказ для обучения войск обращению с нею. В 1864 г. произведен в генерал-майоры и зачислен в свиту императора. С 1865 г. председатель комитета по составлению программ для преподавания артиллерии в военных училищах. В 1866 г. был волынским, а затем киевским губернатором. В 1868 г. снова отчислен в свиту. Интересовался историей рода Эйлеров. В 1873 г. произведен в генерал-лейтенанты и прикомандирован к Главному артиллерийскому управлению.

Состоял в гражданском браке с актрисой Луизой Энриковной Фойгт (1839—1900), носившей сценическую фамилию Юрьева.

Одна из дочерей П. Х. Эйлера — Елизавета (1826—1896) «IV.79» вышла в 1880 г. замуж за князя Евгения Александровича Сайн-Витгенштейн-Берлебурга (1825—1886), внука фельдмаршала П. Х. Витгенштейна (1769—1843), полководца Отечественной войны 1812 г.

Среди детей К. Х. Эйлера можно выделить двоих сыновей: Леонтия Константиновича (1829—1890) «IV.82», бывшего штабс-капитаном гвардии, а затем надворным советником, ревизором акцизного управления, и Петра Константиновича (1827—1880) «IV.81» — генерал-майора. Последний в 1837—1845 гг. учился в Московском кадетском корпусе. По окончании служил прапорщиком в лейб-гвардии Павловском полку. В 1861 г. стал мировым посредником в Верхнетурском уезде Пермской губернии, затем управляющим первым участком крестьян, вышедших из крепостной зависимости. Заведовал в качестве мирового посредника горными заводами Гороблагодатского округа в Кунгурском и Верхнетурском уездах, где организовал общественные управления мастеровых и сельских рабочих. Затем был мировым посредником и председателем мирового съезда (вплоть до 1868 г.) в Ирбитском уезде Пермской губернии. В 1867 г. произведен в полковники с переименованием в коллежские советники и увольнением от военной службы. Однако в том же году был снова переведен в полковники и назначен в распоряжение Туркестанского генерал-губернатора с зачислением по армейской пехоте. В 1868 г. он стал председателем Сыр-Дарьинского областного управления и помощником Сыр-Дарьинского военного губернатора с чином генерал-майора, затем был перемещен на такую же должность в Семиреченскую область.

## 6. ПРАПРАВНУКИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Управляющий Могилёвской казенной палатой Я. Л. Эйлер «IV.40» имел восьмерых детей. Старшая дочь Христина Яковлевна (1841—1932) «V.63» была дважды замужем: первый раз за полковником гвардии Александром Густавовичем Гебелем (1818—1868), а затем с 1877 г. за своим троюродным братом — будущим директором Путиловских заводов Алек-

сандром Карловичем Фойгтом (1838—1918) «V.97». Ее брат Павел Яковлевич (1844—1890) «V.64», женатый на дочери генерала Н. И. Александрова (1818—1884), был управляющим Могилевского отделения крестьянского и дворянского банков. Потомки его дошли до наших дней. Младшая сестра Александра Яковлевна (1853—1911) «V.67» в 1870 г. вышла замуж за будущего эстляндского губернатора Е. Н. Скалона (1845—1902). Один из младших сыновей Я. Л. Эйлера — Владимир (1856—1878) «V.69» был подпоручиком Павловского полка и умер в 1878 г. под Сан-Стефано во время русско-турецкой войны.

Среди детей Н. Л. Эйлера «IV.41» от первого брака Владимир Николаевич (1846—1910) «V.71» был юристом, одно время был воспитателем в Александровском лицее. Другой сын, также юрист, Николай Николаевич (1851—1880) «V.73» служил в Училище правоповедения, а затем в Варшавском окружном суде. Младший сын Н. Л. Эйлера Павел Николаевич (1867—1918) «V.78» окончил Александровский кадетский корпус, Николаевское кавалерийское училище (1887) и Николаевскую академию Генштаба (1893). Учился в телеграфной команде 4-й саперной бригады (1887—1889). По окончании Академии сначала служил в Генштабе с зачислением по гвардейской кавалерии обер- и штаб-офицером для поручений при начальнике Главного штаба, в 1901—1902 гг. командовал эскадрой. П. Н. Эйлер участвовал в русско-японской войне 1904—1905 гг. помощником командира полка по строевой и хозяйственной части, был войсковым старшиной в казачьем полку (1905), позже командовал различными полками. В 1911 г. он уволился от службы по домашним обстоятельствам с награждением чином генерал-майора и был зачислен на должность командира пешей дружины ополчения.

Единственный сын Александра Александровича Эйлера также Александр Александрович (1855—1920) «V.105» был новгородским вице-губернатором и подольским губернатором, тайным советником, гофмейстером и сенатором. В 1880 г. он женился на княжне С. Н. Оболенской (1857—1932) — дочери генерала и действительного тайного советника князя Н. С. Оболенского.

Сын Н. П. Эйлера «IV.78» от гражданского брака Александр Николаевич (1862—1921) «V.114» носил первоначально фамилию Шаховской и получил фамилию Эйлер лишь в 1882 г. согласно прошению отца А. Н. Эйлера. Он окончил Николаевское инженерное училище (1883) и Николаевскую инженерную академию (1887). Служил сначала в военно-телеграфном парке, а затем в гренадерских саперном и понтонном батальонах. Был делопроизводителем комиссии по производству сравнительных опытов по одновременному телеграфированию и телефонированию по одним проводам (1892). С 1894 по 1904 г. находился в запасе инженерных войск: в 1894—1899 гг. был начальником телеграфа Петроградско-Варшавской железной дороги, в 1899 г. стал инспектором при Главном управлении почт и телеграфа с отчислением от военной службы. Был постоянным членом технической комиссии при Главном управлении. В 1904 г. снова перешел в военное ведомство: с мая 1904 по март 1906 г. был в походах и сражениях в русско-японскую войну (бои под Ляояном и Мукденом, наступление под Шахе и отступление под Тепином и Гунсулином). Служил в I Восточно-сибирском саперном батальоне, заведовал телеграфными и телефонными сношениями с Главной квартирой (в 1904 г. за боевые

отличия произведен в подполковники), был начальником радиотелеграфа при главнокомандующем, создавал радиотелеграфные станции в Харбине, Владивостоке, Спасске и Хабаровске. С 1906 г. он снова инспектор почт и телеграфов (с оставлением по саперным войскам) и постоянный член электротехнической комиссии, представитель почтово-телеграфного ведомства в комиссии по составлению учебных планов и программ для почтово-телеграфных школ и курсов. Представлял Россию на двух международных радиотелеграфных конференциях (1906 г.— Берлин, 1912 г.— Лондон). В 1912 г. произведен за отличия в генерал-майоры. Кроме того, был членом русского электротехнического комитета Международной электротехнической комиссии и постоянным членом Межведомственного радиотелеграфного комитета. Известно, что содействовал работе изобретателя радио А. С. Попова [10]. После революции А. Н. Эйлер был заместителем начальника связи Октябрьской железной дороги.

### 7. ПОТОМКИ Л. ЭЙЛЕРА — ЭЙЛЕРЫ

Расскажем теперь вкратце о последующих поколениях Эйлеров вплоть до наших дней. Мы не будем касаться при этом биографических данных лиц, ныне здравствующих. Некоторые сведения о них можно будет найти в родословной росписи потомков Л. Эйлера [6], приводимой в данном сборнике.

Сыновья Павла Яковлевича Эйлера «V.64» экономисты Яков Павлович (1872—1938) «VI.105» и Николай Павлович (1873—1917) «VI.106», а также горный инженер Павел Павлович (1876—1939) «VI.108» детей не имели. Подпоручик 3-го Восточно-сибирского саперного батальона Александр Павлович Эйлер (1881—1906) «VI.111» погиб под Мукденом в русско-японскую войну. Был холост капитан II ранга Дмитрий Павлович Эйлер (1883—1943) «VI.113». Он окончил Морской кадетский корпус и служил в морском гвардейском экипаже. Был вахтенным офицером на крейсере «Варяг», участвовал 9 февраля 1904 г. в сражении под Чемульпо, получил ранение и попал в плен. В 1910—1911 гг. лейтенант гвардейского экипажа; в первую мировую войну был старшим офицером на минном заградителе «Усури». Он был третьим среди потомков Леонарда Эйлера, получившим боевой офицерский орден св. Георгия 4-й ст. (первым его получил Христофор Леонтьевич, затем Павел Христофорович Эйлер).

Горный инженер Леонтий Павлович Эйлер (1874—1960) «VI.107» был директором угольной шахты и председателем Донецкого общества инженеров, написал книгу по экономике. Он занимался генеалогией русской линии рода Эйлеров и в 1949 г. составил довольно полную ее родословную схему (на 111 имен). Его единственный сын Яков (1906—1981) «VII.170» окончил Льежский университет и работал инженером-металлургом.

Владимир Павлович Эйлер (1879—1940) «VI.110» окончил 1-й кадетский корпус, Николаевское инженерное училище и Николаевскую инженерную академию. На военной службе находился с 1898 г. Служил в саперных частях по строительству Амурской железной дороги. В январе 1914 г., находясь в Ковенской крепостной саперной роте, уволился с военной службы по домашним обстоятельствам с награждением чином капитана. В 1916 г. он состоял в управлении инспектора инженерной

части Киевского военного округа, затем был на турецком фронте. Позже служил инженером в чехословацком железнодорожном министерстве. Его младшая дочь Татьяна Владимировна (1904—1983) «VII.172» — дипломированный врач, получила образование в Гренобле (доктор медицины — 1935). В 1936 г. она приехала в СССР со своим вторым мужем Николаем Вонифатьевичем Афанасовым (1903—1944), жила на его родине в Калуге. Работала сначала в доме отдыха и областной поликлинике, затем в городской больнице хирургом, врачом-лаборантом, а с 1957 г. урологом.

Единственный сын В. Я. Эйлера «V.71» Николай Владимирович (1883—1914) «VI.117» был гардемаринном и с 1910 г. мичманом. Он окончил Морской кадетский корпус, погиб во время первой мировой войны на флагманском корабле «Евстафий» в бою с крейсером «Гебен» на Черном море.

Большую семью оставил Александр Александрович Эйлер «V.105». Его старшая дочь — Надежда Александровна (1881—1968) «VI.172» доктор медицины, в 1917—1918 гг. была старшим врачом 33-го эпидемиологического отряда Красного Креста на юго-западном фронте, затем с 1923 г. работала в Москве, была врачом-хирургом Морозовской детской больницы. Старший сын Николай Александрович Эйлер (1882—1932) «VI.173» юрист, окончил Московский университет. Работал инженером-экономистом в Центральном статистическом управлении РСФСР.

Никита Николаевич Эйлер (1916—1984) «VII.206», мать которого скончалась при его рождении, школьные годы провел в детском доме; в его воспитании принимала участие тетка по линии отца Надежда Александровна. Он работал на заводе и учился на рабфаке. В 1937 г. поступил в 1-й Московский медицинский институт, со второго курса которого ушел на финский фронт. В Великую Отечественную войну в 1941—1944 гг. служил в медсанбате (сержант, награжден медалью «За боевые заслуги»). После войны Н. Н. Эйлер работал на заводе, окончил чертежно-конструкторские курсы и техникум, а затем работал инженером-конструктором.

Второй сын А. А. Эйлера «V.105» Александр Александрович (1884—1934) «VI.174» окончил юридический факультет Московского университета, был адвокатом, работал в банке.

Третий сын А. А. Эйлера Борис Александрович (1887—1943) «VI.176» окончил 1-й Московский кадетский корпус и Николаевское юнкерское инженерное училище (1905). Служил на разных должностях в саперных частях, заведовал телеграфным классом и электроосветительной станцией. Окончил Петербургскую военную электротехническую школу с присвоением звания «инженера-военного электротехника». В 1913 г. был назначен помощником начальника Ковенской искровой станции, затем в 1915 г. переведен в 34-й корпус начальником вылазной искровой станции. Был командиром прожекторной роты (1916), командиром технического батальона и начальником связи 39-го армейского корпуса (1917). Награжден орденами св. Анны 4-й ст. с надписью «За храбрость» и св. Станислава 3-й ст. с мечами и бантом. В Красной Армии с мая 1918 г., сначала служил в Организационном управлении Всеросглавштаба, а затем в Управлении связи Красной Армии начальником отделения, помощником начальника отдела и т. д. Имел воинское звание комбрига, а затем полковника. В 30-х годах работал преподавателем электротехники

на военной кафедре Московского электротехнического института связи. Издал учебное пособие по военно-телеграфному делу (1937). В. А. Эйлер был женат на Н. Н. Хомутовой (1886—1977), дочери Н. Ф. Хомутова, потомка участника Отечественной войны 1812 г., штабс-ротмистра В. А. Хомутова (1781—1813), павшего смертью храбрых в битве под Фрейбургом.

Дочь А. А. Эйлера София Александровна (1892—1975) «VI.177» преподавала иностранные языки в Московском университете. С 1917 г. она была замужем за Г. А. Мануиловым (1897—1954), сыном первого выборного ректора Московского университета (в 1908—1911), профессора-экономиста А. А. Мануилова (1861—1927).

Еще один сын А. А. Эйлера Михаил Александрович (1895—1944) «VI.178» окончил экономический факультет Московского университета и работал инженером-экономистом в Госбанке СССР. Был женат на Анне Станиславовне Таргонской (1895—1961), учившейся на физико-математическом факультете Московского университета и преподававшей математику. У них было двое детей. Их сын Михаил Михайлович (1923—1943) «VII.215» был танкистом и погиб в Великую Отечественную войну.

Младший сын А. А. Эйлера Сергей Александрович (1897—1966) «VI.179» окончил 1-ю Московскую гимназию, учебную команду 14-й Сибирской строевой артиллерийской бригады и Михайловское артиллерийское училище по 1-му разряду (1917). Был вольноопределяющимся, бомбардиром и младшим фейерверкером, младшим офицером и адъютантом артиллерийского дивизиона на Западном фронте. Награжден солдатским Георгиевским крестом 4-й ст. В сентябре 1918 г. по болезни был эвакуирован в Москву. В Красную Армию вступил в 1918 г.; был старшим инструктором батареи, начальником связи и командиром батареи (1921) в Московской запасной тяжелой артиллерийской бригаде. Далее служил в Московском институте инженеров путей сообщения. В 1926 г. окончил Московский инженерно-строительный институт. Крупный инженер-строитель, автор и редактор ряда книг: «Водопровод и канализация» (1941), «Монтаж наружных трубопроводов» (1959), «Опыт новаторов производства Главнефтедорстроя» (1956). Работал начальником технического отдела Министерства нефтяной промышленности СССР, награжден орденом Трудового Красного Знамени.

Сын С. А. Эйлера Александр Сергеевич (1922—1980) «VII.216» с 1940 по 1946 г. находился в рядах Советской армии, участник Великой Отечественной войны, сержант-техник по авиации. В 1952 г. окончил Московский авиационно-технологический институт. Работал заведующим отделом, главным специалистом института химической промышленности. Его брат Николай Сергеевич (1927—1972) «VII.217» в 1954 г. окончил Московский авиационный институт. Работал начальником лаборатории в научно-исследовательском институте, автор ряда научных работ, награжден орденом «Знак Почета».

## 8. ФУСЫ — СТРУВЕ — ОТТЕНЫ — ЧЕРНАИ — ЕЛПАТЬЕВСКИЕ

Старший сын Н. И. Фуса и Альбертины Эйлер — Павел Николаевич Фус (1798—1855) «IV.13» был зачислен в 1814. г. воспитанником Академии наук, где обучался под руководством отца. С 1816 г. стал корректо-

ром математических сочинений в академической типографии. Далее он адъюнкт по математике (1818), экстраординарный (1823) и ординарный (1826) академик по кафедре математики. С 1826 г. был непререваемым секретарем Петербургской академии наук. Начиная с 1816 г. преподавал математику в 1-м Сухопутном кадетском корпусе, в 1826—1843 гг. был секретарем Вольного экономического общества — старейшего ученого общества России, основанного в 1765 г.; в 1824—1826 гг. служил инспектором классов Петербургского воспитательного дома. П. Н. Фус написал свыше 30 работ по алгебре, геометрии и интегральному исчислению. Важной его заслугой является издание части переписки и неопубликованных трудов Л. Эйлера. Существенным материалом для истории науки являются его отчеты о деятельности Академии наук. В 1838 г. он получил чин действительного статского советника.

Таким образом учеными секретарями (конференц-секретарь, непререваемый секретарь) Петербургской академии наук на протяжении почти столетия были родственники или потомки Леонарда Эйлера: в 1769—1800 гг. старший его сын Иоганн-Альбрехт, в 1800—1826 гг. зять старшего сына Н. И. Фус и в 1826—1855 гг. внук П. Н. Фус. Через их руки проходили все дела Академии наук, переписка с учеными и различными учреждениями, их мнения были существенны при выборе новых членов и членов-корреспондентов Академии наук и т. п. При этом следует учесть, что президентами Академии наук и ее директорами были в то время либо титулованные особы (граф К. Г. Разумовский, граф В. Г. Орлов, княгиня Е. Р. Воронцова-Дашкова, барон А. Л. Николаи, граф С. С. Уваров), либо сановные чиновники (С. Г. Домашнев, П. П. Бакунин, Н. Н. Новосильцов и др.), не занимавшиеся, как правило, текущими делами Академии. Понятно, что большой объем научно-организационных дел приводил к снижению или даже к прекращению творческой работы самих ученых секретарей в области науки.

Другой сын Н. И. Фуса Егор Николаевич (1806—1854) «IV.17» также был воспитанником Академии наук, занимался с 1824 г. астрономией под руководством академика В. К. Вишневого. С 1828 г. проходил стажировку по практической астрономии под руководством академика В. Я. Струве в Дерптском университете. В 1830—1832 гг. участвовал в качестве астронома-наблюдателя в экспедиции в Китай и Монголию (на всем пути он занимался магнитными измерениями, нивелированием и метеорологическими наблюдениями). Основал магнитные обсерватории в Пекине и Нерчинске. В 1836 г. работал в экспедиции по определению разности уровней Каспийского и Черного морей. Наконец, в 1847 г. он стал директором Виленской академической обсерватории, проработав ранее с 1836 г. одним из помощников директора Пулковской обсерватории и занимаясь составлением каталогов звезд. Его сын Виктор Егорович (1839—1915) «V.37» окончил Виленскую гимназию, учился в Петербургском и Дерптском университетах. Последний он кончил в 1861 г. кандидатом наук, работал сначала сверхштатным астрономом, а затем с 1866 г. адъюнктом-вычислителем Пулковской обсерватории. Участвовал в нескольких геодезических экспедициях. С 1871 г. вплоть до выхода в отставку в 1905 г. (с чином тайного советника) был астрономом в Кронштадтской морской астрономической и компасной обсерватории, занимаясь исследованием и исправлением навигационных инструментов.



Третий сын Н. И. Фуса Николай Николаевич (1810—1867) «IV.18» являлся старшим учителем математики в Морском кадетском корпусе и гимназии. Помогал старшему брату в издании рукописного наследия Леонарда Эйлера.

Из сыновей П. Н. Фуса Эдуард Павлович (1830—1875) «V.28» служил в канцелярии ведомства учреждений имп. Марии, Павел Павлович (1839—1896) «V.33» был библиотекарем Академии наук, а Владимир Павлович (1840—1892) «V.34» окончил в 1860 г. Александровский лицей и также служил по ведомству имп. Марии. В течение двух лет В. П. Фус обучался в Гейдельбергском университете. В 1882 г. он был уволен от службы статским советником. Его старший сын Дмитрий Владимирович (1866—1919) «VI.46» окончил три класса специального курса в Училище правоведения и Тверское кавалерийское юнкерское училище (1888). Служил в армии и жандармерии, с 1900 г. был есаулом в Амурском казачьем полку. Участвовал во многих сражениях в русско-японскую войну (орден св. Анны 2-й ст. с мечами), получил ранение. В 1911 г. был произведен в полковники и в 1912 г. уволен по болезни, но в 1914 г. снова определен на службу (1914—орден св. Владимира 3-й ст. с мечами). Его брат Петр Владимирович Фус (р. 1877) «VI.48» окончил Александровский кадетский корпус и Михайловское артиллерийское училище по 1-му разряду. Служил в различных артиллерийских частях, в частности в Усть-Двинской крепости (1903—1907), затем в Свеаборге.

Паулина Павловна Фус (1828—1914) «V.27» вышла замуж за Г. В. Струве (1822—1908), химика, члена-корреспондента Академии наук (1877), сына академика-астронома В. Я. Струве. Г. В. Струве занимался исследованиями металлов платиновой группы под руководством академика Ю. Ф. Фрицше. Старший сын Отто Генрихович Струве (1852—1912) «VI.38» инженер-путеец, работал инспектором на железной дороге, редактором газеты. Его младший брат Александр Генрихович (1853—1883) «VI.39» был лейтенантом флота, воспитателем в Морском корпусе и астрономом в Пулковке. Их сестра Евгения Струве (1860—1943) «VI.42» вышла замуж за Ф. К. Оттена (1850—1930), аптекаря, магистра фармации.

Одна из дочерей Н. И. Фуса Шарлотта-Маргарита (1787—1839) «IV.7» вышла замуж за петербургского городского архитектора Викентия Черная (1782—1830), чеха по происхождению. У них было девятеро детей, из которых двое — Фердинанд (1814—1851) «V.15» и Вильгельм (р.1828) «V.21» служили письмоводителями в Академии наук. Другой сын Александр (1821—1898) «V.17» окончил Петербургский университет (1841) по отделению физико-математических наук, работал в Зоологическом музее Академии наук под руководством академика Ф. Ф. Брандта. В 1842 г. он был командирован за границу, слушал лекции в Берлине, Париже и Лейдене, работал в музеях Вены, Парижа и Лондона, изучал систематику животных и сравнительную анатомию. В 1845 г. по прочтении пробной лекции был назначен и. о. адъюнкта зоологии Харьковского университета. В 1846 г. защитил магистерскую диссертацию по зоологии на тему о значении крыла в систематике птиц. В том же году защитил диссертацию на доктора естественных наук по укусному червяку и был утвержден экстраординарным профессором, а в 1850 г. ординарным профессором по кафедре зоологии. В 1857—1869 гг. был деканом физико-математического факультета. В 1868 г. получил звание заслуженного профессора и в 1873 г. оставил служ-

бу по собственному желанию. В 1848 г. он участвовал в экспедиции по естественно-историческому исследованию Харьковской губернии. В 1868 г. — участник I съезда естествоиспытателей в Петербурге, с 1849 г. член Московского общества испытателей природы, действительный член и председатель общества в Харьковском университете. А. В. Чернаку принадлежит свыше 20 работ по зоологии, фауне Харьковской губернии и вредным насекомым. Его сын Николай Александрович (1849—1912) «VI.16» был профессором химии в Харьковском технологическом институте.

Еще один из сыновей архитектора В. И. Черная — Лев (Людвиг) (1824—1898) «V.19» был учителем немецкого языка в гимназии. Один из сыновей последнего инженер-путеец Александр Людвигович Чернай (1852—1920) «VI.20» был начальником Александровской железной дороги.

Дочь В. И. Черная Юлия Викентьевна (1810—1886) «V.13» была замужем за профессором логики и нравственной философии Петербургской римско-католической духовной академии, статским советником В. К. Елпатьевским (ок. 1799—1864), который окончил Петербургский университет в 1823 г. и преподавал сначала различные разделы теории права в университете и других учебных заведениях. Из их детей наиболее известен Константин Васильевич Елпатьевский (1854—1917) «VI.9» — преподаватель истории, написавший «Учебник русской истории», выдержавший к 1915 г. 14 изданий.

### 9. КОЛЛИНСЫ — БЕРЕНДТСЫ — ГЕККЕРЫ

Среди 13 детей Шарлотты Эйлер и пастора И. Д. Коллинса наиболее известен их старший сын Эдуард Коллинс (1791—1840) «IV.19». Учиться он начал в 1804 г. в Главном немецком училище св. Петра в Петербурге. Математикой занимался под руководством дяди Н. И. Фуса. Далее был воспитателем Петербургской академии наук (1809), ее адъюнктом (1814), экстраординарным (1820) и ординарным (1826) академиком по математике. Преподавал математику первоначально в пансионе своего отца, а с 1824 г. в Главном немецком училище, директором которого стал в 1832 г. Кроме того, по рекомендации воспитателя будущего императора Александра II, известного поэта В. А. Жуковского, он учил детей Николая I различным разделам математики и физики (1828—1838). В 1839 г. получил чин действительного статского советника. Он был разносторонне развитым человеком, хорошо рисовал, был неплохим музыкантом, писал стихи, отличался жизнерадостностью и остроумием, общительностью; был открытым, честный и веселый человек. Одаренный математик, Э. Д. Коллинс опубликовал около 40 работ по дифференциальной геометрии, теории чисел, комбинаторному анализу, аналитической геометрии, вариационному исчислению и т. д. В 1831 г. он женился на дочери придворного музыканта Юлии Бервальд (1796—1871). Оба супруга были похоронены на Смоленском лютеранском кладбище.

Старший сын Э. Д. Коллинса Эдуард Эдуардович (1832—1906) «V.41» был с 1858 г. учителем математики, а с 1873 г. инспектором в Главном немецком училище св. Петра. Среди его сыновей старший Эдуард «VI.62» был учителем немецкого языка в реальном училище, второй сын Георг «VI.64» — директором пароходного общества, третий Александр «VI.66» — типографом, а младший Владимир «VI.69» — архитектором и художником.

По окончании реального училища в 1893 г. В. Э. Коллинс был зачислен вольноопределяющимся в Московский гвардейский полк, где окончил курс в полковой учебной команде, служил в Семеновском полку. В 1904—1906 гг. был призван на военную службу и находился в резерве действующей армии в Маньчжурии.

Старшая дочь Э. Д. Коллинса Юлия-Шарлотта (1835—1899) «V.43» в 1856 г. вышла замуж за купца Николая-Генриха Берендтса (1823—1902). Их сын Александр Генрихович (1863—1912) «VI.73» был профессором исторического богословия Дерптского (Юрьевского) университета. Другой сын Эдуард Николаевич (1860—1930) «VI.72», доктор финансового права (1895), был профессором права в Демидовском юридическом лицее в Ярославле, затем в Петербургском университете и Училище правоведения; сенатор (1914). После революции он оказался на территории Эстонии, находясь на мызе брата. С 1919 г. состоял профессором финансового и затем государственного права в Тартуском университете, был блестящим лектором. Преподавал также историю в гимназии. Основные его работы посвящены государственному и финансовому праву, истории. Занимался вопросами экономики Швеции и Финляндии.

Дочь И. Д. Коллинса Шарлотта (1793—1864) «IV.20» вторым браком вышла замуж в 1821 г. за учителя Федора Ивановича Геккера (1796—1864). Последний участвовал в войне против Наполеона в 1815—1816 гг. вольноопределяющимся унтер-офицером 2-го Западно-прусского драгунского полка в армии Блюхера. По приезде в Россию преподавал сначала английский язык в Петербургском высшем училище (1824—1826), затем немецкий язык — в Главном немецком училище св. Петра (1825—1855), написал две грамматики и учебник немецкого языка для русских.

Старший сын Ф. И. Геккера Василий Федорович (1828—1903) «V.49» по окончании Главного немецкого училища в 1848 г. поступил в Петербургскую академию художеств, где был на практике у профессоров А. А. и К. А. Тонов (1851 г.— две серебряные медали). В 1853 г. получил звание некласного художника, а в 1857 г. за «Проект дома губернского дворянского собрания» был удостоен звания академика архитектуры. В 1857—1859 гг. совершил поездку по Западной Европе, из которой привез большую коллекцию зарисовок различных зданий. Участвовал в сооружении около 200 городских и частных построек Петербурга, сначала под руководством архитекторов А. И. Штакеншнейдера, А. Х. Пеля и А. И. Кракау, а затем самостоятельно (Старо-Александровский и Манявский рынки и другие здания). В 1867—1883 гг. был участковым и затем городским архитектором Петербурга.

Младший сын Ф. И. Геккера Карл Федорович (1830—1895) «V.50» после окончания Главного немецкого училища в 1847 г. учился на отделении восточных языков при Министерстве иностранных дел, затем работал драгоманом (переводчиком) и секретарем при русской миссии в Персии — в консульстве в Гиляне (Решт) и позднее в Тавризе, прослужив в Персии 12 лет. С 1863 г. был переводчиком в Азиатском департаменте МИД в Петербурге вплоть до выхода на пенсию в 1884 г. с чином действительного статского советника. К. Ф. Геккер женился в Персии в 1857 г. Его сыновья учились в петербургских гимназиях в числе стипендиатов МИД по восточному факультету Петербургского университета. Федор Карлович (1858— после 1916) «VI.82» был начальником архива Министер-

ства торговли и промышленности, а Василий Карлович (1861 — после 1913) «VI.84» инспектором торговой школы Шкловского. Их сестра Елена Карловна (1860 — после 1916) «VI.83» преподавала музыку в Павловском женском институте.

Старший сын архитектора В. Ф. Геккера Федор Васильевич (1870—1940) «VI.79» окончил медицинский факультет Дерптского (Юрьевского) университета (1895). В 1901 г. получил степень доктора медицины. Работал врачом, консультантом, заведующим отделениями в петербургских больницах, был директором Лавальского приюта. В 1905 г. во время русско-японской войны служил врачом полевого лазарета Красного креста и в 1914—1918 гг. вновь на военной службе врачом 1-го кадетского корпуса; имел чин статского советника (1911). С научными целями посещал клиники и курорты Западной Европы. Ему принадлежит около 20 научных работ. Он участвовал в Международном конгрессе врачей в Лондоне (1913), был членом ряда медицинских обществ в Петербурге. С 1918 г. работал врачом-педиатром и заведовал отделением для новорожденных в родильном доме им. Видемана вплоть до выхода в 1925 г. по болезни на инвалидность. Младший сын В. Ф. Геккера Василий Васильевич (1872—1934) «VI.80» окончил Главное немецкое училище, работал торговым посредником, а затем товароведом в Ленинградском союзе потребительских обществ. Его внук Альфред Борисович Роде (1924—1943) «VIII.178» погиб на фронте под Ленинградом в Великую Отечественную войну.

Старшая дочь врача Ф. В. Геккера Ирина Федоровна (1898—1978) «VII.129» по окончании в 1925 г. Географического института работала научным сотрудником, геологом, составителем карт месторождений полезных ископаемых, много занималась редакционной и библиографической работой. Была замужем за историком-археологом А. А. Иессеном (1896—1964), который заведовал отделом истории первобытной культуры в Государственном Эрмитаже и состоял старшим научным сотрудником в Ленинградском отделении Института археологии АН СССР.

#### 10. ПОТОМКИ Л. ЭЙЛЕРА ПО ДРУГИМ ЛИНИЯМ

Как уже говорилось ранее, Елизавета Карловна Эйлер (1780—1852) «III.20» вышла замуж за юриста профессора К. А. Фойгта (1762—1811). У них было двое сыновей: Август Карлович (1806—после 1848) «IV.58», бывший градоначальником в Чистополе, затем майором пограничной стражи, и Карл Карлович (1808—1873) «IV.59», состоявший профессором истории литературы в Казани, ректором Харьковского университета, попечителем Харьковского учебного округа и председателем учебного комитета Министерства народного просвещения. Последний имел шестерых детей, из которых Николай Карлович (1836—1888) «V.94» был начальником архива МИД. Его брат Александр Карлович (1838—1918) «V.97», отставной поручик гвардии, был председателем пароходного общества по Днепру и притокам, директором металлургического завода в Брянске, председателем общества Путиловских заводов, сооснователем общества по продаже продукции вагонных заводов. Он женился в 1877 г. на своей дальней родственнице Христине Яковлевне Эйлер (1841—1932) «V.63». Ее сын от первого брака Александр Александрович Гебель (1865—

1918) «VI.101» окончил в 1885 г. Орловский Бахтина кадетский корпус и занимал различные офицерские должности в русской армии. Он был женат с 1890 г. на Ольге Николаевне Эйлер (1868—1925) «V.77». Их единственный сын Дмитрий Александрович Гебель (1891—1919) «VI.119» в 1899—1910 гг. учился в Пажеском корпусе и далее сделал военную карьеру, был участником первой мировой войны (имел ордена св. Станислава 2-й ст. и св. Анны 2-й ст. с мечами, Георгиевское оружие).

Старшая дочь А. К. Фойгта Надежда Александровна (1879—1950) «VI.102» вторым браком была замужем за полковником Генерального штаба О. К. Энкелем (1878—1960), впоследствии занимавшим высокие военные должности в Финляндии.

Александра Яковлевна Эйлер-Скалон (1853—1911) «V.67» имела двух сыновей. Старший сын Николай Евстафьевич (1871—1964) «VI.115» окончил виленскую гимназию и юридический факультет Петербургского университета. Служил в Вильно, с 1902 г. в Петербурге. После Великой Октябрьской революции работал в финансовых учреждениях Петрограда и Москвы. Младший сын А. Я. Эйлер-Скалон Владимир Евстафьевич (1872—1917) «VI.116» учился в Пажеском корпусе, в 1895 г. поступил в Николаевскую академию Генерального штаба, где окончил два класса и прошел дополнительный курс. Служил в различных воинских частях, с 1901 г. в генерал-квартирмейстерской части Главного штаба, в 1914 г. на должности генерала для поручений и делопроизводства в управлении генерал-квартирмейстера при Верховном главнокомандующем (с 1915 г. генерал-майор). В декабре 1917 г. входил в состав второй советской делегации на переговорах о перемирии в Брест-Литовске в качестве военного эксперта. Похоронен на Никольском кладбище Александро-Невской лавры.

Дочь вице-адмирала Л. Л. Эйлера «IV.42» Александра Леонтьевна (1859—1939) «V.81» была замужем за врачом В. Н. Кочетковым (1862—1921), работавшим старшим ординатором в Кронштадтском морском госпитале. Их сын Николай Васильевич (1893—1946) «VI.124» был врачом-хирургом. С 1915 г. участвовал в первой мировой войне, пройдя от врача практиканта до главного хирурга Борзенского полка. Был награжден за бои под Ригой орденом св. Владимира 4-й ст. После Великой Октябрьской революции добровольцем пошел в Красную Армию, участвовал в боях с Юденичем.

Дочь Христофора Эйлера Бландина (1780—1868) «III.29» была, как сказано выше, замужем за полковником А. П. Бекманом (1772—1851). Их старший сын Валериан Александрович (1802—1870) «IV.71», горный инженер, генерал-майор, был в 1851—1857 гг. начальником Алтайских горных заводов и Томским губернатором. Его брат Александр Александрович (1807—1883) «IV.73» также был генерал-майором. Старший сын последнего Владимир Александрович (1848—1923) «V.107» окончил Николаевскую академию Генерального штаба (1873), был в 1905—1906 гг. генерал-губернатором Курляндии и Лифляндии, в 1907 г. стал генералом от кавалерии и командующим XX армейским корпусом, в 1908—1909 гг. являлся генерал-губернатором Финляндии и впоследствии членом Государственного совета.

Сын Александры Христофоровны Эйлер «III.37» и Ф. К. Ререна Федор Федорович (1828—1888) «IV.85» был генерал-майором артиллерии, а их

дочь Александра Федоровна (1820—1871) «IV.84» в 1842 г. вышла замуж за генерал-лейтенанта Ф. И. Левенталя (1802—1895).

Внучка А. Х. Эйлера Надежда Александровна (1852—1920) «V.103» была замужем за земским деятелем Дмитрием Николаевичем Шиповым (1851—1920), бывшим членом Государственного совета (1906—1909). Их сын Дмитрий (1882—1906) «VI.168», будучи студентом, активно участвовал в революции 1905 г. и в 1906 г. при переезде за границу пропал без вести. Предполагалось, что в его смерти была замешана русская полиция. Другой их сын — Сергей Дмитриевич (1885—1979) «VI.169» занимался, как и отец, земской деятельностью, был гласным Волоколамского уездного и Московского губернского земских собраний, в первую мировую войну был членом главного комитета Земского союза и Союза городов (до февраля 1918 г.). Затем служил в советских учреждениях, написал книжку «Птицеводство». Занимался историческими исследованиями под руководством своего друга академика Н. М. Дружинина, в частности родословными Шиповых и Эйлеров, передал обширный семейный архив в отдел рукописей Государственной библиотеки СССР им. В. И. Ленина.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Можно задать вопрос, почему два далеких потомка Л. Эйлера — представители советской научно-технической интеллигенции, далекие от истории и литературы, — потратили значительное время на поиски материалов в архивах и библиотеках, розыски других, столь же отдаленных потомков и систематизацию полученных сведений. Конечно, вначале это было личное желание разобраться в весьма сложной и запутанной родословной. Затем возник уже более общий интерес — понять историческую взаимосвязь поколений.

Первоначально крестьянский (в Линдау), затем ремесленно-мещанский и священнический (в Базеле) род Эйлеров, переместившись в Россию, превратился в род ученых и педагогов, чиновников и военных, принявших русское подданство уже во втором поколении. Занятие высоких научных, общественных, государственных и военных постов и служение Родине способствовало укреплению положения Эйлеров в России и их сближению с другими представителями нашей отечественной интеллигенции. Поскольку, как говорится, женихов и невест за границей не искали, то заключались браки с представителями различных российских семей. Почти все потомки Леонарда Эйлера жили в России, сроднились с ней и принимали активное участие в русской жизни.

Общее число известных нам потомков Леонарда Эйлера превышает тысячу. В девяти их поколениях при рождении получили фамилию Эйлер около 160 человек. Нам известны имена около 400 ныне здравствующих потомков Леонарда Эйлера, из которых более половины проживают в СССР.

В работе над статьей авторам оказали помощь своими советами и материалами многие из потомков Леонарда Эйлера — М. Н. Афанасов, С. Н. Брунс, Р. Ф. Геккер, С. Ф. Геккер, В. С. Оболенский, Н. Н. Савко, Е. С. Скалон, С. Н. Скалон, М. В. Шестакова, А. Б. Эйлер, Н. Н. Эйлер, Т. В. Эйлер, Г. Г. Энкель и другие, которым авторы выражают благодарность. Авторы признательны за оказанную помощь Э. Н. Амбургеру,

Ю. Х. Копелевич, Е. П. Ожиговой, В. Е. Павлову, а также редакционной коллегии настоящего сборника.

**Послесловие.** Уже после завершения подготовки рукописи сборника 9 июня 1987 г. скончался последний представитель шестого поколения потомков Леонарда Эйлера соавтор этой статьи Александр Александрович Эйлер. Он родился в Петербурге 22/9 ноября 1913 г. в семье инспектора почт и телеграфов А. Н. Эйлера. В 1938 г. А. А. Эйлер окончил Ленинградский институт инженеров железнодорожного транспорта, в котором с 1948 г., после работы инженером дистанции в службе сигнализации и связи Ярославской железной дороги, стал преподавать, готовя специалистов по автоматике и вычислительной технике. Он имел ученую степень кандидата технических наук (1949) и ученые звания доцента (1954) и профессора (1966), заведовал кафедрами «Автоматика на железнодорожном транспорте» и «Электронные вычислительные машины», был деканом электротехнического факультета в своем институте. А. А. Эйлер вел научную работу по созданию автоматизированных систем на железнодорожном транспорте, написал ряд учебников и учебных пособий, читал также курсы лекций во втузах Пекина и Праги. Александр Александрович был участником посвященных Леонарду Эйлеру юбилейных торжеств в 1933, 1957 и 1983 гг.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Euler K.* Das Geschlecht Euler-Schölpfi: Geschichte einer alten Familie. Giessen: W. Schmitz, 1955.
2. *Burckhardt F.* Zur Genealogie der Familie Euler // *Verhandl. Naturforsch. Ges. Basel.* 1908. Bd. 19. S. 122—138.
3. *Копелевич Ю. Х.* Материалы к биографии Л. Эйлера // *Ист.-мат. исслед.* 1957. Вып. 10. С. 9—65.
4. Записки А. А. Эйлера // *Рус. архив.* 1980. Кн. 2. С. 333—399.
5. *Чернов С. Н.* Леонард Эйлер и Академия наук // *Леонард Эйлер.* М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935. С. 163—238.
6. *Амбургер Э. Н., Геккер И. Р., Михайлов Г. К.* Родословная роспись потомков Л. Эйлера // *Наст. изд.*
7. *Obolensky W.* Reh oder Einhorn? Das Wappentier Leonhard Eulers // *Jahrb. Schweiz. Ges. Familienforsch.* 1986. S. 141—154.
8. *Raith M.* Der Vater Paulus Euler // *Leonhard Euler.* Basel: Birkhäuser, 1983. S. 459—470.
9. *Шестакова М. В.* Потомки Леонарда Эйлера по линии его сына Карла // *Наст. изд.*
10. А. С. Попов в характеристиках и воспоминаниях современников. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1958.

# ПОТОМКИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА ПО ЛИНИИ ЕГО СЫНА КАРЛА

*М. В. ШЕСТАКОВА*

Потомство Леонарда Эйлера по линии его сына Карла до настоящего времени было мало изучено.

Автору данной статьи, представителю седьмого поколения семьи Эйлеров, удалось ознакомиться со значительным количеством исторических документов в архивах, библиотеках и музеях Ленинграда. Среди сравнительно более новых источников необходимо отметить рукописные мемуары Н. В. Кочеткова, потомка Л. Эйлера (о нем см. далее). На страницах его работы, написанной в 1940-х годах, потомки математика предстают в неразрывной связи с событиями первой четверти нашего столетия.

Недавно обнаружена интересная генеалогическая роспись рода Эйлеров, составленная в 1930-х годах и подписанная инициалами В. Г. Эта рукопись хранилась у советского ученого-литературоведа Л. Б. Модзалевского. Благодаря любезности его дочери Татьяны Львовны Модзалевской рукопись удалось использовать при подготовке этой статьи.

История семьи Эйлеров убеждает в том, что потомки великого ученого были тружениками, патриотами. Их характеризовали активная жизненная энергия, прочные семейные традиции.

Мы не будем повторять здесь биографию Карла (в России — Карла Леонтьевича) Эйлера, которая с достаточной подробностью проведена в статье И. Р. Геккера и А. А. Эйлера, помещенной в настоящем сборнике. Заметим только, что в 1766 г. он приехал, вслед за другими членами семьи своего отца, в Петербург и был назначен придворным врачом, а с 1772 г. — врачом при Академии наук, причем дослужился до чина коллежского советника (в армии эквивалентный чину полковника). Медицине К. Эйлер обучался в университете в Галле, где 3.10.1762 г.<sup>1</sup> защитил написанную на латыни диссертацию «О пользе кровопускания при катаральной лихорадке» (ее экземпляр хранится в библиотеке Военно-медицинской академии в Ленинграде). На титульном листе есть посвящение Леонарду Эйлеру: «...Лучшему из отцов... вечно преданный сын».

Время, когда жил Карл Эйлер (вторая половина XVIII в.), было началом бурного строительства Петербурга. Эйлеры оказались свидетелями и участниками великих дел. Леонард Эйлер занимался исчислением количества материалов, нужных для сооружения памятника Петру I. В память создания Медного всадника ему была вручена медаль. Карл Эйлер, отправляясь на службу в Зимний дворец или в Академию наук (в последние годы он жил на Среднем проспекте Васильевского острова, д. 25), мог наблюдать все этапы созидания Медного всадника (1782), строительство Академии художеств (1788).

<sup>1</sup> Здесь и далее все даты приведены по новому стилю. Основные сведения о различных потомках Эйлера имеются в этом же сборнике в статьях Э. Н. Амбургера, И. Р. Геккера и Г. К. Михайлова, а также И. Р. Геккера и А. А. Эйлера (см. также [1]).



Тема упомянутой диссертации Карла Эйлера была весьма актуальна для Петербурга из-за распространенности в городе простудных заболеваний. Так, по свидетельству некоторых биографов, трагедия с глазами Леонарда Эйлера явилась в какой-то мере следствием перенесенной им лихорадки. Приехав из более умеренного климата, К. Эйлер и сам долго и много болел, как и некоторые другие члены семьи, еще не приспособившиеся к петербургским условиям.

Карл Эйлер умер пятидесяти лет 16 марта 1790 г., через семь лет после смерти своего отца, и был похоронен рядом с ним на Смоленском лютеранском кладбище. Там же погребена и его супруга Анна-Эмилия (урожденная Белль), пережившая мужа на сорок лет. В настоящее время удалось найти место их захоронения.

У Карла Эйлера было двенадцать детей. Пятеро из них умерли во младенчестве. Наиболее известна биография единственного его сына Леонтия (1770—1849). О судьбе же большинства дочерей мы знаем мало.

Подобно пушкинскому Гриневу, Леонтий Эйлер с девяти лет числился в Преображенском полку сержантом, но, не имея склонности к военной службе, в 1791 г. вышел в отставку в чине капитана. Впоследствии, обремененный большой семьей, он всю жизнь служил по различным ведомствам. Был учителем в Сухопутном кадетском корпусе, переводчиком в петербургской и рижской таможах. Служил бухгалтером банка в Павловске, где жили родные его жены М. Ритмейстер. Его послужной список имеется в Центральном государственном архиве военно-морского флота СССР [2].

В 1811—1812 гг. Л. К. Эйлер состоял в должности надзирателя по хозяйственной части Царскосельского лицея, где тогда учился А. С. Пушкин [3]. По словам Я. К. Грота, лицеиста, впоследствии биографа А. С. Пушкина, Леонтий Карлович был «честнейший человек» [4, с. 218]. Пушкин встречал и других потомков Леонарда Эйлера. В лицей часто приезжал правнук ученого, гимназист и сверстник лицеистов, Павел Фус, впоследствии академик и непреходящий секретарь Петербургской академии наук, с которым до поступления в лицей учился в гимназии друг Пушкина Алексей Илличевский (1798—1837). В настоящее время в архиве лицея хранятся подлинники писем А. Д. Илличевского к П. Н. Фусу, собранные Я. К. Гротом [4, с. 33—68]. Илличевский просит Фуса прислать воспоминания и материалы о Леонарде Эйлере для задуманной им книги «Великие мужи России» и передает ему поклоны Пушкина. В Петербурге Пушкин был знаком с Александрой Александровной Эйлер — правнучкой Л. Эйлера по линии сына Христофора. Она была замужем за А. Н. Зубовым, тоже знакомым Пушкина. Александра Александровна — свидетельница большого литературного события: в сентябре 1831 г. в доме С. А. Урусовой в присутствии А. С. Пушкина, В. А. Жуковского, Виельгорских и А. А. Эйлер-Зубовой Н. В. Гоголь впервые читал свои «Вечера на хуторе близ Диканьки» [3, с. 432]. Пушкин интересовался личностью Эйлера. В его записях под названием «Анекдоты» есть эпизод из жизни ученого [5, с. 147]: по приказу царицы Анны Иоанновны Леонард Эйлер вместе с одним еще академиком, против своего желания, составлял якобы гороскоп годовалому наследнику русского престола Иоанну Антоновичу <sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Современник Л. Эйлера академик Я. Штелин приписывает составление такого гороскопа другому академику Г. В. Крафту [6, с. 464]. Участие Л. Эйлера в составлении гороскопов никакими свидетельствами не подтверждается. — *Примеч. ред.*

Уроженец Петербурга, Л. К. Эйлер долго жил на Васильевском острове (8-я линия, между Большим и Средним проспектами). После пожара 1771 г., когда сгорел и дом Леонарда Эйлера, на Васильевском острове стали чаще строить каменные здания. Но по-прежнему здесь, как и на Петербургской (ныне Петроградской и Выборгской) стороне, были и огороды. На Охте держали коров. У гранитных спусков к Неве женщины стирали белье. Барки с сеном и съестными припасами приставали к захламленному берегу с деревянной пристанью [7]. На дачу с вещами переправлялись на лодках и во времена «Белых ночей» Ф. М. Достоевского, т. е. в середине XIX в.

Л. К. Эйлер прошел длинный жизненный путь, пережив четырех царей. Он был свидетелем стихийных бедствий: эпидемии холеры 1812 г., унесшей свыше 2000 жителей столицы, и наводнения 1824 г., от которого особенно пострадал Васильевский остров. Он — современник Отечественной войны 1812 г. Его двоюродный брат Александр Христофорович — участник сражений с армией Наполеона. Когда выступили декабристы, Леонтию Карловичу шел пятьдесят шестой год. Среди восставших был сын его близкого друга В. К. Тизенгаузен; впоследствии семьи Эйлеров и Тизенгаузенов дружили поколениями вплоть до 1942 г. На глазах Л. К. Эйлера воздвигались здания Адмиралтейства, Фондовой биржи, с которыми потом будут связаны биографии Эйлеров-моряков.

У Леонтия Карловича было три сына (Яков, Николай и Леонтий) и две дочери (Мария и Надежда). Как отец Леонтий Карлович приложил много сил, чтобы дать детям хорошее образование. Он дважды обращался с прошением к властям, хлопоча о будущем своего сына Леонтия, напоминая, что последний — правнук Леонарда Эйлера. Тексты прошений хранятся в Военно-Морском архиве. Первое — о приеме 11-летнего сына Леонтия в Морской корпус, второе — о переводе его из кандидатов в число казенных воспитанников Морского корпуса («престарелый отец его не имеет ничего, кроме скромного жалования на содержание многочисленного семейства», «юноша полон желания служить моряком»). Упоминаемое имя Леонарда Эйлера подчеркнуто карандашом лица, читавшего прошение [8].

Л. К. Эйлер умер семидесяти девяти лет и был похоронен на городском кладбище в Павловске, вместе с родственниками жены — Ритмейстер. Могила его не сохранилась.

Сыновья Леонтия Карловича не получили ни наследства, ни связей. Их отец, петербургский чиновник, имевший репутацию «честнейшего человека», смог дать им только образование и нравственное воспитание. Рассчитывать они могли лишь на свои силы. Благодаря большой работоспособности и энергии, каждый из сыновей вписал в историю семьи свою яркую страницу.

Старший сын Яков Леонтьевич (1813—1882) окончил в 1834 г. с серебряной медалью Казанский университет. Сначала он находился на военной службе, а последние двадцать лет жизни был управляющим казенной палатой в Могилеве, получив в 1862 г. чин действительного статского советника, равносильный в армии генерал-майору. Он женился в 1840 г. на своей троюродной сестре Марии Павловне Эйлер — правнучке великого математика по линии младшего его сына Христофора. Старший сын их Павел (1844—1890) начал свою карьеру также в армии, но затем пе-

решил на гражданскую службу, возглавив могилевское отделение Государственного дворянского земельного банка, и дослужился в 1889 г. до того же чина действительного статского советника. Другой сын Я. Л. Эйлера Владимир (1856—1878) погиб гвардейским подпоручиком во время русско-турецкой войны.

Два внука Якова Леонтьевича — участники русско-японской войны. Дмитрий Павлович Эйлер (1883—1943) — моряк, «фрегатен-капитан», окончил морской кадетский корпус. В 1904 г. плавал на крейсере «Варяг», участвовал в знаменитом бою при Чемульпо. За это был награжден Георгиевским крестом 4-й степени [9]. К концу первой мировой войны он стал капитаном 2-го ранга. Александр Павлович Эйлер (1881—1906) был сапером-подпоручиком 3-го Восточно-сибирского специального батальона и пал смертью храбрых под Мукденом.

Два других внука Я. Л. Эйлера Леонтий Павлович (1874—1960) и Павел Павлович (1876—1939) стали горными инженерами. Последний из них участвовал в строительстве приамурской ветки Дальневосточной железной дороги.

Биографии двух других сыновей Леонтия Карловича Эйлера — Николая и Леонтия — тесно связаны с событиями Крымской войны 1853—1856 гг. Оба они стали моряками и тоже прожили жизнь, полную активной деятельности<sup>3</sup>.

В Петербурге Н. Л. Эйлер жил на 9-й линии Васильевского острова и в доме № 2 по Владимирскому проспекту. Умер он на восемьдесят втором году жизни, будучи инженер-генералом; похоронен в Исидоровской церкви Александро-Невской лавры. Там же погребена его племянница Александра Яковлевна Скалон (1855—1911).

Николай Леонтьевич был женат дважды, имел восемь человек детей (четверо — от первого брака). Старший сын его Владимир Николаевич (1846—1910), подобно своему деду, связан с Александровским (б. Царскосельским) лицеем. Он окончил его в составе 28-го выпуска в 1856 г. и позже был там воспитателем и помощником инспектора. Другой сын Николай Николаевич (1851—1880) окончил Училище правоведения в Петербурге и служил товарищем прокурора Варшавского окружного суда. Младший сын — Павел Николаевич (1867—1918) состоял в армии и был произведен в 1911 г. в генерал-майоры.

Один из внуков Николая Леонтьевича Николай Владимирович (1883—1914) погиб в начале первой мировой войны — 5 ноября 1914 г. на корабле «Евстафий» в бою с вражеским крейсером «Гебен» в 25 км от Херсонесского маяка.

В Военно-морском музее Ленинграда хранится поясной портрет Николая Леонтьевича Эйлера, написанный в 80-х годах прошлого столетия неизвестным художником [10, с. 64—65]. Там же имеется и литографированный портрет его младшего брата Леонтия Леонтьевича.

Леонтий Леонтьевич Эйлер (1821—1893), окончил Морской корпус (1839), плавал по Финскому заливу, Балтийскому и Немецкому (Северному) морям. Среди многочисленных кораблей, на которых он служил, — фрегат «Паллада», известный по очеркам И. А. Гончарова. Во время Крымской войны Леонтий Леонтьевич был в рядах защитников Кронштадта

<sup>3</sup> Подробнее об их деятельности см. в статье И. Р. Геккера и А. А. Эйлера «Семья и потомки Леонарда Эйлера» в наст. изд.— *Примеч. ред.*

от англо-французского флота. Опытный моряк, Л. Л. Эйлер обладал хладнокровием, спокойствием, выдержкой. В 1885 г. в возрасте шестидесяти четырех лет он произведен в вице-адмиралы с увольнением от службы «по предельному возрасту». Торжественная церемония состоялась при поднятом флаге на корабле в Кронштадте [11, с. 391—401]. Полностью расстаться с делом своей жизни он, однако, не мог и после выхода на пенсию долгое время состоял членом директиона Общества С.-Петербургского парокходства и судоходства. Вместе с семьей Л. Л. Эйлер проживал в это время на углу Знаменской (ул. Восстания) и Малой Итальянской (ул. Жуковского). Он умер в 1893 г. и похоронен на Никольском кладбище Александро-Невской лавры.

Рассказ о дальнейшем пойдет главным образом по личным воспоминаниям с использованием упомянутых выше мемуаров Н. В. Кочеткова. У Л. Л. Эйлера было пятеро детей. Трое сыновей умерли детьми, а две дочери дожили до старости. Сестры выросли в семье морского офицера, где были сильны традиции воинской славы, патриотических подвигов. И своих детей они воспитывали в духе беззаветного служения России.

Старшая сестра Софья Леонтьевна (1857—1936) обращала на себя внимание своей особенной респектабельностью, чопорностью. Но под внешним холодком и сдержанностью крылся мир высоких нравственных устоев, порядочности. Она умела стойко переносить сложности жизни. Ее муж Николай Дмитриевич Бушен находился в родстве с Е. Ю. Кузьминой-Караваевой — легендарной матерью Марией, в 1985 г. посмертно награжденной орденом Отечественной войны II степени. В семейной жизни, однако, Софья Леонтьевна, не была счастлива — своих детей поднимала одна. После смерти матери в 1903 г. она переехала в Кронштадт к младшей сестре Александре Леонтьевне. Дети Софьи Леонтьевны к этому времени были устроены.

В 1904 г. в Кронштадт пришли уцелевшие корабли русского флота, сильно пострадавшие в русско-японской войне. Раненых поместили в военно-морской госпиталь. Софья Леонтьевна сразу же пошла туда работать сестрой милосердия. В годы первой мировой войны она вновь в госпитале. Вспоминается несколько ее фотографий — в белом халате, в косынке с красным крестом. В 20-е годы она жила в Петрограде в Ковенском переулке. Часто приходила к сестре Александре Леонтьевне, на 6-ю Рождественскую (ныне Советскую). Сестры были очень дружны.

Александра Леонтьевна Эйлер-Кочеткова (1859—1939) прожила сложную жизнь, полную испытаний. Ее муж Василий Николаевич Кочетков (1862—1921) в течение 26 лет служил старшим ординатором Кронштадтского военно-морского госпиталя и был известным педиатром. Это была яркая и самобытная натура. Самое знакомство с ним Александры Леонтьевны произошло при необычных обстоятельствах. В 1891 г., когда В. Н. Кочетков служил в больнице принца Ольденбургского, как-то ночью привезли умирающего от дифтерита мальчика лет трех. Ребенок задыхался и был уже без пульса. Дежурный врач, не теряя времени, не вызывая хирурга, схватил первый попавшийся скальпель, сделал надрез гортани и вставил трубочку для дыхания. Мальчик был спасен, и после этого была произведена необходимая операция. Дежурный врач был В. Н. Кочетков, спасенный ребенок — Боря Бушен, сын Софьи Леонтьевны.

Годы жизни Александры Леонтьевны в Кронштадте были исполнены драматизма. Один за другим умерли трое ее детей. В память об умерших

детях были взяты трое приемных. Горе она переживала терпеливо, стойко. Когда началась первая мировая война, проводила на фронт двух своих сыновей.

До конца жизни Александра Леонтьевна оставалась другом, помощником мужу, человеку высокой образованности. Как врач он пользовался известностью. К нему обращались в самых серьезных случаях. Леча других, он не щадил себя. Им была организована клиника-пансионат для престарелых врачей, в которой работал и хирург А. Л. Поленов. В. Н. Кочетков обладал страстью к труду. Свободное время посвящал токарной и столярной работе. В его кабинете стоял ясеневый стол, сделанный собственными руками. Вместе с тем он артистически владел скрипкой. В его библиотеке были не только медицинские книги, но и сочинения по юриспруденции, сельскому хозяйству, беллетристика.

Василий Николаевич был убежденным антимонархистом и приветствовал Великую Октябрьскую революцию. В 1918 г. по приказу наркома здравоохранения Кочетков был командирован на Свирьстрой главным врачом, начальником над медицинскими пунктами строительства. Александра Леонтьевна сопровождала его и до конца дней делила с ним все трудности, холод и голод. Декабрьской ночью 1920 г. Кочетков был вызван к больному. Возвращаясь домой по сугробам, он простудился и умер от крупозного воспаления легких 21 января 1921 г.

После смерти мужа Александра Леонтьевна с семьей возвратилась в Петроград. Здесь она целиком посвятила свою жизнь близким, дочери и внучке. Были в ней удивительные обаяние, деликатность, воспитанность, вызывающие в людях особенные уважение и любовь. Большого внимания заслуживают ее взгляды на воспитание детей. Она считала, что с ребенком надо повседневно заниматься, внедряя нормы морали, объясняя, «что такое хорошо и что такое плохо», приучая к деликатности, скромности. Уважение к людям внушалось личным примером. О знакомых говорилось особенно уважительно. Существовали четкие правила, с кем и о чем можно говорить. Из домашних занятий Александра Леонтьевна больше всего любила рисование, и тоже с точки зрения деликатности: никого не беспокоить (в отличие от игры на музыкальном инструменте). Частью нравственного воспитания являлось доброе отношение к животным.

У Александры Леонтьевны была органическая, кровная связь с Ленинградом, где прошли детство, юность, где жили близкие. Любовь к городу, к стране, готовность все отдать за них были ее высшим нравственным принципом. Во время блокады в осажденном Ленинграде эти ее уроки были особенно памятны.

Как свидетель пережитого Александра Леонтьевна хранила в памяти неисчерпаемые богатства. Очень многое из того, что она знала об истории семьи, утрачено, как исчезли и сберегавшиеся ею исторические ценности. В их числе часы — подарок Екатерины II Леонарду Эйлеру, бесценные фотографии, погибшие 26 ноября 1941 г. во время бомбежки Васильевского острова.

С точки зрения нашего времени Александра Леонтьевна была далеко не идеальным человеком. Ее покорность обстоятельствам, непротивление едва ли можно оправдать. Тем не менее она олицетворяла собой тип ушедшей женственности, в котором заключалось много прекрасного. Она умерла в 1939 г.

Дети Александры Леонтьевны — участники войны, блокады Ленинграда. Сергей (1890—1914), фамилия его была Чебрец, был взят в семью и усыновлен на другой день после смерти сына Александра. После окончания гимназии поступил в военное училище. В связи с началом первой мировой войны окончил его ускоренным выпуском, прошел обучение в школе пулеметчиков и получил назначение на фронт. Его отделение уходило на Варшавское направление. Не доехав до места назначения, он был убит под Ломжей. Известие о гибели пришло через месяц. В память о брате Николай Васильевич назвал своего сына Сергеем.

Николай Васильевич Кочетков (1893—1946) родился в Кронштадте. Подобно своей матери, он вырос в семье морского офицера в традициях чести, верности долгу и России, традициях гуманизма и доброты. С детских лет он мечтал стать по примеру отца врачом. Быть врачом значило для него служить Родине и людям. Нравственными образцами были и друзья дома, в том числе А. Л. Поленов, впоследствии известный нейрохирург (в Ленинграде, на улице Маяковского, ему поставлен мраморный бюст), и Б. А. Берг, военно-морской инженер из семьи, давшей России ряд выдающихся специалистов. Среди друзей тех лет в Кронштадте был и Анатолий Дуров, артист кронштадского цирка, родоначальник нескольких поколений известных цирковых артистов. Дружба с семьей известного востоковеда В. Г. Тизенгаузена (1825—1902), как уже говорилось, продолжалась до 1942 г., когда в осажденном Ленинграде умерла его внучка Ю. П. Шапошникова со своими двумя мальчиками.

Летом 1914 г. Россия вступила в войну с Германией. Н. В. Кочетков учился в то время в Военно-медицинской академии. На втором курсе лекции по физиологии читал академик И. П. Павлов. Он приходил обыкновенно с газетой, ругал правительство, горячо выступал против войны, с болью повторял слова о несовместимости войны и науки.

После окончания второго курса следовала практика на фронте. Выбрано было направление на запад, на Варшаву (где только что погиб брат Сергей). Начиналось знакомство с жизнью не в аудитории, а на полях войны. Практикантов направили на места газовых атак. Тысячи русских лежали, отравленные хлором. Среди лежавших были и живые. Их-то и выискивали студенты-практиканты. В пятнадцати километрах от места боя был устроен лазарет. Не хватало ваты, корпии. Раненых, не оказав им должной помощи, вынуждены были отправлять дальше в тыл. На фронт поступили артиллерийские снаряды, которые не входили в стволы орудий, так как были другого калибра. А их привезли десятки вагонов! Так будущий врач проходил жизненную школу в окопах. Приближался 1917 год.

Летом 1917 г. Н. В. Кочетков окончил в ускоренные сроки Академию и сразу же снова отправился на фронт. Он получил назначение старшим врачом в 249-й Борзенский пехотный полк. Лазарет размещался на дорожной станции в сорока километрах от Риги. Под Ригой шли бои, прибывали раненые. Но теперь у молодого врача был опыт. Удалось хорошо оборудовать лазарет. За проявленные мужество и умелую организацию работы в августе 1917 г. Николай Васильевич был награжден орденом Владимира с мечами и бантом. Во время пребывания на фронте он перенес отравление газами, был ранен. События Октября застали его на фронте.

Возвратившись в Петроград, Николай Васильевич продолжал выполнять долг врача. Летом 1918 г. в Петрограде вспыхнула эпидемия холе-

ры. Правительство мобилизовало всех врачей. Быстрые, решительные меры немедленно дали свои положительные результаты. Город был разделен на участки. Функционировали стационары, проводились дезинфекции на дому, осуществлялся врачебно-санитарный контроль. Николай Васильевич работал в Выборгском районе, наиболее пораженном эпидемией. Через два-три месяца очаг был ликвидирован, болезнь стала стихать. В 1919 г., вступив добровольцем в Красную Армию, Кочетков участвовал в разгроме Юденича. Умер он в 1946 г.

Анастасия Васильевна Кочеткова (1900—1943), младшая дочь Александры Леонтьевны Эйлер-Кочетковой, прожила тяжелую жизнь. Она родилась в Кронштадте, детские годы прошли за городом, в так называемой Роще. Об этой поре жизни у нее остались самые поэтические воспоминания. Прямо за домом начиналось поле, переходящее в море, ширь и простор. Семья Кочетковых отличалась музыкальностью. По вечерам собирались у рояля. Первую скрипку играл обычно А. Л. Поленов, Василий Николаевич — вторую. Исполнялись романсы, отрывки из опер. У самой Анастасии Васильевны был голос редкой красоты — оперное сопрано.

Шел 1921 год. После смерти отца Анастасия Васильевна осталась главой семьи, только что пережив неудачный брак, имея на руках маленького ребенка и пожившую мать. Дни проходили на петербургской бирже труда в надежде получить любую работу. В часы удач приходилось быть и уборщицей, и чернорабочей, и даже каменщицей на дороге. Стабилизация жизни в конце 20-х годов, повышение общего материального уровня на матери уже почти не могло отразиться. Ухудшалось здоровье. Использовать свои природные способности, дарования оказалось невозможным. Было какое-то неумение вступать в контакт с людьми. Голос, знание языков, полученное воспитание — все осталось без применения. И только совершенно необычная, подлинно эйлеровская энергия, упорство, стойкость в преодолении препятствий остались в ней неизменными. Она умерла в 1943 г. во Владимире.

Младшая, приемная дочь Александры Леонтьевны — Ефросиния Павловна Воробьева (1904—1985) — ветеран Великой Отечественной войны. Во время блокады находилась в осажденном Ленинграде, а затем была на Ленинградском фронте.

Потомки Карла Эйлера в наши дни многочисленны. В Ленинграде живут, в частности, правнуки Якова Леонтьевича и Леонтия Леонтьевича Эйлеров и их дети. В соответствии с традициями семьи они творчески трудятся на благо Родины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Euler K.* Das Geschlecht Euler-Schölpi. Giessen, 1955.
2. ЦГАВМФ СССР, ф. 432, оп. 5, д. 3537.
3. *Черейский Л. А.* Пушкин и его окружение. Л.: Наука, 1975.
4. *Грот Я. К.* Пушкинский лицей, 1811—1817. СПб., 1911.
5. *Пушкин А. С.* Собр. соч. М.: Худож. лит., 1976. Т. 6.
6. *Пекларский П. П.* История имп. Академии наук в Петербурге. СПб., 1870. Т. 1.
7. *Валицкая А. П.* Орест Кипренский в Петербурге. Л.: Лениздат, 1981.
8. ЦГАВМФ СССР, ф. 432, оп. 6, д. 38.
9. Летопись войны с Японией, 1904, № 7, с. 134.
10. Каталог Военно-морского музея в Ленинграде. Л., 1960.
11. ЦГАВМФ СССР, ф. 417, оп. 5, д. 2527.

## УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН \*

- Абалакин В. К. (р. 1930) 3, 170, 237  
 Абель Н. Х. (Abel N. H., 1802—1829) 36, 45, 145  
 Абу Камил ал-Мисри (ок. 850 — 930) 139  
 Августин (Augustinus Aurelius, 354—430) 270  
 Агафонов Н. Я. (1842—1908) 456  
 Адами Я. (Adami J., XVIII в.) 283  
 Адодуров В. Е. (Ададуров, 1709—1780) 55  
 Алексеенков Е. П. (р. 1937) 255  
 Александр I (1777—1825) 302  
 Александр II (1818—1881) 492  
 Александров А. П. (р. 1903) 3, 5, 11  
 Александров П. С. (1896—1982) 45  
 Алексеева М. А. (р. 1930) 59  
 Альхазен — см. ал-Хасан ибн ал-Хайсам  
 Амбургер Э. Н. (Amburger E., р. 1907) 383, 385, 461, 496, 497, 498  
 Ами П. Ж. (Ameu P. J., 1768—1846) 348  
 Ампер А. М. (Ampère A. M., 1775—1836) 301  
 Андрей И. Г. Р. (Andreae J. G. R., 1724—1793) 311  
 Андреева Г. Б. (р. 1960) 345  
 Андронов А. А. (1901—1952) 225  
 Анна Ивановна (1693—1740) 26, 49, 54, 474, 499  
 Анна Леопольдовна (1718—1746) 26, 474  
 Анспах Я. (Anspach J., 1830—1908) 459  
 Антинг Ф. (Anthing J. F., 1753—1805) 246, 390, 394  
 Аполлоний (ок. 260—190 до н. э.) 114  
 Апухтин В. Р. 456  
 Арбогаст Л. Ф. А. (Arbogast L. F. A., 1759—1803) 36  
 Аренс В. (Ahrens W., 1872—1927) 128  
 Аристоксен (IV в. до н. э.) 339  
 Аристотель (384—322 до н. э.) 181, 267  
 Архимед (287—212 до н. э.) 31, 45  
 Архит (ок. 428—365 до н. э.) 326  
 Ауверс А. (Auwers A. von, 1838—1915) 63, 64  
 Ахенваль Г. (Achenwall G., 1719—1772) 81  
 Ахматов В. В. (1875—1934) 456  
 Ацаркина Э. Н. 352  
 Байер Т. З., или Г. З. (Bayer Th. S., или G. S., 1694—1738) 272, 273, 276  
 Баклунд О. А. (Backlund O., 1846—1916) 64—68, 71, 72, 75, 78, 79, 130  
 Бакунин П. П. (1762—1806) 490  
 Балабух Л. И. (1910—1978) 227  
 Баничук Н. В. (р. 1944) 177, 208  
 Барановский Г. В. (р. 1860) 456  
 Барбу М. И. (Barbour M. J.) 331  
 Бартолоцци Ф. (Bartolozzi F., 1727—1815) 348  
 Баушингер Ю. (Bauschinger J., 1860—1934) 67  
 Бах И. С. (Bach J. S., 1685—1750) 13  
 Баше де Мезириак К. Г. (Bachet de Méziriac S. G., 1581—1638) 135  
 Башмакова И. Г. (р. 1921) 3, 139, 152, 162, 164, 165  
 Беглен Н. (Beguelin N. de, 1714—1789) 24  
 Безу Э. (Bézout E., 1730—1783) 145  
 Беккер Ф. (Becker F., 1864—1928) 352  
 Белль К. И. (Bell C. J. von, 1744—1830) 378  
 Белоголовый Н. А. 456  
 Белый Ю. А. (р. 1925) 79, 127, 131  
 Беляев И. И. (XVIII в.) 314, 316  
 Беляев Н. М. (1890—1944) 178, 225, 228  
 Бенеци Э. (Bénézit E., 1854—1920) 352  
 Бентли Р. (Bentley R., 1662—1742) 297, 302  
 Берг Б. А. 504  
 Бердичевский В. Л. (р. 1944) 207  
 Берман Г. Ф. (Baermann G. F., 1717—1769) 91  
 Бернулли Д. (Bernoulli D., 1700—1782) 5, 17—20, 31, 34—36, 39, 45, 47, 50, 51, 53, 91, 116, 118, 169, 175, 177, 209, 212, 221—224, 239, 260, 263, 265, 270, 274, 276, 278—280, 282, 285, 291, 311, 313, 314, 320, 355, 357, 359, 361, 366, 368, 374, 379, 380, 382, 472, 480  
 Бернулли И. I (Bernoulli J., 1667—1748) 5, 6, 17, 18, 20, 24, 30, 35, 37, 44, 48, 53, 60, 91, 169, 172, 175, 179, 182, 189, 205, 206, 235, 278, 282—284, 289, 340, 341, 344, 354—359, 368, 380, 472  
 Бернулли И. II (Bernoulli J., 1710—1790) 17, 296  
 Бернулли И. III (Bernoulli J., 1744—1807) 94, 348, 352  
 Бернулли Н. I (Bernoulli N., 1687—1759) 17, 18, 34, 60, 74, 91, 105, 279, 355, 472  
 Бернулли Н. II (Bernoulli N., 1695—1726) 5, 17—19, 47, 355

\* В указателе имен не включены отсылки к именам потомков Л. Эйлера в трех специально им посвященных последних статьях сборника. Самостоятельный указатель фамилий к родословной росписи потомков Л. Эйлера приложен к статье Э. Н. Амбургера, И. Р. Геккера и Г. К. Михайлова (см. с. 463—467).



- Бернулли Р. (Bernoulli R., p. 1914) 380  
 Бернулли Я. (Bernoulli J., 1655—1705) 6, 16—19, 37, 44, 117, 182, 183, 208, 354, 356, 358, 471, 472  
 Бернулли-Зуттер Р. (Bernoulli-Sutter R., p. 1942) 459  
 Бертран Ж. (Bertrand J., 1822—1900) 127, 128, 136, 138  
 Бертран Л. (Bertrand L., 1734—1812) 91  
 Бессель Ф. В. (Bessel F. W., 1784—1846) 61, 225  
 Билли Ж. (Billy J. de, 1602—1679) 147  
 Бильфингер Г. Б. (Бюльфингер; Bilf(f)inger G. V., 1693—1750) 51, 86, 91, 356  
 Бир А. (Birr A., 1693—1762) 379, 380  
 Бирман К. Р. (Biermann K. R., p. 1919) 4, 58, 63, 78, 90, 93, 101, 278, 292  
 Бирон Э. И. (Biron E. J., 1690—1772) 26  
 Блан Ш. (Blanc Ch., p. 1910) 80  
 Блэк Дж. (Black J., 1728—1799) 82  
 Блюментрост Л. Л. (Blumentrost L., 1692—1755) 5, 20, 30, 48, 49  
 Блюхер Г. Л. (Blücher G. L., 1742—1819) 493  
 Бобылев Д. К. (1842—1917) 130  
 Бобынин В. В. (1849—1919) 79  
 Боголюбов Н. Н. (p. 1909) 4, 225  
 Бозе Г. М. (Bose G. M., 1710—1761) 91  
 Болотин В. В. (p. 1926) 220, 226—228  
 Болтанский В. Г. (p. 1922) 207  
 Больцано Б. (Bolzano B., 1781—1848) 45  
 Больцман Л. (Boltzmann L., 1844—1906) 205  
 Бомбелли Р. (Bombelli R., ок. 1526—1573) 139, 146, 147  
 Бонне Ш. (Bonnet Ch., 1720—1793) 24, 91  
 Бор Н. (Bohr N., 1885—1962) 205  
 Борн М. (Born M., 1882—1970) 205  
 Бособр Л. И. (Beausobre L. I. de, 1730—1783) 97  
 Боэций А. М. С. (Boet(h)ius A. M. S., ок. 480—524) 339, 344  
 Брандт Ф. Ф. (1802—1879) 491  
 Брауер Л. (Brouwer L., 1881—1966) 45  
 Браун И. А. (Braun J. A., 1712—1768) 55, 91  
 Браун Э. У. (Brown E. W., 1866—1938) 244  
 Бредли Дж. (Bradley J., 1693—1762) 82  
 Бреннзон И. (Brennsohn I., 1854—1928) 459  
 Бройль Л. (Broglie L. de, 1892—1987) 205  
 Брокгауз Ф. А. (Brockhaus F. A., 1772—1823) 457, 459  
 Броун Х. (Brown H., XVIII в.) 24  
 Брункер В. (Brouncker W., 1620—1684) 108  
 Брукер И. Г. (Brucker J. G., XVIII в.) 27  
 Брукер-Эйлер М. (Brucker-Euler M., 1677—1761) 353, 471  
 Брукнер И. (Bruckner I., 1686—1762) 52, 53  
 Брюс Я. В. (Bruce J., 1670—1735) 24  
 Буге П. (Bouguer P., 1698—1758) 91, 279, 380  
 Бугенвиль Л. А. (Bougainville L. A. de, 1729—1811) 81  
 Буксторф А. И. (Buxtorf A. J., 1696—1765) 379  
 Буняковский В. Я. (1804—1889) 61, 62, 123, 130  
 Буркхардт А. (Burckhardt A.) 380  
 Буркхардт И. Я. (Burckhardt J. J., p. 1903) 80, 459  
 Буркхардт Ф. (Burckhardt F., 1830—1913) 468  
 Буркхардт Э. Л. (Burckhardt E. L.) 379  
 Бурья А. (Burja A., 1752—1816) 352  
 Бутовский В. Д. (XIX в.) 456  
 Бутурлин М. Д. (1807—1876) 456  
 Буш Х. Р. (Busch H. R.) 330, 331, 335, 339, 343  
 Бюттнер Н. (Büttner N., XVIII в.) 91  
 Бюффон Ж. Л. (Buffon G. L. de, 1707—1788) 81, 257  
 Вавилов С. И. (1891—1951) 254, 258, 275, 296, 302  
 Вайдлер И. Ф. (Weidler J. F., 1691—1755) 274, 276  
 Валицкая А. П. 505  
 Валлис Дж. (Уоллис; Wallis J., 1616—1703) 102, 108, 110, 332  
 Вальтер Х. Т. (Walther Ch. Th., 1699—1741) 272  
 Вальц И. Т. (Waltz J. T., 1713—1747) 91  
 Вандермонд А. Т. (Vandermonde A. Th., 1735—1796) 145  
 Вариньон П. (Varignon P., 1654—1722) 116, 166, 189  
 Васильев В. (XVIII в.) 314  
 Вегерслэф Ф. (Wegggersluf F., 1702—1763) 24, 53  
 Вейгель Э. (Weigel E., 1625—1699) 96  
 Вейерштрасс К. (Weierstrass K., 1815—1897) 144, 147, 205  
 Вейль А. (Weil A., p. 1906) 148, 152, 164, 165  
 Вейтбрехт И. (Weitbrecht J., 1702—1747) 55, 269  
 Венгеров С. А. (1855—1920) 78  
 Венков Б. А. (1900—1962) 164  
 Венц Л. (Wenz L., 1695—1772) 91, 379  
 Венцель Ж. Б. (Wenzel J. B., ум. 1790) 373, 476  
 Венцкий Г. (Venzky G., 1704—1757) 91  
 Вестермаер К. (Westermayer C., VIII в.) 260  
 Веттштейн К. (Wettstein J. C., 1695—1760) 82, 91  
 Вигель Ф. Ф. (1786—1856) 348, 352  
 Виет Ф. (Виета; Viète F., Vieta, 1540—1603) 139, 146, 147, 156, 157  
 Вигурина М. П. (p. 1923) 345, 351  
 Винкель Ф. (Winckel F., p. 1907) 332  
 Винкельман И. И. (Winckelmann J. J., 1717—1768) 81

- Виноградов И. М. (1891—1983) 45  
 Винсгейм Х. Н. (Winsheim Ch. N. von, 1694—1751) 91  
 Винтер М. (Winter M.) 101  
 Винтер Э. (Winter E., 1896—1982) 59, 87, 89, 101, 131, 138, 152, 276, 344  
 Винчи Л. да (Vinci L. da, 1452—1519) 208  
 Вильноль А. (Vignoles A. de, 1649—1744) 85  
 Виньон П. (Vignon P., ум. 1734) 261  
 Вишневский В. К. (Wiśniewski V., 1781—1855) 490  
 Владимиров В. В. (XIX в.) 459  
 Власов В. З. (1906—1958) 218, 227  
 Воллеб Л. (Wolleb L., ум. 1734) 380  
 Вольмир А. С. (1910—1986) 220, 228  
 Вольтер Ф. М. (Voltaire F. M., 1694—1778) 30, 82, 86, 88, 120, 185, 186, 206  
 Вольф К. Ф. (Wolf C. F., 1734—1794) 34, 55, 82  
 Вольф Р. (Wolf R., 1816—1893) 101  
 Вольф Х. (Wolf Ch., 1679—1754) 48, 59, 85—88, 91, 107, 362, 363, 380, 381  
 Воропец П. В. (1871—1923) 198, 200, 206  
 Воронин З. (XVIII в.) 314  
 Воронов П. Н. (XIX в.) 456  
 Воронцов М. И. (1714—1767) 93, 294  
 Воронцова-Дашкова Е. Р.— см. Дашкова Е. Р.  
 Врангель Н. Н. 352  
 Габихт В. (Habicht W., р. 1915) 58, 80  
 Галилей Г. (Galilei G., 1564—1642) 31, 190, 233, 234, 375  
 Галлей Э. (Халли; Halley E., 1656—1742) 242, 247, 257, 263  
 Галлер А. (Haller A. von, 1708—1777) 81, 91, 381  
 Галуа Э. (Galois E., 1811—1832) 45, 142, 151  
 Галченкова Р. И. (р. 1929) 127, 131  
 Гамбергер Г. Э. (Hamberger G. E., 1697—1755) 91  
 Гамильтон У. Р. (Hamilton W. R., 1805—1865) 180, 188, 191—202, 205—207  
 Гамкрелидзе Р. В. (р. 1927) 207  
 Гарбузов Н. А. (1880—1955) 332  
 Гарнак А. (Harnack A., 1851—1930) 101  
 Гарриот Т. (Харриот; Harriot Th., 1560—1621) 105  
 Гаснер-Эйлер А. М. (Gassner-Euler A. M., 1642—1712) 471  
 Гассельблатт А. (Hasselblatt A., 1852—1927) 459  
 Гаусс К. Ф. (Gauss C. F., 1777—1855) 11, 14, 45, 61, 134, 143, 144, 151, 152, 203, 204, 207, 238, 242, 243, 249, 251  
 Гейдель Р. (Heidel R., XVIII в.) 91  
 Гейзенберг В. (Heisenberg W., 1901—1976) 205  
 Гейнрихус Г. (Heinsius G., 1709—1769) 25, 88, 91, 251, 252, 274  
 Геккер И. Р. (р. 1927) 4, 383, 468, 498  
 Гельмгольц Г. (Helmholtz H. von, 1821—1894) 205, 324, 330, 332  
 Гельфонд А. О. (1906—1968) 164  
 Генгенбах Х. (Gengenbach Ch., 1706—1770) 471  
 Генрих принц Прусский (Prinz Heinrich von Preussen, 1726—1802) 83  
 Герман Г. (Hermann H., XVIII в.) 24  
 Герман Я. (Hermann J., 1678—1733) 19, 23, 24, 50, 51, 53, 87, 118, 166, 167, 169, 182, 183, 189, 203, 229, 235, 260, 265, 279, 355—357, 379, 380  
 Герхардт К. И. (Gerhardt C. I., 1816—1899) 205  
 Герц Г. (Hertz H., 1857—1894) 197, 203, 206  
 Герцман Е. В. (р. 1937) 321, 332  
 Гершельман Л. (Hoerschelmann L., р. 1863) 460  
 Гесс Э. (Hess E., XVIII в.) 380  
 Гёльдэр О. Л. (Hölder O. L., 1859—1937) 197—200, 206  
 Гёте И. В. (Goethe J. W., 1749—1832) 345  
 Гзелль Г. (Gsell G., 1673—1740) 389, 472, 473  
 Гзелль-Эйлер К. (Gsell-Euler C., 1707—1773) 26, 377  
 Гзелль-Эйлер С. А. (Gsell-Euler S. A., 1723—1794) 41, 377  
 Гиббс Дж. У. (Gibbs J. W., 1839—1903) 205  
 Гильберт Д. (Hilbert D., 1862—1943) 45, 146, 151, 152  
 Гиляровский П. И. (XVIII в.) 302, 303  
 Гишпарх (ок. 180—125 до н. э.) 119  
 Глазеван Г. (Glarean H., 1488—1563) 333, 343  
 Глинка М. Е. (1908—1979) 352  
 Гмелин И. Г. (Gmelin J. G., 1709—1755) 91, 269  
 Гнучева В. Ф. (1890—1942) 271, 275  
 Гоголь Н. В. (1809—1852) 499  
 Голицын Б. Б. (1862—1916) 63, 64, 66, 79  
 Голицын П. П. (р. 1856) 456  
 Головин М. Е. (1756—1790) 25, 39, 58, 302, 307, 308, 317, 375, 378, 476  
 Головинский И. А. (р. 1951) 93, 102  
 Гольдбах Х. (Goldbach Ch., 1690—1764) 20, 24, 34, 35, 48, 60, 91, 102, 104, 105, 107, 130, 131, 133—135, 137, 138, 149, 152, 164, 278, 328, 332, 335, 339, 344  
 Гончаров И. А. (1812—1891) 501  
 Гораций (Quintus Horatius Flaccus, 65—8 до н. э.) 273  
 Гордак И. Д. (Gordack J. D., XVIII в.) 91  
 Готтинье Э. Ф. (Gottignies Ae. F. de, 1630—1689) 103  
 Гофман И. Э. (Hofmann J. E., 1900—1973) 148, 152, 164, 165  
 Гофман П. (Hoffmann P., р. 1924) 59  
 с'Гравесандре В. Я. (Схавесандре; s'Gravesande W. J., 1688—1742) 86  
 Грау К. (Grau K., р. 1932) 3, 43, 81, 292

- Граф М. (Graf M., XIX в.) 101  
 Граф-Гзелль М. (Graf-Gsell M., 1678—1743) 377  
 Гребеников Е. А. (р. 1932) 3, 170, 237, 255  
 Гревениц Ф. (Graewenitz F., ум. 1765) 235  
 Григорьян А. Т. (р. 1910) 3, 43, 80, 131 294, 303  
 Грин Дж. (Green G., 1793—1841) 301  
 Гришов А. Н. (Grischow A. N., 1726—1760) 91  
 Грот Я. К. (1812—1893) 499, 505  
 Грубе Ф. (Grube F., 1835—1893) 75  
 Губанова И. И. 227  
 Губер Д. (Huber D., 1768—1829) 101  
 Гузь А. Н. (р. 1939) 220, 228  
 Гук В. (Hueck W. von, р. 1931) 459  
 Гук Р. (Hooke R., 1635—1703) 177, 208  
 Гумбольдт А. (Humboldt A. von, 1769—1859) 83  
 Гумбольдт В. (Humboldt W. von, 1767—1835) 83  
 Гупель А. (Hupel A., 1737—1819) 345  
 Гурвиц А. (Hurwitz A., 1859—1919) 146, 152  
 Гурьев С. Е. (1764—1813) 318, 320  
 Гутман 76  
 Гутцмер А. (Gutzmer A., 1860—1924) 73  
 Гюйгенс Х. (Хёйгенс; Huygens Ch., 1629—1695) 33, 45, 116, 181, 192, 196, 205, 231, 265, 323, 356, 363, 380  
 Гюльденштедт А. (Гильденштедт; Guldens-tädt J. A., 1745—1781) 55  
 Даламбер Ж. (Д'Аламбер; d'Alembert J., 1717—1783) 4, 15, 22, 31, 32, 34—36, 38, 43, 45, 60, 86, 91, 94, 101, 112, 118, 141, 168—172, 175, 178, 180, 183, 185, 186, 188, 189, 198, 203, 204, 206, 221, 243, 259, 277, 278, 281—287, 290—292, 368, 382  
 Дальтон Г. (Dalton H., 1833—1913) 385, 459  
 Дальхаус К. (Dahlhaus C., р. 1928) 331  
 Дарбес И. Ф. А. (Darbès J. F. A., 1747—1810) 345, 346, 348—352  
 Дарбу Г. (Darboux G., 1842—1917) 78  
 Даржансон М. П. (Д'Аржансон; D'Argen-son M. P., 1696—1764) 381  
 Дарси П. (D'Arcy P., 1725—1779) 185  
 Дашкова Е. Р. (1744—1810) 58, 490  
 Дедекинд Р. (Dedekind R., 1831—1916) 45, 151  
 Декарт Р. (Descartes R., 1596—1650) 17, 43, 45, 86, 87, 110, 140, 181, 267, 269, 295—299, 323, 362  
 Делакура (De la Croix, XVIII в.) 53, 59, 363  
 Делен И. Я. (Delen J. J. van, 1743—1786) 378  
 Делиль Ж. Н., или О. Н. (Delisle J. N., 1688—1768) 20, 25, 50, 91, 119, 252, 260—264, 266, 270—278  
 Делоне Б. Н. (1890—1980) 46  
 Делоне Ш. (Delaunay C. E., 1816—1872) 245  
 Демидов С. С. (р. 1942) 285, 293  
 Демин В. Г. (р. 1929) 255  
 Джеффрис Х. (Jeffreys H., р. 1891) 199, 207  
 Джурич Дж. (Jurin J., 1684—1750) 55  
 Дивиш П. (Diviš P., 1696—1765) 82, 91  
 Дидим Александрийский (ок. 65 до н. э. — ок. 10 н. э.) 326  
 Диксон Л. Ю. (Dickson L. E., 1874—1954) 133, 138  
 Динник А. Н. (1876—1950) 216, 227  
 Диофант (III в.) 139, 146, 147, 149, 152—155, 158—160, 162—165  
 Дирак П. (Dirac P. A. M., 1902—1984) 205  
 Дитрих И. (Dietrich J., ум. 1758) 91  
 Долгорукий В. С. (1717—1803) 93, 369, 381  
 Доллонд Дж. (Dollond J., 1706—1761) 33, 82, 91, 119, 315, 367, 368  
 Домашнев С. Г. (1743—1795) 58, 308, 317, 490  
 Дорту де Меран Ж. Ж. (Dortous de Mai-gan J. J., 1678—1771) 91, 266  
 Дорфман Я. Г. (1898—1974) 275, 297, 299, 303  
 Достоевский Ф. М. (1821—1881) 500  
 Дружинин Н. М. (1886—1986) 496  
 Дуров А. Л. (1864—1916) 504  
 Дюамель де Монсо А. Л. (Duhamel de Monceau H. L., 1700—1782) 91  
 Дюваль Ф. (Duval F., 1776—1854) 348, 352  
 Дюмон Э. (Dumont E., 1759—1829) 348  
 Дюринг И. (Düring I., р. 1903) 326, 331  
 Евклид (IV—III в. до н. э.) 103, 150  
 Екатерина I (1684—1727) 48, 59, 355, 356  
 Екатерина II (1729—1796) 33, 39, 294, 302, 307, 317, 348, 365, 369, 475, 478, 479, 503  
 Елизавета Петровна (1709—1762) 26, 474, 475  
 Ермолаева Н. С. 277  
 Ефрон И. А. (1847—1917) 457, 459  
 Ехлиц Х. Ф. — см. Эхлиц Х. Ф.  
 Жебылев Н. Г. 456  
 Жирар А. (Girard A., 1595—1632) 140  
 Жиркевич И. С. (1789—1848) 456  
 Жуковский В. А. (1783—1852) 492, 499  
 Зайончковский П. А. (1904—1983) 456, 458  
 Залеман К. Г. (Salemann C. G. H., 1849—1916) 63—66, 78  
 Зегнер И. А. (Segner J. A. von, 1704—1777) 31, 82, 91, 105, 115, 118, 173, 284, 304, 380, 476  
 Зееберг-Эльферфельдт Р. (Seeberg-Elver-feldt R., р. 1909) 460  
 Зигель К. Л. (Siegel C. L., 1896—1981) 249

- Зидт Г. (Siedt G., p. 1942) 438, 460  
 Золотарёв Е. И. (1847—1878) 45, 151  
 Зоммерфельд А. (Sommerfeld A., 1868—1951) 205  
 Зульцер И. Г. (Sulzer J. G., 1720—1779) 95, 97
- Иван V** (1666—1696) 48  
**Иван VI** (1740—1764) 26, 474, 499  
 Иверсен Ю. (Iversen J., 1823—1900) 460  
 Илличевский А. Д. (1798—1837) 499  
 Ильюшин А. А. (p. 1911) 220, 228  
 Имхоф-Эйлер К. (Imhof-Euler C., ум. ок. 1748) 472  
 Иноходцев П. Б. (1742—1806) 58, 309, 378  
 Иорт-Лоренцен Г. Р. (Hiort-Lorenzen H. R.) 459  
 Ишлинский А. Ю. (p. 1913) 3, 177, 208, 218, 220, 227, 228
- Кавендиш Г.** (Cavendish H., 1731—1810) 82  
**Кант И.** (Kant I., 1724—1804) 43, 81, 86, 87, 91  
**Кантемир А. Д.** (1708—1744) 261  
**Кантор Г.** (Cantor G., 1845—1918) 45  
 ал-Караджи Мухаммад (ум. ок. 1030) 139  
**Кардано Дж.** (Cardano G., 1501—1576) 105  
**Карман Т.** (Kármán Th. von, 1881—1963) 220, 223  
**Карнаухов М. М.** (1892—1955) 456  
**Карно Л.** (Carnot L. N. M., 1753—1823) 203  
**Карпелан Т.** (Carpelan T., 1867—1960) 459  
**Кассини Ж.** (Cassini J., 1677—1756) 247, 263, 275  
**Кастильон Ж.** (Castill(i)on J., 1708—1791) 91, 97, 99  
**Каучикас А. П.** 164  
**Квисторп Б.** (Quistorp B., XIX в.) 460  
**Кеплер И.** (Kepler J., 1571—1630) 241, 262, 269, 270  
**Кернер М.** (Kerner M., 1902—1943) 199, 206  
**Кес-Эйлер Б.** (Kaes-Euler B., p. 1510) 470  
**Кестнер А. Г.** (Kästner A. G., 1719—1800) 91  
**Кёлер Д.** (Köhler D., XVIII в.) 89, 97—99, 101  
**Кёниг С.** (König J. S., 1712—1757) 88, 89, 91, 185, 186, 205, 368  
**Кёниг Э.** (König E., 1698—1752) 380  
**Кёфф Дж.** (Cuff J., XVIII в.) 315  
**Кипренский О. А.** (1782—1836) 348, 352  
**Кирнбергер И.** (Kirnberger J. Ph., 1721—1783) 330  
**Киро С. Н.** (p. 1926) 457  
**Кирсанов В. С.** (p. 1936) 3, 43, 303  
**Кирх Х.** (Kirch Ch., 1694—1740) 274  
**Кирхгоф Г.** (Kirchhoff G. R., 1824—1887) 212, 218, 226  
**Кирхер А.** (Kircher A., 1602—1680) 339, 340, 344
- Кис И.** (Kies J., 1713—1781) 24, 85, 274  
**Киселев А. А.** (p. 1916) 127, 129, 131, 133, 137  
**Кладо Т. Н.** (1889—1972) 58, 59, 131, 276  
**Клейн Ф.** (Klein F., 1849—1925) 196  
**Клейст Г. Э.** (Kleist G. E. von, ум. 1748) 81  
**Клеро А. К.** (Clairaut A. C., 1713—1765) 4, 15, 22, 24, 32, 45, 91, 102, 116, 170, 172, 175, 243, 259, 276—281, 284, 286, 293  
**Клюге Ю.** 42  
**Клюгель Г. С.** (Klügel G. S., 1739—1812) 374, 382  
**Кнобельсдорф Г.** (Knobelsdorff G. von, 1699—1753) 83  
**Кноблех Э.** (Knobloch E., p. 1943) 102  
**Кновельс** — см. Ноулз Ч.  
**Кнутцен М.** (Knutzen M., 1713—1751) 91  
**Князев Г. А.** (1887—1969) 131  
**Кобольд Г.** (Kobold H., 1858—1942) 67  
**Ковалевский Г.** (Kowalewski G., 1876—1950) 79  
**Козельский Я. П.** (ок. 1728—1794) 302, 303  
**Койре А.** (Koyré A., 1892—1964) 298, 303  
**Коллинс Э. Д.** (Collins E., 1791—1840) 400  
**Колмогоров А. Н.** (1903—1987) 249, 287, 293  
**Кондаков С. Н.** 457  
**Кондорсе М. Ж. А. Н.** (Condorset M. J. A. N. de, 1743—1794) 24, 69  
**Копелевич Ю. Х.** (p. 1921) 3, 47, 58, 59, 80, 96, 103, 128, 131, 267, 270, 276, 277, 293, 332, 343, 457, 497  
**Коперник Н.** (Copernicus N., 1473—1543) 270, 271  
**Кортольт Х.** (Kortholt Ch., 1709—1751) 332, 343  
**Корф И. А.** (Korff J. A. von, 1697—1766) 49, 51—53, 59, 272  
**Кострюков К. И.** 128  
**Котельников С. К.** (1723—1806) 12, 34, 55, 56, 78, 302, 307, 369, 378, 475  
**Коутс Р.** (Cotes R., 1682—1716) 15, 110  
**Коуэлл Ф. Х.** (Cowell Ph. H., 1870—1949) 251  
**Кочин Н. Е.** (1901—1944) 225  
**Коши О. Л.** (Cauchy A. L., 1789—1857) 15, 36, 41, 45, 176, 177, 196, 197, 206, 287, 292  
**Кракау А. И.** (1817—1888) 493  
**Краммер Г.** (Cramer G., 1704—1752) 15, 22, 91  
**Краснов П. Н.** 457  
**Кратценштейн Х. Г.** (Kratzenstein Ch. G., 1723—1795) 55, 91  
**Краус А.** (Kraus A.) 101  
**Крафт Г. В.** (Kraf(f)t G. W., 1701—1754) 20, 54, 91, 260—262, 264—269, 272, 274, 275, 499  
**Крафт Л. Ю., или В. Л.** (Kraf(f)t W. L., 1743—1814) 39, 43, 58, 246, 253, 307—309, 317, 370, 373, 378, 390

- Крацер А. (Krazer A., 1858—1926) 65, 67, 68, 70, 71, 73  
Крелле А. Л. (Crelle A. L., 1780—1855) 61  
Крёбер Г. (Kröber G., p. 1933) 86  
Кронекер Л. (Kronecker L., 1823—1891) 144, 151  
Крутикова М. В. (1889—1974) 58, 131  
Крылов А. Н. (1863—1945) 6, 44, 70, 75—77, 80, 205, 217, 227, 236, 256, 258, 281  
Крылов Н. М. (1879—1955) 225  
Кулибин И. П. (1735—1818) 7, 33, 58, 304—320  
Кулибин С. И. (XVIII—XIX вв.) 318  
Куммер Э. Э. (Kummer E. E., 1810—1893) 151  
Курганов Н. Г. (1722—1796) 79  
Куртиврон Г. (Courtivron G. de, 1715—1785) 185  
Кутузов М. И. (1745—1813) 480  
Кэпон Р. С. (Capon R. S) 199, 207  
Кюн Г. (Kühn H., 1690—1769) 24, 53, 91  
Кютнер С. Г. (Kütner S. G., 1747—1828) 348, 349, 351
- Ла Кроз М. (La Croze M. de, 1661—1739) 272  
Ла Тур М. К. (La Tour M. Q. de, 1704—1788) 282  
Лаврентьев М. А. (1900—1980) 218, 227  
Лавриненко Т. А. 148, 152, 153, 164, 165, 218, 227  
Лавуазье А. Л. (Lavoisier A. L. de, 1743—1794) 81  
Лагранж Ж. Л. (Lagrange J. L. de, 1736—1813) 4, 11, 13, 15, 22, 34, 35, 37, 39, 43—45, 60, 102, 108—110, 117, 136, 142, 143, 145, 149, 152, 168, 169, 173, 174, 176, 179, 180, 182—184, 186—191, 198—207, 209, 217, 227, 242, 243, 245, 247, 249, 250, 277, 278, 280, 285—293, 361, 367, 382  
Лакайль Н. Л. (La Caille N. L. de, 1713—1762) 91, 252  
Лаланд Ж. Ж. (Lalan de J. J., 1732—1807) 24, 91  
Ламберт И. Г. (Lambert J. H., 1728—1777) 15, 22, 82, 90, 93—102, 109, 114, 242, 255, 278, 300  
Ланге И. И. (Lange J. J., 1699—1765) 91  
Ланге Ф. Г. (Lange F. G.) 58  
Ланцос К. (Lanczos C., p. 1893) 206  
Ланьи Т. Ф. (Lagny Th. F. de, 1660—1734) 110  
Лаплас П. С. (Laplace P. S. de, 1749—1827) 11, 24, 38, 41, 81, 143, 226, 238, 243, 245, 247, 249, 251, 259, 290  
Лебедев П. Н. (1866—1912) 240  
Леверье У. (Le Verrier U., 1811—1877) 245  
Левшин Д. М. 457
- Лежандр А. М. (Le Gendre A. M., 1752—1833) 152, 165  
Лежен-Дирихле П. Г. (Lejeune Dirichlet P. G., 1805—1859) 151  
Лейбензон Л. С. (1879—1951) 218, 227  
Лейбниц Г. В. (Leibniz G. W. von, 1646—1716) 6, 16, 23, 30, 34, 35, 43—45, 85—88, 90, 95, 96, 103, 104, 116, 181, 182, 186, 205, 222, 282, 283, 287, 289, 301, 323, 328, 332, 334, 335, 340, 343, 356, 363, 366, 368, 375, 474  
Лейтман И. Г. (Leutmann J. G., 1667—1736) 265  
Лексель А. И. (Lexell A. J., 1740—1784) 12, 39, 43, 58, 101, 239, 240, 246, 253, 292, 307—309, 317, 373, 375, 378, 390  
Леман И. Г. (Lehman J. G., 1719—1767) 55  
Лемоннье П. Ш. (Le Monnier P. Ch., 1715—1799) 91  
Ленин В. И. (1870—1924) 75  
Лепёхин И. И. (1740—1802) 390  
Лесаж Ж. Л. (Le Sage G. L., 1724—1803) 24, 91  
Лесмент Л. (Leesment L.) 460  
Лёвенштерн К. Д. (Löwenstern C. D. von, 1726—1783) 345  
Лёвенштерн К. О. (Löwenstern C. O. von, p. 1755) 345  
Ли С. (Lie S., 1842—1899) 180, 205, 251, 257  
Либерт И. Х. (Libert J. Ch., ум. 1757) 274  
Лидов М. Л. (p. 1926) 258  
Линген Б. (Lingen B.) 459  
Линней К. (Linné C. von, 1707—1778) 81  
Линус Ф. (Linus F., 1595—1675) 103  
Лобачевский Н. И. (1792—1856) 45  
Лобкович Ж. К. (Lobkowitz J. C. de, 1606—1682) 323  
Ловиц Г. М. (Lowitz G. M., 1722—1774) 24, 34, 91  
Ломоносов М. В. (1711—1765) 12, 14, 15, 25, 33, 41, 55, 59, 65, 81, 82, 91, 120, 125, 128, 301—303, 380, 476  
Лопиталь Г. Ф. А. (L'Hospital G. F. A. de, 1661—1704) 182  
Лоренц Г. (Lorentz H. A., 1853—1928) 196  
Лоу Д. (Law J., 1671—1729) 269, 270  
Лош Р. (Loche R.) 348  
Лоэн И. М. (Loen J. M. von, 1694—1776) 377  
Лувилль Ж. Е. (Louville J. E. de, 1671—1732) 262, 263  
Лузин Н. Н. (1883—1950) 45  
Лукина Т. А. (p. 1917) 58, 131  
Лундберг Е. Г. 77, 80  
Лысенко В. И. (p. 1925) 320, 457  
Людовик XV (Louis XV, 1710—1774) 270  
Ляв О. (Love A. E. H., 1863—1940) 217, 227  
Ляпунов А. М. (1857—1918) 43, 62—68, 70—76, 79, 80, 130, 243, 249, 280

- Магницкий Л. Ф. (1669—1739) 5  
 Майер И. Т. (Mayer J. T., 1723—1762) 32, 82, 91, 245, 246, 252, 372  
 Майер Ф. Х. (Mayer F. Ch., 1697—1729) 19, 260—262, 265—267, 275  
 Майков П. М. 457  
 Майстрова А. Л. 152  
 Макгир Дж. Э. (McGuire J. E.) 303  
 Маккулаг Дж. (MacCullagh J., 1809—1847) 301  
 Маклорен К. (Maclaurin C., 1698—1746) 15, 110, 172, 231, 239, 359  
 Максвелл Дж. К. (Maxwell J. C., 1831—1879) 196, 301  
 Малашенко С. В. (р. 1908) 220, 227  
 Малыгин С. Г. (ум. 1764) 52, 53, 59  
 Мандрыка А. П. (1918—1986) 233, 236  
 Марграф А. С. (Marggraf A. S., 1709—1782) 82  
 Мардефельд А. (Mardefeld A. von, 1691—1748) 360  
 Мариони Дж. Дж., или И. Я. (Marinoni G. G., или J. J., 1676—1755) 24, 53, 91  
 Марков А. А. (1856—1922) 62—64, 66—68, 70, 73—76, 130  
 Марпург Ф. В. (Marpurg F. W., 1718—1795) 342  
 Марчук Г. И. (р. 1925) 3. 8  
 Маскерони Л. (Mascheroni L., 1750—1800) 74  
 Матвиевская Г. П. (р. 1930) 3, 80, 102, 103, 121, 122, 127—131, 137, 138  
 Маттесон И. (Mattheson J., 1681—1764) 330, 332  
 Мельников И. Г. (1916—1979) 58, 127, 129, 131, 133, 164  
 Мериан И. Б. (Merian J. B., 1723—1807) 95, 97  
 Мериан С. (Merian M. S., 1647—1717) 377  
 Меркатор Г. (Кремер; Mercator, Kremmer G., 1512—1594) 119  
 Мерсенн М. (Mersenne M., 1588—1648) 323  
 Мизес Р. (Mises R. von, 1883—1953) 216, 227  
 Миллер Г. Ф., или Ф. И. (Müller G. F., 1705—1783) 24, 54, 83—85, 91, 92, 264, 267—269, 272, 275  
 Милорадович Г. А. (1839—1905) 457  
 Миних Б. Х., или Х. А. (Mün(n)ich B. Ch., 1683—1767) 474  
 Минченко Л. С. 127, 131, 275, 302  
 Митропольский Ю. А. (р. 1917) 225  
 Михайлов Г. К. (р. 1929) 3, 4, 58, 59, 80, 102, 121, 125, 127, 128, 131, 137, 166, 333, 343, 383, 497, 498  
 Михайловский А. И. (р. 1851) 457  
 Михаэлидес С. (Michaelides S.) 332  
 Мицлер Л. (Mi(t)zler L., 1711—1778) 330, 332, 343  
 Мищенко Е. Ф. (р. 1922) 207  
 Модзалевская Т. Л. 498  
 Модзалевский Б. Л. (1874—1928) 66, 67, 78, 79, 124, 128, 385  
 Модзалевский Л. Б. (1902—1948) 128, 385, 461, 468, 498  
 Моор Ш. (Moor Ch.) 76  
 Мопертюи П. Л. (Maupertuis P. L. de, 1698—1759) 24, 28, 30, 37, 38, 85—89, 91, 94, 184—186, 189, 206, 252, 277, 278, 282, 286, 288, 289, 368, 381  
 Морделл Л. Дж. (Mordell L. J., 1888—1972) 146  
 Моррис Г. (Morris G., ум. до 1772) 91  
 Мортимер К. (Mortimer C., ум. 1752) 91  
 Муавр А. (Moivre A. de, 1667—1754) 15, 110, 356, 381  
 Муральт И. (Muralt J., 1780—1850) 460  
 Муральт Э. (Muralt E., 1808—1895) 460  
 Мушенбрук И. (Musschenbroek P. van, 1692—1761) 81  
 Мюнхсельхаус Б. (Münxelhaus B.) 332  
 Наглер Г. К. (Nagler G. K., 1801—1866) 352  
 Наполеон I (Napoléon I, 1769—1821) 500  
 Нартов А. К. (1693—1756) 53  
 Неандер В. (Neander W., 1891—1968) 460  
 Невская Н. И. (р. 1931) 4, 50, 59, 127, 131, 170, 254, 259, 274, 275  
 Нейман В. (Neumann W., 1849—1919) 352  
 Неймарк Ю. И. (р. 1920) 199, 207  
 Нерон (Nero, 37—68 н. э.) 273  
 Нёрбель И. Я. (Nörbel J. J., 1705—1758) 472  
 Николаи А. Л. (1737—1820) 490  
 Николаи Б. Л. (р. 1887) 220  
 Николаи Е. Л. (1880—1950) 213, 216, 219, 220, 226  
 Николай I (1796—1855) 492  
 Нистрем К. (XIX в.) 457  
 Новожилов В. В. (1910—1987) 220, 227  
 Новоселов В. С. (р. 1926) 199, 207  
 Новосильцов Н. Н. (1762—1838) 490  
 Ноде Ф. (Naudé Ph., 1684—1745) 24  
 Ноулз Ч. (Knowles Ch., ум. 1777) 364  
 Ньюком С. (Newcomb S., 1835—1909) 245  
 Ньютон И. (Newton I., 1643—1727) 6, 10, 14, 17, 23, 31, 32, 43—45, 62, 86, 87, 104, 119, 154, 166, 167, 169, 170, 172, 179, 180, 182, 205, 229—232, 234—236, 241—243, 255, 262, 263, 268—271, 273, 289, 295—298, 300—302, 315, 356, 357, 362, 366, 367, 375  
 Оболенский В. С. (Obolensky W., р. 1932) 472  
 Образцов И. Ф. (р. 1920) 3, 11, 218, 227  
 Ожигова Е. П. (р. 1923) 3, 60, 78, 103, 124, 127, 129—131, 137, 138, 310, 320, 457, 497  
 Озанам Ж. (Ozanam J., 1640—1717) 104  
 Ольденбург С. Ф. (1863—1934) 68, 76, 79  
 Орлов В. Г. (1743—1831) 39, 58, 375, 490  
 Осипов И. П. (1854—1919) 457  
 Остроградский М. В. (1801—1862) 45, 60, 61, 123, 191, 197, 206  
 Оттен К. Н. (р. 1926) 400

- Отто Г. (Otto G., 1843—1917) 459  
 Отто И. К. Ф. (Otto J. C. F., XIX в.) 235
- Павлов В. Е. 497  
 Павлов И. П. (1849—1936) 504  
 Павлова Г. Е. (р. 1925) 352  
 Паллас П. С. (Pallas P. S., 1741—1811) 317, 390  
 Пановко Я. Г. (р. 1913) 227  
 Папп Александрийский (III в. н. э.) 105  
 Парс Л. А. (Pars L. A.) 199, 207  
 Паршин А. Н. (р. 1942) 146  
 Паскаль В. (Pascal V., 1623—1662) 31  
 Пауль О. (Paul O., 1836—1898) 344  
 Паульсен К. И. (Paulsen K. J., р. 1910) 460  
 Пекарский П. П. (1827—1872) 59, 260, 262, 267, 275, 302, 352, 505  
 Пелль Дж. (Pell J., 1610—1685) 104, 133, 292  
 Пель А. Х. (XIX в.) 493  
 Пельсенеер Ж. (Pelseneer J., 1903—1985) 332  
 Передерий В. И. 16  
 Перроне Ж. Р. (Perronet J. R., 1708—1794) 313  
 Петр I (1672—1725) 18, 25, 26, 48, 49, 355, 377, 473, 474, 498  
 Петр II (1715—1730) 48  
 Петроний (Gaius Petronius Arbiter, ум. 66 н.э.) 273  
 Пецольд (Pezold, XVIII в.) 91  
 Пирсон К. (Pearson K., 1857—1936) 217, 227  
 Пифагор (ок. 582—500 до н.э.) 332, 339, 358  
 Планк М. (Planck M., 1858—1947) 63  
 Погорелов А. В. (р. 1919) 220, 228  
 Погребыская Е. И. (р. 1939) 275  
 Полак Л. С. (р. 1909) 206  
 Полени Дж. (Poleni G., 1683—1761) 24, 53, 91  
 Поленов А. Л. (р. 1871) 503—505  
 Поляхов Н. Н. (1906—1987) 3, 229  
 Понтрягин Л. С. (р. 1908) 204, 205, 207  
 Попов А. С. (1859—1906) 456, 487, 497  
 Попов Е. П. (р. 1914) 213, 226  
 Попов Н. И. (1720—1782) 55  
 Порфирий (ок. 233—304) 324, 326, 331  
 Поссе К. А. (1847—1928) 62, 78  
 Потемкин Г. А. (1739—1791) 318  
 Прандтль Л. (Prandtl L., 1875—1953) 218, 227  
 Прасковья Федоровна (1664—1723) 48  
 Прокопович Ф. (1681—1736) 271  
 Прохоров Ю. В. (р. 1929) 3  
 Птолемей Клавдий (ок. 90—160) 119, 181, 324—328, 330—332, 339  
 Пуанкаре А. (Poincaré H., 1854—1912) 45, 146, 148, 152, 162, 165, 196, 205, 243, 249, 280  
 Пуассон С. Д. (Poisson S. D., 1781—1840) 45, 173
- Пушкин А. С. (1799—1837) 481, 484, 499, 505
- Работнов Ю. Н. (1914—1985) 220, 228  
 Радищев А. Н. (1749—1802) 302, 303  
 Разумовский А. Г. (1709—1771) 475  
 Разумовский К. Г. (1728—1803) 39, 475, 490  
 Райков Б. Е. (1880—1966) 276  
 Райт М. (Raith M.) 497  
 Рамо Ж. Ф. (Rameau J. Ph., 1683—1764) 321, 331, 332, 340  
 Рамшпек И. К. (Ramspeck J. Ch., 1722—1797) 91  
 Раскин Н. М. (1906—1986) 58, 131, 304, 320  
 Рашетт Ж. Д. (Rachette J. D., 1744—1809) 41, 352, 384  
 Редер В. (Räder W., 1878—1957) 459  
 Рекк-Эйлер Е. (Reck-Euler E., XVI—XVII в.) 470  
 Ренальдини К. (Renaldini C., 1615—1698) 115  
 Рено Б. (Renau B., 1652—1719) 363, 380  
 Ржевский А. А. (1737—1804) 305  
 Рибас И. М. (Ribas J. de, 1749—1800) 307, 313  
 Ригинер П. (Ryhiner P., 1692—1771) 379, 380  
 Ридель К. Т. (Riedel C. T., р. 1780) 348  
 Ридер Г. (Rieder G.) 459  
 Риккати Я. (Riccati J., 1676—1754) 113  
 Риман Б. (Riemann B., 1826—1866) 12, 15, 41, 45, 135, 283  
 Риман Г. (Riemann H., 1849—1919) 330, 332, 343  
 Рингсгевант-Эйлер У. (Ringsgewandt-Euler U., 1573—1611) 470  
 Рихман Г. В. (Richmann G. W., 1711—1753) 55  
 Робинс Б. (Robins B., 1707—1751) 31, 175, 233, 234, 236, 361  
 Ровинский Д. А. (1824—1895) 348, 352  
 Рогожникова Р. П. 456  
 Розен (Rosen von, XVIII в.) 345  
 Розенфельд Л. (Rosenfeld L., 1904—1974) 301, 303  
 Россет-Смирнова А. О. (1809—1882) 484  
 Рудио Ф. (Rudio F., 1856—1929) 64—75, 77, 79, 80, 124, 128, 130, 379—382  
 Рудольф Х. (Rudolff Ch., ок. 1500—1545) 16  
 Румовский С. Я. (1734—1812) 12, 34, 43, 55, 56, 294, 298, 302, 307, 308, 369, 371, 378, 379, 475  
 Румянцев В. В. (р. 1921) 3, 174, 180, 207  
 Руссо Ж. Ж. (Rousseau J. J., 1712—1778) 323  
 Рыкачев М. А. (1841—1919) 64  
 Рюйш Ф. (Ruysch F., 1638—1731) 263
- Салуццо Дж. А. (Saluzzo G. A., 1734—1810) 24  
 Сапрыкина Н. Г. 352

- Саразин Ф. (Sarazin F.,) 76, 77, 80  
 Свиньин П. П. (1787—1839) 319, 320  
 Сегнер И. А. — см. Зегнер И. А.  
 Седов Л. И. (р. 1907) 3, 166, 202, 203, 207  
 Селезнев И. Я. (XIX в.) 457  
 Сен Венсан Григорий (Gregorius a St. Vincentio, 1584—1667) 115  
 Серр Ж. (Serre J. A., р. 1704) 323  
 Сиаччи А. Ф. (Siacci A. F., 1839—1907) 235  
 Сиверс П. И. (Sivers P., ум. 1740) 356  
 Скальковский А. А. (1808—1899) 458  
 Славутин Е. И. (р. 1948) 164  
 Слюсарев Г. Г. (р. 1896) 275  
 Смирнов В. И. (1887—1974) 58, 125, 127, 128, 131, 137  
 Смит Р. (Smith R., 1689—1768) 330, 332  
 Снеллиус В. (Снелль; Snellius W., 1580—1626) 181  
 Соболев С. Л. (р. 1908) 36, 285  
 Соболев С. Л. (1893—1960) 315, 316, 320  
 Совер Ж. (Sauveur J., 1653—1716) 340  
 Соколов В. (XVIII в.) 25  
 Сонин Н. Я. (1849—1915) 64—66, 79, 130  
 София-Шарлотта Бранденбург-Шведтская (XVIII в.) 294  
 Софронов М. (1729—1760) 34, 55, 475  
 Сперанский М. М. (1772—1839) 302, 303  
 Специали П. (Speziali P., р. 1913) 101  
 Станислав Август (Stanisław August, 1732—1798) 24, 370  
 Стевин С. (Stevin S., 1548—1620) 31  
 Стеклов В. А. (1864—1926) 12, 45, 73, 75—77, 79  
 Стеффенсен И. Ф. (Steffensen J. F., 1873—1961) 257  
 Стирлинг Дж. (Stirling J., 1692—1770) 15, 22, 53, 108  
 Стокс Дж. Г. (Stokes G. G., 1819—1903) 8  
 Струве В. Я. (Struve W., 1793—1864) 61, 491  
 Струве Г. В. (Struve H., 1822—1908) 400  
 Струве О. В. (Struve O., 1819—1905) 460  
 Субботин М. Ф. (1893—1966) 237, 241, 249, 252, 254, 258, 259, 275, 461  
 Сумбатов А. С. (р. 1946) 207  
 Суслов Г. К. (1857—1935) 198, 200, 206  
 Сухомлинов М. И. (1828—1901) 271  
 Тарталья Н. (Tartaglia N., 1499—1557) 233, 234  
 Тартини Дж. (Tartini G., 1692—1770) 323  
 Татон Р. (Taton R., р. 1915) 277, 287, 293  
 Тейлор Б. (Taylor B., 1685—1731) 257, 284, 356  
 Телусон И. (Thellusson J., 1704—1734) 380  
 Темченко М. Е. (р. 1925) 220, 227  
 Теплов Г. Н. (1717—1779) 28  
 Тизенгаузен В. Г. (1825—1902) 504  
 Тизенгаузен В. К. (1781—1857) 500  
 Тиле Р. (Thiele R.) 88, 344  
 Тиме У. (Thieme U., 1865—1922) 352  
 Тимошенко С. П. (1878—1972) 217, 218, 225, 227  
 Титов Н. А. (XIX в.) 458  
 Ткешелашвили И. С. (р. 1864) 458  
 Тоальдо Дж. (Toaldo G., 1719—1797) 24  
 Тодхантер А. (Todhunter I., 1820—1884) 217, 227  
 Томсон У. (Кельвин; Thomson W., 1824—1907) 301  
 Тон А. А. (1790—1858) 493  
 Тон К. А. (1794—1881) 493  
 Торелли Дж. (Torelli G., 1721—1781) 91  
 Торричелли Э. (Torricelli E., 1608—1647) 31, 234  
 Тредер Г. Ю. (Treder H. J., р. 1928) 86, 88  
 Третьаковский В. К. (1703—1768) 272, 273  
 Третлер А. А. 77, 80  
 Трусделл К. (Truesdell C., р. 1919) 169, 174, 176, 179, 222, 226, 293  
 Тьеболт Д. (Thiebault D., 1733—1807) 101  
 Тюрго А. Р. Ж. (Turgot A. R. J., 1727—1781) 361, 364  
 Уваров С. С. (1786—1855) 61, 490  
 Уиттекер Э. Т. (Whittaker E. T., 1873—1956) 67, 206  
 Уолмсли Ч. (Walmesley Ch., 1722—1797) 91  
 Урусова С. А. (1806—1889) 499  
 Успенский Я. В. (1883—1947) 77, 80  
 Фабер Г. (Faber G., 1877—1966) 73  
 Фабрикант В. А. (р. 1907) 170, 179  
 Фаддеев Л. Д. (р. 1934) 3, 12  
 Фальтингс Г. (Faltings G.) 146, 152  
 Фаминцын А. С. (1835—1918) 63, 78  
 Фаньяно Дж. Ч. (Fagnano G. C., 1682—1766) 62  
 Фарадей М. (Faraday M., 1791—1867) 300, 301  
 Фарбах В. (Fahrbach W.) 459  
 Фатюхин И. Н. (р. 1955) 351  
 Федоров А. С. 458  
 Федоровский Н. М. (1886—1956) 77, 80  
 Фельман Э. (Fellmann E. A., р. 1927) 80, 302  
 Феодосьев В. И. (р. 1916) 220, 228  
 Ферма П. (Fermat P. de, 1601—1665) 35, 45, 104, 133, 140, 146, 147, 149, 151—153, 155, 158—165, 181, 191, 205, 280, 356  
 Ферран Ж. (Ferrand J.) 460  
 Фесслер И. (Fessler I., 1756—1839) 345  
 Фетис Ф. Ж. (Fétis F. J., 1784—1871) 330, 332, 344  
 Фехнер А. В. (Fechner A. W., р. 1825) 459  
 Филипп II Орлеанский (Philippe d'Orléans, 1674—1723) 270  
 Фирсов Н. Н. 459  
 Фламани-Миоцци (Flamani-Minozzi, XVIII в.) 313



- Фогель М. (Vogel M., p. 1923) 332, 344  
 Фойгт К. К. (1808—1873) 459  
 Фонсене Ф. (Fonsenex F. Daviet de, 1734—1799) 143  
 Фонтен де Бертен А. (Fontaine des Bertins A., 1704—1771) 102, 116, 279  
 Фонтенель Б. (Fontenelle B. de, 1657—1757) 45  
 Формей С. (Formey J. H. S., 1711—1797) 24, 90, 461  
 Франклин Б. (Franklin B., 1706—1790) 82  
 Франц И. М. (Franz J. M., 1700—1761) 91  
 Фрейман О. Р. (p. 1849) 459  
 Френель О. (Fresnel A. J., 1788—1827) 196, 300  
 Френикль Б. (Frénicle de Bessy B., 1605—1675) 114  
 Фридрих I (Friedrich I, 1657—1713) 96  
 Фридрих II (Friedrich II, 1712—1786) 24, 26, 30, 47, 54, 82—86, 89, 91, 94, 97, 99, 101, 185, 186, 237, 274, 277, 282, 286, 291, 294, 342, 360, 365, 368, 474, 475, 479  
 Фридрих Вильгельм I (Friedrich Wilhelm I, 1688—1740) 30, 84  
 Фридрих Вильгельм II (Friedrich Wilhelm II, 1744—1797) 345  
 Фризендорф Э. (Friesendorff E., 1847—1934) 460  
 Фризи П. (Frisi P., 1728—1784) 91, 288  
 Фрикер Ф. (Fricker F., p. 1939) 80  
 Фрицше О. Ф. (Fritzsche O. F., 1812—1896) 343  
 Фрицше Ю. Ф. (1808—1871) 491  
 Фробениус Ф. Г. (Frobenius F. G., 1849—1917) 63, 144  
 Фурье Ж. (Fourier J. B. J., 1768—1830) 15, 36, 41, 44, 45, 219, 255, 285  
 Фус В. Е. (1840—1915) 65  
 Фус Н. И. (Fuss N., 1755—1826) 4, 12, 32, 33, 39, 41, 46, 58, 60, 69, 122, 130, 302, 307—310, 313, 314, 317, 320, 333, 343, 352—354, 378—383, 390, 394, 457, 481  
 Фус Н. Н. (Fuss N., 1810—1867) 58, 60, 62, 103  
 Фус П. Н. (Fuss P. N., 1798—1855) 39, 41, 58, 60—62, 68, 71, 74, 78, 79, 90, 103, 123, 128, 130, 383, 395, 459, 460  
 Фуфаев Н. А. (p. 1920) 199, 207  
 Фютер Р. (Fueter R., 1880—1950) 74—76  
 Хаазе Р. (Haase R., p. 1920) 343  
 Хаген И. Г. (Hagen J. G., 1847—1930) 66, 67, 79  
 Хандман Э. (Handmann E., 1718—1781) 352, 392  
 Хартивег Ф. Г. (Hartweg F. G.) 101  
 ал-Хасан ибн ал-Хайсам (965—1039) 115  
 Хельд Г. (Held H.) 459  
 Хенцельт О. (Hentzelt O.) 459  
 Хилл Дж. У. (Hill G. W., 1838—1914) 170, 244, 254, 256  
 Холшевников К. В. (p. 1939) 50, 170, 254, 274  
 Хофф Н. (Hoff N. J., p. 1906) 220, 228  
 Хох-Эйлер А. (Hoch-Euler A., 1606—1673) 470  
 Хугельшоппер-Эйлер А. М. (Hugelschopper-Euler A. M., ум. 1750) 472  
 Цвингер И. Р. (Zwinger J. R., 1692—1777) 379  
 Цейгер И. Э. (Zeiber J. E., 1720—1784) 55  
 Цельсий А. (Celsius A., 1701—1744) 81, 266  
 Церлюк-Аскадская С. С. (p. 1950) 333  
 Цехановецкий В. П. (XIX в.) 459  
 Чандлер С. К. (Chandler S. C., 1846—1913) 257  
 Чаплыгин С. А. (1869—1942) 198, 206  
 Чарторыйский А. К. (Czartoryski A. K., 1734—1823) 370  
 Чебышёв П. Л. (1821—1894) 13, 45, 46, 62, 78, 123, 130  
 Челомей В. Н. (1914—1984) 178, 225, 228  
 Ченакал В. Л. (1914—1977) 320  
 Черейский Л. А. 459, 505  
 Черепнин Н. П. 459  
 Черная А. В. (1821—1898) 402  
 Черная А. Н. (1901—1983) 460  
 Чернов С. Н. (1887—1942) 459, 497  
 Четаев Н. Г. (1902—1959) 196, 199, 203, 204, 206, 207  
 Чирнгауз Э. В. (Tschirnhaus E. W. von, 1651—1708) 145, 356  
 Шайбе И. (Scheibe J., 1708—1776) 330, 332  
 Шапошникова Ю. П. (ум. 1942) 504  
 Шатле Э. дю (Châtelet G. E. du, 1706—1749) 24, 91  
 Шаховской Д. М. (Schakhovskoy D.) 461  
 Шварц Г. А. (Schwarz H. A., 1843—1921) 63  
 Шварц Л. (Schwartz L., p. 1915) 36, 285  
 Шварценбах (Schwarzenbach, XVIII в.) 311  
 Швендеман Э. (Schwendemann E.) 461  
 Шевалье Л. (Chevalier L.) 343  
 Шерсневский И. Г. (XVIII в.) 314, 316  
 Шлютер А. (Schlüter A., 1664—1714) 84  
 Шнель-Эйлер К. (Schnell-Euler C., 1534—1584) 470  
 Шорт Дж. (Short J., 1710—1768) 91  
 Шоттки Ф. Г. (Schottky F. H., 1851—1935) 63  
 Шошо (Chauchot, ум. 1755) 118  
 Шпайзер А. (Speiser A., 1885—1970) 75  
 Шпайзер Д. (Speiser D., p. 1926) 294, 302, 303  
 Шпиндлер М. (Spindler M., p. 1894) 101  
 Шписс О. (Spiess O., 1878—1966) 101, 341, 344  
 Шрёдингер Э. (Schrödinger E., 1887—1961) 205

- Шрётер К. (Schröter C.) 128  
 Штакеншнейдер А. И. (1802—1865) 493  
 Штафенхаген Г. (Stavenhagen H.) 459  
 Штеелин Б. (Staehelin B., 1695—1750) 379, 380  
 Штеккель П. (Stäckel P., 1862—1919) 65—71, 77, 78, 128, 460  
 Штелин Я. Я. (Stählin J. von, 1709—1785) 41, 56, 122, 499  
 Штида В. (Stieda W., 1852—1933) 101, 460  
 Штифель М. (Stifel M., ок. 1486—1567) 16  
 Штриггер И. М., или И. Г. (Стриттер, Stritter J. G., 1740—1801) 275  
 Штумпф К. (Stumpf C., 1848—1936) 327, 330, 332  
 Шуберт Ф. И., или Ф. Т. (Schubert F. Th., 1758—1825) 12  
 Шумахер И. Д. (Schumacher J. D., 1690—1761) 48, 49, 52, 54, 88, 98, 267, 269, 274  
 Шюте 77!
- Эйлер А. А. (1913—1987) 4, 14, 468, 498, 501  
 Эйлер-Генгенбах А. М. (Euler-Gengenbach A. M., 1708—1778) 471  
 Эйлер А. Х. (1779—1849) 395, 459  
 Эйлер Г. Г. (Euler H. G., или J., 1573—1663) 383, 470  
 Эйлер И. А. (1734—1800), 26, 34, 38—40, 43, 56, 58, 69, 90, 101, 246, 253, 264, 275, 277, 290, 307, 308, 317, 373, 378, 382, 383, 385, 390, 392, 461, 468, 469  
 Эйлер И. Г. (Euler J. H., 1719—1750) 26, 471, 472  
 Эйлер К. (Euler C., 1740—1790) 26, 40  
 Эйлер К. (Euler K., 1877—1960) 383, 384, 459, 505  
 Эйлер Л. П. (1874—1960) 459  
 Эйлер-Нёрбель М. М. (Euler-Nörbel M. M., 1711—1799) 471, 472  
 Эйлер Н. Н. (1916—1984) 13  
 Эйлер П. I (Euler P., 1600—1673) 470  
 Эйлер П. II (Euler P., p. 1635) 471  
 Эйлер П. III (Euler P., 1670—1745) 353, 471  
 Эйлер П. (Euler P., 1654—1731) 471  
 Эйлер Х. (1743—1808) 38, 39, 41  
 Эйлер-Хельпин Х. (Euler-Chelpin H., 1873—1964) 384
- Эйлер-Шёльпин Г. (Euler-Schölpin H., 1510—1568) 470  
 Эйлер-Шёльпин Г. (Euler-Schölpin G., или J., 1532—1598) 470  
 Эйнштейн А. (Einstein A., 1879—1955), 88, 205  
 Эйхгорн К. (Eichhorn C.) 459  
 Элер К. Л. Г. (Ehler C. L. G., XVIII в.) 24, 53, 91  
 Эллис А. (Ellis A. J., 1814—1890) 324  
 Энгель В. (Engel W., p. 1928) 3, 14  
 Энгессер Ф. (Engesser F., 1848—1931) 220, 228  
 Энестрём Г. (Eneström G., 1852—1923) 4, 65—67, 69, 70, 73, 78, 79, 124, 126, 128, 130, 133, 277, 287, 333, 334, 343, 344, 382  
 Энкель Г. (Enckell G., p. 1931) 409  
 Эпинус Ф. У. Т. (Aepinus F. U. T., 1724—1802) 34, 55, 82, 91  
 Эратосфен (ок. 276—194 до н.э.) 136  
 Эрман А. (Erman A., 1854—1937) 95  
 Эрман Г. А. (Erman G. A., 1806—1877) 95  
 Эрман Ж. П. (Erman J. P., 1735—1814) 95  
 Эрман П. (Erman P., 1764—1851) 95  
 Эрмит Ш. (Hermite Ch., 1822—1901) 137  
 Эхлиц Х. Ф. (Oechlitz Ch. F., p. 1723) 91
- Юденич Н. Н. (1862—1933) 495, 505  
 Юнг Т. (Young Th., 1773—1829) 178, 300  
 Юшкевич А. П. (p. 1906) 3, 4, 15, 56, 58, 59, 80, 81, 89, 101, 103, 125, 128, 131, 138, 152, 178, 179, 276, 277, 285, 293, 332, 343, 344
- Яблонски Д. Э. (Jablonski D. E., 1660—1741) 85  
 Якоби Б. С., или М. Г. (Jacobi M. H. von, 1801—1874) 61  
 Якоби К. Г. Я. (Jacobi C. G. J., 1804—1851) 61, 62, 71, 78, 90, 123, 128, 148, 152, 161, 162, 165, 180, 188, 190, 191, 194, 195, 201, 202, 206, 207, 249  
 Якоби Э. Р. (Jacobi E. R.) 332  
 Яковенко М. Г. 227  
 Якубовский Б. В. 320  
 Ясинский Ф. С. (1856—1899) 217, 227  
 Яссер Дж. (Yasser J., p. 1893) 340, 344

# СОДЕРЖАНИЕ

---

ОТ РЕДАКЦИИ . . . . .	3
ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ РЕЧИ НА ОТКРЫТИИ СИМПОЗИУМА «РАЗВИТИЕ ИДЕЙ Л. ЭЙЛЕРА В СОВРЕМЕННУЮ ЭПОХУ» 24 октября 1983 г. . . . .	5
<i>А. П. Юшкевич</i> ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР. ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО . . . . .	15
<i>Ю. Х. Копелевич</i> ЭЙЛЕР — ЧЛЕН ПЕТЕРБУРГСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК, ДЕЙСТ- ВИТЕЛЬНЫЙ И ПОЧЕТНЫЙ . . . . .	47
<i>Е. П. Ожигова</i> ОБ УЧАСТИИ ПЕТЕРБУРГСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (АКАДЕМИИ НАУК СССР) В ИЗДАНИИ ТРУДОВ Л. ЭЙЛЕРА . . . . .	60
<i>К. Грау</i> ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР И БЕРЛИНСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК . . . . .	81
<i>К. Р. Бирман</i> БЫЛ ЛИ ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР ИЗГНАН ИЗ БЕРЛИНА И. Г. ЛАМБЕР- ТОМ? . . . . .	93
<i>Э. Кноблех</i> МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАПИСНЫЕ КНИЖКИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА . . . . .	102
<i>Г. П. Матвиевская</i> О РУКОПИСНОМ НАСЛЕДИИ И ЗАПИСНЫХ КНИЖКАХ ЭЙЛЕРА . . . . .	122
<i>Г. П. Матвиевская, Е. П. Ожигова</i> РУКОПИСНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ . . . . .	130
<i>И. Г. Башмакова</i> ВКЛАД ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА В АЛГЕБРУ . . . . .	139
<i>Т. А. Лауриненко</i> ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ В РАБОТАХ Л. ЭЙЛЕРА . . . . .	153
<i>Г. К. Михайлов, Л. И. Седов</i> ОСНОВЫ МЕХАНИКИ И ГИДРОДИНАМИКА В ТРУДАХ Л. ЭЙЛЕРА . . . . .	166
<i>В. В. Румянцев</i> ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ . . . . .	180
<i>Н. В. Баничук, А. Ю. Ишлинский</i> ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР И МЕХАНИКА УПРУГИХ СИСТЕМ . . . . .	208
<i>Н. Н. Поляхов</i> ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЙЛЕРА ПО МЕХАНИКЕ ПЕРВОГО ПЕТЕРБУРГ- СКОГО ПЕРИОДА . . . . .	223

<i>А. П. Мандрька</i> ЗНАЧЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА ПО БАЛЛИСТИКЕ . . . . .	233
<i>В. К. Абалякин, Е. А. Гребеников</i> ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР И РАЗВИТИЕ АСТРОНОМИИ В РОССИИ . . .	237
<i>Н. И. Невская, К. В. Холшевников</i> ЭЙЛЕР И РАЗВИТИЕ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ . . . . .	254
<i>Н. И. Невская</i> НОВЫЕ ДАННЫЕ О СТАНОВЛЕНИИ Л. ЭЙЛЕРА КАК АСТРОНОМА И ИСТОРИКА НАУКИ . . . . .	259
<i>А. П. Юшкевич, Р. Татон</i> ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР В ПЕРЕПИСКЕ С А. К. КЛЕРО, Ж. ДАЛАМБЕРОМ И Ж. Л. ЛАГРАНЖЕМ . . . . .	277
<i>А. Т. Григорьян, В. С. Кирсанов</i> «ПИСЬМА К НЕМЕЦКОЙ ПРИНЦЕССЕ» И ФИЗИКА ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА . . . . .	294
<i>Н. М. Раскин</i> ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР И И. П. КУЛИБИН . . . . .	304
<i>Е. В. Герцман</i> ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР И ИСТОРИЯ ОДНОЙ МУЗЫКАЛЬНО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИДЕИ . . . . .	321
<i>С. С. Церлюк-Аскадская</i> МУЗЫКАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РУКОПИСИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА И СТАНОВЛЕНИЕ ЕГО КОНЦЕПЦИИ ТЕОРИИ МУЗЫКИ .	333
<i>Г. Б. Андреева, М. П. Виктурина</i> НЕИЗВЕСТНЫЙ ПОРТРЕТ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА КИСТИ И. Ф. ДАРБЕСА . . . . .	345
ПОХВАЛЬНАЯ РЕЧЬ ПОКОЙНОМУ ЛЕОНГАРДУ ЭЙЛЕРУ, СОЧИНЕННАЯ НА ФРАНЦУЗСКОМ ЯЗЫКЕ И ЧИТАННАЯ В СОБРАНИИ АКАДЕМИИ ОКТЯБРЯ 23 ДНЯ НИКОЛАЕМ ФУСОМ . . . . .	353
<i>Э. Н. Амбургер, И. Р. Геккер, Г. К. Михайлов</i> РОДОСЛОВНАЯ РОСПИСЬ ПОТОМКОВ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА . .	383
<i>И. Р. Геккер, А. А. Эйлер</i> СЕМЬЯ И ПОТОМКИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА . . . . .	468
<i>М. В. Шестакова</i> ПОТОМКИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА ПО ЛИНИИ ЕГО СЫНА КАРЛА .	498
УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН . . . . .	506

Научное издание

---

РАЗВИТИЕ  
ИДЕЙ  
ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА  
И СОВРЕМЕННАЯ  
НАУКА

---

Сборник статей

Утверждено к печати  
Институтом истории естествознания и техники  
Академии наук СССР

Редактор издательства  
Н. Н. Лезнова

Художник  
Ф. Н. Буданов

Художественный редактор  
М. Л. Храмцов

Технический редактор  
Л. Н. Золотухина

Корректор  
Р. З. Землянская

ИБ № 37280

Сдано в набор 14.07.87  
Подписано к печати 09.02.88  
Т-00234. Формат 70×100<sup>1/16</sup>  
Бумага типографская № 1  
Гарнитура обыкновенная. Печать высокая  
Усл. печ. л. 42,08. Усл. кр. отт. 42,54. Уч.-изд. л. 44,2  
Тираж 1700 экз. Тип. зак. 958  
Цена 5 р. 40 к.

Ордена Трудового Красного Знамени  
издательство «Наука»  
117864, ГСП-7, Москва, В-485,  
Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»  
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ  
«НАУКА»  
ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ:

*МИХАЙЛОВ Г. К., ЮШКЕВИЧ А. П.*

**ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР**  
(1707—1783)

20 л. 1 р. 10 к.

Книга посвящена научной биографии выдающегося математика, механика и физика Леонарда Эйлера, действительного члена Петербургской академии наук, члена Берлинской академии наук, Лондонского королевского и многих других научных обществ и академий мира. Около 850 его книг и статей посвящены математике, механике, теории упругости, математической физике, оптике, теории музыки, теории машин, баллистике, морской науке.

Издание рассчитано на широкий круг читателей, интересующихся развитием отечественной и мировой науки.

---

Для получения книг почтой заказы просим направлять по одному из адресов: 117192 Москва, Мичуринский проспект, 12, магазин «Книга — почтой» Центральной конторы «Академкнига»; 197345 Ленинград, Петрозаводская ул., 7, магазин «Книга — почтой» Северо-Западной конторы «Академкнига» или в ближайший магазин «Академкнига», имеющий отдел «Книга — почтой».

480091 **Алма-Ата**, 91, ул. Фурманова, 91/97;  
370005 **Баку**, 5, Коммунистическая ул., 51;  
690088 **Владивосток**, Океанский проспект, 140;  
320093 **Днепропетровск**, проспект Ю. Гагарина, 24;  
734001 **Душанбе**, проспект Ленина, 95;  
664033 **Иркутск**, ул. Лермонтова, 289;  
252030 **Киев**, ул. Пирогова, 4;  
277012 **Кишинев**, проспект Ленина, 148,  
343900 **Краматорск**, Донецкой области, ул. Марата, 1;  
443002 **Куйбышев**, проспект Ленина, 2;  
220012 **Минск**, Ленинский проспект, 72;  
630090 **Новосибирск**, Академгородок, Морской проспект, 22,  
620151 **Свердловск**, ул. Мамина-Сибиряка, 137;  
700185 **Ташкент**, ул. Дружбы народов, 6;  
450059 **Уфа**, 59, ул. Р. Зорге, 10;  
720000 **Фрунзе**, бульвар Дзержинского, 42;  
310078 **Харьков**, ул. Чернышевского, 87.

25662

3, 5, 28, 906



35  
DATE  
—



35  
P. 170

# Развитие идей ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА и современная наука

Леонард Эйлер — один из величайших математиков и механиков всех времен был на протяжении свыше полувека неразрывно связан с Петербургской академией наук. Как сказал академик С.И. Вавилов, "вместе с Петром I и Ломоносовым Эйлер стал добрым гением нашей Академии, определившим ее славу, ее крепость, ее продуктивность".

